Kapitola 6

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

Riemannův – Stieltjesův integrál má široké uplatnění všude, kde je možno omezit se na situace, kdy integrand a integrátor nemají společné body nespojitosti (nebo, v případě (σ) RS – integrálu, neexistují body, ve kterých by obě funkce měly nespojitost na stejné straně). Pro některé aplikace (např. v teorii hysterese a z ní pocházejících variačních nerovnostech, viz [2], [24] a [25]) je však žádoucí mít k dispozici integrál Stieltjesova typu, který si nevynucuje žádná omezení na spojitost integrovaných a integrujících funkcí. Ukazuje se, že integrál, který této potřebě nejlépe vyhovuje je integrál, který budeme nazývat Kurzweilův – Stieltjesův. Jeho výhodnost nespočívá jen v jeho obecnosti, ale též i v relativní jednoduchosti jeho definice i odvození jeho vlastností. Navzdory těmto přednostem mu v monografické literatuře nebylo doposud věnováno tolik pozornosti jakou by si zasloužil. Pokud je mi známo, stručné pojednání o tomto integrálu lze najít v kapitole 24 Schechterovy monografie [41] z roku 1997 (tam je nazýván Henstockův – Stieltjesův integrál). Podrobněji se tímto integrálem zabývá McLeodova monografie [34] z roku 1980, kde je nazýván *gauge integral* ("gauge"="kalibr"). Jaroslav Kurzweil použil tento integrál již v roce 1958 (viz [29]) jako speciální případ zobecněného nelineárního integrálu, který definoval ve své fundamentální práci [28] z roku 1957, při vyšetřování spojité závislosti řešení nelineárních diferenciálních rovnic obsahujících Diracovu distribuci. Během sedmdesátých let minulého století byl již termín Kurzweilův – Stieltjesův integrál (nebo Perronův – Stieljesův integrál podle Kurzweilovy definice) běžně používán v pracích zabývajících se zobecněnými lineárními diferenciálními rovnicemi (viz např. [45] nebo [53] a práce tam citované).

Cílem této kapitoly je předložit co nejucelenější teorii Kurzweilova – Stieltjesova integrálu.

6.1 Definice a základní vlastnosti

6.1. Definice. Každá kladná funkce $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ se nazývá *kalibr* na intervalu $[a,b]$. Množinu kalibrů na $[a,b]$ značíme $\mathscr{G}[a,b]$.

Je-li δ kalibr na $[a,b]$, řekneme, že značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ je

δ – *jemné*, jestliže platí

$$[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\,.$$

$\mathscr{A}(\delta; [a,b])$ značí množinu všech δ – jemných značených dělení intervalu $[a,b]$. Nehrozí-li nedorozumění, používáme kratší značení $\mathscr{A}(\delta)$.

Mějme funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}\,[a,b]$. Potom definujeme jako v kapitole 5 integrální součet

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\,\big(= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a,b])\big) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\,.$$

6.2. Definice (KURZWEIL)**.** Nechť $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův – Stieltjesův integrál* (KS – integrál) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$ a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b] : \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big) \implies \Big|I - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| < \varepsilon\,. \qquad (6.1)$$

Jestliže $g(x) \equiv x$, pak místo o KS – integrálu mluvíme o KH – integrálu (Kurzweilův – Henstockův integrál) a značíme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ resp. $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$.

Budeme využívat též zkrácené značení

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,.$$

Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, klademe $\displaystyle\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g = -\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Dále, $\displaystyle\int_a^a f\,\mathrm{d}\,g = 0$.

Tato definice je korektní díky následujícím dvěma lemmatům.

6.3. Lemma (COUSIN)**.** *Pro každý kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *je množina* $\mathscr{A}(\delta)$ *všech* δ – *jemných značených dělení intervalu* $[a,b]$ *neprázdná.*

D ů k a z . Mějme kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$ pro něž je množina $\mathscr{A}(\delta; [a,c])$ neprázdná.

Nechť $c = \min\{a + \delta(a), b\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \{a, c\}$ a $\boldsymbol{\xi} = (a)$. Protože je $\delta(a) > 0$, máme $c \in (a,b]$ a $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a,c])$, tj. $c \in M$. Množina M je tedy neprázdná a proto $d = \sup M > -\infty$.

Ukážeme dále, že d leží v množině $M.$ Protože je $\delta(d)>0,$ plyne z definice suprema, že existuje $c\in(d-\delta(d),d]\cap M.$ Tudíž existuje také δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c].$ Nechť $c<d.$ (V opačném případě je triviálně $d=c\in M.$) Položme $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\{d\}$ a $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}',d).$ Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,d]$ a protože je $[c,d]\in(d-\delta(d),d+\delta(d)),$ znamená to také, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,d]),$ tj. $d\in M.$

Je-li $d=b,$ jsme s důkazem hotovi. Předpokládejme, že je $d<b.$ Zvolme libovolně $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[a,d]$ a $\gamma\in(d,d+\delta(d))\cap(d,b).$ (Takové γ existuje, protože je $\delta(d)>0.$) Máme tedy $[d,\gamma]\subset(d-\delta(d),d+\delta(d))$ a proto $\big((\boldsymbol{\sigma}''\cup\{\gamma\}),(\boldsymbol{\xi}'',d)\big)$ je δ–jemné značené dělení intervalu $[a,\gamma],$ tj. $\gamma\in M.$ Protože je $\gamma>d$ dostáváme tak spor s definicí $d=\sup M.$ Platí tedy $d=\sup M=b$ a důkaz lemmatu je dokončen. □

6.4. Lemma. *Hodnota integrálu* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *je podmínkou* (6.1) *určena jednoznačně.*

D ů k a z . Předpokládejme, že existují $I_1,I_2\in\mathbb{R},$ $I_1\neq I_2,$ takové, že platí (6.1), kam dosadíme $I=I_i,$ $i=1,2.$ Položme $\widetilde{\varepsilon}=\frac{1}{2}(I_1-I_2).$ Pak existují kalibry δ_1 a δ_2 tak, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_1|<\widetilde{\varepsilon}\ \text{pro každé}\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_1), \tag{6.2}$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_2|<\widetilde{\varepsilon}\ \text{pro každé}\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_2) \tag{6.3}$$

Položme $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ pro $x\in[a,b].$ Potom je zřejmě δ také kalibr a platí $\mathscr{A}(\delta)\subset\mathscr{A}(\delta_1)\cap\mathscr{A}(\delta_2).$ To znamená, že platí současně (6.2) i (6.3). Tudíž

$$\begin{aligned}2\,\widetilde{\varepsilon}&=|I_1-I_2|=|I_1-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})+S(D(\xi)-I_2|\\&\le|I_1-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_2|<2\,\widetilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Protože toto není možné, musí být $I_1=I_2.$ □

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS – integrálu.

6.5. Poznámka. Nechť $\delta,\delta_0\in\mathscr{G}[a,b]$ a $\delta\le\delta_0$ na $[a,b].$ Potom je $\mathscr{A}(\delta)\subset\mathscr{A}(\delta_0).$ Je-li tedy splněna nějaká podmínka pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0),$ tím spíše je splněna i pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta).$ Tudíž, máme-li dán kalibr $\delta_0\in\mathscr{G}[a,b],$ můžeme se v definici 6.2 omezit na kalibry $\delta_\varepsilon,$ pro které je $\delta_\varepsilon\le\delta_0$ na $[a,b].$

Také pro existenci KS – integrálu platí podmínka Bolzanova – Cauchyova typu.

6.6. Věta (BOLZANOVA – CAUCHYOVA PODMÍNKA). *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\\ &\qquad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon\,.\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

D ů k a z. a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I\in\mathbb{R}$, pak, podle definice 6.2, pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že je $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),\ (\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|+|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I|<\varepsilon\,,$$

tj. platí (6.4).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka (6.4). Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle ((6.4)) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon/2$ platilo pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),\ (\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$.

Označme M množinu reálných čísel m pro něž existuje kalibr $\delta_m\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že nerovnost $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\ge m$ je splněna pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_m)$.

Dokážeme, množina M je neprázdná, shora ohraničená a $\sup M=\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Zafixujme $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Podle (6.4) platí

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2}<S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon).\tag{6.5}$$

To znamená, že $(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2})\subset M$ a tedy $M\ne\emptyset$.

Pro každé $m\in M$ a $x\in[a,b]$ definujme $\widetilde{\delta}_m(x)=\min\{\delta_m(x),\delta_\varepsilon(x)\}$ Potom pro každé $m\in M$ a každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)\subset\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí nerovnosti

$$m\le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad\text{tj. } M\subset(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2})\,.$$

Množina M je tedy shora ohraničená a

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2}\le\sup M\le S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud podle ((6.5)) odvodíme konečně, že platí

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\sup M|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})|+|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\sup M|<\varepsilon$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, tj. $\sup M=\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

$\square$

6.7. Poznámka. Podobně jako v případě RS – integrálů (viz cvičení 5.14) můžeme podmínku (6.4) zeslabit následujícím způsobem

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:$$
$$\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon),\ \boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon\,.$$

KS – integrál má obvyklé lineární vlastnosti :

6.8. Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existují integrály*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1\ \ a\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2\,.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}\,g=c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g+c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\,,$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1\,g_1+c_2\,g_2]=c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1+c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2\,.$$

D ů k a z . Ukažme si např. důkaz prvního tvrzení.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle předpokladu existují kalibry $\delta_1\in\mathscr{G}[a,b]$ a $\delta_2\in\mathscr{G}[a,b]$ takové, že platí

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_i)\implies\Big|S_{f_i\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})]-\int_a^b f_i\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\quad\text{pro}\ \ i=1,2\,.$$

Pro $x\in[a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Označme $h=c_1\,f_1+c_2\,f_2$. Protože pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})&=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}(c_1\,f_1(\xi_j)+c_2\,f_2(\xi_j))\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\&=c_1\,S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})+c_2\,S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\,,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}&\Big|S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g-c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\Big|\\&\qquad\le|c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g\Big|+|c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g\Big|\\&\qquad<(|c_1|+|c_2|)\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Odtud už naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

6.9. Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$.

D ů k a z je analogický důkazu věty 5.15 a lze ho přenechat čtenáři jako cvičení. □

6.10. Cvičení. Dokažte druhé tvrzení věty 6.8 a větu 6.9.

6.11. Věta. *Nechť* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $c\in[a,b]$. *Integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy, když existují oba integrály* $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ *a* $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$. *V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^c f\,\mathrm{d}g + \int_c^b f\,\mathrm{d}g\,.$$

D ů k a z. a) Existuje-li integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak podle věty 6.9 existují také oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g = I_1 \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}g = I_2\,.$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,c]$ a $\delta''_\varepsilon\in\mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna značená δ'_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c]$ a všechna δ''_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$ intervalu $[c,b]$ platilo

$$|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I_1|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-I_2|<\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.6}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\min\left\{\delta'_\varepsilon(x),\frac{1}{4}(c-x)\right\} & \text{když } x\in[a,c)\,,\\ \min\{\delta'_\varepsilon(c),\delta''_\varepsilon(c)\} & \text{když } x=c\,,\\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x),\frac{1}{4}(x-c)\right\} & \text{když } x\in(c,b]\,.\end{cases}$$

Potom,

$$x+\delta_\varepsilon(x) \le x+\frac{1}{4}(c-x) < c \quad \text{je-li } x<c\,,$$

a

$$x-\delta_\varepsilon(x) \ge x-\frac{1}{4}(c-x) > c \quad \text{je-li } x>c\,.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže platit $c \in [x-\delta_\varepsilon(x), x+\delta_\varepsilon(x)]$. Pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ musí tudíž existovat index $k \in \{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ takový, že $\xi_k = c$. Navíc, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\sigma_{k-1} < \sigma_k = \xi_k = c = \xi_{k+1} < \sigma_{k+1}\,.$$

(Kdyby bylo $\sigma_{k-1} < c = \xi_k < \sigma_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\sigma_k)-g(\sigma_{k-1})] = f(c)\,[g(\sigma_k)-g(c)] + f(c)\,[g(c)-g(\sigma_{k-1})]\,.)$$

Existují tedy $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}\,[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}\,[c,b]$ takové, že

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'',\ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')\,,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon;[a,c]),$$

$$(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon;[c,b])$$

a

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\,.$$

Vezmeme-li v úvahu také ((6.6)), vidíme, že platí

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - (I_1+I_2)| &= |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - (I_1+I_2)| \\ &\le |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - I_1| + |S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - I_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ neboli $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I_1+I_2$. □

6.12. Poznámka. Jestliže existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, pak existuje také KS–integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$, pak pro každé

$\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že $|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon$ platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon$. Potom $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon$, je kalibr s vlastnostmi zaručujícími rovnost $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$.

Na druhou stranu, jestliže existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$, přičemž pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a, b]\} > 0$ a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)\,,$$

pak také $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$. Položíme-li totiž $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a, b]\}$, bude platit

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}([a, b]) \quad \text{takové, že } |\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon\,.$$

Následující věta popisuje vztah (σ) RS – integrálu a KS – integrálu.

6.13. Věta. *Jestliže existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, *pak existuje také* KS – *integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a platí* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.

D ů k a z. Označme $I = (\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a, b]$ je dělení intervalu $[a, b]$, vyhovující definici (σ) RS – integrálu. Označme jeho body tak, že bude $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ a definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\, \min\{|x - s_j| : j = 0, 1, \ldots, m\} & \text{když } x \notin \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\,, \\[2ex] 1 & \text{když } x \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Budiž $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε – jemné dělení intervalu $[a, b]$. Analogickými úvahami jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že musí být

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}\,. \tag{6.7}$$

Dále,

$$\left.\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[f(\xi_j)\, [g(\sigma_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\, [g(\xi_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big] \\ &= S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma_0, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})})$. (Stane-li se, že pro nějaké k je $\sigma_{k-1} = \xi_k$ nebo $\xi_k = \sigma_k$, je třeba takové intervaly $[\sigma_{k-1}, \xi_k]$ nebo $[\xi_k, \sigma_k]$ a příslušné značky v $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ vynechat.)

Podle ((6.7)) je $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\} \subset \boldsymbol{\sigma}'$. Vzhledem k nerovnosti (6.8) odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| = |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I| < \varepsilon$$

a podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$. □

6.14. Příklady. Všimněme si některých specifických vlastností KH – integrálu. KH – integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(i) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus W$, kde W je spočetná podmnožina $[a,b]$, $W = \{w_k\}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \notin W\,, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(w_k)|)} & \text{když } x = w_k \in W\,. \end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in W}}^{m} f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}]\,.$$

Pro každé j takové, že $\xi_j = w_k \in W$ pro nějaké k musí podle definice kalibru δ_ε platit

$$\sigma_j - \sigma_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)}\,.$$

Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(w_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(w_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Nechť existuje Newtonův integrál (N)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a,b),\ \ F'(a+) = f(a),\ \ F'(b-) = f(b)\,. \quad (6.9)$$

Ukážeme, že pak je KH – integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ roven $F(b)-F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vzhledem k (6.9) a podle definice derivace pro každé $\xi\in[a,b]$ existuje $\delta_\varepsilon(\xi)>0$ takové, že platí

$$|F(x)-F(\xi)-f(\xi)(x-\xi)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$

$$\text{pro všechna } x\in[a,b]\cap(\xi-\delta_\varepsilon(\xi),\xi+\delta_\varepsilon(\xi))\,.$$

Buď $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε – jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom pro každé
$j\in\{1,2,\dots,m\}$ máme

$$\begin{aligned}
&\big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big|\\
&\quad\le\big|F(\sigma_j)-F(\xi_j)-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\xi_j]\big|\\
&\qquad\quad+\big|F(\xi_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\xi_j-\sigma_{j-1}]\big|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{b-a}\,(|\sigma_j-\xi_j|+|\xi_j-\sigma_{j-1}|)=\frac{\varepsilon}{b-a}\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
&\big|[F(b)-F(a)]-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big|\\
&\quad=\Big|\sum_{j=1}^m\big(F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{j=1}^m\big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1})\big|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{b-a}\,\sum_{j=1}^m[\sigma_j-\sigma_{j-1}]=\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\,.$$

6.2 Existence integrálu

V příkladech 6.14 jsme určili hodnoty některých KH – integrálů přímo z definice. Nyní si ukážeme, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit z definice i hodnotu KS – integrálu.

6.15. Příklady. (i) Z definice 6.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = f(a)\,[g(b) - g(a)] \;\text{ a }\; \int_a^b g \, \mathrm{d}\, f = 0$$

pro každou funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \chi_{(\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau \in [a,b)\,, \tag{6.10}$$

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \chi_{[\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau \in (a,b)\,, \tag{6.11}$$

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \chi_{[a,\tau]} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a,b)\,, \tag{6.12}$$

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \chi_{[a,\tau)} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau \in (a,b] \tag{6.13}$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \chi_{[\tau]} = \begin{cases} -f(a) & \text{když } \tau = a\,, \\ 0 & \text{když } \tau \in (a,b)\,, \\ f(b) & \text{když } \tau = b\,. \end{cases} \tag{6.14}$$

Ukažme si odvození vztahů (6.10) a (6.11). Všechny ostatní se z nich už odvodí použitím věty 6.11. Nechť $g(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je $g \equiv 0$ na $[a,\tau]$ a podle příkladu (i)

$$\int_a^\tau f \, \mathrm{d}\, g = 0\,.$$

Dále, nechť

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x = \tau\,, \\ \dfrac{1}{4}\,(x-\tau) & \text{když } x \in (\tau,b]\,. \end{cases}$$

Analogicky jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ musí být $\tau = \sigma_0 = \xi_1$, $g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1}) = 0$ pro $j = 2,3,\ldots,m$. Proto

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\sigma_1) - g(\tau)] = f(\tau) \;\text{ a }\; \int_\tau^b f \, \mathrm{d}\, g = f(\tau)\,.$$

Pomocí věty 6.11 nyní už dokončíme důkaz vztahu (6.10).

Vztah (6.11) se dokazuje podobně. Tentokrát ovšem máme $g(x)=\chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$, $\displaystyle\int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g=0$ a položíme

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & \text{když } x=\tau\,,\\ \dfrac{1}{4}\,(\tau-x) & \text{když } x\in[a,\tau)\,.\end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\sigma_m=\xi_m=\tau$ a tedy

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=f(\tau)\,[g(\tau)-g(\sigma_{m-1})]=f(\tau)\quad\text{a}\quad\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g=f(\tau)\,.$$

(iii) Pro libovolnou funkci g regulovanou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b\chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g=g(b)-g(\tau+)\quad\text{pro }\ \tau\in[a,b)\,,\tag{6.15}$$

$$\int_a^b\chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g=g(b)-g(\tau-)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b)\,,\tag{6.16}$$

$$\int_a^b\chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}\,g=g(\tau+)-g(a)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b)\,,\tag{6.17}$$

$$\int_a^b\chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}\,g=g(\tau-)-g(a)\quad\text{pro }\ \tau\in(a,b]\tag{6.18}$$

a

$$\int_a^b\chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}\,g=\begin{cases}g(a+)-g(a) & \text{když }\ \tau=a\,,\\ g(\tau+)-g(\tau-) & \text{když }\ \tau\in(a,b)\,,\\ g(b)-g(b-) & \text{když }\ \tau=b\,.\end{cases}\tag{6.19}$$

Opět se omezíme na důkaz prvních dvou vztahů. Nechť tedy $f(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g=0\,.$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme nyní $\eta>0$ tak, aby bylo $|g(\tau+)-g(x)|<\varepsilon$ pro každé

$x \in (\tau, \tau + \eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau\,, \\ \frac{1}{4}(x - \tau) & \text{když } x \in (\tau, b]\,. \end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])$ nyní musí být $\tau = \sigma_0 = \xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = \big|\, [g(b) - g(\sigma_{m-1})] + [g(\sigma_{m-1}) - g(\sigma_{m-2}] \\ &\qquad + \ldots + [g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] - [g(b) - g(\tau+)] \,\big| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\sigma_1)|\,. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \sigma_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b])\,.$$

Tudíž

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^\tau f \,\mathrm{d}\, g + \int_\tau^b f \,\mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau+)\,,$$

tj. platí (6.15).

Ve druhém případě, $f(x) = \chi_{[\tau,b]}(x)$ na $[a, b]$, máme

$$\int_\tau^b f \,\mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau)\,.$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta & \text{když } x = \tau\,, \\ \frac{1}{4}(\tau - x) & \text{když } x \in [a, \tau)\,. \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ musí být $\tau = \sigma_m = \xi_m$ a tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = [g(\tau) - g(\sigma_{m-1})],$$

kde $\sigma_{m-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předešlém případě odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \,\mathrm{d}\, g = g(\tau) - g(\tau-), \quad \text{tj.} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^\tau f \,\mathrm{d}\, g + \int_\tau^b f \,\mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau-).$$

Pokud jde o existenci integrálu, můžeme podle cvičení 2.32 (i) výše uvedené příklady shrnout do následujícího tvrzení.

6.16. Důsledek. *Jestliže* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f \in \mathbb{S}[a,b]$, *pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad a \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$$

existují.

Další věta poskytuje základní odhad pro integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ za předpokladu, že g má konečnou variaci na $[a,b]$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení neklademe. Pochopitelně, že reálný význam bude mít tvrzení věty pouze pro případ, že f je ohraničená na $[a,b]$.

6.17. Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \in \mathbb{R}$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g\,. \tag{6.20}$$

Jestliže, navíc i $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g] \in \mathbb{R}$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g] \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g\,. \tag{6.21}$$

D ů k a z plyne z toho, že nerovnosti

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,|g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\,g \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g$$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. □

Také další jednoduchý odhad integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ se opírá o definici KS – integrálu.

6.18. Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \in \mathbb{R}$. *Dále nechť existují kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *a funkce* $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neklesající na* $[a,b]$ *takové, že*

$$\left.\begin{aligned} &\tau \in [a,b] \quad a \quad t \in (\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau)) \cap [a,b] \\ &\quad\Longrightarrow\ |t-\tau|\,|f(\tau)|\,|g(t)-g(\tau)| \le (t-\tau)\big(u(t)-u(\tau)\big)\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

Potom

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le u(b)-u(a)\,. \tag{6.23}$$

D ů k a z . Pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme podle (6.22)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\big(|g(\sigma_j)-g(\xi_j)|+|g(\xi_j)-g(\sigma_{j-1})|\big) \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(u(\sigma_j)-u(\sigma_{j-1})\big) = u(b)-u(a)\,. \end{aligned}$$

Vzhledem k definici KS – integrálu plyne odtud nerovnost (6.23). □

6.19. Příklad. Ukážeme si jednu netriviální aplikaci věty 6.18.

Mějme funkci $h:[a,b]\to[0,\infty)$ neklesající a zleva spojitou na $(a,b]$. Dokážeme, že pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$\int_a^b h^k\,\mathrm{d}\,h \le \frac{h^{k+1}(b)-h^{k+1}(a)}{k+1}\,. \tag{6.24}$$

Nejprve proveďme elementární úpravu

$$\frac{h^{k+1}(t)-h^{k+1}(\tau)}{k+1} = \frac{(h(t)-h(\tau)}{k+1}\Big[\sum_{i=0}^{k} h^{k-i}(t)\,h^i(\tau)\Big] \tag{6.25}$$

a všimněme si toho, že za našich předpokladů je funkce h ohraničená na $[a,b]$. Jako další krok ukážeme, že ke každému $\varepsilon>0$ a každému $\tau\in(a,b]$ existuje $\delta(\tau)>0$ takové, že platí nerovnost

$$h^{k-i}(t)\,h^i(\tau) > h^k(\tau)-\varepsilon \tag{6.26}$$

pro $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$. Díky monotónnosti funkce h je snadné ověřit, že nerovnost (6.26) platí pro každé $t \in (\tau, b]$. Na druhou stranu, díky spojitosti funkce h zleva, ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $\tau \in (a, b]$ najdeme $\delta(\tau) > 0$ takové, aby platilo

$$0 \le h^{k-i}(\tau) - h^{k-i}(t) < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \quad \text{jakmile } t \in (\tau - \delta(\tau, \tau].$$

Odtud plyne, že pro $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau]$ platí

$$0 \le h^k(\tau) - h^{k-i}(t)\, h^i(\tau) = \big(h^{k-i}(\tau) - h^{k-i}(t)\big)\, h^i(\tau) < \frac{\varepsilon}{\|h\|}\, \|h\| = \varepsilon$$

a tedy také (6.26). Dosazením (6.26) do (6.25) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{h^{k+1}(t) - h^{k+1}(\tau)}{k+1} &> \frac{h(t) - h(\tau)}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \big(h^k(\tau) - \varepsilon\big)\\ &= \big(h(t) - h(\tau)\big)\, h^k(\tau) - \varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $t \in (\tau - \delta(\tau, \tau]$. Platí tedy (6.22), kde

$$f(t) = h^k(t), \ g(t) = h(t) \quad \text{a} \quad u(t) = \frac{h^{k+1}(t)}{k+1} \quad \text{pro } t \in [a, b]. \tag{6.27}$$

Podle věty 6.18 tedy platí nerovnost (6.23).

6.20. Cvičení. Dokažte tvrzení*:*

Nechť funkce $h\colon [a, b] \to [0, \infty)$ *je nerostoucí a zprava spojitá na* $[a, b)$. *Potom pro každé* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí*

$$\int_a^b h^k \,\mathrm{d}\, h \ge \frac{h^{k+1}(b) - h^{k+1}(a)}{k+1}\,.$$

Věta 6.17 nám umožní dokázat nejjednodušší větu o konvergenci integrálů.

6.21. Věta. *Nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a, b]$, $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ *a nechť posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a, b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\,, \tag{6.28}$$

přičemž existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{6.29}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, plyne z předpokladu (6.28), že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0 \,.$$

Podle věty 6.17 tedy máme

$$\left|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g\right| \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existují posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g = I \,. \tag{6.30}$$

b) Označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g && \text{pro } k \in \mathbb{N}\,, \\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\, (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b], \\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (6.28) a (6.30) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \;\text{ a }\; \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0 \,. \tag{6.32}$$

Potom bude také

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]\,.$$

Dále, nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0–jemná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| < \varepsilon \,. \tag{6.33}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ a $k \geq k_0$ máme podle (6.32)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f_{k_0}(\xi_j)\big)\big(g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big)\Big| \\ &< \|f_n - f\|\; V(g,\boldsymbol{\sigma}) \leq \varepsilon \operatorname{var}_a^b g \,. \end{aligned}$$

Tudíž, vzhledem k (6.32) a (6.33), dostáváme

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I| &\le |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|\\ &< \varepsilon\,(\operatorname{var}_a^b g+2)\end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$ a $k\ge k_0$ To znamená, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}\,g\,.$$

c) Konečně, opětným použitím věty 6.17 dostaneme

$$\left|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \le \|f_n-f\|\operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n\in\mathbb{N}\,.$$

Platí tedy i ((6.29)). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek.

6.22. Věta. *Nechť* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$. *Potom* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* (6.21).

D ů k a z . Podle věty 4.8 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle vět 6.8 a 6.17 integrál $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. To znamená, že podle věty 6.21 existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí ((6.29)).

Zřejmě $|f|\in\mathbb{G}[a,b]$. Existuje tedy také integrál $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\operatorname{var}_a^x g$ a podle věty 6.17 platí (6.21). □

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k větě 6.21.

6.23. Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{g_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(g_n-g)=0\,,$$

přičemž existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n$, $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál*

$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \,. \tag{6.34}$$

D ů k a z . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a) = g(a) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \,.$$

Dále je důkaz podobný důkazu věty 6.21. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n \le \operatorname{var}_a^b g + 1 \quad \text{pro všechna } n \ge n_0 \,.$$

Podle věty 6.17 tedy máme

$$\Big| \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_n \Big| \le \|f\| \, (\operatorname{var}_a^b g + 1) \quad \text{pro všechna } n \ge n_0$$

a podle Bolzanovy – Weierstraßovy věty tedy existují číslo $I \in \mathbb{R}$ a posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_{n_k} = I \,.$$

Podobně jako v (6.31) označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_{n_k} && \text{pro } k \in \mathbb{N}\,, \\ S_k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= S_{f \Delta g_{n_k}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b], \\ S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \,. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ a kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$|I_k - I| < \varepsilon, \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_k} - g) < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0$$

a

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})] - I_{k_0}| < \varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0) \,.$$

Potom pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ a $k \ge k_0$ máme

$$\begin{aligned} \big| S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \big| &= \Big| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f(\xi_j) \big) \big(g_{k_0}(\sigma_j) - g_{k_0}(\sigma_{j-1}) \big) \Big| \\ &< \|f\| \; V(g_{k_0} - g, \boldsymbol{\sigma}) \le \|f\| (\operatorname{var}_a^b \, (g_{k_0} - g)) < \varepsilon \, \|f\| \,. \end{aligned}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$ tedy máme

$$\begin{aligned}&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|\\ &\qquad\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|\\ &\qquad<\varepsilon\,(\|f\|+2)\,.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_{n_k}\,.$$

Konečně, opětným použitím věty 6.17, dostaneme

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\|f\|\operatorname{var}_a^b\,(g_n-g)\quad\text{pro každé } n\in\mathbb{N}\,.$$

Platí tedy (6.34). □

Předpokládejme, že funkce f regulovaná na $[a,b]$ a g má konečnou variaci na $[a,b]$. Podle věty 6.22 potom existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Pro aplikace potřebujeme ale dokázat, že tento integrál existuje i v symetrické situaci, tj. když $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. To bude nyní naším cílem.

Podle věty 2.36 můžeme funkci f rozložit na součet spojité funkce $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokové funkce $f^{\,\mathrm{B}}$. Podle věty 5.54 a věty 6.13 existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$. Vzpomeneme-li si na lemma 2.39, podle kterého existuje posloupnost jednoduchých skokových funkcí $\{f_n^{\mathrm{B}}\}\subset\mathbb{S}[a,b]$ taková, že platí $\lim\limits_{n\to\infty}\|f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=0$, nahlédneme tedy, že nám stačí dokázat konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,.$$

(Věta 6.21 a ani věta 6.23 takový výsledek nezahrnují.)

Následující věta poskytuje odhad symetrický k odhadu (6.20) z věty 6.17.

6.24. Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ jsou takové, že existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\big(|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f\big)\,\|g\|\,. \tag{6.36}$$

D ů k a z . Pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b]$, máme

$$\begin{aligned}S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)]+f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)]\\ &\qquad + \ldots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)\\ &\qquad -[f(\xi_1)-f(a)]\,g(a)-[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1)\\ &\qquad -\ldots-[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b)\\ &= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\sum_{j=0}^{m}[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\sigma_j)\,,\end{aligned}$$

kde $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$, $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le\Big(|f(a)|+|f(b)|+\sum_{j=0}^{m}|f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)|\Big)\,\|g\|$$

neboli

$$\left.\begin{aligned}&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le(|f(a)|+|f(b)|+\mathrm{var}_a^b f)\,\|g\|\,.\\ &\qquad\qquad \text{platí pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\,.\end{aligned}\right\}\quad(6.37)$$

Vzhledem k tomu, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ bylo libovolné značené dělení intervalu $[a,b]$, odtud už tvrzení (6.36) okamžitě plyne. □

Nyní dokážeme konvergenční tvrzení, které zaručí, že bude platit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,.$$

6.25. Lemma. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a nechť posloupnost $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ je taková, že*

$$\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g \ \textit{ existuje pro každé } n\in\mathbb{N} \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathbb{BV}}=0\,.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\,.$$

D ů k a z . Podle věty 6.24 je

$$\Big|\int_a^b (f_n - f_m)\,\mathrm{d}\,g\Big| \leq 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Posloupnost $\Big\{\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\Big\}$ je tedy cauchyovská a existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = I\,.$$

Ukážeme, že $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\Big|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon\,.$$

Dále, zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\Big|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,,$$

kde $S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S_{f_{n_0}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Podle (6.37) pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \\
&\quad \leq \Big(|f(a) - f_{n_0}(a)| + |f(b) - f_{n_0}(b)| + \operatorname{var}_a^b\,(f - f_{n_0})\Big)\,\|g\| \\
&\quad \leq 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|\,.
\end{aligned}$$

Souhrnem, pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| \\
&\quad \leq \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\Big| \\
&\qquad\qquad + \Big|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| \\
&\quad < 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\| + 2\,\varepsilon < \varepsilon\,2\,(\|g\| + 1)\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\,. \qquad \square$$

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existeční výsledek. V následujících tvrzeních a jejich důkazech používáme důsledně konvence z úmluv a označení a klademe $g(a-)=g(a),\ g(b+)=g(b)$, tj.

$$\Delta^- g(a)=\Delta^+ g(b)=0,\ \ \Delta g(a)=\Delta^+ g(a),\ \ \Delta g(b)=\Delta^- g(b)$$

pro každou funkci g regulovanou na $[a,b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $g(x-)$ resp. $g(x+)$ definované na $[a,b]$. Není těžké si rozmyslet, že např. pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x-)$ platí

$$h(x-)=h(x)=g(x),\quad h(x+)=g(x+)\quad \text{na } [a,b]\,.$$

Analogicky, pro $g\in\mathbb{G}[a,b]$ a $h(x)=g(x+)$ máme

$$h(x+)=h(x)=g(x),\quad h(x-)=g(x-)\quad \text{na } [a,b]\,.$$

6.26. Věta. *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}[a,b],\ g\in\mathbb{G}[a,b]$, *pak integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* (6.36).

D ů k a z . Nechť $g\in\mathbb{G}[a,b],\ f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a W je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Podle věty 2.19 je W nejvýše spočetná, tj. $W=\{w_k : k\in\mathbb{K}\}$, kde $\mathbb{K}=\{1,2,\dots,m\}$ pro nějaké $m\in\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{K}=\mathbb{N}$.

Nechť $f=f^{\mathrm{C}}+f^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část f^{C} a skokovou část f^{B} definovanou jako f_2 v (2.26). Položme

$$f_n^{\mathrm{B}}(x)=\sum_{k\in\mathbb{K}\cap[1,n]}\Delta^- f(w_k)\chi_{(w_k,b]}(x)+\sum_{k\in\mathbb{K}\cap[1,n]}\Delta^+ f(w_k)\chi_{[w_k,b]}(x)$$

pro $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$. Zřejmě $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a podle lemmatu 2.39 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}}-f^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}})=0\,.$$

Dále, podle důsledku 6.16 integrál $\displaystyle\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. Je-li tedy množina $\mathbb{K}$ konečná, existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ plyne triviálně. Není-li $\mathbb{K}$ konečná, pak integrál $\displaystyle\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existuje podle lemmatu 6.25.

Podle věty 5.54 a věty 6.13 existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f^{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$. Existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ tedy již plyne z věty 6.8. Konečně, podle věty 6.24 platí také (6.36). □

Přímým důsledkem věty 6.26 je následující konvergenční tvrzení.

6.27. Důsledek. *Jestliže* $g_n \in \mathbb{G}[a,b]$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$, *pak pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\,. \tag{6.38}$$

□

Následující tvrzení navazuje na důkaz věty 6.26 a dává návod k výpočtu integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, je-li známa hodnota integrálu $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}} \,\mathrm{d}\, g$, kde $f^{\,\mathrm{C}}$ značí spojitou část funkce f.

6.28. Důsledek. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, W *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v* $[a,b]$ *a* $f^{\,\mathrm{C}}$ *je spojitá část funkce* f, $f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$, *pak*

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^b f^{\,\mathrm{C}} \,\mathrm{d}\, g \\ &\qquad + \sum_{w \in W} \big[\Delta^- f(w)\,(g(b) - g(w-)) + \Delta^+ f(w)\,(g(b) - g(w+))\big]\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

D ů k a z . Jako v důkazu věty 6.26 je $W = \{w_k : k \in \mathbb{K}\}$, kde $\mathbb{K} = \{1, 2, \ldots, m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{N}$. Nechť

$$f_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{K} \cap [1,n]} \big[\Delta^- f(w_k)\,\chi_{(w_k,b]}(x) + \Delta^+ f(w_k)\,\chi_{[w_k,b]}(x)\big]$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a,b]$. Podle lemmatu 2.39 platí

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n^{\mathrm{B}} - f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) = 0\,.$$

Dále, podle (6.16), (6.17) a věty 6.8, máme

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f_n^{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}\, g \\ &\quad = \sum_{k \in \mathbb{K} \cap [1,n]} \Big(\Delta^- f(w_k)\,[g(b) - g(w_k-)] + \Delta^+ f(w_k)\,[g(b) - g(w_k+)]\Big) \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Je-li $\mathbb{K}$ konečná, plyne odtud okamžitě, že platí (6.39).

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{N}$, pak podle lemmatu 6.25 platí

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{6.41}$$

Podle důsledku 2.25 je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta^- f(w_k)\,(g(b)-g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)\,(g(b)-g(w_k+))\right|$$
$$\le 2\,\|g\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^- f(w_k)| + |\Delta^+ f(w_k)|\Big) \le 2\,\|g\|\,(\mathrm{var}_a^b f) < \infty\,.$$

Vzhledem k (6.40) a (6.41) tudíž dostáváme

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^- f(w_k)(g(b)-g(w_k-)) + \Delta^+ f(w_k)(g(b)-g(w_k+))\Big)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

Platí tedy (6.39). □

V situaci symetrické k důsledku 6.28 máme

6.29. Lemma. *Jestliže* $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, W *je množina bodů nespojitosti funkce* g *v* $[a,b]$ *a* g^{C} *je spojitá část funkce* g, $g^{\mathrm{C}}(a) = g(a)$, *pak*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{C}} + \sum_{w\in W} f(w)\,\Delta g(w)\,, \tag{6.43}$$

kde $\Delta\,g(a) = \Delta^+\,g(a)$ *a* $\Delta\,g(b) = \Delta^-\,g(b)$.

D ů k a z je analogický důkazu důsledku 6.28 je ponechán čtenáři jako cvičení. □

6.30. Cvičení. Dokažte lemma 6.29. (Návod: využijte lemma 2.39 a větu 6.21 a postupujte jako při důkazu důsledku 6.28.)

6.3 Integrace per-partes

Pro důkazy důsledku 6.28 a lemmatu 6.29 byly užitečné příklady 6.15. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz věty o integraci per-partes, která je naším dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou Příklady 6.14 využity.

6.31. Lemma. *Nechť* $h \in \mathbb{G}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ *a* $W \subset [a,b]$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí*

$$h(x) = c \quad \textit{pro} \;\; x \in [a,b] \setminus W\,. \tag{6.44}$$

Potom

$$\int_a^b h \,\mathrm{d}\, g = c\,[g(b) - g(a)\,] + \sum_{w \in W} [h(w) - c]\,\Delta g(w) \tag{6.45}$$

platí pro každou funkci $g \in \mathbb{G}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $g \in \mathbb{G}[a,b]$. Protože $h \in \mathbb{G}[a,b]$, máme podle (6.44)

$$h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c \quad \text{pro každé } x \in (a,b)\,.$$

Funkce $h^{\mathrm{C}}(x) \equiv c$ je tedy spojitá část funkce h, $h^{\mathrm{B}} = h - h^{\mathrm{C}}$ a

$$\Delta^- h(x) = h(x) - c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } \; x \in (a,b)\,.$$

Podle ((6.39)) (kde $f = h$) tedy máme

$$\begin{aligned} \int_a^b h \,\mathrm{d}\, g &= \int_a^b c \,\mathrm{d}\, g + \sum_{w \in W} (h(w) - c)\,[g(b) - g(w-) - g(b) + g(w+)\,] \\ &= c\,[g(b) - g(a)\,] + \sum_{w \in W} [h(w) - c]\,\Delta g(w)\,, \end{aligned}$$

tj. platí (6.45). (Připomeňme znovu, že $\Delta g(a) = \Delta^+ g(a)$ a $\Delta g(b) = \Delta^- g(b)$.) □

6.32. Cvičení. Pomocí lemmatu 6.31 dokažte, že je-li $\tau \in (a,b)$ a

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } \; t < \tau\,, \\ \varkappa \in [0,1] & \text{když } \; t = \tau\,, \\ 1 & \text{když } \; t > \tau\,, \end{cases}$$

pak $\displaystyle\int_a^b \varphi\, h \,\mathrm{d}\, h = \varphi(\tau)\,\varkappa$ pro libovolnou funkci φ regulovanou na φ.

6.33. Lemma. *Nechť* $h \in G[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ *a* $W \subset [a,b]$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí* (6.44). *Potom*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c\,] \tag{6.46}$$

platí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . a) Funkce h splňuje (6.44) právě tehdy, když existuje množina $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ taková, že $W = \{w_k \in [a,b] : k \in \mathbb{K}\}$ a

$$h(x) = c + \sum_{k \in \mathbb{K}} (h(w_k) - c)\, \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $\mathbb{K}_n = \mathbb{K} \cap [1,n]$, $W_n = \{w_k : k \in \mathbb{K}_n\}$ a

$$h_n(x) = c + \sum_{k \in \mathbb{K}_n} (h(w_k) - c)\, \chi_{[w_k]}(x) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b]\,.$$

Dokážeme, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n - h\| = 0\,. \tag{6.47}$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$|h(w_k) - c| < \varepsilon \quad \text{pro každé } k > n_0\,. \tag{6.48}$$

Takové n_0 existuje, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|h(w_k) - c| = \begin{cases} |\Delta^- h(w_k)| & \text{když } w_k \in (a,b)\,, \\ |\Delta^+ h(a)| & \text{když } w_k = a\,, \\ |\Delta^- h(b)| & \text{když } w_k = b \end{cases}$$

a množina těch $k \in \mathbb{N}$, pro něž $|h(w_k) - c| \ge \varepsilon$, může mít podle důsledku 4.9 (ii) jenom nejvýše konečný počet (n_0) prvků. Tudíž,

$$|h_n(x) - h(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |c - h(x)| & \text{když } x \in W_n\,, \\ 0 & \text{když } x \in [a,b] \setminus W_n \end{array} \right\} < \varepsilon$$

pro $n \ge n_0$ a $x \in [a,b]$. Platí tedy (6.47).

b) Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podle příkladu 6.15 (i), věty 6.8 a formule (6.14) dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, h_n &= \sum_{k \in \mathbb{K}_n} (h(w_k) - c) \int_a^b f \,\mathrm{d}\, \chi_{[w_k]} \\ &= f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c]\,. \end{aligned}$$

Podle (6.47) a podle důsledku 6.27 tedy máme

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, h_n = f(b)\,[h(b) - c] - f(a)\,[h(a) - c]\,. \qquad \square$$

6.34. Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES).

Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \ \ \textit{a} \ \int_a^b g \, \mathrm{d}\, f$$

a platí

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g + \int_a^b g \, \mathrm{d}\, f &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) \\ &\quad + \sum_{x \in [a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x) \Big) . \end{aligned}\right\} \qquad (6.49)$$

D ů k a z. Integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ existuje podle věty 6.22 a integrál $\int_a^b g \, \mathrm{d}\, f$ existuje podle věty 6.26. Dále,

$$\begin{aligned} &\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g + \int_a^b g \, \mathrm{d}\, f \\ &\quad = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, [g(x) + \Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, [f(x) - \Delta^- f(x)] \\ &\qquad\qquad - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, [\Delta^+ g(x)] + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, [\Delta^- f(x)] . \end{aligned}$$

Není obtížné ověřit, že funkce $h(x) = \Delta^+ g(x)$ splňuje (6.44) s $c = 0$ a $h(b) = 0$. Dále, $\Delta h(x) = 0$ pro $x \in (a,b)$. Podle lemmatu 6.33 tedy máme

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, [\Delta^+ g(x)] = -f(a)\, \Delta^+ g(a) .$$

Analogicky,

$$\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, [\Delta^- f(x)] = g(b)\, \Delta^- f(b) ,$$

čili

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, g(x) + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, f(x) \\ &\quad = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, g(x+) + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, f(x-) \\ &\qquad\qquad + f(a)\, \Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\, g(b) . \end{aligned}\right\} \qquad (6.50)$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+) = \int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) + \int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+)\,. \tag{6.51}$$

Pro funkci $h(x)=g(x+)$ máme $h(x+)=h(x)=g(x+)$ a $h(x-)=g(x-)$ na $[a,b]$, tj. $\Delta h(x)=\Delta g(x)$ na $[a,b]$. Podle lemmatu 6.31 tedy platí

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}\,g(x+) = \sum_{x\in[a,b]} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x)\,. \tag{6.52}$$

Analogicky,

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,f(x-) &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}\,f(x-)\\ &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) - \sum_{x\in[a,b]} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

Funkce $f(x-)$ je spojitá zleva na $(a,b]$, $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle vět 5.54 a 6.13 tedy existují oba integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-)$$

a podle věty 5.49 platí

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}\,g(x+) + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}\,f(x-) = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+)\,. \tag{6.54}$$

Dosazením (6.51)–(6.54) do (6.50) dostaneme dále

$$\begin{aligned}&\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\\ &\quad = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b)\\ &\qquad + \sum_{x\in[a,b]}\Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big)\\ &\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{x\in[a,b]}\Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(t) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big)\,.\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že (6.49) platí. □

6.35. Cvičení. Dokažte, že za předpokladů věty 6.34 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x+)\,\mathrm{d}g(x-) + f(b)\,\Delta^- g(b) - \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^+ f(x)\,\Delta g(x)$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}g(x+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x)\,.$$

(Návod: využijte formule odvození v průběhu důkazu věty 6.34.)

6.4 Saksovo-Henstockovo lemma a některé jeho důsledky

6.36. Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Nechť* $\varepsilon > 0$ *je dáno a nechť* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *je kalibr na* $[a,b]$ *takový, že platí*

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \ \ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)\,.$$

Potom pro libovolný systém $\Big\{([s_j,t_j],\theta_j) : j = 1,2,\dots,n\Big\}$ *takový, že*

$$\left.\begin{aligned} & a \le s_1 \le \theta_1 \le t_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n \le \theta_n \le t_n \le b\,,\\ & [s_j,t_j] \subset [\theta_j - \delta(\theta_j), \theta_j + \delta(\theta_j)] \quad \textit{pro } j = 1,2,\dots,n\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

platí nerovnost

$$\left|\sum_{j=1}^n \left[f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\right]\right| \le \varepsilon\,. \tag{6.56}$$

Důkaz. Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{n+1} = b$. Je-li $j \in \{1,2,\dots,n\}$ a $t_j < s_{j+1}$, existují kalibr δ_j a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{A}(\delta_j;[t_j,s_{j+1}])$ takové, že $\delta_j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\right| < \frac{\eta}{n+1}\,. \tag{6.57}$$

Nyní sestavme δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^n f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] + \sum_{j=0}^n S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) = S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\,.$$

(Je-li $t_j = s_{j+1}$, klademe $S(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) = 0$.) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big) + \sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|$$
$$= \Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,.$$

Odtud a z (6.57) dostáváme pro libovolné $\eta > 0$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|$$
$$\leq \Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big| < \varepsilon + \eta\,,$$

tj. platí (6.56). □

6.37. Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a* $c \in [a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in[a,b]}} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g + f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big) = \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{6.58}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon \quad \text{platí všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Pro každé $x \in (c, c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ vyhovuje systém $\{([s_1,t_1],\theta_1)\}$, kde $t_1 = x$ a $s_1 = \theta_1 = c$, podmínkám (6.55). Podle Saksova – Henstockova lemmatu (viz Lemma 6.36) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)] - \int_c^x f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon\,. \tag{6.59}$$

Podobně, je-li $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c) \cap [a,b]$, pak použitím lemmatu 6.36 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)] - \int_x^c f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (6.59) a tudíž také nerovnost

$$\begin{aligned}\Big| \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g - \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big| \\ = \Big| \int_c^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

tj. platí (6.58). □

6.38. Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g \quad \textit{pro} \;\; x \in [a,b]\,.$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\,\Delta^+ g(t) \;\; \textit{a} \;\; h(s-) = h(s) - f(s)\,\Delta^- g(s)$$

pro $t \in [a,b)$ *a* $s \in (a,b]$. □

6.5 Neurčitý integrál

6.39. Věta (HAKE). (i) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x\to b-} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}\,.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

(ii) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+} \Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}\,.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z . (i) a) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big| \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g + f(b)\,[g(b)-g(x)] - I \Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b-\Delta, b)\,. \tag{6.60}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a, x_k] : \\ &\qquad (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_k, [a, x_k]) \implies \Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^{x_k} f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}\right\} \tag{6.61}$$

b) Definujme kalibr δ_0 na $[a, b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(s) \le \delta_k(s) \quad \text{a} \quad [s-\delta_0(s), s+\delta_0(s)] \subset [a, x_k]$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

Dále, pro každé $s \in [a, b)$ označme symbolem $\kappa(s)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

c) Dokážeme, že existuje kalibr δ_0 na $[a, b]$ takový, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\Big| S(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) - \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \varepsilon \\ &\qquad\qquad \text{pro všechna } x \in [a, b) \ \text{a} \ (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{A}(\delta_0, [a, x])\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.62}$$

Nechť je tedy dáno $x \in [a, b)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$). Dále nechť $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$ je libovolné δ_0–jemné dělení intervalu $[a, x]$. Označme $\nu(\boldsymbol{\tau}) = r$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1, p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1, r]$ takové, že $\kappa(\theta_j) = k$, máme

$$\theta_j - \delta_k(\theta_j) \le \theta_j - \delta_0(\theta_j) \le \theta_{j-1} < \tau_j \le \theta_j + \delta_0(\theta_j) \le \theta_j + \delta_k(\theta_j)\,.$$

Vzhledem k (6.61) a definici kalibru δ_0, vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ systém $\{([\tau_{j-1}, \tau_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, r,\ \kappa(\theta_j) = k\}$ splňuje předpoklady lemmatu 6.36) na místě $\{([s_j, t_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Platí tedy

$$\Big| \sum_{\kappa(\theta_j)=k} f(\theta_j)\,[g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}\, g \Big| < \frac{\varepsilon}{2^k} \ \text{ pro každé } k \in \{1, 2, \ldots, p\}\,.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{r}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\kappa(\theta_j)=k} f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{p}\Big|\sum_{\kappa(\theta_j)=k}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})]-\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj platí (6.62).

d) Nyní, položme

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\min\{b-x,\,\delta_0(x)\} & \text{pro } x\in[a,b)\,,\\[4pt] \dfrac{\Delta}{2} \quad \text{pro } x=b\,.\end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ^*–jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom musí platit $\xi_m=\sigma_m=b$, $\sigma_{m-1}\in(b-\Delta,b)$ a

$$\begin{aligned}
&\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\Big|\\
&\quad=\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]+f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]-I\Big|\\
&\quad\le\Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\
&\qquad+\Big|\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g+f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]-I\Big|\,.
\end{aligned}$$

Vzhledem k (6.62) a (6.60) (kde položíme $x=\sigma_{m-1}$) tedy dostáváme konečně

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I\Big|<2\,\varepsilon\,,\quad \text{tj. } \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I.$$

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponecháváme ho čtenáři jako cvičení. □

6.40. Cvičení. Dokažte tvrzení (ii) věty 6.39 a jeho pomocí také jeho následující variantu:

Nechť existuje $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a nechť*

$$\lim_{t\to x+}\Big(\int_a^t f \,\mathrm{d}\, g + f(x)\,[g(t)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R} \quad \textit{pro každé } x\in[a,b).$$

Potom $\int_a^x f \,\mathrm{d}\, g = I$.

6.41. Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a universálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v příkladech 6.15 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli (6.11), kde $\tau\in(a,b)$ a f je libovolná, odvodíme takto

$$\begin{aligned}\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} &= \int_a^\tau f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} \\ &= \lim_{t\to\tau-}\Big(\int_a^t f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} + f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(\tau)-\chi_{[\tau,b]}(t)]\Big) = f(\tau)\end{aligned}$$

Podobně, pro $\tau\in(a,b)$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g &= \int_a^\tau 1 \,\mathrm{d}\, g + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g \\ &= g(\tau)-g(a) + \lim_{t\to\tau+}\Big(\int_t^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\, g + 1\,[g(t)-g(\tau)]\Big) \\ &= g(\tau+)-g(a)\,,\end{aligned}$$

tj. (6.17).

6.42. Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z příkladů 6.15.

6.6 Substituce

Dalším důsledkem Saksova – Henstockova lemmatu je následující lemma, které nám pomůže dokázat větu o substituci.

6.43. Lemma. *Nechť* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje. Potom pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje kalibr* $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ *takový, že nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon \tag{6.63}$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ je kalibr takový, že

$$\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ–jemná značená dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$.

Buď dáno libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a

$$J^+=\Big\{j\in\{1,2,\dots,m\}:f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\ge 0\Big\}$$

a

$$J^-=\{1,2,\dots,m\}\setminus J^+\,.$$

Systém $\{([\sigma_{j-1},\sigma_j],\xi_j),\ j\in J^+\}$ splňuje předpoklady (6.55) z lemmatu 6.36 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle lemmatu 6.36 tedy platí

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j\in J^+}\Big(f(\xi_j)[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|&\\ \le\sum_{j\in J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\sigma_j)=g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|&<\frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j\in J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|&\\ \le\sum_{j\in J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|&<\frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Odtud už nerovnost ((6.63)) okamžitě vyplývá. □

6.44. Věta (VĚTA O SUBSTITUCI)**.** *Je-li funkce* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ohraničená a integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big],\quad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,.$$

D ů k a z . Podle věty 6.9 je funkce $w(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ definovaná pro každé $x\in[a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál $\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g$. Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\,.$$

platí pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. (Takový kalibr existuje podle lemmatu 6.43.)

Buď dáno $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}h(\xi_j)\,[w(\sigma_j)-w(\sigma_{j-1})]-\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\
&\quad\le\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g-h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\
&\quad\le\|h\|\sum_{j=1}^{m}\Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}\,g-f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}\,g\Big|\\
&\quad\le(\|h\|+1)\,\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w$ a platí

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w=\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g.$$

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně – opět za vydatné pomoci Lemmatu 6.43. □

Pro KS – integrál ovšem platí také tvrzení analogická větám 5.46 a 5.47, které jsme dokázali pro RS – integrály. Uvedeme alespoň jedno z nich.

6.45. Věta. *Předpokládejme, že funkce* $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *je rostoucí a zobrazuje interval* $[\alpha,\beta]$ *na interval* $[a,b]$ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x), \quad \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x))\,,$$

existuje i ten druhý a platí rovnost a

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,g(\phi(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)\,. \tag{6.64}$$

D ů k a z. Povšimeme si, že protože ϕ je rostoucí a zobrazuje interval interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$, musí být ϕ i její inverse ϕ^{-1} spojité.

Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[\alpha,\beta]$ položme

$$\sigma_j=\phi(\rho_j) \text{ pro } j=0,1,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{a} \quad \xi_j=\phi(\eta_j) \text{ pro } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$$

a $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{\nu(\boldsymbol{\rho})}\}$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2\dots,\xi_{\nu(\boldsymbol{\rho})})$. Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$. Značíme $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\phi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ pro $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\widetilde{\delta}\in\mathscr{G}[\alpha,\beta]$ definujme kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\phi^{-1}(\tau+\delta(\tau))<\phi^{-1}(\tau)+\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau\in[a,b) \\ a \quad & \\ &\phi^{-1}(\tau-\delta(\tau))>\phi^{-1}(\tau)-\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau\in(a,b] \end{aligned}\right\} \tag{6.65}$$

Nyní, jestliže rozšířené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ je δ – jemné, pak podle (6.65) máme pro každé $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$

$$\rho_j=\phi^{-1}(\sigma_j)\le\phi^{-1}(\xi_j+\delta(\xi_j))<\phi^{-1}(\xi_j)+\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j))=\eta_j+\widetilde{\delta}(\eta_j)$$

a

$$\rho_{j-1}=\phi^{-1}(\sigma_{j-1})\ge\phi^{-1}(\xi_j-\delta(\xi_j))>\phi^{-1}(\xi_j)-\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j))=\eta_j-\widetilde{\delta}(\eta_j)\,.$$

Čili, $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta})$ pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Podobně bychom ke každému kalibru $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ našli kalibr $\widetilde{\delta}\in\mathscr{G}[\alpha,\beta]$ takový, že $\phi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\delta)$ jakmile $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta})$.

Protože

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\eta_j))\,\big[g(\phi(\rho_j))-g(\phi(\rho_{j-1}))\big]$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, plyne odtud už snadno důkaz věty. □

6.46. Cvičení. (i) Do všech podrobností si promyslete závěr důkazu předešlé věty.

(ii) Formulujte a dokažte analogii věty 6.45 pro případ, že ϕ je klesající.

(iii) Formulujte a dokažte analogii věty 5.47.

6.47. Poznámka. Větu 6.45 je možno zobecnit v různých směrech. Např. následující verse věty o substituci se uplatnila při aplikaci teorie hysterese v ekonomii (viz [4]):

Předpokládejme, že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$ *a taková, že* $f\in\mathbb{G}[\alpha,b]$ *pro každé* $\alpha\in(a,b)$. *Dále, nechť funkce* $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $\phi(a)=c$, $\phi(b)=d$. *Konečně, nechť funkce* $g\in\mathbb{BV}[c,d]$ *je zprava spojitá na* $[c,d)$. *Pro* $s\in[c,d]$ *položme* $\psi(s)=\inf\{t\in[a,b]: s\le\phi(t)\}$. *Potom pro každé* $\alpha\in[a,b]$ *platí*

$$\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}[g(\phi(t))] = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(b)} f(\psi(s))\,\mathrm{d}g(s)\,.$$

6.7 Bodová konvergence

6.48. Věta (OSGOODOVA VĚTA)**.** *Předpokládejme, že pro funkci* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a posloupnost* $\{f_n\}\subset\mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\|f_n\|\le M<\infty \text{ pro } n\in\mathbb{N} \tag{6.66}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \text{ pro } x\in[a,b]\,. \tag{6.67}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad \text{pro každou funkci } g\in\mathbb{BV}[a,b]\,. \tag{6.68}$$

D ů k a z . Integrály $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g,\ n\in\mathbb{N},$ a $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existují podle věty 6.22. Nechť $g = g^{\mathrm{C}} + g^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce g (viz věta 2.36). Potom podle cvičení 5.55 (i) existují integrály $(\sigma)\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$ a $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a podle Osgoodovy věty pro RS – integrály (věta 5.60) platí

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma)\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$$

neboli (podle věty 6.13)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}\,. \tag{6.69}$$

Dále, podle lemmatu 6.29 máme pro každé $n\in\mathbb{N}$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{w\in W} f(w)\,\Delta\, g(w) \quad \text{a} \quad \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{w\in W} f_n(w)\,\Delta\, g(w)\,,$$

kde W je množina bodů nespojitosti funkce g v intervalu $[a,b]$. Jestliže je W konečná, pak zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{w\in W} f_n(w)\,\Delta\, g(w) = \sum_{w\in W} f(w)\,\Delta\, g(w)$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}}\,. \tag{6.70}$$

Nechť $W = \{w_k\}$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle důsledku 2.25 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| \le \operatorname{var}_a^b\, g < \infty.$$

Existuje tedy $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| < \frac{\varepsilon}{4\,M}\,.$$

Vzhledem k (6.66) a (6.67) je také $|f(x)| \le M$ pro $x\in[a,b]$ a tudíž

$$\Big|\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} \big(f_n(w_k) - f(w_k)\big)\ \Delta\, g(w_k)\Big| \le 2\,M \sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(w_k)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.71}$$

Dále, protože

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f_n(w_k)\,\Delta\,g(w_k) = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f(w_k)\,\Delta\,g(w_k)\,,$$

existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\Big|\sum_{k=1}^{p_\varepsilon}\big(f_n(w_k)-f(w_k)\big)\ \Delta\,g(w_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n \ge n_\varepsilon\,,$$

což dohromady s (6.71) dává

$$\Big|\int_a^b \big(f_n - f\big)\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{B}}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\big(f_n(w_k)-f(w_k)\big)\ \Delta\,g(w_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pro $n \ge n_\varepsilon$. Rovnost (6.70) tedy platí i tehdy, když množina W není konečná. Toto, společně s (6.69), zaručuje platnost rovnosti (6.68) a dokazuje tvrzení věty. □

6.8 Integrály maticových a vektorových funkcí

Jsou-li maticové funkce $F\colon [a,b] \to \mathscr{L}(R^m, R^p)$, $G\colon [a,b] \to \mathscr{L}(R^p, R^n)$ takové, že všechny integrály

$$\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j} \quad (i=1,2,\dots,m,\ k=1,2,\dots,p\,,\ j=1,2,\dots,n)$$

existují, pak symbol $\displaystyle\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,G(t)$ (resp. krátce $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$) značí $m\times n-$matici $M \in \mathscr{L}(R^m, \mathbb{R}^n)$ s prvky

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j}\,, \quad i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n.$$

Analogicky definujeme také integrály $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\,[F]\,G$ resp. $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,[G]\,H$, kde F, G a H jsou maticové funkce vhodných rozměrů.

Připomeňme, že podle označení (xiv) normu matice $A \in \mathscr{L}(R^m, \mathbb{R}^n)$ značíme $|A|$ a definujeme ji předpisem $|A| = \displaystyle\max_{j=1,\dots,m}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$. V této souvislosti ztotožňujeme prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathscr{L}(R^n, \mathbb{R}^1)$, tj. $|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ a

$$|A\,x| \le |A|\,|x| \ \text{ pro } A \in \mathscr{L}(R^m, \mathbb{R}^n) \ \text{ a } \ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále je známo, že platí $|A| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \le 1}} |A\,x|$.

Variace maticové funkce $F : [a,b] \to \mathscr{L}(R^m, \mathbb{R}^n)$ je definovaná formálně stejným předpisem jako variace skalárních funkcí, tj.

$$\operatorname{var}_a^b F = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} |F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1})|\,.$$

Snadno se ověří, že platí

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \left(\operatorname{var}_a^b f_{ij}\right) \le \operatorname{var}_a^b F \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}_a^b f_{ij}\,.$$

To znamená, že maticová funkce $F : [a,b] \to \mathscr{L}(R^m, R^n)$ má konečnou variaci právě tehdy, když má konečnou variaci každá její složka. Podobně, F je spojitá resp. regulovaná právě tehdy, když stejnou vlastnost má každá její složka.

Rozšíření výsledků uvedených v této a předešlé kapitole na případ funkcí maticových resp. vektorových je tedy snadné. Je ovšem nutno mít na paměti, že operace násobení matic není obecně symetrická, a tak musíme mít stále na paměti, že nesmíme libovolně měnit pořadí maticových funkcí, v jakém se v součinech obsažených v aproximujících součtech $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ objevují. Např. větu o integraci per-partes (věta 6.34) je třeba formulovat takto:

Jestliže $F: [a,b] \to \mathscr{L}(R^m, R^p)$ je regulovaná na $[a,b]$ a $G: [a,b] \to \mathscr{L}(R^p, R^n)$ má konečnou variaci na $[a,b]$, pak existují oba integrály

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G \ \ \textit{a} \ \ \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G$$

a platí

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G + \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) \\ + \sum_{x \in [a,b]} \Big(\Delta^- F(x)\,\Delta^- G(x) - \Delta^+ F(x)\,\Delta^+ G(x)\Big)\,.$$

Podobně třeba věta o substituci (věta 6.44) bude vypadat takto:

Jestliže funkce $H\colon [a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ *je ohraničená,* $F:[a,b]\to\mathscr{L}(R^p,R^q)$, $G:[a,b]\to\mathscr{L}(R^q,R^n)$ *a integrál* $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$ *existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big],\quad \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big] = \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G\,.$$

6.9 Souvislost s dalšími typy integrálů

Vyjasnili jsme již vzájemné vztahy mezi KS – integrálem a RS – integrály (viz poznámka 6.12 a věta 6.13). Podobně jako jsme v příkladu 6.14 (ii) dokázali, že z existence Newtonova integrálu (N)$\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence (KH) – integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$, lze dokázat také, že z existence Perronova integrálu (N)$\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence (KH) – integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,x$. Definici Perronova integrálu najdeme např. v monografiích [44] nebo [18], viz [44, definice XII.1.5] resp. [18, definice XII.25]. (Níže uvádíme definici Perronova – Stieltjesova integrálu, která ji také zahrnuje.) Platí dokonce, že KH – integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem (viz [44, věta XII.2.1]). Vzhledem ke známým vlastnostem Perronova integrálu to znamená, že KH – integrál (vzdor jeho jednoduché, téměř riemannovské, definici) zahrnuje tedy současně integrály Riemannův, Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i KH – integrál a oba integrály mají stejnou hodnotu. Dále, existuje-li KH – integrál funkce f, pak f je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když také její absolutní hodnota $|f|$ je KH – integrovatelná, viz např. kapitoly XII a XIV v monografii [44].

PERRONŮV– STIELTJESŮV INTEGRÁL.
Definice náleží A.J. Wardovi, viz [60] a [40]. Popsána byla též v Saksově monografii [40, VI.8]. Uvedeme zde ekvivalentní (viz [46, Theorem 2.1]) definici.

Řekneme, že funkce $M:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *majoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[M(t)-M(\tau)\big]\geq(t-\tau)\,f(\tau)\,\big(g(t)-g(\tau)\big)$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\,.$$

Podobně, funkce $m:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *minoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[M(t)-M(\tau)\big]\leq(t-\tau)\,f(\tau)\,\big(g(t)-g(\tau)\big)$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\,.$$

Symbol $\mathfrak{M}(f\Delta g)$ značí množinu majorant pro f vzhledem ke g, $\mathfrak{m}(f\Delta g)$ je množina minorant pro f vzhledem ke g.

Předpokládejme, že obě množiny $\mathfrak{M}(f\Delta g)$ i $\mathfrak{m}(f\Delta g)$ jsou neprázdné a položme

$$(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\inf\big\{M(b)-M(a):M\in\mathfrak{M}[a,b]\big\}$$

a

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\sup\big\{m(b)-m(a):m\in\mathfrak{m}[a,b]\big\}\,.$$

($(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *horní Perronův – Stieltjesův* integrál f a $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *dolní Perronův – Stieltjesův* integrál.) Pomocí Cousinova lemmatu (lemma 6.3) lze dokázat (viz [28, Lemma 1.1.2]), že platí $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g\leq(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$. Jestliže

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=I\in\mathbb{R},$$

pak

$$(\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I$$

je *Perronův – Stieltjesův integrál* funkce f vzhledem k funkci g přes interval $[a,b]$.

Poznamenejme, že podle [28, Lemma 1.2.1] integrál $(\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje KS- integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$ Jestliže tyto integrály existují, pak mají stejnou hodnotu. (PS – integrál je ekvivalentní s KS- integrálem.)

LEBESGUEŮV– STIELTJESŮV INTEGRÁL (LS – integrál)
byl popsán v řadě monografií a učebnic, viz např. T.H. Hildebrandt [14, kapitola VI], V. Jarník [18, kapitoly II a X], A.N. Kolmogorov a S.V. Fomin [19, VI.6.–3], J. Lukeš [31, kapitola 12], S. Saks [40, kapitola III]. Existuje několik cest k jeho definici. Vesměs se ale jedná o poměrně komplikovaný proces.

Nejčastěji je integrál (LS)$\int_M f\,\mathrm{d}g$ přes množinu $M\subset[a,b]$ definován zprvu pro f nezáporné, ohraničené a borelovsky měřitelné a g neklesající a zprava spojité jako Lebesgueův integrál vzhledem k Lebesgueově-Stieltjesově míře $\mu_g,$ tj. $\sigma-$aditivní míře vzniklou rozšířením míry intervalu $G((c,d]=g(d)-g(c)$ pro $[c,d]\subset[a,b]$ podobným způsobem, jako se buduje Lebesgueova míra rozšířením obvyklé míry intervalu $\ell([c,d]=d-c.$ Definice se pak zřejmým rozšíří na případ kdy f je ohraničená a borelovsky měřitelná a $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ na základě rozkladu funkcí s konečnou variací na rozdíl dvou neklesajících funkcí a rozkladu $f=f^+-f^-.$ Alternativní možností je definovat LS – integrál jako rozšíření RS – integrálu Daniellovou metodou.

Na rozdíl od KS – integrálu, LS – integrál má poněkud užší třídu integrovatelných funkcí. Nezahrnuje např. integraci vzhledem k regulovaným funkcím. Na druhou stranu, neomezuje se na integraci přes interval. Má smysl uvažovat o LS – integraci přes libovolnou LS – měřitelnou množinu.

Vztah mezi LS – integrálem a PS – integrálem (a tedy i KS – integrálem) je dobře charakterizován následujícím tvrzením obsaženým v Saksově monografii (viz [40, Theorem VI (8.1)]).

Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b],$ $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\mathrm{LS})\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g.$ *Potom existuje také* PS – *integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=(PS)\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g+f(a)\,\Delta^+g(a)+f(b)\,\Delta^-g(b)\,.$$

Odtud podle věty o substituci (věta 6.44) plyne i následující zajímavé tvrzení.

Je-li f *ohraničená na* $[a,b],$ $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *Lebesgueovsky integrovatelná na* $[a,b]$ *a* $g(t)=g(a)+\int_a^t h\,\mathrm{d}x$ *pro* $t\in[a,b],$ *pak* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,h\,\mathrm{d}\,t,$ *kde integrál na* *pravé straně je Lebesgueův.*

DUSHNIKŮV INTEGRÁL A YOUNGŮV INTEGRÁL.
Změníme-li definici značených dělení v tom smyslu, že budeme požadovat, aby platilo

$$\xi_j \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$$

a dosadíme-li tento modifikovaný pojem značených dělení do definice RS – integrálů (viz definice 5.3), dostaneme *Dushnikův* ((δ) nebo (σ)) integrály. Je zřejmé, že jestliže existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g,$ pak existuje i Dushnikův (σ) – integrál $(\mathrm{D})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a mají stejnou hodnotu. Dushnikův integrál je dokonce stejně obecný jako KS – integrál, pokud jde třídu integrovatelných funkcí. Obecně se však jeho hodnoty liší od odpovídajících hodnot KS – integrálu. To je zřetelné z následujícího vztahu

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + (\mathrm{D})\int_a^b g\,ddf = f(b)\,g(a) - f(a)\,g(a)\,,$$

který platí jakmile jeden z integrálů na levé straně má smysl. Dushnikův integrál je podrobně popsán v monografii Ch.S. Höniga [15], který rozšířil jeho definici i na funkce s hodnotami v Banachových prostorech a vyšetřil jeho vlastnosti natolik, že mohl na jejich základě vybudovat teorii Volterrových – Stieltjesových integrálních rovnic v Banachových prostorech.

Definujeme-li navíc

$$S_Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left[f(\sigma_{j-1})\Delta^+ g(\sigma_{j-1}) + f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + f(\sigma_j)\Delta^- g(\sigma_j) \right],$$

a dosadíme-li $S_Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ do definice 5.3, dostaneme *Youngův* integrál $(\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$ O tomto integrálu a zejména o jeho (σ) verzi je podrobně pojednáno v odstavci II.19 monografie T.H. Hildebrandta [14]. Také (σ) – Youngův integrál je prakticky stejně obecný jako KS – integrál. Jsou dokonce známy kuriozní příklady funkcí, pro které existuje (σ) – Youngův integrál a neexistuje KS – integrál (viz [46] nebo [23]). V případech zajímavých pro aplikace, kdy obě funkce $f,\ g$ jsou regulované na $[a,b]$ a alespoň jedna z nich má na $[a,b]$ konečnou variaci, oba integrály

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \text{a} \quad (\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

existují a mají stejnou hodnotu. Upraví-li se definice KS – integrálu zúžením množiny značených dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ na případy, kdy platí

$$a \le \xi_1 < \sigma_1,\ \sigma_{j-1} < \xi_j < \sigma_j \text{ pro } j = 2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})-1,\ \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} < \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \le b\,,$$

(viz [47]) bude už takovýto modifikovaný KS – integrál rozšířením i (σ) – Youngova integrálu. Jiná možnost modifikace definice KS – integrálu byla uvedena v práci [21].

INTEGRACE V ABSTRAKTNÍCH PROSTORECH.
Rozšíření integrace na vektorové a maticové funkce jsme ukázali v odstavci 6.8. Analogicky, lze postupovat i v případě abstraktních funkcí, tj. funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Je-li $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ odpovídající Banachův prostor spojitých lineárních operátorů na $\mathbb{X}$ a

$$F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ g:[a,b]\to\mathbb{X}\,,$$

pak můžeme definovat KS – integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,g,\quad \int_a^b F\,\mathrm{d}g \quad \int_a^b \mathrm{d}F\,G,\quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G\,.$$

Např. $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}F\,g = I \in \mathbb{X}$ jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} F(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] - I\Big\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon$$

pro každé δ – jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Pojem variace lze snadno přenést i na abstraktní funkce. Pro funkci $f:[a,b]\to\mathbb{X}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \|f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})\|_{\mathbb{X}} \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b f = \sup\{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b].$$

Je také zřejmé, jak definovat prostor $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{X})$ regulovaných funkcí s hodnotami v $\mathbb{X}.$ Potom např. oba integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,G \quad \text{a} \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G$$

existují jestliže $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a $G\in\mathbb{G}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ platí i většina tvrzení známých pro integraci skalárních funkcí (viz [48], [51] a [35]). Jsou však i výjimky: Lemma 6.43 platí pouze pokud má prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi. To znamená m.j., že jsou jisté potíže s přenesením např. věty o substituci na abstraktní integrály. V této stručné informaci stojí ještě za zmínku, že pokud nemá prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, má smysl místo variace uvažovat obecně slabší pojem *semivariace*, který se definuje takto:

Pro danou funkci $F\colon[a,b]\to L(\mathbb{X})$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ položme nejprve

$$V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma}) = \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}[F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})]\,x_j\Big\|_{\mathbb{X}}\Big\},$$

kde supremum se bere přes všechny možné volby prvků $x_j\in\mathbb{X},\ j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ takových, že $\|x_j\|_X\le 1.$ Potom číslo

$$(\mathcal{B})\mathrm{var}_a^b\,F = \sup\{V_a^b(x,\boldsymbol{\sigma})\colon \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$$

se nazývá *semivariace* funkce F na $[a,b]$ (viz např. [15]). Zpravidla (ne vždy) je možno předpoklady o konečné variaci zeslabit na konečnou semivariaci. Je známo, že má-li $\mathbb{X}$ konečnou dimensi, pak pojmy variace a semivariace splývají.

Poznamenejme ještě, že integrace funkcí s hodnotami v Hilbertových resp. reflexivních Banachových prostorech má uplatnění např. v teorii hysterese (viz např. [24] nebo [25]).

Důkazy podstatné části tvrzení uvedených v této kapitole byly převzaty z monografie [57]. Některé jsou pak modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x)\equiv x$ ze Schwabikovy monografie [44].