Kapitola 7

# Aplikace Stieltjesova integrálu ve funkcionální analýze

V této kapitole nejprve ukážeme jak se Stieltjesovy integrály uplatní při representaci spojitých lineárních funkcionálů na některých prostorech funkcí. Nejprve připomeňme několik základních pojmů.

## 7.1 Několik základních pojmů z funkcionální analýzy

(i) Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. Zobrazení

$$\beta : x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y} \to \beta(x,y) \in \mathbb{R}$$

je *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1+x_2,y)=\beta(x_1,y)+\beta(x_2,y) && \text{pro všechna } x_1,x_2\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y}\,,\\
&\beta(\lambda\,x,y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna } x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y},\ \lambda\in\mathbb{R}\,,\\
&\beta(x,y_1+y_2)=\beta(x,y_1)+\beta(x,y_2) && \text{pro všechna } x\in\mathbb{X},\ y_1,y_2\in\mathbb{Y}\,,\\
&\beta(x,\lambda\,y)=\lambda\,\beta(x,y) && \text{pro všechna } x\in\mathbb{X},\ y\in\mathbb{Y},\ \lambda\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* $\beta$, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y)=0 \ \text{ pro všechna } x\in\mathbb{X} \implies y=0\,,\\
&\beta(x,y)=0 \ \text{ pro všechna } y\in\mathbb{X} \implies x=0\,.
\end{aligned}$$

(iii) Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály* na $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály $\Phi$, $\Psi$ na $\mathbb{X}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi+\Psi)(x)=\Phi(x)+\Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda\,\Phi)(x)=\lambda\,\Phi(x)\,.$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $0 : x\in\mathbb{X}\to 0\in\mathbb{R}$.)

(iv) Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x\in\mathbb{X}\to\|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál $\Phi$ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|.\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K\in[0,\infty)$ takové, že nerovnost $|\Phi(x)|\le K\,\|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x\in\mathbb{X}$ (viz [19, IV.1.2]). Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi\in\mathbb{X}^*\to\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=\sup\{|\Phi(x)|: x\in\mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\}\,.$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor (viz [19, IV.2.1]). Povšiměme si též, že zobrazení

$$x\in\mathbb{X},\ \Phi\in\mathbb{X}^*\to\Phi(x)\in\mathbb{R} \tag{7.1}$$

je bilineární.

Důležitou roli v teorii spojitých lineárních operátorů hraje věta Hahnova – Banachova, kterou zde připomeneme v obecnosti postačující pro naše účely. Důkaz lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz např [19, IV.1.3].

**7.1. Věta** (HAHN – BANACH)**.** *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor a* $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$ *je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál* $\Phi$ *na* $\mathbb{Y}$ *existuje spojitý lineární funkcionál* $\widetilde{\Phi}$ *na* $\mathbb{X}$ *takový, že*

$$\widetilde{\Phi}(y)=\Phi(y)\quad \textit{pro}\ \ y\in\mathbb{Y}\quad \textit{a}\quad \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}=\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\,. \tag{7.2}$$

Známým a užitečným důsledkem věty Hahnovy – Banachovy je následující tvrzení (viz např. [19, IV.1.3]).

**7.2. Důsledek.** *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor a* $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$ *je jeho podprostor. Potom pro každý prvek* $z\in\mathbb{X}\setminus\mathbb{Y}$ *existuje spojitý lineární funkcionál* $\Phi$ *na* $\mathbb{X}$ *takový, že*

$$\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=1,\quad \Phi(y)=0\quad \textit{pro}\ \ y\in\mathbb{Y}\quad \textit{a}\quad \Phi(z)=\operatorname{dist}(\mathbb{Y},z)\,,$$

*kde* $\operatorname{dist}(\mathbb{Y},z)$ *značí vzdálenost prvku* $z$ *od množiny* $\mathbb{Y}$*, tj.*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Y},z)=\inf\{\|y-z\|_{\mathbb{X}}: y\in\mathbb{Y}\}\,.$$

Pomocí důsledku 7.2 snadno dokážeme následující tvrzení.

**7.3. Důsledek.** *Je-li* $\mathbb{X}$ *Banachův prostor a* $\mathbb{X}^*$ *jeho duální prostor, pak* $\mathbb{X},\mathbb{X}^*$ *je duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* (7.1).

D ů k a z . a) Je-li $\Phi(x)=0$ pro každé $x\in\mathbb{X}$, znamená to, že $\Phi$ je nulový funkcionál, tj. $\Phi=0\in\mathbb{X}^*$.

b) Podle důsledku 7.2 pro libovolné $x\neq 0$ existuje funkcionál $\Phi\in\mathbb{X}^*$ takový, že $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=1$ a $\Phi(x)=\|x\|$. (Položíme $\mathbb{Y}=\{0\}$.) Nemůže se tedy stát, že by bylo současně $\Phi(x)=0$ pro každé $\Phi\in\mathbb{X}^*$ a $x\neq 0$. □

## 7.2 Spojité lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří representace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Speciálně v případě prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ funkcí spojitých na $[a,b]$ se dobře uplatní klasický $(\delta)$ RS – integrál.

**7.4. Věta** (RIESZ). *$\Phi$ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ $(\Phi\in(\mathbb{C}[a,b])^*)$ právě tehdy, když existuje funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ taková, že $p\,(a)=0$ a*

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každou funkci } x\in\mathbb{C}[a,b]\,. \tag{7.3}$$

*Potom také platí $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \operatorname{var}_a^b p$.*

D ů k a z . a) Nechť $x\in\mathbb{C}[a,b]$ a $p\in\mathbb{BV}[a,b]$. Potom podle věty 5.53 existuje integrál $(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ a podle lemmatu 5.9 platí $\left|(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right| \le \left(\operatorname{var}_a^b p\right)\|x\|$. Zobrazení

$$\Phi_p\,:\,x\in\mathbb{C}[a,b]\to(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\in\mathbb{R}$$

je tedy ohraničený (tj. spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$, přičemž

$$\|\Phi_p\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \operatorname{var}_a^b p\,. \tag{7.4}$$

b) Buď dán libovolný spojitý lineární funkcionál $\Phi$ na $\mathbb{C}[a,b]$.

Nechť $\mathbb{M}[a,b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a,b]$. $\mathbb{M}[a,b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v $\mathbb{C}[a,b]$. Dále je zřejmé, že $\mathbb{C}[a,b]$ je uzavřený podprostor $\mathbb{M}[a,b]$.

Ve zbývající části tohoto důkazu budeme značit $\mathbb{X}=\mathbb{M}[a,b]$ a $\mathbb{Y}=\mathbb{C}[a,b]$.

Podle věty 7.1 můžeme funkcionál $\Phi$ rozšířit na celý prostor $\mathbb{X}$, tj. existuje funkcionál $\widetilde{\Phi}\in X^*$ takový, že platí (7.2).

Položme

$$p(a) = 0 \quad \text{a} \quad p(t) = \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) \quad \text{pro } t \in (a,b]. \tag{7.5}$$

Dokážeme, že $p \in \mathbb{BV}[a,b]$.

Buď dáno dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{m} |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, [p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})],$$

kde $\alpha_j = \operatorname{sign}[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})]$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Vzhledem k definici (7.5) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} V(p,\boldsymbol{\sigma}) &= \alpha_1 \, \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \, \big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big] \\ &= \alpha_1 \, \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \, \widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) \\ &= \widetilde{\Phi}\Big(\alpha_1 \, \chi_{[a,\sigma_1]} + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}\Big) = \widetilde{\Phi}(h), \end{aligned}$$

kde $h(t) = \alpha_1 \, \chi_{[a,\sigma_1]}(t) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)$ pro $t \in [a,b]$. Zřejmě $\|h\| = 1$ a tedy

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} = \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

To ovšem znamená, že

$$\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}. \tag{7.6}$$

Zbývá dokázat, že platí (7.3) neboli $\Phi = \Phi_p$. Buďte dány libovolná $x \in \mathbb{C}[a,b]$ a $\varepsilon > 0$. Protože funkce $x$ je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\Big(t, s \in [a,b] \;\text{ a }\; |t-s| < \delta\Big) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon.$$

Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$.

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \begin{cases} x(\sigma_1) & \text{když } t = a, \\ x(\sigma_j) & \text{když } t \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]. \end{cases}$$

Snadno ověříme, že $|x(t)-x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)|<\varepsilon$ pro každé $t\in[a,b]$ neboli $\|x-x_{\boldsymbol{\sigma}}\|<\varepsilon$. Dále,

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)=x(\sigma_1)\,\chi_{[a]}(t)+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)\quad\text{pro }\ t\in[a,b]\,.$$

Odtud, vzhledem k definici (7.5), dostaneme

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}})&=x(\sigma_1)\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]})-\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big]\\&=x(\sigma_1)\,\big[p\,(\sigma-1)-p\,(a)\big]+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\\&=\sum_{j=1}^{m}x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]=S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}})\,,\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)$. Protože existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$, můžeme zvolit $\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\rho}}$ tak, aby platilo

$$\Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}})-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big|=\Big|S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big|<\varepsilon\,.$$

Protože máme také $\|x-x_{\boldsymbol{\rho}}\|<\varepsilon$, dostáváme

$$\begin{aligned}\Big|\Phi(x)-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big|&=\Big|\widetilde{\Phi}(x)-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big|\\&\le\Big|\widetilde{\Phi}(x)-\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}})\Big|+\Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}})-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big|\\&<\|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\|x-x_{\boldsymbol{\rho}}\|+\varepsilon<\big(\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}+1\big)\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon>0$ může být libovolně malé, znamená to, že platí

$$\Phi(x)=\Phi_p(x)=(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\quad\text{pro }\ x\in\mathbb{C}[a,b]\,.$$

Konečně, podle (7.4) a (7.6) je $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}=\operatorname{var}_a^b p$. $\square$

Jak ukazuje následující věta, není přiřazení $\Phi\in(\mathbb{C}[a,b])^*\ \to\ p\in\mathbb{BV}[a,b]$ určeno vztahem (7.3) jednoznačně.

**7.5. Lemma.** *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom platí*

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = 0 \quad \textit{pro každou funkci } f \in \mathbb{C}[a,b] \tag{7.7}$$

*tehdy a jen tehdy, když existuje nejvýše spočetná množina* $W \subset (a,b)$ *taková, že*

$$g(t) = g(a) \textit{ pro } t \in [a,b] \setminus W\,. \tag{7.8}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (7.8). Položme $g^{\mathrm{C}}(t) = g(a)$ pro $t \in [a,b]$ a $g^{\mathrm{B}} = g - g^{\mathrm{C}}$. Potom $g^{\mathrm{B}}(t) \neq 0$ právě tehdy, když $t \in W$. ($g^{\mathrm{C}}$ je spojitá část funkce $g$ a $g^{\mathrm{B}}$ je skoková část $g$.)

Nechť $f$ je libovolná funkce spojitá na $[a,b]$. Potom zřejmě

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = 0. \tag{7.9}$$

Ukážeme, že platí také

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = 0\,. \tag{7.10}$$

Je-li $W = \emptyset$, pak (7.10) evidentně platí. Nechť $W$ je jednobodová množina, tj. $W = \{w\}$, kde $w \in (a,b)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\Big(t, s \in [a,b] \;\text{ a }\; |t-s| < \delta\Big) \implies |x(t) - x(s)| < \varepsilon\,.$$

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$, pak máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| = \begin{cases} 0 & \text{když } w \notin \boldsymbol{\sigma}\,, \\ \big|f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})\big|\,|g(w)| < \varepsilon\,\|g\| & \text{když } w = \sigma_j\,. \end{cases}$$

Je-li $W$ jednobodová množina, pak (7.10) platí. Snadno si rozmyslíme, že odtud plyne, že (7.10) platí i v případě, že množina $W$ je konečná.

Předpokládejme nyní, že $W$ je spočetná, $W = \{w_k\}$. Podle věty 2.23 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(w_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \big(|\Delta^- g^{\mathrm{B}}(w_k)| + |\Delta^+ g^{\mathrm{B}}(w_k)|\big) < \infty\,.$$

Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(w_k)| < \varepsilon\,. \tag{7.11}$$

Rozložme funkci $g^{\mathrm{B}}$ na součet $g^{\mathrm{B}} = h + \widetilde{h}$, kde

$$h(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_1, w_2, \dots, w_N\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \end{cases}$$

a

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{w_k : k \geq N+1\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{w_k : k \geq N+1\}. \end{cases}$$

Podle předchozí části je

$$(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, h = 0. \tag{7.12}$$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ máme podle (7.11)

$$\begin{aligned} \left|S_{f\Delta\widetilde{h}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[\widetilde{h}(\sigma_j) - \widetilde{h}(\sigma_{j-1})]\right| \\ &\leq 2\,\|f\| \sum_{j=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(\sigma_j)| < 2\,\|f\|\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k (7.9) a (7.11), plyne, že platí (7.10) a (7.7).

b) Nechť platí (7.7). Položme $f(t) = (\delta)\int_t^b (g(s) - g(a))\,\mathrm{d}\,s$ pro $t \in [a,b]$. Potom $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a podle věty o integraci per-partes (věta 5.49) a věty o substituci (věta 5.44) je

$$\begin{aligned} 0 = (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - (\delta)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f \\ &= -f(a)\,g(a) + (\delta)\int_a^b g(t)\,\big(g(t) - g(a)\big)\,\mathrm{d}\,t = (\delta)\int_a^b \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

Kdyby bylo $g(t_0) \neq g(a)$ v nějakém bodě $t_0$ spojitosti funkce $g$, muselo by existovat $\Delta > 0$ takové, že $\big(g(t) - g(a)\big)^2 > 0$ pro $t \in (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$. Potom bychom ovšem měli také

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = (\delta)\int_a^b \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t \geq (\delta)\int_{t_0 - \Delta}^{t_0 - \Delta} \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t > 0,$$

což je ve sporu s předpokladem (7.7). Platí tedy (7.8). □

**7.6. Poznámka.** Jestliže $f \in \mathbb{C}[a,b]$, pak podle Lemmatu 7.5 integrál $(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ se nezmění, změníme-li hodnoty $g(t)$ v nejvýše spočetně mnoha bodech $t \in (a,b)$. Speciálně, nahradíme-li funkci $g$ funkcí

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = a\,, \\ g(t+) - g(a) & \text{pro } t \in (a,b)\,, \\ g(b) - g(a) & \text{pro } t = b\,, \end{cases}$$

bude platit

$$(\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = (\delta)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, \widetilde{g} \quad \text{pro každé } f \in \mathbb{C}[a,b]\,.$$

Odtud okamžitě plyne, že pro každý spojitý lineární funkcionál $\Phi$ na prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ existuje právě jedna funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že

$$\left.\begin{aligned} & p\,(a) = 0,\ \ p\,(t+) = p\,(t) \ \text{ pro } \ t \in (a,b) \\ \text{a} \quad & \\ & \Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \, \mathrm{d}\, p \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{C}[a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$, které jsou zprava spojité na $(a,b)$ a takové, že $p\,(a) = 0$, se nazývají *normalizované funkce s konečnou variací* a tvoří uzavřený podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $\mathbb{NBV}[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou podle věty 7.4 a lemmatu 7.5 isomorfní, tj. zobrazení

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b] \tag{7.14}$$

je vzájemně jednoznačné. To by zřejmě neplatilo, kdybychom $\mathbb{NBV}[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Na druhou stranu, $\mathbb{NBV}[a,b]$ lze nahradit např. prostorem funkcí s konečnou variací na $[a,b]$, které jsou spojité zleva na $(a,b)$ a anulují se v nějakém pevně daném bodě $c \in [a,b]$.

Z následujícího lemmatu vyplyne, že je-li $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^*$ a $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ je určeno vztahem (7.14), pak $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}}$, tj. prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou isometricky isomorfní.

**7.7. Lemma.** *Jestliže* $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ *a* $\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \, \mathrm{d}\, p$ *pro* $x \in \mathbb{C}[a,b]$, *pak* $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b p$.

D ů k a z . Podle věty 5.53 a lemmatu 5.9 platí $\left|(\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p\right| \le \left(\operatorname{var}_a^b p\right)\|x\|$ neboli

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \|p\|_{\mathbb{BV}}. \tag{7.15}$$

Dokážeme, že existuje funkce $\widetilde{x} \in \mathbb{C}[a,b]$ taková, že

$$\|\widetilde{x}\| = 1 \quad \text{a} \quad (\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \operatorname{var}_a^b p. \tag{7.16}$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0.$ Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby bylo

$$V(p,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) > \operatorname{var}_a^b p - \varepsilon \tag{7.17}$$

pro každé jeho zjemnění $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma}).$ Vzhledem ke spojitosti funkce $p$ na $(a,b)$ zprava můžeme pro každé $j = 1,2,\dots,m$ najít bod $t_j \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$ takový, že

$$|p(t_j) - p(\sigma_j)| < \frac{\varepsilon}{m}. \tag{7.18}$$

Položme

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\big(p(\sigma_1) - p(a)\big) & \text{když } t \in [a,\sigma_1] \\ \operatorname{sign}\big(p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big) & \text{když } t \in [t_j,\sigma_{j+1}],\ j \in \{1,2,\dots,m\}, \end{cases}$$

a dodefinujme funkci $\widetilde{x}$ na intervalech $[t_j,\sigma_{j+1}]$ lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Zřejmě je $\|\widetilde{x}\| = 1.$ Navíc

$$(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \big|p(\sigma_1) - p(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big| + \sum_{j=1}^{m-1} (\delta)\int_{\sigma_j}^{t_j} \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p$$

Protože je $|\widetilde{x}(t)| \le 1$ pro $t \in [a,b]$, plyne odtud podle (7.18), že

$$\begin{aligned} \left|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\right| &\ge \big|p(\sigma_1) - p(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big| - \sum_{j=1}^{m-1} \big|p(t_j) - p(\sigma_j)\big| \\ &= V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\sum_{j=1}^{m-1} \big|p(t_j) - p(\sigma_j)\big| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\rho} = \{a, t_1, \sigma_1, t_2, \sigma_2\ \dots, \sigma_{m-1}, t_m, b\}.$ Podle (7.17) dostáváme

$$\left|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\right| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon > \operatorname{var}_a^b p - 3\,\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon$ může být libovolné kladné číslo, znamená to, že platí (7.16) a tudíž $\sup_{\|x\| \le 1} |\Phi(x)| \ge \operatorname{var}_a^b p.$ Odtud a z (7.15) plyne tvrzení lemmatu. $\square$

**7.8. Věta.** *Zobrazení* $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b]$, *kde* $p$ *je určeno vztahem* (7.13)*, je isometrický isomorfismus.*

**7.9. Poznámka.** Můžeme tedy ztotožnit $(\mathbb{C}[a,b])^*$ s prostorem $\mathbb{NBV}[a,b]$.

**7.10. Cvičení.** Dokažte, že platí :

*Pro každý spojitý lineární funkcionál* $\Phi$ *na prostoru* $\mathbb{C}[a,b]$ *existuje právě jedna funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$p\,(b) = 0, \;\; p\,(t-) = p\,(t) \;\; \textit{pro} \;\; t \in (a,b)$$

*a*

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p \quad \textit{pro každé} \;\; x \in \mathbb{C}[a,b]\,.$$

*Ve větě* 7.8 *lze nahradit prostor* $\mathbb{NBV}[a,b]$ *prostorem funkcí zleva spojitých na* $(a,b)$ *a takových, že* $p\,(b) = 0$.

## 7.3 Spojité lineární funkcionály na prostorech integrovatelných resp. absolutně spojitých funkcí

Další dobře známé representace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu :

Pro $\alpha \in [1,\infty)$ označme symbolem $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ prostor funkcí $x$ měřitelných na $[a,b]$ a takových, že $\displaystyle\int_a^b |x|^\alpha \,\mathrm{d}t < \infty$, přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$\|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x|^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha} \qquad \text{pro} \;\; x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$$

a rovnost $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$ znamená, že $x(t) = y(t)$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Jestliže položíme

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže} \;\; \alpha > 1\,, \\ \infty & \text{jestliže} \;\; \alpha = 1\,, \end{cases}$$

pak obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a,b])^* \iff \text{existuje} \;\; p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b], \;\; \text{takové, že}$$
$$\Phi(x) = \int_a^b p\, x \,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \;\; x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]\,,$$

kde $\mathbb{L}^\infty[a,b]$ je prostor funkcí esenciálně (v podstatě) omezených na $[a,b]$, tj. funkcí definovaných a měřitelných na $[a,b]$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a takových, že

$$\sup\,\mathrm{ess}\,|f| < \infty\,,$$

kde $\sup\,\mathrm{ess}\,|f|$ je infimum množiny všech $A\in(0,\infty)$ takových, že množina

$$\{x\in[a,b]:|x(t)>A\}$$

má nulovou míru.

Na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ funkcí absolutně spojitých na intervalu $[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}} = |f(a)| + \|f'\|_1 \quad \text{pro} \ \ f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Podle věty 3.17 představují zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(x):=\ c+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\in\mathbb{AC}[a,b]$$

vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Lze ukázat, že obecný spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi\in(\mathbb{AC}[a,b])^* \iff \text{existují } \ q\in\mathbb{R} \ \text{ a } \ p\in\mathbb{L}^\infty[a,b], \ \ \text{takové, že}$$
$$\Phi(x) = q\,f(a) + \int_a^b p\,f'\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \ \ x\in\mathbb{AC}[a,b]\,.$$

Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verse plzeňských skript [3].

## 7.4 Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Našim cílem je nyní odvození obecného tvaru spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle Věty 6.26 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \tag{7.19}$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a,b]$ a každý pár $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, předpis ((7.19)) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$.

Snadno ověříme, že předpisem

$$\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$$

je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v příkladech 6.15 (viz též příklady 6.41 resp. cvičení 6.42) také snadno odvodíme následující tvrzení.

**7.11. Lemma.**

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *platí*

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\eta(1) &= q\,, \\
\Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) \qquad \textit{když } \tau \in [a,b)\,, \\
\Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0 \qquad\quad\ \ \textit{když } \tau \in (a,b)\,, \\
\Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p\,(b)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\eta(x) &= x(a) \qquad \textit{když } p \equiv 0 \textit{ na } [a,b],\ q = 1\,, \\
\Phi_\eta(x) &= x(b) \qquad \textit{když } p \equiv 1 \textit{ na } [a,b],\ q = 1\,, \\
\Phi_\eta(x) &= x(\tau-) \quad\ \textit{když } p = \chi_{[a,\tau)} \textit{ na } [a,b],\ \tau \in (a,b],\ q = 1\,, \\
\Phi_\eta(x) &= x(\tau+) \quad\ \textit{když } p = \chi_{[a,\tau]} \textit{ na } [a,b],\ \tau \in [a,b),\ q = 1\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

$\square$

Přímým důsledkem vztahů ((7.20)), ((7.21)) a lemmatu 4.16 je následující tvrzení.

**7.12. Lemma.**

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \textit{ pro každé } x \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big)\,,$$

*pak* $p\,(t) \equiv 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q = 0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \textit{ pro všechny dvojice } \ \eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}\,,$$

*pak*

$$x(a)=x(a+)=x(\tau-)=x(\tau+)=x(b-)=x(b) \tag{7.22}$$

*platí pro* $\tau\in(a,b)$. $\square$

**7.13. Poznámka.** Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (7.20), můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)$ množinami

$$\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\quad\text{resp.}\quad \mathrm{Lin}\Big(1,\ \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)\,.$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, $\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (4.3).

**7.14. Věta.** *Každý z následujících párů prostorů*

$$(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\,\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{reg}[a,b],\,\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\,\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R})$$

*tvoří duální pár vzhledem k bilineární formě*

$$x\in X,\ \eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}\to\Phi_\eta(x)\,.$$ $\square$

Na druhou stranu, máme také

**7.15. Lemma.** *Jestliže* $\Phi$ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a*

$$p\,(t)=\begin{cases}\Phi(\chi_{(t,b]}) & \textit{když}\ \ t\in[a,b)\,,\\[2mm] \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když}\ \ t=b,\end{cases} \tag{7.23}$$

*pak* $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a*

$$\left.\begin{aligned} &|p\,(a)|+|p\,(b)|+\mathrm{var}_a^b\,p\le 2\,\|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},\\ &\qquad \textit{kde}\ \ \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}=\sup\{|\Phi(x)|:x\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\|\le 1\,\}\,.\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0,c_1,\dots,c_m,c_{m+1})\in\mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\begin{aligned}&\Big|c_0\,p\,(a)+c_{m+1}\,p\,(b)+\sum_{j=1}^m c_j\,[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})]\Big|\\ &\quad=\Big|\Phi\Big(c_0\,\chi_{(a,b]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}+c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big)\Big|=|\Phi(h)|\,,\end{aligned}$$

kde

$$h = c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j\,]} + c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\,.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \le 1$ pro $j = 0, 1, \ldots, m{+}1,$ pak bude $\|h\| \le 2.$ Položíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sign} p\,(a),\; c_{m+1} = \operatorname{sign} p\,(b),\; c_j = \operatorname{sign}(p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1}))$$

pro $j = 1, 2, \ldots, m,$ získáme vztah

$$|p\,(a)| + |p\,(b)| + V(p, \boldsymbol{\sigma}) \le 2\,\|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]\,.$$

Odtud už plyne, že platí i ((7.24)). □

Analogicky předchozímu lemmatu máme také

**7.16. Lemma.** *Nechť $\Phi$ je libovolný lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. Položme*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}) & \textit{když } t = a\,, \\ \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}) & \textit{když } t \in (a,b)\,, \\ \Phi(\chi_{[b]}) & \textit{když } t = b\,. \end{cases} \tag{7.25}$$

*Potom* $\operatorname{var}_a^b p \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty,$ *tj.* $p \in \mathbb{BV}[a,b]).$

D ů k a z. Nechť $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, m,$ jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m.$ Potom

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} c_j\,[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})] \\ &\quad = c_1 \Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\Big] \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j\,]} + \chi_{(\sigma_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} + \chi_{(\sigma_{j-1},b]})\Big] \\ &\qquad + c_m \Big[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b]})\Big] = \Phi(h), \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

kde

$$
\begin{aligned}
h = \;& c_1\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]}+\chi_{(\sigma_1,b]}-\chi_{(a,b]}\right]+c_m\left[\chi_{[b]}-\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]}-\chi_{(\sigma_{m-1},b]}\right]\\
&\quad+\sum_{j=2}^{m-1} c_j\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]}+\chi_{(\sigma_j,b]}-\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\chi_{(\sigma_{j-1},b]}\right]\\
= \;& c_1\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]}-\chi_{(a,\sigma_1]}\right]-c_m\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]}+\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\right]\\
&\quad+\sum_{j=2}^{m-1} c_j\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]}-\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}-\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}\right]\\
= \;& -c_1\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]}+\chi_{(a,\sigma_1)}\right]-c_m\left[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]}+\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\right]\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j]}-\tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
= \;& -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j]}-\tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]}-\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
= \;& -\sum_{j=1}^{m-1}\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\chi_{[\sigma_j]}-\sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
= \;& -c_1\,\chi_{(a,\sigma_1)}-\sum_{j=2}^{m-1}\left(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\,\chi_{[\sigma_j]}+c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\right)-c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\,.
\end{aligned}
$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že

$$h(\sigma_j-)=-c_j,\;\; h(\sigma_j+)=-c_{j+1},\; h(\sigma_j)=-\tfrac{1}{2}(c_j+c_{j+1})\;\;\text{pro } j=1,2,\dots,m$$

čili $h\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)|\le 1$ pro všechna $t\in[a,b]$. Vzhledem k (7.26) tedy dostáváme, že nerovnost

$$
\begin{aligned}
&\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m} c_j\left[p(\sigma_j)-p(\sigma_{j-1})\right]\Big| : |c_j|\le 1,\; j=1,2,\dots,m\Big\}\\
&\qquad\qquad\le \sup\{|\Phi(x)| : x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\|x\|\le 1\}
\end{aligned}
$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$. Zvolíme-li nyní

$$c_j=\operatorname{sign}\left[p(\sigma_j)-p(\sigma_{j-1})\right]\quad\text{pro } j=1,2,\dots,m\,,$$

zjistíme,že platí

$$V(p,\boldsymbol{\sigma})\le\sup\{|\Phi(x)| : x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\|x\|\le 1\}<\infty\quad\text{pro každé }\;\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\,,$$

tj. $\mathrm{var}_a^b\, p \le \|\Phi\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]} < \infty.$ □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

**7.17. Věta.** *$\Phi$ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ $(\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b])$ právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\,. \tag{7.27}$$

*Navíc, zobrazení*

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b] \tag{7.28}$$

*je isomorfismus.*

D ů k a z. Nechť $\Phi$ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a nechť $\Phi_\eta$ je funkcionál definovaný předpisem (7.19), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce $p$ je definovaná v (7.23). Podle lemmatu 7.15 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.23) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q &&= \Phi_\eta(1)\,, \\ \Phi(\chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) &&= \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro } \tau \in [a,b)\,, \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p\,(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]})\,. \end{aligned}$$

Protože podle lemmatu 4.16 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ lineární kombinací funkcí

$$1,\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]},$$

plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle lemmatu 4.15 je množina $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, plyne odtud, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \ \text{ pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\,.$$

Podle věty 7.14 je (7.28) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$. Dále, podle věty 6.26 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \le \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b p + |q|\big)\,\|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le |p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b p + |q| \le 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}\,.$$

Na druhou stranu, podle ((7.25)) a podle lemmatu 7.15 je

$$|q| = |\Phi(1)| \le \|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}$$

a

$$\|p\|_{\mathbb{BV}} \le \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b p\big) \le 2\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]}.$$

Souhrnem máme

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]},$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{L}}[a,b]$$

je isomorfismus. □

**7.18. Věta.** *$\Phi$ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ $(\Phi \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b])$ právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro}\ \ x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]\,. \tag{7.29}$$

*Navíc, zobrazení*

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in \mathbb{G}^*_{reg}[a,b] \tag{7.30}$$

*je isomorfismus.*

D ů k a z . Předpokládejme, že $\Phi \in \mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]$, $\Phi_\eta$ je funkcionál definovaný vztahem (7.19), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a $p$ je funkce definovaná vztahem (7.25). Podle lemmatu 7.16 je $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.25) máme

$$\begin{aligned}
\Phi(1) \quad &= q &&= \Phi_\eta(1)\,,\\
\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) \quad &= p\,(\tau) &&= \Phi_\eta(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé } \tau \in [a,b)\,,\\
\Phi(\chi_{[b]}) \quad &= p\,(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]})\,.
\end{aligned}$$

Pomocí lemmatu 4.16 odtud odvodíme, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b].$$

Podle lemmatu 4.15 je ovšem množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ a tudíž dostáváme konečně, že platí $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$.

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu věty 7.17 dokázali bychom nyní, že platí také

$$\tfrac{1}{2}\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{\mathbb{G}^*_{\mathrm{reg}}[a,b]}\,.$$ □

**7.19. Cvičení.** Postupem použitým v důkazech vět 7.17 a 7.18 ukažte, že také platí

(i) $\Phi$ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t-) = x(t) \text{ pro } t \in (a,b]\}\,,$$

$($viz (4.2)$)$ *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(b)\,x(b) - \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\,.$$

(ii) $\Phi$ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G} : x(t+) = x(t) \text{ pro } t \in [a,b)\}\,,$$

$($viz (4.2)$)$ *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}[x] \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\,.$$

## 7.5 Aplikace Stieltjesova integrálu v teorii distribucí

V tomto odstavci naznačíme možnosti použití KS – integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

**7.20. Definice.** Množinu funkcí $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in N \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ $k$ – tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$ označíme symbolem $\mathfrak{D}[a,b]$. Funkcím z $\mathfrak{D}[a,b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a,b]$.

Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathfrak{D}[a,b]$ konverguje k $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{pro každé } \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro } \; t \in (c,d)\,, \\ 0 & \text{pro } \; t \in \mathbb{R} \setminus (c,d)\,, \end{cases}$$

kde $[c,d]$ může být libovolný podinterval v $(a,b)$.

**7.21. Definice.** Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ se nazývají *distribuce* na $[a,b]$. Množina všech distribucí na $[a,b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathfrak{D}[a,b]$. Značíme ji symbolem $\mathfrak{D}^*[a,b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, hodnotu funkcionálu $f$ na $\varphi$ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

**7.22. Poznámka.** Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak předpisem $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ je definována distribuce

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

na $[a,b]$, kterou budeme značit také symbolem $f$. Říkáme, že distribuce $f$ je určena funkcí $f$.

Nulový prvek prostoru $\mathfrak{D}^*[a,b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a,b]$. Speciálně, je-li $f \in \mathbb{G}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-) = f(s+) = 0$ pro všechna $t \in (a,b]$ a $s \in [a,b)$. Tudíž, je-li $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$, pak $f = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [a,b]$. Pro libovolné distribuce $f, g \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ rovnost $f = g$ znamená, že $f - g = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$. Z výše uvedeného plyne, že je-li $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ taková, že $f = g$ s.v. na $[a,b]$. Dále, pro reálné funkce $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí rovnost $f = g$ ve smyslu $\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f = g$ s.v. na $[a,b]$.

**7.23. Definice.** Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$, definujeme její (*distributivní*) *derivaci* $f'$ předpisem

$$f' : \varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle\,.$$

Podobně, pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)} : \varphi \in \mathfrak{D}[a,b] \to \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle\,.$$

**7.24. Poznámka.** Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou určeny jejich klasickými derivacemi.

**7.25. Poznámka.** Definujme

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0\,, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0\,, \\ 1 & \text{pro } t > 0\,. \end{cases}$$

Nechť $\tau \in (a,b)$ a $h_\tau(t) = H(t-\tau)$ pro $t \in [a,b]$. Potom použitím věty 6.34 a s přihlédnutím k (6.10) a (6.14) dostaneme

$$\langle h'_\tau, \varphi\rangle = -\langle h_\tau, \varphi'\rangle = -\int_a^b h_\tau \,\mathrm{d}\,\varphi = \int_a^b \mathrm{d}\,h_\tau\,\varphi = \varphi(\tau)\,.$$

Funkce $h_\tau$ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě $\tau$) a její distributivní derivace $h'_\tau$ se značí $\delta_\tau$ a nazývá se *Diracova $\delta$–distribuce* (se středem v bodě $\tau$).

**7.26. Věta.** *Nechť $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$. Potom $f'$ je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a,b]$.*

D ů k a z . Jestliže $f(t) = c$ pro s.v. $t \in [a,b]$ a $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, pak

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle c, \varphi'\rangle = -c\int_a^b \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = -c\,(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0\,.$$

Naopak, nechť $\langle f, \varphi'\rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Nechť je dána libovolná testovací funkce $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t \big(\rho(s) - a_0\,\Theta(s)\big)\,\mathrm{d}s & \text{pro } t \in [a,b]\,, \\[2ex] 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R}\setminus[a,b]\,, \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\displaystyle\int_a^b \varphi_{a,b}(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s)\,\mathrm{d}s = 1\,.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a také, že $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Dále,

$$\varphi'(t) = \rho(t) - a_0\,\Theta(t) \quad \text{pro } t \in [a,b]\,.$$

Tudíž

$$0 = \langle f, \varphi'\rangle = \langle f, \rho\rangle - \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta\rangle\,.$$

To znamená, že pro každé $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$ platí

$$\langle f, \rho\rangle = \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta\rangle = \int_a^b c\,\rho(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $c = \langle f, \Theta\rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f = c$ ve smyslu distribucí. □

**7.27. Cvičení.** Dokažte, že je-li $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $f^{(k)} = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1\,t + \cdots + c_{k-1}\,t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t \in [a,b].$$

Vážným problémem v teorii distribucí je jak definovat jejich součin. Následující dvě klasické definice se týkají jen speciálních typů distribucí.

**7.28. Definice.** (i) jestliže $f$, $g$ a $f\,g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak

$$\langle f\,g, \varphi \rangle = \int_a^b f\,g\,\varphi\,\mathrm{d}\,t\,.$$

(ii) jestliže $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a $g$ má na $[a,b]$ spojité derivace libovolného řádu, pak

$$\langle f\,g, \varphi \rangle = \langle f, g\,\varphi \rangle\,.$$

Definice 7.28 zahrnuje součin $f\,g$, kde $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Nevztahuje se ale např. na případy, které se objevují v následující definici.

**7.29. Definice.** Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak definujeme

$$\langle f'\,g, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi\,g\ \mathrm{d}\,f \tag{7.31}$$

a

$$\langle f\,g', \varphi \rangle = \int_a^b \varphi\,f\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{7.32}$$

**7.30. Lemma.** *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *splňují*

$$\Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) \quad \textit{pro každé } t \in (a,b), \tag{7.33}$$

*Potom*

$$f'\,g = F', \quad \textit{kde } F(t) = \int_a^t g\,\mathrm{d}\,f \ \textit{ pro } t \in [a,b] \tag{7.34}$$

*a*

$$f\,g' = G', \quad \textit{kde } G(t) = \int_a^t f\,\mathrm{d}\,g \ \textit{ pro } t \in [a,b]\,. \tag{7.35}$$

D ů k a z. Použitím věty o substituci (věta 6.44) a věty o integraci per-partes (věta 6.34) pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f'\,g,\varphi\rangle &= \int_a^b \mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big]\,\varphi(t) = -\int_a^b \Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle\Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}f\Big)',\varphi\rangle\,,\end{aligned}$$

t.j. platí (7.34). Vztah (7.35) se dokazuje analogicky. □

**7.31. Důsledek.** Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují (7.33), pak

$$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g.$$

D ů k a z. Podle definice 7.23, věty o integraci per-partes (viz věta 6.34) a lemmatu 7.30 dostáváme

$$\begin{aligned}\langle f\,g)',\varphi\rangle &= -\langle f\,g,\varphi'\rangle \\ &= -\int_a^b f\,g\,\varphi'\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\big[f(t)\,g(t) - f(a)\,g(a)\big] \\ &= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}f + \int_a^t f\,\mathrm{d}g\Big] = \int_a^b \varphi\,g\,\mathrm{d}f + \int_a^b \varphi\,f\,\mathrm{d}g \\ &= \langle f\,g',\varphi\rangle + \langle f'\,g,\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

□

**7.32. Poznámka.** Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podmínka (7.33) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech:

(i) obě funkce jsou regulární,

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na $(a,b)$,

(iii) jedna z nich zleva spojitá na $(a,b)$ a druhá je zprava spojitá na $(a,b)$.

**7.33. Cvičení.** Dokažte, že jestliže $\tau \in (a,b)$ a $h_\tau$ resp. $\delta_\tau$ jsou Heavisideova funkce resp. Diracova distribuce se středem v $\tau$, pak $h_\tau\,\delta_\tau = \frac{1}{2}\,\delta_\tau$. (Návod: Použijte cvičení 6.32.)