Kapitola 8

Zobecněné lineární diferenciální rovnice

8.1 Úvod

Všechny integrály v této kapitole jsou KS – integrály, jejichž definice je rozšířena ve smyslu odstavce 6.8 na maticové funkce (tj. funkce zobrazující interval $[a,b]$ do prostoru matic). Jak jsme již v odstavci 6.8 vysvětlili, všechny vlastnosti KS – integrálu i obou typů RS – integrálu, které jsme doposud dokázali pro skalární funkce platí i pro funkce vektorové či maticové, pokud se v příslušných formulích nezmění pořadí v jaké se tam maticové funkce objevují. V důkazech se tedy budeme pro potřebné vlastnosti funkcí a integrálů odvolávat na odpovídající tvrzení pro skalární funkce z kapitol 1 – 6.

Následující definice zavádí prostory vektorových resp. maticových funkcí, se kterými budeme v této kapitole pracovat.

8.1. Definice. (i) $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je Banachův prostor funkcí $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, které jsou regulované na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je definována předpisem $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$ pro $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, kde $|f(t)|$ je norma vektoru $f(t)$ v $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je Banachův prostor funkcí $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, které mají konečnou variací na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je definována předpisem $\|F\|_{\mathbb{BV}}=|F(a)|+\operatorname{var}_a^b F$ pro $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. kde $\operatorname{var}_a^b F$ se definuje jako v odstavci 6.8 a $|F(a)|$ je norma matice $F(a)$ v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně se definují prostory $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a normy na nich.

Množinu funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ s derivací spojitou na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. (Jako obvykle, definujeme $f'(a)=f'(a+)$ a $f'(b)=f'(b-)$ pro $f\in\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.)

Tématem této kapitoly budou rovnice tvaru

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}[A]\,x + f(t) - f(t_0) \tag{8.1}$$

kde $t_0 \in [a,b]$, A je $n \times n-$maticová funkce, f je $n-$vektorová funkce a hledáme $n-$vektorovou funkci x vyhovující následující definici:

8.2. Definice. Funkce $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (8.1) na intervalu $[a,b]$ jestliže $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\,[A]\,x$ existuje a rovnost (8.1) je splněna pro každé $t \in [a,b]$.

Rovnice (8.1) se nazývá *zobecněná lineární diferenciální rovnice*.

8.3. Poznámka. Buď dáno $t_0 \in [a,b]$ a nechť x je řešení rovnice (8.1) na $[a,b]$. Potom

$$x(a) = x(t_0) - \int_a^{t_0} \mathrm{d}\,[A]\,x - f(a) + f(t_0)\,.$$

Odečteme-li tuto rovnost od (8.1), dostaneme

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \mathrm{d}\,[A]x + f(t) - f(a)\,. \tag{8.2}$$

Podobně bychom z (8.2) odvodili (8.1). Funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je tedy řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ právě tehdy, když splňuje rovnici (8.2) na $[a,b]$.

8.2 Diferenciální rovnice s impulsy

Motivací pro studium zobecněných diferenciálních rovnic jsou m.j. úlohy s impulsy. V řadě praktických úloh se totíž potkáme s perturbacemi, jejichž doba působení je sice zanedbatelná v porovnání s dobou celého procesu, které ale nicméně podstatně ovlivní studovaný proces. Zpravidla, vhodným modelem pro popis takových procesů jsou *diferenciální rovnice s impulsy*, tj. diferenciální rovnice, jejichž řešení nemusí být hladké, ba ani spojité.

Zdrojem modelů s impulsy je zejména fyzika (např. popis hodinových mechanismů, oscilace elektromechanických systémů, vyzařování elektrických resp. magnetických vln v prostředí s rychle se měnícími parametry v daných okamžicích prudce změní, pohyb částice v poli generovaném potenciálem soustředěným v jediném bodě, stabilizace Kapicova kyvadla, optimální regulace metodou bang-bang), ale také medicína (distribuce léčivých látek v těle, strategie impulsní vakcinace v epidemiologických modelech, studium účinku hromadného očkování proti spalničkám), populační dynamika (modely s rychlými změnami počtu některých populací) či ekonomie (modely trhu, které připouštějí prudké změny cen).

Nejjednodušší idealizací impulsních procesů jsou procesy popsané lineárními diferenciálními rovnicemi, na které v konečném počtu pevně daných bodů působí lineární impulsy .

Předpokládejme, že

$$\left.\begin{aligned} & r\in\mathbb{N},\ \ r\geq 1,\ \ a<\tau_1<\ldots<\tau_r<b\,,\\ & P\in\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ \ q\in\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)\,,\\ & B_k\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \ d_k\in\mathbb{R}^n\ \text{ pro } k=1,2,\ldots,r\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

(Poznamenejme, že v této kapitole symboly typu B_k resp. d_k značí také matice resp. vektory. Komponenty vektorů či matic se zde neobjeví.)

Označme

$$D=\big\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r\big\},\ \ \tau_0=a\quad\text{a}\quad\tau_{r+1}=b$$

a pro každou funkci $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ definujme

$$\left.\begin{aligned} & x_{[1]}(t)=x(t)\quad\text{pro } t\in[a,\tau_1]\\ & \text{a}\\ & x_{[k]}(t)=\begin{cases} x(\tau_{k-1}+) & \text{když } t=\tau_{k-1},\\ x(t) & \text{když } t\in[\tau_{k-1},\tau_k] \end{cases}\quad\text{pro } k=2,3,\ldots,r+1\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Lineární impulsní úloha je pak tvořena lineární diferenciální rovnicí

$$x'=P(t)\,x+q(t) \tag{8.5}$$

a lineárními impulsními podmínkami

$$\Delta^+x(\tau_k)=B_k\,x(\tau_k)+d_k,\quad k=1,2,\ldots,r\,, \tag{8.6}$$

přičemž řešení jsou určena podle následující definice.

8.4. Definice. Řekneme, že funkce $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (8.5), (8.6), jestliže

$$x_{[k]}\in\mathbb{C}^1([\tau_{k-1},\tau_k]\quad\text{pro každé } k=1,2,\ldots,r+1 \tag{8.7}$$

a x vyhovuje impulsním podmínkám (8.6) a splňuje diferenciální rovnost

$$x'(t)=P(t)\,x(t)+q(t)\quad\text{pro } t\in[a,b]\setminus D\,. \tag{8.8}$$

8.5. Poznámka. Povšimněme si, že řešení úlohy (8.5), (8.6) patří vždy do prostoru $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Ukážeme nyní, že úlohu (8.5), (8.6) můžeme ekvivalentně přeformulovat jako zobecněnou lineární diferenciální rovnici tvaru (8.2).

Předpokládejme zprvu, že $r=1$ a nechť $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešení impulsní úlohy (8.5), (8.6). Integrací rovnosti (8.8) dostaneme vztahy

$$x(t) = x(a) + \int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + \int_a^t q\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro } t\in[a,\tau_1]\,,$$

a

$$x(t) = x(\tau_1+) + \int_{\tau_1}^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + \int_{\tau_1}^t q\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t\in(\tau_1,b]\,,$$

Dosazením z podmínek (8.6) (kde $k=r=1$) do druhého vztahu pak dostaneme pro $t\in(\tau_1,b]$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\tau_1) + B_1\,x(\tau_1) + d_1 + \int_{\tau_1}^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + \int_{\tau_1}^t q\,\mathrm{d}s \\ &= x(a) + \int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + B_1\,x(\tau_1) + \int_a^t q\,\mathrm{d}s + d_1 \end{aligned}$$

a tedy

$$x(t) = x(a) + \int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,\big(B_1\,x(\tau_1)\big) + \int_a^t q\,\mathrm{d}s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1\,. \tag{8.9}$$

Položme

$$A(t) = \int_a^t P\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t) = \int_a^t q\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1\,.$$

Potom $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a podle věty o substituci 6.44 a formule (6.10) z příkladů 6.15 (ii) (viz též příklady 6.41) platí

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,x = \int_a^t P\,x\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,\big(B_1\,x(\tau_1)\big)$$

a

$$f(t) - f(a) = \int_a^t q\,\mathrm{d}s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

pro $t\in[a,b]$ a $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dosazením do (8.9) je zjistíme, že x splňuje (8.2) na $[a,b]$.

Obráceně, jestliže $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.2) na $[a,b]$, pak podle výše uvedeného platí opět (8.9) na $[a,b]$. Odtud vidíme, že definujeme-li funkce $x_{[k]}$

jako v (8.4), bude platit (8.7) a (8.8). Navíc, podle Hakeovy věty (viz též cvičení 6.40) je $x(t-) = x(t)$ pro každé $t \in (a, b]$ a

$$\begin{aligned} x(t+) &= x(a) + \lim_{s \to t+} \int_a^s \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t+) - f(a) \\ &= x(a) + \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(a) + \Delta^+ A(t)\,x(t) + \Delta^+ f(t) \\ &= x(t) + \chi_{[\tau_1]}(t)\,\big(B_1\,x(t) + d_1\big) \quad \text{pro každé } t \in [a, b]\,. \end{aligned}$$

Speciálně, dosazením $t = \tau_1$ zjistíme, že x splňuje impulsní podmínku (8.6), kde $k = r = 1$.

Úloha (8.5), (8.6) je tedy pro $r = 1$ ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí (8.2).

V obecném případě $r \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \int_a^t P\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^r \chi_{(\tau_k, b]}(t)\,B_k \\ &\text{a} \\ f(t) &= \int_a^t q\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^r \chi_{(\tau_k, b]}(t)\,d_k\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } t \in [a, b]\,. \tag{8.10}$$

Indukcí snadno ověříme následující tvrzení.

8.6. Věta. *Předpokládejme* (8.3) *a* (8.10). *Potom impulsní úloha* (8.5), (8.6) *je ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí* (8.2), *tj.* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *je řešením úlohy* (8.5), (8.6) *na intervalu* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, když je řešením rovnice* (8.2) *na intervalu* $[a, b]$. □

8.3 Lineární operátory

Připomeňme nyní stručně několik základních pojmů z funkcionální analýzy, které budeme nadále potřebovat. Podrobnější informaci lze najít např. ve většině učebnic funkcionální analýzy (viz např. [3], [19], [32], [39]). Základní přehled je obsažen také v úvodní části monografie [53].

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou Banachovy prostory. Zobrazení $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ (T zobrazuje $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$) je *spojitý operátor*, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_{\mathbb{Y}} = 0\,,$$

kde $\|.\|_{\mathbb{X}}$ je norma na $\mathbb{X}$ a $\|.\|_{\mathbb{Y}}$ je norma na $\mathbb{Y}$. Operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ se nazývá *lineární*, jestliže platí

$$T\,(c_1\,x_2+c_2\,x_2)=c_1\,T(x_1)+c_2\,T(x_2)\ \text{ pro } x_1,x_2\in\mathbb{X} \ \text{ a } \ c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Dále, T je *ohraničený*, jestliže existuje číslo $K\in[0,\infty)$ takové, že platí

$$\|T(x)\|_{\mathbb{Y}}\leq K\,\|x\|_{\mathbb{X}} \quad \text{pro každé } x\in\mathbb{X}\,.$$

Je-li T lineární operátor, píšeme, jak je zvykem, $T\,x$ místo $T(x)$. Je známo, že lineární operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ je spojitý právě tehdy, když je ohraničený.

Množinu ohraničených lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Na $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ jsou zřejmým způsobem zavedeny operace sčítání operátorů a násobení operátorů reálným číslem a $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je pak Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|L\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}=\sup_{\substack{x\in\mathbb{X}\\ \|x\|_x\leq 1}}\|L\,x\|_{\mathbb{Y}} \quad \text{pro } x\in\mathbb{X}\,.$$

Konečně, řekneme, že $L\in\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je *kompaktní*, jestliže zobrazuje každou množinu ohraničenou v $\mathbb{X}$ na množinu relativně kompaktní v $\mathbb{Y}$, tj. jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{X}$ její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{Y}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $\mathbb{Y}$. Je známo, že každý kompaktní lineární operátor je současně spojitý.

V důkazech hlavních výsledků této kapitoly využijeme následující dvě tvrzení. První z nich je zobecněním jedné z Fredholmových vět známých z teorie integrálních rovnic. Jeho důkaz je obsažen např. v monografiích N. Dunforda a J.T. Schwartze [5], M. Schechtera [42] nebo ve skriptech J. Lukeše [32].

8.7. Věta (FREDHOLMOVA VĚTA O ALTERNATIVĚ)**.** *Buď $\mathbb{X}$ Banachův prostor a nechť L je lineární kompaktní operátor zobrazující $\mathbb{X}$ do sebe. Potom operátorová rovnice*

$$x-L\,x=g \tag{8.11}$$

má řešení pro každé $g\in\mathbb{X}$ tehdy a jen tehdy, když příslušná homogenní rovnice

$$x-L\,x=0 \tag{8.12}$$

má pouze triviální řešení $x=0\in\mathbb{X}$. V takovém případě je řešení rovnice (8.11) *určeno jednoznačně.*

Druhé tvrzení je známo také z elementární teorie matic. Připomeňme si zde jeho obecnou podobu převzatou z monografie [56] (viz Lemma 4.1-C).

8.8. Lemma. *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor,* $T \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$ *a* $\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} < 1$. *Potom existuje ohraničený inversní operátor* $[I-T]^{-1}$ *k operátoru* $[I-T]$ *a platí nerovnost*

$$\left\| [I-T]^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}}\,.$$

8.4 Existence řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

Studium zobecněných lineárních diferenciálních rovnic zahájíme jednoduchým pozorováním vycházejícím ze známých vlastností KS – integrálu.

8.9. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$, $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$. *Potom každé řešení* x *rovnice* (8.1) *na* $[a,b]$ *je regulované na* $[a,b]$.

D ů k a z . Podle Saksova – Henstockova lemmatu (viz jeho důsledek 6.38) je pravá strana rovnice (8.1) funkce regulovaná na $[a,b]$. Odtud plyne tvrzení věty. □

Vzhledem ke větě 8.9 je tedy vhodné hledat řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic ve třídě $\mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$.

Analogiemi počátečních úloh pro lineární obyčejné diferenciální rovnice jsou zobecněné lineární diferenciální rovnice

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\, x + f(t) - f(t_0)\,, \tag{8.13}$$

na intervalu $[a,b]$, kde $t_0 \in [a,b]$ a $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor. (Zřejmě je $x(t_0) = \widetilde{x}$ pro každou funkci x splňující (8.13).)

Každé funkci $x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a bodu $t_0 \in [a,b]$ přiřaďme funkci $\mathscr{A}_{t_0} x$ předpisem

$$(\mathscr{A}_{t_0} x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\, x \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b]\,. \tag{8.14}$$

Podle důsledku 6.38 jsou funkce $\mathscr{A}_{t_0} x$ regulované na $[a,b]$. Zobrazení

$$\mathscr{A}_{t_0} : x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0} x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$$

je zřejmě lineární a, dále, podle věty 6.17 platí

$$\|\mathscr{A}_{t_0} x\| \le \left(\operatorname{var}_a^b A\right) \|x\| \text{ pro každé } x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\,.$$

Pro každé $t_0 \in [a,b]$ je tedy $\mathscr{A}_{t_0}$ spojitý lineární operátor na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj. $\mathscr{A}_{t_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme nyní, že současně je předpisem (8.14) definován spojitý lineární operátor zobrazující $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

8.10. Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a nechť funkce* $\mathscr{A}_{t_0} x$ *je pro* $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *definována vztahem* (8.14). *Potom* $\mathscr{A}_{t_0} x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *pro každé* $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a zobrazení*

$$x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0} x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je ohraničené.

D ů k a z. Buď $\boldsymbol{\sigma}$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Podle věty 6.17 pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(\mathscr{A}_{t_0} x)(\sigma_j) - (\mathscr{A}_{t_0} x)(\sigma_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\,[A]\,x \right| \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A\right) \|x\| = \left(\operatorname{var}_a^b A\right) \|x\|\end{aligned}$$

a

$$|(\mathscr{A}_{t_0} x)(a)| = \left| \int_{t_0}^{a} \mathrm{d}\,[A]\,x \right| \le \left(\operatorname{var}_a^b A\right) \|x\|\,.$$

Tudíž $\mathscr{A}_{t_0} x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a

$$\|\mathscr{A}_{t_0} x\|_{\mathbb{BV}} = |(\mathscr{A}_{t_0} x)(a)| + \operatorname{var}_a^b (\mathscr{A}_{t_0} x) \le 2 \left(\operatorname{var}_a^b A\right) \|x\|\,.$$

pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. □

Pomocí operátoru $\mathscr{A}_{t_0}$ z (8.14) můžeme přepsat počáteční úlohu (8.13) jako operátovou rovnici

$$x - \mathscr{A}_{t_0} x = g, \quad \text{kde } g = \widetilde{x} + f - f(t_0)\,.$$

Protože nemáme k dispozici prostředky postačující k důkazu kompaktnosti operátoru $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$, nemůžeme přímo aplikovat Fredholmovu větu (věta 8.7) a musíme postupovat tak trochu oklikou. V následující větě ukážeme pomocí Hellyovy věty a Osgoodovy věty, že operátor $\mathscr{A}_{t_0}$ generuje kompaktní zobrazení prostoru $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do sebe.

8.11. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. *Položme* $L\,x = \mathscr{A}_{t_0} x$ *pro* $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Potom* L *je kompaktní lineární operátor na* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

D ů k a z. Protože je $\|x\| \le \|x\|_{\mathbb{BV}}$ pro každé $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, plyne z lemmatu 8.10, že $L \in \mathscr{L}(\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ její obraz $\{L\,x_n\} \subset \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ obsahuje podposloupnost, která je konvergentní v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Nechť jsou tedy posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ a číslo $C \in [0,\infty)$ takové, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \le C < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (věta 2.43) existují funkce $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a podposloupost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \le C \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } t \in [a,b]\,.$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ a pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a,b]$. Potom

$$|z_k(t)| \le 2\,C \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} z_k(t) = 0 \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \text{ a } t \in [a,b]\,.$$

Vzhledem k tomu, že všechny integrály $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[A]\,z_k$ a $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^s A]\,z_k(s)$, $k \in \mathbb{N}$, existují pro libovolná $c, d \in [a,b]$, věta 6.17 zaručuje, že platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(L\,z_k)(\sigma_j) - (L\,z_k)(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\,[A]\,z_k \right|$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $k \in \mathbb{N}$. Máme tedy

$$\mathrm{var}_a^b\,(L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}\,.$$

Podle věty 6.48 je ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| = 0$$

a tudíž také

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{var}_a^b\,\big(L\,x_{n_k} - L\,x\big) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{var}_a^b\,(L\,z_k) = 0\,.$$

Podobně

$$\lim_{k\to\infty} \big|\big(L\,x_{n_k}(a) - L\,x(a)\big)\big| = \lim_{k\to\infty} |(L\,z_k)(a)| = \lim_{k\to\infty} \Big|\int_{t_0}^{a} \mathrm{d}\,[A]\,x\Big|$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{a} \big[\mathrm{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| = 0\,.$$

Věta je dokázána. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 8.7 a věty 8.11.

8.12. Věta. *Buď dáno* $t_0 \in [a,b]$. *Rovnice*

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x = g(t) \tag{8.15}$$

má pro každou funkci $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *řešení na* $[a,b]$ *právě tehdy, když příslušná homogenní rovnice*

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x = 0 \tag{8.16}$$

má na $[a,b]$ *pouze triviální řešení* $x \equiv 0$. *V takovém případě je řešení rovnice* (8.15) *určeno jednoznačně.*

D ů k a z . Rovnice (8.15) je ekvivalentní s operátorovou rovnicí $x - L\,x = g$, kde $L\,x = \mathscr{A}_{t_0}\,x$ pro $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj.

$$(L\,x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x \quad \text{pro } x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n) \;\text{ a }\; t \in [a,b].$$

Podle věty 8.11 je L lineární kompaktní operátor na $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. K dokončení důkazu věty využijeme větu 8.7. □

Předpokládejme nyní, že $t \in (t_0,b]$ a funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.13) na intervalu $[t_0,t)$. Zřejmě je $x(t_0) = \widetilde{x}$. Pomocí Hakeovy věty (věta 6.39, viz též příklady 6.41) snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned} x(t-) &= \widetilde{x} + \lim_{\tau\to t-} \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}\,[A]\,x + \big(f(t-) - f(t_0)\big) \\ &= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(t_0) - \lim_{\tau\to t-} \int_{\tau}^{t} \mathrm{d}\,[A]x - \Delta^- f(t) \\ &= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(t_0) - \Delta^- A(t)\,x(t) - \Delta^- f(t)\,. \end{aligned}$$

Má-li tedy funkce x splňovat (8.13) také v bodě $t,$ musí hodnota $x(t)$ vyhovovat rovnici

$$\big[I - \Delta^- A(t)\big]\, x(t) = x(t-) + \Delta^- f(t)\,, \tag{8.17}$$

kde I značí jednotkovou matici typu $n \times n$ (viz (xiv)). Odtud je zřejmé, že k tomu, aby řešení úlohy (8.13) na intervalu $[a,t)$ bylo možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu $t,$ bude stačit, aby platilo

$$\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \neq 0\,. \tag{8.18}$$

Úlohu (8.13) můžeme ovšem také přepsat ve tvaru

$$x(t) = x(b) - \int_t^b \mathrm{d}\,[A\,]\,x + f(b) + f(t)\,.$$

Podobně jako výše můžeme tedy usoudit (rozmyslete si detaily), že k tomu, aby řešení počáteční úlohy (8.13) na intervalu $(t,t_0]$ bylo možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu $t,$ bude stačit, aby platilo

$$\big[I + \Delta^+ A(t)\big]\, x(t) = x(t+) - \Delta^+ f(t) \tag{8.19}$$

a

$$\det\big[I + \Delta^+ A(t)\big] \neq 0\,. \tag{8.20}$$

Můžeme tedy očekávat, že podmínky (8.18) a (8.20) jsou podstatné pro existenci řešení úlohy (8.13).

Jednoduchou úpravou vztahů (8.17) a (8.19) dostaneme následující tvrzení.

8.13. Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $g \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Potom vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \Delta^- x(t) &= \Delta^- A(t)\; x(t) + \Delta^- f(t)\,, \\ \Delta^+ x(s) &= \Delta^+ A(s)\, x(s) + \Delta^+ f(s) \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

platí pro každé řešení x *úlohy* (8.13) *na* $[a,b],$ $t \in (a,b]$ *a* $s \in [a,b).$ □

8.14. Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom rovnice* (8.15) *má řešení pro každou funkci* $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } t \in (t_0,b] \tag{8.22}$$

a

$$\det\big[I + \Delta^+ A(s)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } s \in [a,t_0)\,. \tag{8.23}$$

(*Zde* $(t_0,b] = \emptyset$ *když* $t_0 = b$ *a* $[a,t_0) = \emptyset$ *když* $t_0 = a$.)

V takovém případě je řešení rovnice (8.15) *určeno jednoznačně.*

D ů k a z . Podle věty 8.12 stačí dokázat, že rovnice (8.16) má pouze triviální řešení na $[a,b]$ právě tehdy, když platí (8.22).

a) Předpokládejme, že $t_0 \in [a,b)$ a x je řešení rovnice (8.16) na $[a,b]$. Podle lemmatu 8.10 je $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Zřejmě $x(t_0) = 0$. Podle první z rovnic ve (8.21) máme

$$\Delta^+ x(t_0) = \Delta^+ A(t_0)\, x(t_0) = 0\,,$$

tj. $x(t_0+) = 0$. Označme $\alpha(t) = \operatorname{var}_{t_0}^t A$ pro $t \in [t_0,b]$. Funkce α je neklesající na intervalu $[t_0,b]$. Existuje tedy konečná limita $\alpha(t_0+)$ a můžeme tedy zvolit $\delta \in (0, b-t_0)$ tak, aby platilo

$$0 \le \alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+) < \frac{1}{2}\,.$$

Pro každé $t \in [t_0, t_0+\delta]$ odtud pomocí vět 6.17 a 6.39 odvodíme nerovnosti

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[\alpha\,]\,|x| = \Delta^+\alpha(t_0)\,x(t_0) + \lim_{\tau\to t_0+}\int_\tau^t \mathrm{d}\,[\alpha\,]\,|x| \\ &= \lim_{\tau\to t_0+}\int_\tau^t \mathrm{d}\,[\alpha\,]\,|x| \le \big[\alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+)\big]\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big) \\ &< \frac{1}{2}\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big)\,.\end{aligned}$$

Tudíž $\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big) \le \frac{1}{2}\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x(t)|\Big)$. To je ale možné pouze tehdy, když $x = 0$ na $[t_0, t_0+\delta]$.

Položme $t^* = \sup\{\tau \in (t_0,b] : x = 0$ na $[t_0,\tau]$. Zřejmě je $x = 0$ na $[t_0,t^*)$ a tudíž také $x(t^*-) = 0$. Dále, podle (8.21) máme

$$0 = \big[I - \Delta^- A(t*)\big]\,x(t^*)\,.$$

To je ale, vzhledem k předpokladu (8.22), možné pouze tehdy, když $x(t^*) = 0$.

Předpokládejme, že $t^* < b$. Stejnou argumentací, jakou jsme na začátku důkazu dokázali, že existuje $\delta \in (0, b-t_0)$ takové, že x je nulové na $[t_0, t_0+\delta]$, ukázali bychom nyní, že existuje $\eta \in (0, b-t^*)$ takové, že x se anuluje na $[t^*, t^*+\eta]$, což je ovšem, vzhledem k definici t^* nemožné, tudíž musí být $t^* = b$. Dokázali jsme, že každé řešení rovnice (8.16) je nulové na $[t_0,b]$.

Podobně bychom pomocí předpokladu (8.23) dokázali, že je-li $t_0 \in (a,b]$, pak se řešení x rovnice (8.16) anuluje také na $[a,t_0]$.

b) Předpokládejme, že neplatí např. (8.22). Zřejmě je $\det\big[I-\Delta^- A(t)\big]\neq 0$, jestliže je $|\Delta^- A(t)|\leq 1/2$. Na druhou stranu, podle důsledku 4.10, obrácená nerovnost $|\Delta^- A(t)|>1/2$ platí pro nejvýše konečně mnoho bodů $t\in(t_0,b]$. To znamená, že matice $I-\Delta^- A(t)$ není regulární pro nejvýše konečně mnoho $t\in(t_0,b]$.

Můžeme tedy zvolit $t^*\in(t_0,b]$ takové, že

$$\det\big[I-\Delta^- A(t)\big]\neq 0 \text{ pro } t\in(t_0,t^*) \quad \text{a} \quad \det\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]=0\,.$$

Dále, ze základů lineární algebry je známo, že potom existuje $d\in\mathbb{R}^n$ takové, že

$$\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]\,c\neq d \quad \text{pro každé } \ c\in\mathbb{R}^n\,. \tag{8.24}$$

Definujme

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{když } \ t\neq t^*\,,\\ d & \text{když } \ t=t^*\,.\end{cases}$$

Máme $\Delta^- g(t^*)=d$. Předpokládejme, že rovnice (8.15) má na $[a,b]$ řešení x. Potom podle první části důkazu musí být $x=0$ na $[a,t^*)$ a tedy také $x(t^*-)=0$. Podle lemmatu 8.13 musí platit

$$\big[I-\Delta^- A(t^*)\big]\,x(t^*)=d\,.$$

To je ovšem ve sporu s tvrzením (8.24). Rovnice (8.15) tedy nemůže mít řešení.

Neplatí-li (8.23), pak analogicky najdeme bod $t^*\in[a,b]$ a funkci g takové, že bude

$$\big[I+\Delta^+ A(t^*)\big]\,c\neq \Delta^+ g(t^*) \quad \text{pro každé } \ c\in\mathbb{R}^n,$$

což vede opět ke sporu s lemmatem 8.13. □

8.15. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0\in[a,b]$. *Potom počáteční úloha* (8.13) *má pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x}$ *jednoznačně určené řešení tehdy a jen tehdy, když platí* (8.22) *a* (8.23).

D ů k a z . Věta je důsledkem věty 8.12 a lemmatu 8.14, kde položíme

$$g(t)=\widetilde{x}+f(t)-f(t_0) \quad \text{pro } \ t\in[a,b]. \qquad \square$$

8.5 Zobecněná Gronwallova nerovnost a apriorní odhady řešení

Důležitou roli v teorii obyčejných diferenciálních rovnic (např. při důkazu jednoznačnosti řešení počáteční úlohy nebo při důkazech spojité závislosti řešení na některých parametrech) hraje tvrzení, které se nazývá Gronwallovo lemma. Připomeňme si jeho znění. Důkaz lze najít ve většině učebnic obyčejných diferenciálních rovnic (viz např. [26, Pomocná věta 4.3.1]).

8.16. Lemma (GRONWALL). *Nechť funkce* u *a* p *jsou spojité a nezáporné na* $[a,b]$, $K \geq 0$ *a nechť*

$$u(t) \leq K + \int_a^t \big(p\,u\big)\,\mathrm{d}\,s \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Potom

$$u(t) \leq K\,\exp\big(\int_a^t p\,\mathrm{d}\,s\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Pro nas bude podobně důležité zobecnění Gronwallova lemmatu na případ, kdy se v příslušných integrálních nerovnostech vyskytuje Stieltjesův integrál.

8.17. Věta (ZOBECNĚNÉ GRONWALLOVO LEMMA). *Předpokládejme, že funkce* $u : [a,b] \to [0,\infty)$ *je ohraničená na* $[a,b]$, *funkce* $h : [a,b] \to [0,\infty)$ *je neklesající a zleva spojitá na* $(a,b]$, $K \geq 0$, $L \geq 0$ *a nechť*

$$u(t) \leq K + L \int_a^t u\,\mathrm{d}\,h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.25}$$

Potom

$$u(t) \leq K\,\exp\big(L\,[h(t) - h(a)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.26}$$

D ů k a z . Nechť $\kappa \geq 0$ a $w_\kappa(t) = \kappa\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)$ pro $t \in [a,b]$. Potom

$$\begin{aligned} \int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa \int_a^t \exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)\,\mathrm{d}\,h(s) \\ &= \kappa \int_a^t \Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{L^k}{k!}\,\big[h(t)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,h(s) \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Protože, jak známo řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k}{k!}\,\big[h(t)-h(a)\big]^k$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, můžeme přehodit pořadí operací integrace a sčítání. Použijeme-li nyní navíc tvrzení z příkladu 6.19, dostaneme tedy

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{L^k}{k!}\,\int_a^t\big[h(s)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,h(s)\\ &\le \kappa\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{L^k\,[h(t)-h(a)]^{k+1}}{(k+1)!}\Big)=\frac{\kappa}{L}\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)=\frac{w_\kappa(t)}{L}\end{aligned}$$

pro $t\in[a,b]$. To znamená, že funkce w_κ splňuje pro každé $\kappa\ge 0$ a $t\in[a,b]$ nerovnost

$$w_\kappa(t)\ge\kappa+L\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h\,. \tag{8.27}$$

Buď dáno $\varepsilon>0$ a položme $\kappa=K+\varepsilon$ a $v_\varepsilon=u-w_\kappa$. Odečtením nerovností (8.25) a (8.27) zjistíme, že platí

$$v_\varepsilon(t)\le-\varepsilon+\int_a^t v_\varepsilon\,\mathrm{d}\,h\quad\text{pro}\ \ t\in[a,b]\,. \tag{8.28}$$

Speciálně, $v_\varepsilon(a)=-\varepsilon<0$. Zbývající část důkazu bude připomínat postup z důkazu lemmatu 8.14. Funkce x i w_κ jsou evidentně ohraničené na $[a,b]$ pro každé $\kappa\ge 0$. Tudíž také funkce v_ε je ohraničená na $[a,b]$. Podle Saksova-Henstockova lemmatu 6.36 máme

$$\begin{aligned}\int_a^t v_\varepsilon\,\mathrm{d}\,h &= v_\varepsilon(a)\,\Delta^+h(a)+\lim_{\delta\to 0+}\int_{a+\delta}^t v_\varepsilon\,\mathrm{d}\,h\\ &\le-\varepsilon\,\Delta^+h(a)+\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]\le\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]\end{aligned}$$

a tedy

$$v_\varepsilon(t)\le-\varepsilon+L\int_a^t v_\varepsilon\,\mathrm{d}\,h\le-\varepsilon+L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]\quad\text{pro}\ \ t\in[a,b]\,.$$

Zvolme $\eta>0$ tak, aby platilo $L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]<\varepsilon/2$ pro $t\in[a,a+\eta]$. Pak bude $v_\varepsilon<0$ na $[a,a+\eta]$. Označme

$$t^*=\inf\{\tau\in[a,b]:v_\varepsilon<0\ \text{ na }[a,\tau]\}.$$

Vidíme. že je $t^* > a$ a $v_\varepsilon < 0$ na $[a, t^*)$. Opětným použitím Saksova-Henstockova lemmatu 6.36 dostaneme z (8.28)

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t) &\le -\varepsilon + L \int_a^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \\ &= -\varepsilon + L \left(v_\varepsilon(t^*) \Delta^- h(t^*) + \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \right) \le -\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

protože $\Delta^- h(t^*) = 0$ a $\displaystyle\int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h < 0$ pro každé $\delta > 0$.

Kdyby bylo $t^* < b$, zopakovali bychom předcházející postup a ukázali, že existuje $\eta \in (0, b - t^*)$ takové, že $v_\varepsilon < 0$ na intervalu $[a, t^* + \eta]$, což je ve sporu s definicí t^*. Tudíž $t^* = b$, $v_\varepsilon < 0$ na celém $[a, b]$ a

$$u(t) < w_\kappa(t) = K \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) + \varepsilon \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) \text{ pro } t \in [a, b]\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (8.26). □

8.18. Cvičení. Dokažte následující variantu věty (8.26)*:*

Předpokládejme, že funkce $u : [a, b] \to [0, \infty)$ *je ohraničená na* $[a, b]$, *funkce* $h : [a, b] \to [0, \infty)$ *je neklesající a zprava spojitá na* $[a, b)$, $K \ge 0$, $L \ge 0$ *a*

$$u(t) \le K + L \int_t^b u \, \mathrm{d}\, h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.29}$$

Potom

$$u(t) \le K \, \exp\big(L\,[h(b) - h(t)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.30}$$

8.19. Poznámka. Obecnější verse zobecněného Gronwallova lemmatu jsou obsaženy v monografiích Š. Schwabika [43] (viz Věta 1.40) a J. Kurzweila [27] (viz kapitola 22).

V následující větě využijeme zobecněné Gronwallovo lemma k odvození důležitého odhadu pro řešení počáteční úlohy (8.13).

8.20. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a, b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23), $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ *a* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* x *je řešení úlohy* (8.13) *na* $[a, b]$. *Potom*

$$\operatorname{var}_a^b (x - f) \le (\operatorname{var}_a^b A) \, \|x\| < \infty\,, \tag{8.31}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < c_A := \max\Big\{ &\sup_{t \in (t_0, b]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big|\,, \\ &\sup_{t \in [a, t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| \;\Big\} < \infty \end{aligned} \right\} \tag{8.32}$$

a

$$\left.\begin{aligned} |x(t)| &\le c_A \left(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\right)\, \exp\,\left(2\, c_A \operatorname{var}_{t_0}^{t} A\right) \quad \textit{pro } t \in [t_0, b\,]\,, \\ |x(t)| &\le c_A \left(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\right)\, \exp\,\left(2\, c_A \operatorname{var}_{t}^{t_0} A\right) \quad \textit{pro } t \in [a, t_0\,]\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

D ů k a z . a) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$ máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(D)} \left| x(\sigma_j) - f(\sigma_j) - x(\sigma_{j-1}) + f(\sigma_{j-1}) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}[A]\, x \right| \le \sum_{j=1}^{\nu(D)} \left[(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A)\, \|x\| \right] = (\operatorname{var}_a^b A)\, \|x\| < \infty\,.$$

b) Nejprve si všimněme triviálního faktu, že nemůže být $c_A \le 0$. Pro $t \in (a, b]$ takové, že $|\Delta^- A(t)| < \frac{1}{2}$ máme podle lemmatu 8.8

$$\left| [I - \Delta^- A(t)]^{-1} \right| \le \frac{1}{1 - |\Delta^- A(t)|} < 2\,.$$

Protože množina $\left\{ t \in [a, b] \colon |\Delta^- A(t)| > \frac{1}{2} \right\}$ je nejvýše konečná, plyne odtud, že

$$0 < \sup_{t \in (a, b]} \left| [I - \Delta^- A(t)]^{-1} \right| < \infty.$$

Podobně bychom dokázali, že je také $0 < \sup\limits_{t \in [a, b)} \left| [I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \right| < \infty$. Platí tedy (8.31).

c) Nechť x je řešení úlohy (8.13). Položme $B(a) = A(a)$ a $B(t) = A(t-)$ pro $t \in (a, b]$. Zřejmě (viz věta 2.33) $A - B \in \mathbb{BV}([a, b], \mathbb{R}^n)$, $A(t) - B(t) = \Delta^- A(t)$ pro $t \in (t_0, b]$,

$$\operatorname{var}_{t_0}^b (B - A) = \sum_{t \in (t_0, b]} |\Delta^- A(t)| \le \operatorname{var}_{t_0}^b A$$

a tudíž $\operatorname{var}_{t_0}^b B \le 2 \operatorname{var}_{t_0}^b A$. Dále, podle lemmatu 6.29 je

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A - B\,]\, x = \Delta^- A(t)\, x(t) \quad \text{pro } t \in (t_0, b].$$

Rovnice (8.13) se tedy redukuje na

$$[I - \Delta^- A(t)]\, x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[B\,]\, x + f(t) - f(t_0) \quad \text{pro } t \in (t_0, b]$$

a odtud snadno odvodíme nerovnost

$$|x(t)| \leq K + L \int_{t_0}^{t} |x| \,\mathrm{d}\, h \quad \text{pro } \ t \in [a,b]\,,$$

kde

$$K = c_A\,(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|)\,, \quad L = c_A \quad \text{a} \quad h(t) = \operatorname{var}_{t_0}^{t} B\,.$$

Funkce h je neklesající na $[t_0, b]$. Dále, protože B je zleva spojitá na $(t_0, b\,]$, je podle lemmatu 2.22 funkce h také zleva spojitá na $(t_0, b\,]$. Podle zobecněného Gronwallova lemmatu 8.17 dostáváme tedy konečně první nerovnost v (8.33).

Důkaz druhé nerovnosti v (8.33) by se při pomoci varianty Gronwallovy nerovnosti ze cvičení 8.18 provedl podobně. □

8.21. Cvičení. Za předpokladů věty 8.20 dokažte podrobně nerovnosti

$$0 < \sup_{t\in[a,b)} \left|[I + \Delta^{+} A(t)]^{-1}\right| < \infty$$

a

$$|x(t)| \leq c_A\,\big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\ \exp\ \big(2\,c_A \operatorname{var}_{t}^{t_0} A\big) \quad \text{pro } t \in [a, t_0\,]\,.$$

8.6 Spojitá závislost řešení na parametrech

Nechť $t_0 \in [a,b]$ a $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňují (8.22) a (8.23), nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a nechť x je řešení úlohy (8.13) na $[a,b]$. Dále, nechť y splňuje na $[a,b]$ rovnici

$$y(t) = \widetilde{y} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,y + g(t) - g(t_0)\,,$$

kde $g \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\big(x(t) - y(t)\big) = \big(\widetilde{x} - \widetilde{y}\big) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,\big(x - y\big) + \big(f(t) - g(t)\big) - \big(f(t_0) - g(t_0)\big)$$

pro $t \in [a,b]$. Podle věty 8.20 tedy máme

$$\|x - y\| \leq c_A \Big(\big|\widetilde{x} - \widetilde{y}\big| + 2\,\big\|f - g\big\|\Big)\ \exp\big(2\,c_A \operatorname{var}_{a}^{b} A\big) \quad \text{pro } \ t \in [a,b]\,,$$

kde $c_A \in (0, \infty)$ je definováno v (8.32). Odtud je zřejmé, že platí následující tvrzení.

8.22. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23). *Dále, nechť* $f, f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a* $\widetilde{x}, \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0 \tag{8.34}$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{x}_k = \widetilde{x}\,. \tag{8.35}$$

Nechť x *je řešení úlohy* (8.13) *a nechť pro* $k \in \mathbb{N}$ *jsou* x_k *řešení rovnic*

$$x_k(t) = \widetilde{x}_k + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x_k + f_k(t) - f_k(t_0)$$

na $[a,b]$. *Potom*

$$\lim_{k\to\infty} \big\|x_k - x\big\| = 0\,. \tag{8.36}$$

Ve zbývající části odstavce se omezme pro jednoduchost na případ $t_0 = a$, tj. vyšetřujeme počáteční úlohu

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(a) \tag{8.37}$$

jako limitu počátečních úloh

$$x_k(t) = \widetilde{x}_k + \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,x_k + f_k(t) - f_k(a)\,, \tag{8.38}$$

kde také jádra A_k závisí na parametru $k \in \mathbb{N}$. Tento případ je poněkud složitější. Nejprve dokážeme konvergenční větu pro KS – integrály pro situaci, která není pokryta větami z kapitoly 5.

8.23. Věta. *Nechť* $f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $A, A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že platí* (8.34),

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{8.39}$$

a

$$\alpha^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_a^b A_k < \infty\,. \tag{8.40}$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,f \right| \right) = 0\,.$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 4.8 můžeme zvolit funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takovou, že každá její komponenta je jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$ a přitom $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Dále, podle (8.34) a (8.39) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby současně platilo

$$\|f_k - f\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|A_k - A\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Pro dané $t \in [a,b]$ a $k \ge k_0$ máme podle vět 6.17 a 6.24

$$\begin{aligned} &\Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\, f \Big| \\ &\quad \le \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\, \big(f_k - \varphi\big) \Big| + \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,\big[A_k - A\big]\, \varphi \Big| + \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\, \big(\varphi - f\big) \Big| \\ &\quad \le (\operatorname{var}_a^b A_k)\, \|f_k - \varphi\| + 2\, \|A_k - A\|\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\operatorname{var}_a^b A)\, \|\varphi - x\| \\ &\quad \le \alpha^* \big(\|f_k - f\| + \|f - \varphi\|\big) + 2\, \|A_k - A\|\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\operatorname{var}_a^b A)\, \|\varphi - f\| \\ &\quad \le \big(2\,\alpha^* + 2\, \|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \operatorname{var}_a^b A\big)\, \varepsilon = K\, \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $K = \big(2\,\alpha^* + 2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \operatorname{var}_a^b A\big) \in (0,\infty)$ nezávisí ani na k, ani na t. Tím je věta dokázána. □

Dále, je třeba dokázat následující pomocné tvrzení.

8.24. Lemma. *Nechť* $A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Dále, předpokládejme, že platí* (8.22) *(kde* $t_0 = a$*) a* (8.39).

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $t \in (a,b]$ *a každé* $k \ge k_0$ *platí*

$$\det\big[I - \Delta^- A_k(t)\big] \ne 0 \tag{8.41}$$

a

$$\sup_{t \in (a,b]} \big|[I - \Delta^- A_k(t)]^{-1}\big| < 2\, c_A, \tag{8.42}$$

kde $c_A \in (0,\infty)$ *je konstanta definovaná v* (8.32).

D ů k a z . Díky (8.39) platí podle lemmatu 4.13 $\lim\limits_{k\to\infty} |\Delta^- A_k - \Delta^- A| = 0$. Můžeme tedy zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)| < \frac{1}{4\, c_A} \quad \text{pro } t \in [a,b] \quad \text{a} \quad k \ge k_0\,. \tag{8.43}$$

Nechť $t \in [a,b]$ a $k \ge k_0$ jsou dány. Snadno ověříme, že platí rovnost

$$I - \Delta^- A_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]\, \big[I - T_k(t)\big],$$

kde

$$T_k(t) = \big[I{-}\Delta^- A(t)\big]^{-1}\big(\Delta^- A_k(t){-}\Delta^- A(t)\big).$$

Vzhledem k předpokladu (8.22) je tudíž matice $I - \Delta^- A_k(t)$ regulární tehdy a jen tehdy, když je regulární matice $I - T_k(t)$.

Podle (8.32) a (8.43) máme

$$|T_k(t)| = \big|\big[I{-}\Delta^- A(t)\big]^{-1}\big|\,\big|\Delta^- A_k(t){-}\Delta^- A(t)\big| < \frac{1}{4}\,.$$

Lemma 8.8 tedy zaručuje, že matice $I - T_k(t)$ a tudíž také $I{-}\Delta^- A_k(t)$ jsou regulární a, že platí $\big|\big[I - T_k(t)\big]^{-1}\big| < 2.$ Odtud a z (8.40) plyne

$$\big|\big[I - \Delta^- A_k(t)\big]^{-1}\big| \le \big|\big[I - T_k(t)\big]^{-1}\big|\,\big|\big[I - \Delta^- A(t)\big]^{-1}\big| < 2\,c_A.$$

Důkaz je dokončen. □

Konečně můžeme zformulovat a dokázat hlavní větu tohoto odstavce.

8.25. Věta. *Nechť* $t_0 = a,\ A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n),$ $\widetilde{x},\ \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Dále, předpokládejme, že platí* (8.22), (8.34), (8.35), (8.39) *a* (8.40). *Nechť* x *je řešení úlohy* (8.37) *na* $[a,b]$.

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k \ge k_0$ *má rovnice* (8.38) *jediné řešení* x_k *na* $[a,b]$ *a platí* (8.36).

D ů k a z . Podle (8.22) má rovnice (8.37) jediné řešení x na $[a,b]$. Dále podle lemmatu 8.24, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že (8.41) platí pro $k \ge k_0$. Tudíž, pro každé $k \ge k_0$ má rovnice (8.38) jediné řešení x_k na $[a,b]$. Položme

$$w_k = (x_k - f_k) - (x - f) \tag{8.44}$$

Potom

$$w_k(t) = \widetilde{w}_k + \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,w_k + h_k(t) - h_k(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b],$$

kde $\widetilde{w}_k = (\widetilde{x}_k - f_k(a)) - (\widetilde{x} - f(a))$ a

$$h_k(t) = \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x - f) + \Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A]\,f\Big). \tag{8.45}$$

Chceme dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k\| = 0. \tag{8.46}$$

Podle věty 8.20, lemmatu 8.24 a (8.40) je

$$|w_k(t)| \le 2\,c_A\,(|\widetilde{w}_k| + \|h_k\|)\,\exp\big(4\,c_A\,\alpha^*\big) \quad \text{pro } t \in [a,b]. \tag{8.47}$$

Stačí tudíž dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} |\widetilde{w}_k| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} |h_k| = 0. \tag{8.48}$$

Nejprve si povšimněme, že první vztah z (8.48) plyne okamžitě z předpokladů (8.34) and (8.35). Dále, podle věty 8.23 je

$$\lim_{k\to\infty} \Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k]\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,f \Big\| = 0. \tag{8.49}$$

Současně, podle věty 6.24 máme

$$\Big| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x-f) \Big| \le 2\,\|A_k - A\|_\infty\,\|x-f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Protože $(x-f) \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ podle (8.31), plyne odtud díky (8.39), že platí také

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \int_a^t \mathrm{d}[A_k - A]\,(x-f) \Big\| = 0. \tag{8.50}$$

Souhrnem, podle (8.45) a (8.49)–(8.50), dostáváme $\lim\limits_{k\to\infty} \|h_k\|_\infty = 0.$ Platí tedy (8.48) a vzhledem k (8.47) tudíž také (8.46).

Podle (8.44) je $x_k - x = w_k + \big(f_k - f\big).$ Tvrzení věty tudíž plyne z (8.34) a (8.46). □

8.7 Fundamentální matice

Zobecněním homogenních systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je rovnice

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x\,. \tag{8.51}$$

Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ a nechť platí (8.22) a (8.23). Potom podle věty 8.15 (kde $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$) má rovnice (8.51) pro každé $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ právě jedno řešení x na $[a,b]$ takové, že $x(t_0) = \widetilde{x}$. Naopak, pro dané $t_0 \in [a,b]$ můžeme každému řešení x přiřadit hodnotu $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Je zřejmé, že tento vztah mezi řešeními rovnice (8.51) a vektorovým prostorem je vzájemně jednoznačný. Snadno ověříme, že jsou-li x, y řešení rovnice (8.51) na $[a,b]$ a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, pak $\alpha\,x+\beta\,y$ je také řešení (8.51) na $[a,b]$. Tyto úvahy můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

8.26. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom množina řešení rovnice* (8.51) *je lineární a tvoří* n*–dimensionální podprostor prostoru* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. □

Nyní ukážeme, že i pro zobecněné lineární diferenciální rovnice existuje obdoba fundamentální matice.

8.27. Definice. Maticová funkce $X:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *fundamentální matice rovnice* (8.51) na intervalu $[a,b]$ jestliže splňuje rovnost

$$X(t)=X(s)+\int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,X \quad \text{pro } t,s\in[a,b] \tag{8.52}$$

a $det\,X(t)\neq 0$ pro alespoň jedno $t\in[a,b]$.

8.28. Lemma. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro každou matici* $\widetilde{X}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *existuje jednoznačně určená maticová funkce* $X_{t_0}\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *taková, že platí*

$$X_{t_0}(t)=\widetilde{X}+\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,X_{t_0} \quad \textit{pro } t\in[a,b]\,. \tag{8.53}$$

D ů k a z . Pro $k=1,2,\dots,n$ označme k–tý sloupec matice $\widetilde{X}$ jako $\widetilde{x}_k$. Máme tedy $\widetilde{x}_k\in\mathbb{R}^n$ pro $k=1,2,\dots,n$ a $\widetilde{X}=\big(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_n\big)$. Podle věty 8.15 pro každé $k\in\{1,2,\dots,n\}$ existuje právě jedna funkce $x_k\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ vyhovující rovnici

$$x_k(t)=\widetilde{x}_k+\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x_k \quad \text{pro } t\in[a,b]\,.$$

Funkce $X_{t_0}(t)=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)\big)$ (tj. maticová funkce se sloupci x_k pro $k=1,2,\dots,n$) vyhovuje tedy rovnici (8.53) a je určena jednoznačně. □

8.29. Poznámka. Speciálně, jestliže je $\det\widetilde{X}\neq 0$, pak je pro každé $s\in[a,b]$ maticová funkce X_s určená lemmatem 8.28 fundamentální maticí rovnice (8.51).

8.30. Lemma. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro libovolnou fundamentální matici* X *rovnice* (8.51) *je*

$$\det X(t)\neq 0 \quad \textit{pro každé } t\in[a,b]. \tag{8.54}$$

D ů k a z. Nechť X je fundamentální matice rovnice (8.51) na $[a,b]$ a nechť (8.54) neplatí. Potom existují body $t_0, t_1 \in [a,b]$ takové, že

$$\det\, X(t_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \det\, X(t_1) = 0\,.$$

Z druhé rovnosti plyne, že sloupce $x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_n(t_1)$ matice $X(t_1)$ jsou lineárně závislé. Existují tedy koeficienty $c_1, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t_1) = 0\,.$$

Položme $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t)$ pro $t \in [a,b]$. Potom x je zřejmě řešením rovnice (8.51) a $x(t_1) = 0$. Dosazením $t = t_1$ do (8.51) a odečtením takto získané rovnosti od (8.51) zjistíme, že x splňuje rovnici

$$x(t) = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\,[A]\, x \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Protože stejnou rovnici splňuje i identicky nulová funkce, plyne odtud podle věty 8.15, že musí být $x = 0$ na $[a,b]$. Tedy také

$$x(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t_0) = 0 \quad \text{pro } t \in [a,b]\,,$$

což ovšem, vzhledem k předpokladům $\det X(t_0) \neq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$, není možné.

$\square$

Budeme potřebovat, aby fundamentální matice X_{t_0} byla definována na $[a,b]$ pro každé $t_0 \in [a,b]$. K tomu je nutno zesílit předpoklady (8.22) a (8.23) na

$$\left.\begin{aligned} &\det\left[I - \Delta^{-} A(t)\right] \neq 0 \quad \text{pro každé } t \in (a,b] \\ \text{a} \\ &\det\left[I + \Delta^{+} A(s)\right] \neq 0 \quad \text{pro každé } s \in [a,b)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8.55)$$

Následující věta je důsledkem lemmat 8.28 a 8.30.

8.31. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňuje* (8.55). *Potom existuje právě jedna maticová funkce* $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *taková, že platí*

$$U(t,s) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \quad \textit{pro} \;\; t,s\in[a,b]\times[a,b]\,. \tag{8.56}$$

Pro každé $t_0\in[a,b]$ *je funkce* $U(.,t_0): t\in[a,b]\to U(t,t_0)\in\mathbb{R}^n$ *fundamentální matice rovnice* (8.51).

Funkce U *má navíc tyto vlastnosti:*

(i) $U(.,s)\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro každé* $s\in[a,b]$,

(ii) $U(t,t)=I$ *pro každé* $t\in[a,b]$,

(iii) $\det U(t,s)\neq 0$ *pro všechna* $t,s\in[a,b]$.

D ů k a z . Pro každé $s\in[a,b]$ existuje podle lemmatu 8.28 právě jedna maticová funkce $X_s\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ taková, že platí

$$X_s(t) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,X_s \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b].$$

Definujme $U(t,s)=X_s(t)$ pro $t,s\in[a,b]$. Potom U splňuje (8.56) a $U(t,t)=I$ pro $t\in[a,b]$. Odtud plyne, že pro každé $t_0\in[a,b]$ je $U(.,t_0)$ fundamentální matice rovnice (8.51) na $[a,b]$. Konečně, podle lemmatu 8.30 je $\det U(t,s)\neq 0$ pro všechna $t,s\in[a,b]$. □

8.32. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$, $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$, *nechť platí* (8.55) *a nechť maticová funkce* U *je určena větou* 8.31. *Potom* $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *je řešení počáteční úlohy*

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_s^t \mathrm{d}\,[A]\,x \tag{8.57}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$x(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{x} \quad \textit{pro} \;\; t\in[a,b]\,. \tag{8.58}$$

D ů k a z . a) Dosadíme-li (8.58) do $\displaystyle\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x$ a využijeme-li (8.56), dostaneme

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A]\,x = \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,\widetilde{x} = \big(U(t,t_0)-I\big)\,\widetilde{x} = x(t)-\widetilde{x},$$

tj. funkce x definovaná vztahem (8.58) je řešení rovnice (8.57).

b) Obrácená implikace plyne z jednoznačnosti řešení rovnice (8.57) (viz věta 8.15).

□

8.33. Definice. Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a nechť platí (8.55). Potom maticovou funkci U určenou větou 8.31 nazýváme *Cauchyova matice* rovnice (8.51).

Cauchyova matice U je funkce dvou proměnných. Připomeňme některá označení užívaná pro funkce dvou proměnných.

8.34. Označení. Nechť $F : [a,b] \times [a,b] : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Potom pro dané $\tau \in [a,b]$ symboly $F(\tau,.)$ resp. $F(.,\tau)$ značí funkce jedné proměnné

$$F(\tau,.) : s \in [a,b] \to F(\tau,s) \text{ resp. } F(.,\tau) : t \in [a,b] \to F(t,\tau)\,.$$

Podobně

$$F(\tau,s+) = \lim_{\delta\to 0+} F(\tau, s+\delta) \quad \text{a} \quad F(\tau,s-) = \lim_{\delta\to 0+} F(\tau, s-\delta)\,.$$

8.35. Důsledek. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a* $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *Dále, nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom maticová funkce* $X : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *splňuje rovnici*

$$X(t) = \widetilde{X} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,X \tag{8.59}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$X(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{X} \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]\,. \tag{8.60}$$

D ů k a z . Pro každý sloupec x_k, $k = 1,2,\dots,n$, maticové funkce X platí podle věty 8.32

$$x_k(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x}_k \quad \text{pro} \;\; t, t_0 \in [a,b],$$

kde $\widetilde{x}_k$ jsou sloupce matice $\widetilde{X}$. Odtud tvrzení okamžitě plyne. □.

8.36. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom vztahy*

$$U(t,r)\,U(r,s) = U(t,s) \tag{8.61}$$

$$(U(t,r))^{-1} = U(r,t) \tag{8.62}$$

platí pro libovolnou trojici bodů t,s,r *z intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro libovolná $t, s, r \in [a,b]$ máme podle (8.56)

$$\begin{aligned} U(t,s) &= I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) \\ &= I + \int_s^r \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s) \\ &= U(r,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s)\,. \end{aligned}$$

Označíme-li sloupce matice U symboly $u_k,\ k=1,2,\dots,n,$ zjistíme, že pro každé $k=1,2,\dots,n$ a $r,s\in[a,b]$ je funkce $x(t)=u_k(t,s)$ řešením rovnice

$$x(t) = u_k(r,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x$$

na $[a,b]$. Podle věty 8.32 tudíž platí

$$u_k(t,s) = U(t,r)\,u_k(r,s) \quad \text{pro } k=1,2,\dots,n \quad \text{a} \quad t,s,r\in[a,b]\,.$$

Odtud už vztah (8.61) okamžitě plyne.

b) Speciálně, jestliže $t=s,$ pak podle věty 8.31 dostáváme $U(t,r)\,U(r,t)=I$ pro každé $r\in[a,b].$ Platí tedy (8.62). □

8.37. Poznámka. Nechť U je Cauchyova matice rovnice (8.51). Potom podle věty 8.36 je

$$U(t,s) = U(t,a)\,U(a,s) = U(t,a)\,(U(s,a))^{-1} \quad \text{pro } t,s\in[a,b]\,.$$

Označíme-li tedy $X(t) = U(t,a),$ bude platit $U(t,s) = X(t)\,(X(s))^{-1}$ pro $t,s\in[a,b].$ Připomeňme, že X je fundamentální matice rovnice (8.51).

Ve zbývající části tohoto odstavci uvedeme ještě několik dalších vlastností Cauchyovy matice rovnice (8.51).

8.38. Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),$ *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom platí*

$$\left.\begin{aligned} U(t+,s) &= \big[I+\Delta^+A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t\in[a,b),\ s\in[a,b]\,,\\ U(t-,s) &= \big[I-\Delta^-A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t\in(a,b],\ s\in[a,b]\,,\\ U(t,s+) &= U(t,s)\,\big[I+\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t\in[a,b],\ s\in[a,b)\,,\\ U(t,s-) &= U(t,s)\,\big[I-\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t\in[a,b],\ s\in(a,b]\,. \end{aligned}\right\} \quad (8.63)$$

D ů k a z . a) První dva vztahy odvodíme jestliže do vztahů (8.21) z lemmatu 8.13 dosadíme postupně za x sloupce maticové funkce U.

b) Nechť $t \in [a,b]$, $s \in [a,b)$ a $\delta \in (b-s)$. Potom podle (8.56) máme

$$U(t,s+\delta)-U(t,s) = \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s+\delta) - \int_{s}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)$$
$$= \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\big(U(\tau,s+\delta)-U(\tau,s)\big) - \int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)$$

Maticová funkce $Y(t) = U(t,s+\delta) - U(t,s)$ tedy splňuje rovnici

$$Y(t) = \widetilde{Y} + \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,Y(\tau) \quad \text{pro } t \in [a,b]\,,$$

kde

$$\widetilde{Y} = -\int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,.$$

Podle důsledku 8.35 tudíž máme

$$U(t,s+\delta)-U(t,s) = Y(t) = U(t,s+\delta)\,\widetilde{Y}$$
$$= -U(t,s+\delta)\int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,.$$

Limitním přechodem $\delta \to 0+$ při použití Hakeovy věty 6.39 odtud dostaneme

$$U(t,s+)-U(t,s) = -U(t,s+)\,\Delta^{+}A(s)\,U(s,s) = -U(t,s+)\,\Delta^{+}A(s)\,.$$

neboli $U(t,s) = U(t,s+)\,\big[I+\Delta^{+}A(s)\big]$. Odtud okamžitě plyne platnost třetího vztahu z (8.63). Zbývající rovnost bychom dokázali analogicky. □

8.39. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom existuje* $M \in (0,\infty)$ *takové, že platí*

$$|U(t,s)| + \operatorname{var}_a^b U(.,s) + \operatorname{var}_a^b U(t,.) \le M \quad \textit{pro } t,s \in [a,b]\,. \tag{8.64}$$

D ů k a z . a) Pro $k=1,2,\dots,n$ označme symbolem e_k k – tý sloupec jednotkové matice I. Potom $|e_k| = 1$ pro každé $k=1,2,\dots,n$. Podle věty 8.20 máme

$$|u_k(t,s)| \le M_1 := c_A \exp\big(2\,c_A \operatorname{var}_a^b A\big) < \infty \text{ pro } t,s \in [a,b] \text{ a } k=1,2,\dots,n,$$

kde $c_A \in (0,\infty)$ je definováno v (8.32). Tudíž

$$|U(t,s)| = \max_{k=1,2,\dots,n} |u_k(t,s)| \le M_1 \quad \text{pro } t,s \in [a,b]. \tag{8.65}$$

b) Nechť $t_1, t_2, s \in [a,b]$ a $t_1 \le t_2$. Potom

$$|u_k(t_2,s) - u_k(t_1,s)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,u_k(\tau,s) \right| \le M_1 \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} A\,.$$

Pro libovolné $s \in [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(.,s),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1 \operatorname{var}_a^b\, A =: M_2 < \infty$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b\, U(.,s) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b\, u_k(.,s) \le M_2 \quad \text{pro} \;\; s \in [a,b]\,. \tag{8.66}$$

c) Nechť $t, s_1, s_2 \in [a,b]$ a $s_1 \le s_2$. Potom

$$\begin{aligned} & u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) \\ & \quad = \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,u_k(\tau,s_2) - \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,u_k(\tau,s_1) - \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,u_k(\tau,s_1) \\ & \quad = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\big(u_k(\tau,s_2) - u_k(\tau,s_1)\big)\,, \end{aligned}$$

Funkce $x(t) = u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)$ splňuje tedy na $[a,b]$ rovnici

$$x(t) = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A\,]\,x$$

Podle věty 8.32 tedy pro každé $k = 1,2,\dots,n$ máme

$$u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) = -U(t,s_2)\Big(\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]u_k(\tau,s_1)\Big) \;\; \text{pro } t \in [a,b]$$

a tudíž $|u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)| \le M_1^2 \operatorname{var}_{s_1}^{s_2} A$ pro $k = 1,2,\dots,n$. Pro libovolné $t \in [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(t,.),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1^2 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1^2 \operatorname{var}_a^b\, A =: M_3 < \infty$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b\, U(t,.) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b\, u_k(t,.)| \le M_2 \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b]\,. \tag{8.67}$$

d) Podle (8.64)–(8.66) tvrzení věty platí pro $M = M_1 + M_2 + M_3$. $\square$

Pro funkce dvou proměnných je možno definovat pojem variace několika různými způsoby. Pro nás je zajímavá definice Vitaliova.

8.40. Definice. Nechť $F : [a,b] \times [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Pro daná dělení $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$, $j = 1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k = 1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ položme

$$\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}) = F(\sigma_j,\rho_k) - F(\sigma_{j-1},\rho_k) - F(\sigma_j,\rho_{k-1}) + F(\sigma_{j-1},\rho_{k-1}) .$$

Potom veličina

$$v(F) = \sup_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]} \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} \big|\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\big|$$

se nazývá *Vitaliova variace* funkce F na intervalu $[a,b] \times [a,b]$.

8.41. Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51). *Potom* $v(U) < \infty$.

D ů k a z . Mějme dvě libovolná dělení $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$. Podle věty 8.36 (viz též poznámka 8.37 je $U(t,s) = U(t,a)\,U(a,s)$ pro $t,s \in [a,b]$. Pro libovolná $j = 1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k = 1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ tedy máme

$$\begin{aligned}
\big|\Delta_{j,k}(F;\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\big| &= \Big|\big[U(\sigma_j,a) - U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_k) \\
&\qquad - \big[U(\sigma_j,a) - U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_{k-1})\Big| \\
&\le \Big|\big[U(\sigma_j,a) - U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_k)\Big| \\
&\qquad + \Big|\big[U(\sigma_j,a) - U(\sigma_{j-1},a)\big]\,U(a,\rho_{k-1})\Big| \\
&\le \operatorname{var}_a^b U(.,a)\,\big(|U(a,\rho_k)| + |U(a,\rho_{k-1})|\big) \le 2\,M^2 ,
\end{aligned}$$

kde $M < \infty$ bylo určeno ve větě 8.39. $\square$

8.8 Nehomogenní rovnice

Vraťme se nyní k nehomogenní počáteční úloze

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A]\,x + f(t) - f(t_0) . \tag{8.13}$$

Budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňuje (8.55). Pro libovolná $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a $f \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ existuje podle věty 8.15 jediné řešení x úlohy (8.13) a toto řešení má konečnou variaci na $[a,b]$. Všichni však tušíme, že toto tvrzení lze rozšířit i na obecnější případ $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$. To je realizováno následující větou, která zahrnuje i vyjádření řešení úlohy (8.13) ve tvaru připomínajícím formuli *variace konstant* známé z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

8.42. Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.55) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51) *určená větou* 8.31.

Potom rovnice (8.57) *má pro každé* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a každé* $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$\left.\begin{aligned} &x(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x} + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,\big(f(s) - f(t_0)\big) \\ &\qquad\qquad \textit{pro}\ \ t \in [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{8.68}$$

Je zřejmé, že pro podrobný důkaz je nutné něco vědět o integrálních operátorech typu

$$\mathscr{U}: x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n) \to y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[K(t,s)]\,x(s), \tag{8.69}$$

kde funkce K má stejné vlastnosti jako Cauchyova matice příslušné homogenní rovnice a symbol d_s naznačuje, že integrujeme funkce proměnné s a t je zde parametr. Vzhledem k vlastnostem funkce U popsaným v předešlé kapitole je vidět, že pro každou funkci $x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ je její obraz $y = \mathscr{U}x$ dobře definován na celém intervalu $[a,b]$. (Jde vždy o integraci funkce regulované vzhledem k funkci s konečnou variací.) Bohužel, vlastnosti operátorů tvaru (8.70) nejsou už tak na první pohled zřejmé. Navíc, abychom dokázali, že funkce x je řešením úlohy (8.13), potřebujeme umět přehodit pořadí integrace ve dvojném integrálu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\Big(\int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)]\,\big(f(s) - f(t_0)\big)\Big).$$

tak, aby bylo možno využít vztah (8.56) definující funkci U. K tomu je nutné mít k dispozici aparát umožňující zacházení s dvojnými integrály. Ten se opírá též o pojem variace funkcí dvou proměnných zavedený v definici 8.40. Toto vše se v potřebném rozsahu už do tohoto textu nevejde. Nebudu zde tedy provádět podrobné důkazy a jenom se pokusím aspoň přiblížit jejich hlavní myšlenky. Většinou není obtížné doplnit vynechané detaily na základě znalosti postupů z předešlých kapitol. Podrobnosti týkající se variace funkcí dvou proměnných a integrálních operátorů určených takovýmito funkcemi lze najít zejména v kapitole III monografie [14] a v odstavci I.6 a kapitole II monografie [53]. Formule variace konstant pro $f \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dokázána v [53, III.2] nebo v [43, Theorem 6.17], zatímco v [57, Proposition 4.4.3] je dokázána pro f regulovanou.

Omezíme se nyní na případ $t_0 = a$, tj. hledáme řešení úlohy (8.37). Důkaz je rozdělen na 4 kroky:

Nejprve definujeme

$$K(t,s) = \begin{cases} U(t,s) \text{ když } a \le s \le s \le b, \\ U(t,t) \text{ když } a \le t \le s \le b\,. \end{cases}$$

Zřejmě $\mathrm{var}_a^b\, K(t,.) \le \mathrm{var}_a^t\, U(t,.)$ pro každé $t \in [a,b]$, $\mathrm{var}_a^b\, K(.,s) \le \mathrm{var}_s^b\, U(.,s)$ pro každé $s \in [a,b]$ a $v(K) \le v(U)$. Existuje tedy konstanta $\varkappa \in (0,\infty)$ taková, že

$$v(K) + \mathrm{var}_a^b\, K(t,.) + \mathrm{var}_a^b\, K(.,s) \le \varkappa < \infty \quad \text{pro } t,s \in [a,b].$$

Je zřejmé, že pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dobře definována na $[a,b]$ funkce

$$y : t \in [a,b] \to \int_a^b \mathrm{d}_s[K(t,s)]\,x(s), \tag{8.70}$$

přičemž

$$\int_a^b \mathrm{d}\,[K(t,s)]\,x(s) = \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,x(s)$$

Podle [53, Theorem I.6.18] je $\mathrm{var}_a^b\, y \le v(K)\,\|x\| < \infty$.

Druhý krok spočívá v důkazu, že platí

$$y(t+) = \int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)]\,x(s) \quad \text{když } t \in [a,b), \tag{8.71}$$

$$y(t-) = \int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)]\,x(s) \quad \text{když } t \in (a,b]. \tag{8.72}$$

Podle [53, Lemma I.6.14]) mají všechny funkce

$$K(t+,.) \text{ a } K(s-,0), t \in [a,b),\ s \in (a,b]$$

konečnou variaci na $[a,b]$ a tudíž jsou integrály na pravých stranách v (8.71) dobře definovány. Protože že x je na $[a,b]$ stejnoměrná limita jednoduchých skokových funkcí, stačí dokázat, že rovnosti (8.71) platí pro každou funkce typu

$$\chi_{[a,\tau]}, \chi_{[\tau,b]}, \quad \tau\in[a,b]. \tag{8.73}$$

Je=li např. $x=\chi_{[a,\tau]}$, kde $\tau\in[a,b]$, pak pro každé $t\in[a,b]$ máme (viz (6.17)) $y(t)=K(t,\tau+)-K(t,a)$ a tudíž

$$y(t+)=K(t+,\tau+)-K(t+,a) \quad \text{když } t\in[a,b)$$

a

$$y(t-)=K(t-,\tau+)-K(t-,a) \quad \text{když } t\in(a,b].$$

Na druhou stranu, máme

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)]\chi_{[a,\tau]}=K(t+,\tau+)-K(t+,a) \quad \text{když } t\in[a,b),$$

a

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)]\chi_{[a,\tau]}=K(t-,\tau+)-K(t-,a) \quad \text{když } t\in(a,b]\,,$$

tj. platí (8.73). Podobně bychom ověřili platnost relací (8.71) pro funkce tvaru $x=\chi_{[\tau,b]}$, $\tau\in[a,b]$ a tím tedy i pro každou funkci $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Vidíme tedy, že funkce $x(t)$ definovaná formulí (8.68) je regulovaná na $[a,b]$ pro každou funkci $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a každý vektor $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$.

Ve třetím kroku se ukáže, že za našich předpokladů je pro každé $t\in[a,b]$ a každou funkci $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ pravdivá relace Fubiniova typu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\Big(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)\,]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big) \\ =\int_a^t \mathrm{d}\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,K(\tau,s)\right]\,\big(f(s)-f(a)\big)\,.$$

V důkazu tohoto kroku se opět využije stejnoměrná aproximace regulovaných funkcí jednoduchými skokovými funkcemi, vzorce z příkladů 6.15 a konvergeční vlastnosti KS – integrálu. Navíc je ovšem nutno také použít vlastnosti opearátorů tvaru $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\to\int_a^b K(t,s)\,\mathrm{d}\,[f(s)\,]$.

Na závěr dosadíme (8.68), tj.

$$x(t)=U(t,a)\,\widetilde{x}+f(t)-f(a)-\int_a^t \mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,\big(f(s)-f(t_0)\big),$$

do integrálu $\displaystyle\int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x$ a, vzhledem k definici funkce $K,$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_a^t \mathrm{d}\,[A\,]\,x = \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,a)\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a))&\\
- \int_0^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^\tau \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)](f(s)-f(a))\right)&\\
= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))&\\
- \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,K(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a))&\\
= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))&\\
- \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^s \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,\tau)\right]\,(f(s)-f(a))&\\
- \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a))&\\
= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[A(s)](f(s)-f(a))&\\
-\int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a)) - \int_a^t \mathrm{d}_s\,[U(t,s)-I]\,\,(f(s)-f(a))&\\
= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)\,]\,(f(s)-f(a))&\\
= x(t)-x(0)-f(t)+f(0)\,.&
\end{aligned}
$$

Funkce x je tedy řešení úlohy (8.37) na $[a,b\,]$. Jeho jednoznačnost plyne z jednoznačnosti nulového řešení příslušné homogenní rovnice. Tímto je důkaz věty 8.42 dokončen.

Jestliže je funkce A spojitá zleva na intervalu $(a,b\,]$, pak je možno vzorec (8.68) poněkud zjednodušit definujeme-li $X(t)=U(t,a)$ pro $t\in[a,b\,]$ a

$$
Y(s) = \begin{cases} U(a,s+) & \text{když } a\le s<b,\\ U(a,b) & \text{když } s=b. \end{cases} \tag{8.74}
$$

8.43. Důsledek. *Nechť* $t_0=a$ *a* $A\in\mathbb{BV}([a,b\,],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *je zleva spojitá na* $[a,b\,)$ *a splňuje podmínky* (8.23). *Nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.51) *určená větou* 8.31, $X(t)=U(t,a)$ *pro pro* $t\in[a,b\,]$ *a* Y *je definovaná předpisem* (8.74).

Potom rovnice (8.37) *má pro každé* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a každou funkci* $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *zleva spojitou na* $(a,b]$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + X(t)\Big(\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\Big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.75}$$

D ů k a z . Nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je zleva spojitá na $(a,b]$. Podle věty 8.42 má rovnice (8.37) jediné řešení x na $[a,b]$. Formuli (8.68) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t) - f(a)\big) + X(t)\Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s) - f(a)\big)\Big),$$

kde $X^{-1}(s) = U(a,s)$. Máme $X^{-1}(s) = -Y(s) - \Delta^+ X^{-1}(s)$ pro $s \in [a,b)$. Podle lemmatu 6.33 je pro každé $t \in [a,b]$

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}]\,\big(f(s) - f(a)\big) = \int_a^t \mathrm{d}\,[Y]\,\big(f(s) - f(a)\big) - \Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t) - f(a)\big).$$

Protože X je zleva spojitá na $(a,b]$ a Y je zprava spojitá na $[a,b)$, integrací per-partes (věta 6.34) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t) - f(a)\big) + X(t)\Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s) - f(a)\big)\Big) \\ &= X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t) - f(a)\big) + X(t)\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\,. \\ &\qquad + X(t)\,\Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t) - f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t) - f(a)\big) \end{aligned}$$

Konečně, protože

$$\begin{aligned} &X(t)\,\Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t) - f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t) - f(a)\big) \\ &\quad = X(t)\,\big(X^{-1}(t+) - X^{-1}(t)\,\big(f(t) - f(a)\big) - X(t)\,X^{-1}(t+)\,\big(f(t) - f(a)\big) \\ &\quad = -\big(f(t) - f(a)\big)\,, \end{aligned}$$

dostáváme (8.75). $\square$

Díky větě 8.42 resp. jejímu důsledku 8.43 je již možné s úspěchem vyšetřovat např. okrajové úlohy, ve kterých se hledá funkce, která splňuje na intervalu $[a,b]$ rovnici (8.57) a navíc i nějaké dodatečné podmínky, např. dvoubodové podmínky $M\,x(a) + N\,x(b) = 0$, kde $M, N \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. To je ale už jiná historie, která se do tohoto textu, stejně jako řada dalších témat, jako jsou souvislosti s funkcionálně–diferenciálními rovnicemi, dynamickými systémy na t.zv. časových škálách (*time scales*), aplikace na úlohy s impulsy a další, už opravdu nevejde. Jako doplňkovou literaturu k této kapitole lze doporučit např. monografie [15], [27], [43], [57] nebo články [1],[8], [9], [36], [49], [50],