Předmluva

Tato publikace je vlastně pokračováním monografie Štefana Schwabika *Integrace v R (Kurzweilova teorie)* [44] věnované teorii integrálu přes jednorozměrné intervaly. V této monografické učebnici se autorovi podařilo vysvětlit nejen klasické pojmy Newtonova i Riemannova integrálu, ale i integrálu Mac Shaneova a především Kurzweilova. Poprvé byl tak širokému okruhu českých čtenářů (včetně studentů fakult s matematicko-fyzikálním zaměřením) předložen ucelený výklad jednoho z neuznávanějších příspěvků české matematiky do pokladnice světové matematiky: součtové definice neabsolutně konvergentního integrálu. Tato definice náleží Jaroslavu Kurzweilovi a poprvé ji uvedl v práci publikované v roce 1957 v časopise Czechoslovak Mathematical Journal (viz [28]). Nový integrál, který se dnes ve světové matematické literatuře nazývá integrál Kurzweilův resp. integrál Kurzweilův-Henstockův (nezávisle na J. Kurzweilovi publikoval definici analogického integrálu v roce 1960 britský specialista v teorii integrálu Ralph Henstock) se od té doby ukázal být velice inspirativním nejen pro teorii integrálu (zahrnuje klasické a dobře známé pojmy Riemannova a Newtonova integrálu včetně jejich nevlastních modifikací a obtížněji zvládnutelné integrály Lebesgueův a Perronův), ale i pro teorii diferenciálních a integrálních rovnic. Z hlediska metodického důraz kladený na Kurzweilův integrál umožnil Š. Schwabikovi soustředit se na neabsolutně konvergentní integrály, které ve starší metodice teorie integrálu byly považovány za velmi obtížně vysvětlitelné. Kurzweilův pojem integrálu je totiž ekvivalentní s integrálem Perronovým, který je neabsolutně konvergentní. Jeho definice přitom zdánlivě téměř mechanicky ”kopíruje” definici Riemannovu, která je pro studenta nejpřijatelnější svou názorností a výraznou geometrickou interpretací. Právě srovnání s Riemannovou definicí však ukazuje, jak důmyslná je její nenápadná, ale přitom dalekosáhlá Kurzweilova modifikace. Velkou výhodou je rovněž ten rys Kurzweilova integrálu, že nepotřebuje zobecnění na ”nevlastní” integrály - platí pro něj totiž věta Hakeova typu (tj. věta o limitním přechodu vzhledem k mezím integrálu).

V integrálech Riemannově, Newtonově, Lebesgueově, Perronově, Kurzweilově se integruje daná funkce vzhledem identické funkci. Některé fyzikální problémy si však vynutily rozšíření pojmu integrálu na integrál, ve kterém se daná funkce integruje vzhledem k funkci, která nemusí být obecně identita. Poprvé se takový integrál vyskytl ve slavném Stieltjesově pojednání [55], věnovaném souvislostem konvergence řetězových zlomků a problému jak popsat rozložení hmoty na hmotné úsečce jsou-li známy všechny momenty této úsečky přirozených řádů. Integrály tohoto typu jsou od té doby nazývány *Stieltjesovy integrály*. Integrál funkce f (*integrand*) vzhledem k funkci g (*integrátor*) přes interval $[a,b]$ se od té doby značí $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ K různým modifikacím definice, které časem vznikly, se pak přidávají zpravidla jména autorů těch modifikací. Brzy se objevily integrály: Riemannův-Stieltjesův, Perronův-Stieltjesův či Lebesgueův-Stieltjesův. Dalším významným impulsem, který obrátil pozornost ke Stieltjesovu integrálu byl fundamentální Rieszův výsledek z roku 1909 (viz [38]) o tom, že každý spojitý lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí může být vyjádřen pomocí Stieltjesova integrálu. Vzápětí, v roce 1910, dokázal H. Lebesgue (viz [30]), že pro spojitou funkci f and funkci g s konečnou variací lze pomocí vhodné substitucí vyjádřit Stieltjesův integrál jako Lebesgueův integrál tvaru

$$\int_a^{v(b)} f(w(t))\,h(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

kde $v(x)$ je variace funkce g na intervalu $[a,x]$, w je zobecněná inversní funkce k v definovaná předpisem

$$w(t)=\inf\{s\in[a,b]: v(s)=t\}\quad \text{pro } t\in[a,b]$$

a $h(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,g(w(t))$ pro s.v. $t\in[a,v(b)].$ H. Lebesgue takto dospěl k pojmu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu funkce f vzhledem ke $g.$ Několik let po Rieszově výsledku se v roce 1912 objevuje Stieltjesův integrál také v monografii Oskara Perrona [37]. V dalších zhruba dvou desetiletích byl Stieltjesův integrál a jeho modifikace předmětem badání řady vyznamných osobností teorie funkcí: W.H. Young ([63], 1914), C.J. de la Vallée Poussin ([58], 1917), E.B. Van Vleck ([59],1917), T.H. Hildebrandt ([13], 1917), L.C. Young ([61], 1927 a [62],1936), A.J. Ward ([60], 1936), a další. V roce 1937 věnoval Stanisław Saks ve své slavné monografii [40] integrálu Lebesgueovu-Stieltjesovu a funkcím s konečnou variacíé celou kapitolu. Do dnešních dnů našly integrály Stieltjesova typu široké uplatnění v mnoha oblastech: např. v teorii křivkových integrálů, teorii pravděpodobnosti, teorii hystereze, teorii funkcionálně-diferenciálních, zobecněných diferenciálních rovnic, teorie pravděpodobnosti a p.

Vzhledem k omezenému přidělenému rozsahu nemohl Štefan Schwabik do své monografie zahrnout přirozené zobecnění Kurzweilova pojmu integrálu na Stieltjesovy integrály, ač jsme v té době už měli v našich společných pracech (viz např. [53]) věnovaných zobecněným diferenciálním rovnicím ”Kurzweilovu teorii” Stieltjesova integrálu do značné míry zpracovánu a připravenu. Je mou ctižádostí navázat na jeho počin a doplnit jeho monografii o teorii Stieltjesova integrálu s důrazem na Kurzweilovu definici a některé její aplikace. Výklad v této knize je rozdělen do 8 kapitol. V úvodní kapitole jsou stručně dvě z mnoha motivací pro studium Stieltjesova integrálu: problém momentů a křivkové integrály. Zavedeno je tu též základní značení závazné pro celou knihu. Další tři kapitoly jsou přípravné a poskytují přehled o vlastnostech tříd funkcí, se kterými se v této knize nejčastěji pracuje: funkce s konečnou variací, funkce absolutně spojité a funkce regulované. Rozsáhlá pátá kapitola je věnována klasickým definicím Riemannova-Stieltjesova integrálu a vlastnostem takto definovaných integrálů. Jádrem celé knihy textu je pak kapitola 6 věnovaná definici Stieltjesova integrálu v Kurzweilově smyslu. Jsou tu demonstrovány přednosti této definice: široká třída funkcí integrovatelných v tomto smyslu, široká škála vlastností takto definovaného integrálu, např. platnost velmi obecných vět o limitním přechodu včetně Hakeovy věty, o integraci perpartes, a různých forem substituce. V závěrečných dvou kapitolách jsou popsány některé vybrané aplikace ve funkcionální analýze a v teorii zobecněných diferenciálních rovnic.

Samozřejmě bylo by možno pokračovat dále. Podstatnou část zde vyložené teorie Kurzweilova-Stieltjesova integrálu je možno přenést i na integraci v abstraktních prostorech (viz [48]–[51] a [35]). Významné uplatnění nachází Kurzweilův-Stieltjesův integrál v dnes velmi populární teorii dynamických systémů na ”časových škálách” neboli ”time scales” (česká terminologie se dosud neustálila), viz [54] a [36]. To je však už hudba budoucnosti a do této publikace se už nic víc nevejde. I tak její stávající rozsah výrazně převyšuje rozsah původně plánovaný.

Předkládaným textem bych rád také poněkud zaplnil stávající mezeru v české literatuře. V druhém dílu *Integrálního počtu* Vojtěcha Jarníka (viz [18]) jsou věnovány dvě kapitoly (III a X) výkladu teorie integrálu Lebesgueova-Stieltjesova, který ovšem vyžaduje značnou porci znalostí o teorii míry a přitom je méně obecný než integrál Kurzweilův-Stieltjesův. Celé monumentální a zakladatelské dílo Vojtěcha Jarníka bylo právě zpřístupněno na webových stránkách *České digitalní matematické knihovny* a může tedy posloužit čtenářům k upřesnění některých zde pouze naznačených souvislostí s teorií míry. Pěkný, ale stručný, úvod do teorie Riemannova-Stieltjesova integrálu je obsažen též v dnes již v podstatě nedostupných skriptech [20] Josefa Krále o teorii potenciálu z roku 1965. Poměrně podrobně je ještě o různých formách Stieltjesova integrálu pojednáno také v dnes již rovněž těžko dostupných skriptech [31] Jaroslava Lukeše. Pokud jde o cizojazyčnou literaturu, mohu doporučit čtenářům zajímajícím se o další souvislosti v rámci klasické teorie monografii [14] T.H. Hildebrandta. Rozhodně je třeba zájemcům o tematiku doporučit ke studiu také zhuštěnou a moderně pojatou monografii R.M. Mc Leoda [34] z roku 1981 zahrnující dokonce i Kurzweilův-Stieltjesův integrál. (Já jsem ji, bohužel, pro sebe objevil až během závěrečné fáze prací na tomto textu). Další podněty může čtenář najít také v monografiích A.N. Kolmogorova a S.V. Fomina [19], E. Schechtera [41], W. Rudina [39] nebo skriptech J. Lukeše a J. Malého [33].

Tento text vznikal po několik let jako pomůcka pro posluchače mých výběrových přednášek na Přírodovědecké fakultě Palackého university v Olomouci v rámci výuky matematické analýzy. Jsem vděčen *Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Palackého university* za to, že mi umožňuje tyto přednášky konat a studentům několika ročníků za to, že bez viditelného reptání mé přednášky navštěvovali. Kniha by měla být srozumitelná všem kdo absolvovali základní kursy matematické a funkcionální analýzy. Ve výkladu se snažím vyhýbat teorii míry jak je to jen možné. Nicméně ti, kteří mají aspoň základní znalosti o této oblasti, budou mít výhodu při porozumění některým (víceméně okrajovým) pasážím této knihy.

Závěrem předmluvy chci poděkovat mým vzácným kolegům Jaroslavu Kurzweilovi, Ivo Vrkočovi a Ireně Rachůnkové, kteří obětavě přečetli několik versí rukopisu tohoto textu a pomohli mi odstranit mnohé nedostatky a vylepšit výkladu. Jsem jim všem za tuto pomoc velmi zavázán. Za veškeré chyby, které se navzdory jejich pomoci v této publikaci vyskytnou, nesu ovšem plnou zodpovědnost pouze já.