Kapitola 1

Úvod

1.1 Problém momentů

Je známo (viz např. kapitola I v [44]), že hodnota klasického Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ nezáporné a spojité funkce

1.2 Křivkové integrály

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.

Nechť φ je spojité zobrazení uzavřeného a ohraničeného intervalu $[a,b]$ do třírozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Množina bodů

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

kde t probíhá interval $[a,b]$, se nazývá *cesta* v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$ a značíme ji také symbolem φ. *Délkou cesty* φ rozumíme délku křivky definované grafem $\{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$ funkce φ a značíme ji symbolem $\Lambda(\varphi;[a,b])$.

Buď φ cesta v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$, jejíž délka je konečná. Předpokládejme dále, že zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je prosté. Představme si, že φ je drát a $f(x) \in \mathbb{R}$ je jeho hustota v bodě x. Hmota části drátu odpovídající intervalu $[c,d] \subset [a,b]$ je tedy přibližně vyjádřena číslem $f(\varphi(\xi))\,\Lambda(\varphi;[c,d])$. kde ξ je nějaký bod intervalu $[c,d]$.

Nechť σ_j, $j = 0,1,\dots,m$, jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ \dots\ < \sigma_m = b\,.$$

Množinu bodů $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ s těmito vlastnostmi nazýváme dělení intervalu $[a,b]$ a značíme $\boldsymbol{\sigma}$. Dále, v každém intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, $j = 1,2,\dots,m$, vyberme nějaký bod ξ_j. Tento bod budeme nazývat *značka intervalu* $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, vektor $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ je *vektor značek dělení* $\boldsymbol{\sigma}$ a značíme ho symbolem $\boldsymbol{\xi}$.

Položme $v(t) = \Lambda(\varphi;[a,t])$ pro $t \in [a,b]$. Potom součet

$$\sum_{j=1}^m f(\varphi(\xi_j))\,[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})]$$

aproximuje hmotu celého drátu. Je přirozené očekávat, že tato aproximace bude tím přesnější, čím bude dělení jemnější, tj. čím více bodů bude obsahovat. Vede-li takový limitní proces k jednoznačně určené limitní veličině, bude tato veličina rovna hmotě celého drátu a budeme ji značit

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}\,s \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,v\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál prvního druhu* funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* skalární funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke skalární funkci $v(t) = \Lambda(\varphi;[a,t])$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po cestě φ a v okamžiku $t \in [a,b]$ se nachází v bodě $\varphi(t)$. Dále nechť

$$f\,:\; x \in \varphi \subset \mathbb{R}^3 \to f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \mathbb{R}^3$$

je silové vektorové pole v $\mathbb{R}^3$. Potom $f(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^3$ je vektor síly, která na tento hmotný bod působí v čase t.

Nechť $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ je vektor jeho značek. Potom skalární součin

$$f(\varphi(\xi_j)) \cdot \big[\varphi(\alpha_j) - \varphi(\alpha_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\sigma_j) - \varphi_k(\sigma_{j-1})\big]$$

představuje práci, kterou vykoná síla $f(\varphi(\xi_j))$, posune-li se náš hmotný bod z bodu $\varphi(\alpha_{j-1})$ do bodu $\varphi(\alpha_j)$. Součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j)) \cdot \big[\varphi(\alpha_j) - \varphi(\alpha_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m} f_k(\varphi(\xi_j))\,\big[\varphi_k(\alpha_j) - \varphi_k(\alpha_{j-1})\big]\,.$$

tedy aproximuje práci, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$. Jestliže se hodnoty těchto součtů budou při zjemňování dělení σ " libovolně blížit" k nějaké jednoznačně určené limitní hodnotě, bude tato hodnota rovna velikosti práce, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$. Budeme ji značit

$$\int_\varphi f \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \sum_{k=1}^{3}\int_a^b f_k(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi_k\,.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* vektorové funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* (složené) vektorové funkce $f(\varphi):[a,b]\to\mathbb{R}^3$ vzhledem k vektorové funkci $\varphi:\ [a,b]\to\mathbb{R}^3$.