Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Emil Jeřábek

Reflexe v neregulárních univerzech

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
Studijní program: matematika — matematické struktury

Praha 2001

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 18. dubna 2001 Emil Jeřábek

Rád bych zde poděkoval Doc. Mlčkovi za cenné připomínky k této diplomové práci, všestrannou podporu a obětavé vedení Nestandardního semináře.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Hlavním účelem této práce je studium elementárních vnoření univerzální třídy do tranzitivní třídy (stručně nazývaných reflexe) v jisté neregulární teorii množin, kterou budeme ve shodě s [Paj99] označovat jako univerzální teorii (**UT**). Axiom regularity, který v klasické teorii množin značně omezuje (mimo jiné) možnost konstruovat elementární vnoření množinového univerza, je v **UT** nahrazen tzv. axiomem superuniverzality, jenž naopak dovoluje sestrojit množství reflexí s rozmanitými vlastnostmi. Reflexe lze s výhodou využít zejména pro modelování prostředků nestandardní analýzy a obecnějších nestandardních principů, my se však zaměříme na obecný popis reflexí a možností jejich konstrukce.

Ústředním pojmem kapitoly 2 jsou tzv. minimální reflexe. V celé kapitole budeme pracovat výhradně v **UT**. V sekci 2.1 nejprve ukážeme, že studium vlastností minimálních reflexí má mnoho důsledků i pro neminimální reflexe, neboť každá reflexe v jistém smyslu obsahuje určitou minimální reflexi, zde nazývanou jádro. Část tohoto tvrzení dále zobecníme na třídy, které jsou modelem tzv. axiomu kolekce, což nám zpětně umožní ukázat, že nekonečné schéma formulí v definici reflexe lze konečně axiomatizovat, tedy nahradit jedinou formulí.

Sekce 2.2 se krátce zabývá reflexemi vedoucími do kotranzitivních tříd (tedy např. do celé univerzální třídy) — ukážeme, že takové reflexe jsou triviální, tedy že se takřka neliší od identické reflexe.

V sekci 2.3 popíšeme obecnou konstrukci, kterou lze získat všechny minimální reflexe. Ukážeme, že každá minimální reflexe je direktní limitou vhodného usměrněného systému ultramocnin univerzální třídy, a na druhou stranu (téměř) každá taková direktní limita určuje minimální reflexi. Zjistíme také, že určité speciální typy minimálních reflexí (jednoduché reflexe, polojednoduché reflexe a PP-reflexe) lze charakterizovat podmínkami na tvar příslušné direktní limity. Navíc uvidíme, že tyto typy minimálních reflexí jsou uzavřené na některé způsoby konstrukce reflexí (ultraprodukty, skládání, podreflexe, direktní limity).

Sekce 2.4 obsahuje dva příklady minimálních reflexí se zajímavými vlastnostmi, pokusíme se ukázat, že přinejmenším některé z výše zmíněných tříd minimálních reflexí spolu nesplývají.

V kapitole 3 reflexe opustíme a budeme se věnovat axiomu silného výběru, který postuluje existenci vzájemně jednoznačného zobrazení univerzální třídy na třídu všech ordinálních čísel. Pro klasickou teorii množin s axiomem regularity je známo, že axiom silného výběru konzervativně rozšiřuje obyčejný axiom výběru, jeho použitím tedy není možné dokázat pouze o množinách nic nového. Pro neregulární teorii množin však zmíněná konzervativita neplatí. Přesto se nám podaří popsat množinové důsledky axiomu silného výběru pomocí jednoduchého schematu axiomů a dokážeme konzervativitu axiomu silného výběru nad takto modifikovanou teorií množin. Protože **UT** axiom silného výběru obsahuje, obdržíme jako důsledek také popis fragmentu **UT** v základním jazyce teorie množin.

1.1 Základní pojmy

Jak jsme již předeslali, větší část této diplomové práce se bude odehrávat v tzv. *univerzální teorii,* **UT**, jejíž axiomatiku ve stručnosti popíšeme. Základem **UT** je *Zermelo-Fraenklova teorie množin bez regularity,* $\mathbf{ZF}_-$ (s jazykem obsahujícím pouze binární predikát $\in$ pro relaci náležení mezi množinami), sestávající z axiomů extenzionality, dvojice, sjednocení, potence a nekonečna a schemat axiomů vydělení a nahrazení.

Budeme používat pojmy a symboly běžné v teorii množin, jako jsou například uspořádaná dvojice $\langle x, y\rangle$, skládání funkcí $\circ$, obraz množiny přes relaci $R''X$, restrikce zobrazení $F \restriction X$, $\mathrm{dom}(R)$, $\mathrm{rng}(R)$, ω, $\mathbf{V}$, $\mathbf{On}$, $\mathbf{Id}$ a další. Místo $\mathbf{Id} \restriction X$ budeme někdy psát $\mathbf{Id}_X$. Symbolem $\mathbf{P}(X)$ označujeme potenci třídy X. Vlastní třídy označujeme vždy velkými písmeny, malá písmena rezervujeme pro množiny.

Zkratkou $\mathbf{ZFC}_-$ značíme rozšíření $\mathbf{ZF}_-$ o axiom výběru. Teorie $\mathbf{ZFS}_-$ má oproti $\mathbf{ZF}_-$ navíc unární funkční symbol $\mathbf{C}$ a tzv. *axiom silného výběru,* který říká, že $\mathbf{C}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení univerzální třídy na třídu všech ordinálů:

$$(ASC) \qquad \forall x\ \mathbf{C}(x) \in \mathbf{On}\ \ \&\ \ \forall \alpha \in \mathbf{On}\ \exists!\, x\ \ \mathbf{C}(x) = \alpha$$

Schemata vydělení a nahrazení musíme ovšem rozšířit na všechny formule jazyka $\langle \in, \mathbf{C}\rangle$. Teorie **ZF**, **ZFC** a **ZFS** získáme ze $\mathbf{ZF}_-$, $\mathbf{ZFC}_-$ a $\mathbf{ZFS}_-$ přidáním axiomu regularity.

Definice 1.1.1 Třída X je *tranzitivní,* psáno $Trans(X)$, jestliže každý prvek X je zároveň částí X. *Relační strukturou* rozumíme dvojici $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$, kde A je neprázdná třída a R binární relace na A. Struktura $\mathcal{A}$ je *extenzionální,* jestliže pro libovolné různé prvky $a, b \in A$ platí $R^{-1}{}''\{a\} \neq R^{-1}{}''\{b\}$.

Jsou-li $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, S\rangle$ dvě relační struktury, řekneme, že $\mathcal{A}$ *je podstrukturou* $\mathcal{B}$ nebo-li že $\mathcal{B}$ *je rozšířením* $\mathcal{A}$, pokud $A \subseteq B$ a $R = S \cap (A \times A)$. Píšeme potom $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Je-li $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, tak $\mathcal{B}$ *koncově rozšiřuje* $\mathcal{A}$ (symbolicky $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$), jestliže platí $S^{-1}{}''A \subseteq A$, tj. $R = S \cap (B \times A)$.

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, S\rangle$ jsou relační struktury. Bijekci $F : A \to B$ nazveme *izomorfizmem struktur* $\mathcal{A}$ *a* $\mathcal{B}$, pokud pro každé $a, a' \in A$ platí $\langle a, a'\rangle \in R$ právě tehdy, když $\langle F(a), F(a')\rangle \in S$. Píšeme potom $F : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Je-li $F : \mathcal{A} \simeq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, označujeme F též jako *izomorfní vnoření* $\mathcal{A}$ *do* $\mathcal{B}$.

Pro libovolnou třídu T definujeme $\in_T = \{\langle x, y\rangle \in T \times T; x \in y\}$.

Definice 1.1.2 Teorie **UT** je rozšířením $\mathbf{ZFS}_{-}$ o *axiom superuniverzality*:

$$(ASU) \qquad Trans(t),\ \langle t, \in_t \rangle \leq \langle a, e \rangle,\ \langle a, e \rangle \text{ extenzionální } \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \exists t' \supseteq t\ \exists f : \langle a, e \rangle \simeq \langle t', \in_{t'} \rangle\ (Trans(t') \& f \restriction t \subseteq \mathbf{Id})$$

Axiom superuniverzality navrhl M. Boffa v [Bof72], bývá proto též označován jako Boffův axiom.

Definice 1.1.3 Nechť φ je množinová formule (tj. formule v jazyce $\langle \in \rangle$) a X neprázdná třída. *Relativizace* φ *do* X je formule φ^X, kterou získáme z φ omezením všech kvantifikátorů do třídy X, tj. nahrazením všech podformulí tvaru

$$\exists x\ \psi(x, \dots) \qquad \text{nebo} \qquad \forall x\ \psi(x, \dots)$$

formulemi

$$\exists x\ (x \in X \& \psi(x, \dots)) \qquad \text{nebo} \qquad \forall x\ (x \in X \rightarrow \psi(x, \dots)),$$

které píšeme zkráceně jako $\exists x \in X\, \psi(x)$ a $\forall x \in X\, \psi(x)$.

Obecněji, je-li $\mathcal{A} = \langle A, E \rangle$ relační struktura, označuje $\varphi^{(\mathcal{A})}$ formuli, kterou získáme z φ omezením všech kvantifikátorů do A a nahrazením všech podformulí tvaru $x \in y$ formulemi $\langle x, y \rangle \in E$. Je tedy φ^X ekvivalentní $\varphi^{(\langle X, \in_X \rangle)}$. Platí-li $\varphi^{(\mathcal{A})}$, kde φ je sentence, říkáme také, že $\mathcal{A}$ je *modelem* φ, což zapisujeme $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

Formule φ se nazývá *omezená,* jsou-li všechny výskyty kvantifikátorů ve φ tvaru $\exists x \in y\ \ \psi$ nebo $\forall x \in y\ \ \psi$.

Definice 1.1.4 Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ relační struktury. Zobrazení $F : A \rightarrow B$ nazveme *elementárním vnořením,* pokud pro každou množinovou formuli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ platí

$$\forall a_1, \dots, a_n \in A\ \ (\varphi^{(\mathcal{A})}(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \varphi^{(\mathcal{B})}(F(a_1), \dots, F(a_n)).$$

Struktura $\mathcal{A}$ je *elementární podstrukturou* struktury $\mathcal{B}$, je-li identita $\mathbf{Id} \restriction A$ elementární vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Potom též píšeme $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.

Reflexe je dvojice $\langle H, W \rangle$, kde W je tranzitivní třída a $H : \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle \rightarrow \langle W, \in_W \rangle$ je elementární vnoření.

Poznámka 1.1.5 Každý izomorfizmus je elementární vnoření. Je-li $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *omezená* formule a $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, platí $\varphi^{(\mathcal{A})}(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \varphi^{(\mathcal{B})}(a_1, \dots, a_n)$ pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$. Speciálně tento vztah platí, jsou-li $U \subseteq W$ dvě tranzitivní třídy, $\mathcal{A} = \langle U, \in_U \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle W, \in_W \rangle$. V tomto kontextu říkáme, že formule φ je *absolutní* pro U a W.

Poznámka 1.1.6 V definici reflexe se zpravidla ještě požaduje, aby třída W byla skorouniverzální. Pro naše účely však tato podmínka nebude potřeba. Navíc uvidíme, že každá minimální reflexe (viz definici 2.1.1) je skorouniverzální automaticky, což vyplývá z lemmatu 2.1.2.

V regulární teorii množin **ZFC** se elementární vnoření univerzální třídy takřka nevyskytují a jejich existence úzce souvisí s existencí měřitelných kardinálů. Jeden z důsledků Boffova axiomu je, že v **UT** lze sestrojit bohatou škálu různých reflexí. Klíčové je zde následující tvrzení, které podstatně zobecňuje klasickou Mostowského větu o kolapsu.

Definice 1.1.7 Relační struktura $\mathcal{A} = \langle A, E\rangle$ se nazývá *úzká,* je-li $E^{-1}{}''\{a\}$ množina pro každé $a \in A$.

Tvrzení 1.1.8 *(Princip univerzality.) Nechť $\mathcal{A}$ je úzká extenzionální relační struktura. Pak existuje tranzitivní třída T a izomorfizmus $F : \mathcal{A} \simeq \langle T, \in_T\rangle$.*

Důkaz:
Pomocí axiomu silného výběru si očíslujeme (ne nutně prostě) $A = \{x_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{On}\}$. Protože struktura $\mathcal{A} = \langle A, E\rangle$ je úzká, lze indukcí podle α sestrojit posloupnost množin $\{\langle a_\alpha, e_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathbf{On}}$ tak, že pro každé $\beta < \alpha$ platí $x_\beta \in a_\alpha$ a $\langle a_\beta, e_\beta\rangle \leq \langle a_\alpha, e_\alpha\rangle \leq \mathcal{A}$, specielně $A = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} a_\alpha$. Můžeme též předpokládat, že $a_0 = \emptyset$ a $a_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} a_\alpha$ pro λ limitní.

Indukcí podle α sestrojíme posloupnost tranzitivních množin t_α a izomorfizmů $f_\alpha : \langle a_\alpha, e_\alpha\rangle \simeq \langle t_\alpha, \in_{t_\alpha}\rangle$ tak, aby platilo $t_\beta \subseteq t_\alpha$ a $f_\beta \subseteq f_\alpha$ pro každé $\beta \leq \alpha$. Je zřejmé, že pokud se nám to podaří, budou $T = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} t_\alpha$ a $F = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} f_\alpha$ splňovat závěr dokazovaného tvrzení.

Pro $\alpha = 0$ stačí položit $t_0 = f_0 = \emptyset$. Je-li α limitní, definujeme $t_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} t_\beta$ a $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Nechť konečně $\alpha = \beta+1$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že t_β je disjunktní s $a' = a_{\beta+1} \setminus a_\beta$. Položme

$$a = t_\beta \cup a',$$

$$e = \in_{t_\beta} \cup (e_{\beta+1} \cap (a' \times a')) \cup \{\langle u, v\rangle \in t_\beta \times a';\ \ \langle f_\beta^{-1}(u), v\rangle \in e_{\beta+1}\}.$$

Struktura $\langle a, e\rangle$ je extenzionální a koncově rozšiřuje $\langle t_\beta, \in_{t_\beta}\rangle$, podle axiomu superuniverzality existuje proto tranzitivní množina $t_{\beta+1}$ a izomorfizmus $f : \langle a, e\rangle \simeq \langle t_{\beta+1}, \in_{\beta+1}\rangle$, identický na t_β. (Množiny $t_{\beta+1}$ a f nejsou určeny jednoznačně, zvolíme je proto nějak kanonicky za pomoci axiomu silného výběru.) Definujeme-li $f_{\beta+1} = f_\beta \cup (f \restriction a')$, je $f_{\beta+1}$ hledaný izomorfizmus $a_{\beta+1}$ a $t_{\beta+1}$. ⊣

Definice 1.1.9 *Podobnost* je izomorfizmus $f : \langle t, \in_t\rangle \simeq \langle s, \in_s\rangle$, kde t a s jsou tranzitivní množiny. Třídu všech podobností značíme **Sim**.

Libovolný izomorfizmus $F : \langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V}\rangle \simeq \langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V}\rangle$ označujeme za *automorfizmus univerzální třídy.*

Tvrzení 1.1.10 *Každou podobnost lze rozšířit na automorfizmus univerzální třídy.*

Důkaz:
Indukcí podle α sestrojíme posloupnost podobností $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{On}}$ tak, aby pro každé $\beta < \alpha$ platilo $f \subseteq f_\beta \subseteq f_\alpha$ a $\mathbf{C}^{-1}(\beta) \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \cap \mathrm{rng}(f_\alpha)$. Je zřejmé, že potom $F = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} f_\alpha$ je hledaný automorfizmus.

Položíme $f_0 = f$ a pro α limitní definujeme $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Dále nechť $\alpha = \beta+1$, označme $x = \mathbf{C}^{-1}(\beta)$. Potřebujeme sestrojit podobnost $f_{\beta+1} \supseteq f_\beta$ takovou, že $x \in$

$\mathrm{dom}(f_{\beta+1}) \cap \mathrm{rng}(f_{\beta+1})$. Protože inverzní zobrazení k podobnosti je opět podobnost, stačí ukázat, že libovolnou podobnost f je možné prodloužit do podobnosti g tak, aby $x \in \mathrm{rng}(g)$.

Zvolme tranzitivní množinu t takovou, že $x \in t$. Opět budeme pro jednoduchost předpokládat, že $a' = t \setminus \mathrm{rng}(f)$ je disjunktní s $\mathrm{dom}(f)$. Označme

$$a = \mathrm{dom}(f) \cup a',$$

$$e = \in_{\mathrm{dom}(f)} \cup \in_{a'} \cup \{\langle u, v\rangle \in \mathrm{dom}(f) \times a';\ \ f(u) \in v\}.$$

Extenzionální struktura $\langle a, e\rangle$ koncově rozšiřuje $\langle \mathrm{dom}(f), \in_{\mathrm{dom}(f)}\rangle$, podle axiomu superuniverzality existuje tranzitivní množina $t' \supseteq \mathrm{dom}(f)$ a izomorfizmus f' : $\langle a, e\rangle \simeq \langle t', \in_{t'}\rangle$ identický na $\mathrm{dom}(f)$. Potom $g = f \cup (f' \restriction a')^{-1}$ je podobnost a $x \in t \subseteq \mathrm{rng}(g)$. ⊣

Definice 1.1.11 Relace R na třídě X je *fundovaná,* má-li každá neprázdná podmnožina $a \subseteq X$ R-minimální prvek (což je $x \in a$ takové, že $R^{-1}{}''\{x\} \cap a = \emptyset$). Struktura $\mathcal{A} = \langle A, E\rangle$ se nazývá *fundovaná,* je-li relace E fundovaná na A. *Fundované jádro* je třída

$$\mathbf{WF} = \{x;\ \exists t\ \ (Trans(t)\ \&\ x \subseteq t\ \&\ \in_t \text{ je fundované})\}.$$

Kapitola 2

Minimální reflexe

2.1 Základní vlastnosti minimálních reflexí

Definice 2.1.1 Reflexe $\langle H, W\rangle$ se nazývá *minimální*, pokud $W = \bigcup \mathrm{rng}(H)$.

Lemma 2.1.2 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je minimální reflexe a $x \subseteq W$. Pak existuje a tak, že $x \subseteq H(a)$.*

Důkaz:
Pro každé $y \in x$ zvolme a_y tak, že $y \in H(a_y)$, a definujme $a = \bigcup_{y \in x} a_y$. Potom $a_y \subseteq a$, tedy $H(a_y) \subseteq H(a)$ pro každé $y \in x$, takže $x \subseteq H(a)$. ⊣⊢

Definice 2.1.3 Třída X se nazývá *kotranzitivní*, je-li každá podmnožina X jejím prvkem, tj. $\mathbf{P}(X) \subseteq X$. Je-li $X \subseteq Y$, řekneme, že třída X je *kotranzitivní v třídě* Y, jestliže $\mathbf{P}(X) \cap Y \subseteq X$.

Tvrzení 2.1.4 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je reflexe, označme $Z = \bigcup \mathrm{rng}(H)$. Pak $\langle H, Z\rangle$ je minimální reflexe, $\langle Z, \in_Z\rangle$ je elementární podstrukturou $\langle W, \in_W\rangle$, Z je kotranzitivní v W a $\mathbf{WF}^Z = \mathbf{WF}^W$.*

Důkaz:
Nejprve ukážeme, že Z je tranzitivní třída. Je-li $x \in y$ a $y \in Z$, existuje a takové, že $y \in H(a)$. Nechť b je tranzitivní množina obsahující a. Pak $H(b)$ je také tranzitivní (neboť formule $Trans(b) = \forall u \in b\ \forall v \in u\ v \in b$ je omezená) a platí $x \in y \in H(a) \in H(b)$, tedy $x \in H(b)$ a $x \in Z$.

Nyní dokážeme, že $Z \preccurlyeq W$. Nechť φ je libovolná formule a $x_1, \dots, x_n \in Z$. Podle Tarského testu stačí ukázat, že

$$\exists y \in W\ \ \varphi^W(y, x_1, \dots, x_n) \to \exists y \in Z\ \ \varphi^W(y, x_1, \dots, x_n).$$

Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou takové množiny, že $x_i \in H(a_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ a nechť b je množina splňující $\exists y\ \varphi(y, u_1, \dots, u_n) \to \exists y \in b\ \varphi(y, u_1, \dots, u_n)$ pro všechna

$u_1 \in a_1, \ldots, u_n \in a_n$. Díky elementaritě H platí

$$\forall u_1 \in H(a_1) \ldots \forall u_n \in H(a_n)$$
$$(\exists y \in W \;\; \varphi^W(y, u_1, \ldots, u_n) \to \exists y \in H(b) \;\; \varphi^W(y, u_1, \ldots, u_n)),$$

specielně existuje-li $y \in W$ splňující $\varphi^W(y, x_1, \ldots, x_n)$, pak lze takové y nalézt i v $H(b)$, čili v Z.

Z toho již vyplývá, že $\langle H, Z\rangle$ je reflexe (a to evidentně minimální). Je-li totiž φ formule, platí

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^W(H(x_1), \ldots, H(x_n)) \leftrightarrow \varphi^Z(H(x_1), \ldots, H(x_n)).$$

Dále ukážeme, že Z je kotranzitivní v W. Nechť $x \in W$ a $x \subseteq Z$. Pro každý prvek $y \in x$ vybereme a_y tak, že $y \in H(a_y)$, a položme $b = \bigcup\{a_y;\;\; y \in x\}$. Potom $x \subseteq H(b)$, tudíž $x \in \mathbf{P}^W(H(b)) = H(\mathbf{P}(b))$ a $x \in Z$.

Protože $Z \preccurlyeq W$, stačí k ověření rovnosti $\mathbf{WF}^Z = \mathbf{WF}^W$ dokázat inkluzi $\mathbf{WF}^W \subseteq Z$. Nechť $x \in \mathbf{WF}^W$, pak existuje $\alpha \in \mathbf{On}^W$ tak, že $(x \in p_\alpha)^W$. Třída $\mathbf{On}^W$ je lineárně uspořádaná náležením a $H''\mathbf{On} \subseteq \mathbf{On}^W$ je vlastní třída, tudíž existuje $\beta \in \mathbf{On}$ tak, že $\alpha \leq H(\beta)$. Pak ovšem $x \in (p_{H(\beta)})^W = H(p_\beta)$, tedy $x \in Z$. ⊣

Poznámka 2.1.5 Tvrzení 2.1.4 vysvětluje pojmenování minimálních reflexí: je-li $\langle H, W\rangle$ reflexe, je $Z = \bigcup \mathrm{rng}(H)$ nejmenší tranzitivní třída taková, že $\langle H, Z\rangle$ je reflexe.

Definice 2.1.6 Nechť $\langle H, W\rangle$ je reflexe. Pak reflexe $\langle H, \bigcup \mathrm{rng}(H)\rangle$ se nazývá (*minimální*) *jádro* reflexe $\langle H, W\rangle$.

Uvidíme, že předpoklady tvrzení 2.1.4 lze podstatně zeslabit. Důkaz se tím ovšem poněkud zkomplikuje, proto nejprve uvedeme několik pomocných definic a lemmat.

Definice 2.1.7 (Lévyho hierarchie.) $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ jsou omezené formule. Dále definujeme indukcí Σ_{n+1} jako třídu formulí tvaru $\exists x \;\; \varphi$, kde $\varphi \in \Pi_n$, a duálně Π_{n+1} jako třídu všech formulí $\forall x \;\; \varphi$ pro $\varphi \in \Sigma_n$.

Řekneme, že formule φ je Σ_n (resp. Π_n) *v teorii T*, je-li v této teorii ekvivalentní nějaké Σ_n (resp. Π_n) formuli.

Axiom *kolekce* pro formuli $\varphi(z, z_1, \ldots, z_n)$ je formule

$$\forall x \;\; \exists y \;\; \forall z_1, \ldots, z_n \in x \;\; (\exists z \;\; \varphi(z, z_1, \ldots, z_n) \to \exists z \in y \;\; \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)).$$

Schéma axiomů kolekce pro všechny formule budeme značit **Coll**, schéma kolekce pro Σ_n (resp. Π_n) formule budeme (analogií podle úzu obvyklého v podsystémech Peanovy aritmetiky) označovat jako $B\Sigma_n$ (resp. $B\Pi_n$).

Symbol $\mathbf{ZF_{weak}}$ bude zastupovat pomocnou teorii s axiomy extenzionality, dvojice a sjednocení.

Lemma 2.1.8 *Nechť $n > 0$. V $\mathbf{ZF_{weak}}$ je třída všech Σ_n-formulí uzavřena na konjunkci, disjunkci a (omezené i neomezené) existenční kvantifikátory, třída Π_n-formulí je uzavřená na konjunkci, disjunkci a univerzální kvantifikátory. V teorii $\mathbf{ZF_{weak}} + B\Pi_{n-1}$ jsou třídy Σ_n a Π_n uzavřené na omezenou kvantifikaci.*

Důkaz:
Nechť $\varphi = \exists x_1\ \forall x_2 \cdots Q x_n\ \vartheta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ je Σ_n-formule, přičemž Q je $\exists$ nebo $\forall$ podle parity n. Pak formule $\exists y_1\ \varphi$ je v $\mathbf{ZF_{weak}}$ ekvivalentní

$$\begin{aligned}&\exists u\ \forall x_2 \cdots Q x_n\ \exists v, w \in u\ \exists y_1, x_1 \in v\\ &\qquad\qquad(\vartheta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)\ \&\ v = \{y_1, x_1\}\ \&\ w = \{x_1\}\ \&\ u = \{v, w\}),\end{aligned}$$

kde $c = \{a, b\}$ je zkratka za Δ_0-formuli $a \in c\ \&\ b \in c\ \&\ \forall d \in c\ (d = a \vee d = b)$ (tj. dvojí existenční kvantifikátor nahradíme jedním pomocí uspořádané dvojice). Tedy třída Σ_n je uzavřená na existenční kvantifikaci a duálně Π_n je uzavřená na univerzální kvantifikaci. Z toho se již snadno indukcí podle n odvodí, že obě tyto třídy jsou uzavřeny na konjunkci a disjunkci.

Druhou část lemmatu dokážeme indukcí podle n. Stačí pochopitelně ověřit, že třída Σ_n je v $\mathbf{ZF_{weak}} + B\Pi_{n-1}$ uzavřená na univerzální omezenou kvantifikaci. Buď tedy $\exists x\ \varphi(x, u, z_1, \ldots, z_n)$ nějaká Σ_n-formule, $\varphi \in \Pi_{n-1}$. Použitím $B\Pi_{n-1}$ zjistíme, že

$$\forall u \in y\ \exists x\ \varphi(x, u, z_1, \ldots, z_n) \leftrightarrow \exists w\ \forall u \in y\ \exists x \in w\ \varphi(x, u, z_1, \ldots, z_n),$$

formule napravo je ovšem Σ_n podle indukčního předpokladu (resp. je Σ_n přímo z definice, pokud $n = 1$ — v tomto případě nemáme žádný indukční předpoklad k dispozici). ⊣⊢

Definice 2.1.9 Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou dvě relační struktury. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *n-elementární podstruktura* $\mathcal{B}$, psáno $\mathcal{A} \subseteq_n \mathcal{B}$, pokud $\mathcal{A}$ je podstruktura $\mathcal{B}$ a pro každou Σ_n-formuli φ a pro všechna $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí

$$\varphi^{(\mathcal{A})}(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \varphi^{(\mathcal{B})}(a_1, \ldots, a_n).$$

Věta 2.1.10 *Nechť $\langle U, \in_U \rangle$ je 0-elementární podstruktura $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$, která je modelem $\mathbf{ZF_{weak}} + \mathbf{Coll}$. Označme $Z = \bigcup U$. Pak Z je tranzitivní třída a $\langle U, \in_U \rangle \preccurlyeq \langle Z, \in_Z \rangle$.*

Důkaz:
Třída Z je tranzitivní: nechť $x \in y \in Z$, zvolme $a \in U$ takové, že $y \in a$. Protože $U \models \mathbf{ZF_{weak}}$, existuje $b \in U$ tak, že $(b = \bigcup a)^U$. Formule $b = \bigcup a$ je Δ_0 a $U \subseteq_0 \mathbf{V}$, takže b je skutečné sjednocení množiny a, specielně $x \in b$ a $x \in Z$.

V předpokladech máme $U \subseteq_0 \mathbf{V}$ a z tranzitivity Z plyne $Z \subseteq_0 \mathbf{V}$, dále $U \subseteq Z$ díky uzavřenosti U na dvojice, tedy také $U \subseteq_0 Z$.

Třída Z je model $\mathbf{ZF_{weak}}$: každá tranzitivní třída je modelem axiomu extenzionality. Nechť $x, y \in Z$, zvolíme a, b tak, že $x \in a \in U$ a $y \in b \in U$. Protože U je model axiomu dvojice a schématu kolekce, existuje $c \in U$ takové, že

$$(\forall u \in a\ \forall v \in b\ \exists w \in c\ w = \{u, v\})^U.$$

Uvedená formule je omezená, platí proto i v Z. Z toho dostáváme, že $(\exists w\ \ w = \{x,y\})^Z$. Podobně lze ověřit, že Z je modelem axiomu sjednocení.

Indukcí podle n nyní ukážeme, že

(*i*) $U \subseteq_{n+1} Z$

(*ii*) $(B\Pi_n)^Z$

Předpokládejme, že pro $n-1$ obě tvrzení platí nebo že $n = 0$. Nechť $\exists x\ \ \varphi(x)$ je Σ_{n+1}-formule s parametry z U, přičemž $\varphi \in \Pi_n$. Z indukčního předpokladu resp. z $U \subseteq_0 Z$ dostáváme, že

$$(\exists x\ \ \varphi(x))^U \to \exists x \in U\ \ \varphi^U(x) \to \exists x \in U\ \ \varphi^Z(x) \to \exists x \in Z\ \ \varphi^Z(x) \to (\exists x\ \ \varphi(x))^Z.$$

V opačném směru máme

$$\begin{aligned}(\exists x\ \ \varphi(x))^Z \to \exists x \in Z\ \ \varphi^Z(x) \to \exists a \in U\ \ \exists x \in a\ \ \varphi^Z(x) \to \\ \to \exists a \in U\ \ (\exists x \in a\ \ \varphi(x))^Z.\end{aligned}$$

Pokud $n = 0$, je formule $\psi = \exists x \in a\ \ \varphi(x)$ omezená. V případě $n > 0$ vyplývá z indukčního předpokladu, že U i Z splňují $\mathbf{ZF_{weak}} + B\Pi_{n-1}$, podle lemmatu 2.1.8 je ψ v této teorii ekvivalentní nějaké Π_n-formuli. V obou případech dostáváme z $U \subseteq_n Z$, že

$$\exists a \in U\ \ (\exists x \in a\ \ \varphi(x))^Z \to \exists a \in U\ \ (\exists x \in a\ \ \varphi(x))^U \to (\exists x\ \ \varphi(x))^U.$$

Ověřili jsme, že $U \subseteq_{n+1} Z$, zbývá ukázat, že $Z \models B\Pi_n$. Nechť $\varphi(z, z_1, \ldots, z_k)$ je Π_n-formule a $x \in Z$ libovolné. Existuje $a \in U$ tak, že $x \in a$, dále $b = \bigcup a \in U$. Podle $(\mathbf{Coll})^U$ najdeme $c \in U$ splňující

$$(\forall z_1, \ldots, z_n \in b\ \ (\exists z\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n) \to \exists z \in c\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)))^U.$$

Tato formule je podle lemmatu 2.1.8 Π_{n+1} v $\mathbf{ZF_{weak}} + B\Pi_{n-1}$, tudíž díky již dokázanému $U \subseteq_{n+1} Z$ platí

$$(\forall z_1, \ldots, z_n \in b\ \ (\exists z\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n) \to \exists z \in c\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)))^Z.$$

Zároveň $x \subseteq b$, takže

$$(\exists y\ \ \forall z_1, \ldots, z_n \in x\ \ (\exists z\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n) \to \exists z \in y\ \ \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)))^Z.$$

$\dashv\!\!\!\Vdash$

Věta 2.1.11 *Existuje Δ_0-formule $\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ taková, že následující podmínky jsou ekvivalentní pro libovolnou třídu H:*

(*i*) $\langle H, \bigcup \mathrm{rng}(H)\rangle$ *je minimální reflexe*

(*ii*) *H je zobrazení $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a platí*

$$\forall x_1, \ldots, x_n\ \ (\vartheta(x_1, \ldots, x_n) \to \vartheta(H(x_1), \ldots, H(x_n))).$$

Důkaz:
Nechť $Tr_{\Sigma_1}(e,x) = \exists w \;\; \lambda(e,x,w)$ je univerzální Σ_1-formule, kde $\lambda \in \Delta_0$. Je-li tedy $\varphi(x)$ libovolná Σ_1-formule s nejvýše jednou volnou proměnnou, platí (resp. v $\mathbf{ZF}_-$ je dokazatelné)

$$\forall x \;\; (\varphi(x) \leftrightarrow Tr_{\Sigma_1}(\ulcorner\varphi\urcorner, x)),$$

kde $\ulcorner\varphi\urcorner$ je kód formule φ. Budeme předpokládat, že kódy všech formulí jsou dědičně konečné množiny z fundovaného jádra, tj. prvky p_ω. (U běžných konstrukcí univerzální formule jsou tyto kódy dokonce přirozená čísla.) Nechť $\vartheta(x_1,\ldots,x_7)$ označuje formuli

$$x_1 = x_2 \cup \{x_3\} \;\&\; x_4 = \emptyset \;\&\; \lambda(x_5,x_6,x_7),$$

přesněji následující omezenou formuli:

$$(\forall u \in x_1 \;\; (u \in x_2 \vee u = x_3) \;\&\; x_3 \in x_1 \;\&\; \forall u \in x_2 \;\; u \in x_1)\& \\ \& \; (\forall u \in x_4 \;\; u \neq u) \;\&\; \lambda(x_5,x_6,x_7).$$

Nechť nejprve $H : \mathbf{V} \to W = \bigcup \mathrm{rng}(H)$ je minimální reflexe. Potom zřejmě platí

$$\vartheta(x_1,\ldots,x_7) \to \vartheta^W(H(x_1),\ldots,H(x_7)) \to \vartheta(H(x_1),\ldots,H(x_7)),$$

neboť ϑ je omezená formule.

Předpokládejme naopak, že $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ zachovává formuli ϑ. Potom zjevně platí $H(\emptyset) = \emptyset$ a $H(x \cup \{y\}) = H(x) \cup \{H(y)\}$, tudíž H je identické na p_ω a zachovává uspořádané n-tice. Nechť $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ je libovolná Δ_0-formule, nechť $\psi(x)$ je taková omezená formule, že

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \;\; (\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)).$$

Potom

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1,\ldots,x_n) &\to \psi(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \\
&\to \exists w \;\; \lambda(\ulcorner\psi\urcorner, \langle x_1,\ldots,x_n\rangle, w) \\
&\to \exists w \;\; \lambda(H(\ulcorner\psi\urcorner), H(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle), H(w)) \\
&\to \exists u \;\; \lambda(\ulcorner\psi\urcorner, \langle H(x_1),\ldots,H(x_n)\rangle, u) \\
&\to \psi(\langle H(x_1),\ldots,H(x_n)\rangle) \\
&\to \varphi(H(x_1),\ldots,H(x_n)),
\end{aligned}$$

takže H je Δ_0-elementární zobrazení. Označme $U = \mathrm{rng}(H)$. Formule $x = y$ a $x \in y$ jsou omezené, tudíž H je izomorfizmus $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle$ a $\langle U, \in_U\rangle$, specielně U je model $\mathbf{ZFC}_- + \mathbf{Coll}$. Dále pro $\varphi \in \Delta_0$ a $x_1,\ldots,x_n \in U$ platí

$$\varphi^U(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi(H^{-1}(x_1),\ldots,H^{-1}(x_n)) \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

takže $U \subseteq_0 \mathbf{V}$. Podle věty 2.1.10 je $W = \bigcup U$ tranzitivní třída a $U \preccurlyeq W$, takže $\langle H, W\rangle$ je (minimální) reflexe. ⊣⊢

Poznámka 2.1.12 Věty 2.1.10 a 2.1.11 podstatně zobecňují tvrzení 2.1.4. Za zmínku stojí ještě jeden důsledek 2.1.11. Zatímco původní definice reflexe zahrnuje nekonečné schéma formulí, což komplikuje formalizaci některých faktů o reflexích v **UT**, podle 2.1.11 lze minimální reflexe popsat jednou množinovou formulí (s třídovým parametrem). O minimálních reflexích lze tedy v **UT** mluvit stejným způsobem jako např. o tranzitivních třídách. (Uvidíme dále, že podobným způsobem lze popsat i reflexe, jež nejsou minimální.)

Tvrzení 2.1.10 a role schématu kolekce v jeho důkazu úzce souvisí s teorií modelů elementární aritmetiky:

Věta 2.1.13 (Gaifman)

(*i*) $\mathcal{A} \subseteq_0 \mathcal{B} \models Q^+, \quad \mathcal{A} \models PA \quad \to \quad \mathcal{A} \preccurlyeq \hat{\mathcal{A}}$, *kde* $\hat{\mathcal{A}} = \{x \in B;\ \exists a \in A\ \ x \leq^B a\}$

(*ii*) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \models I\Delta_0 + EXP \quad \to \quad \mathcal{A} \subseteq_0 \mathcal{B}$

(Q^+ je Robinsonova aritmetika plus komutativní, asociativní a distributivní zákon pro sčítání a násobení.) ⧻

Zatímco první část tohoto tvrzení má bezprostřední analogii v 2.1.10, jeho druhá část tak přímočarou paralelu nedovoluje. Prostým přenesením Gaifmanovy věty bychom dostali, že předpoklad $U \subseteq_0 \mathbf{V}$ v tvrzení 2.1.10 je vlastně zbytečný a formuli ϑ z tvrzení 2.1.11 lze volit bezkvantifikátorovou. To však není pravda. (Ne každé izomorfní vnoření z $\mathbf{V}$ do $\mathbf{V}$ je reflexe.)

Problém je v tom, že 2.1.13 se podstatně opírá o Matijasevičovu větu [Mat70], resp. o její formalizaci v $I\Delta_0 + EXP$, která pro Lévyho hierarchii neplatí. V jazyce teorie množin nejsou, na rozdíl od aritmetiky, žádné funkční symboly, proto jsou otevřené formule $\in$-jazyka velice chudé. Jistou analogii ke Gaifmanově (a Matijasevičově) větě lze přesto vyslovit pomocí klasifikace omezených formulí:

Definice 2.1.14 $\Delta_0^b = \Sigma_0^b = \Pi_0^b$ je třída všech otevřených formulí. Σ_{n+1}^b je nejmenší třída formulí obsahující $\Sigma_n^b \cup \Pi_n^b$ a uzavřená na konjunkci, disjunkci a omezené existenční kvantifikátory. Π_{n+1}^b je nejmenší třída formulí obsahující $\Sigma_n^b \cup \Pi_n^b$ a uzavřená na konjunkci, disjunkci a omezené univerzální kvantifikátory.

Je-li Γ třída formulí, tak $\exists\Gamma$ ($\forall\Gamma$) značí uzávěr Γ na existenční (univerzální) kvantifikaci.

Není těžké ukázat, že v $\mathbf{ZFC}_- + \mathbf{Coll}$ je každá Σ_1-formule ekvivalentní nějaké $\exists\Pi_2^b$-formuli. Na druhou stranu je možné sestrojit „skoro-reflexi“, která zachovává všechny Σ_2^b-formule (dokonce $\exists\forall$-formule), ale nikoli Π_2^b-formule. (Důkazy těchto faktů zde neuvádíme, protože poněkud překračují rámec této práce a jejich délka není úměrná dosaženému výsledku.) Odtud dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 2.1.15 *Lze sestrojit Π_2^b-formuli ϑ splňující závěr* 2.1.11. *Tvrzení* 2.1.11 *však neplatí pro žádnou množinu Σ_2^b-formulí.* ⧻

Jak jsme se již zmínili na začátku této poznámky, podíváme se krátce na obecné (neminimální) reflexe.

Tvrzení 2.1.16 *Existuje sentence ψ jazyka $\langle\in\rangle$, dokazatelná v* **UT**, *s následující vlastností: jsou-li $Z \subseteq W$ dvě tranzitivní třídy takové, že Z je kotranzitivní v W, $\mathbf{On}^Z = \mathbf{On}^W$ a Z i W jsou modely ψ, pak $Z \preccurlyeq W$.*

Důkaz:
Budeme postupovat, jakoby Z i W byly modely **UT** (resp. $\mathbf{UT}_\in = \{\varphi \in F_0\langle\in\rangle;\ \mathbf{UT} \vdash \varphi\} = \mathbf{ZFT}_- + ASU$, srov. 3.1.7 a 3.1.3), z důkazu bude patrné, že jsme ve skutečnosti použili jen jistou konečnou podteorii $\mathbf{UT}_\in$.

K ověření $Z \preccurlyeq W$ stačí ukázat, že pro každé $x_1, \ldots, x_n \in Z$ a libovolnou formuli φ platí

$$\exists u \in W\ \ \varphi^W(u, x_1, \ldots, x_n) \to \exists u \in Z\ \ \varphi^W(u, x_1, \ldots, x_n).$$

Předpokládejme, že $u \in W$ a $\varphi^W(u, x_1, \ldots, x_n)$. Zvolme tranzitivní množiny $x \in Z$ a $y \in W$ tak, že $x_1, \ldots, x_n \in x$, $x \subseteq y$ a $u \in y$. Dále nechť $g' : (y \setminus x) \to \mathbf{On}^W$ je prosté zobrazení, $g' \in W$ a $\mathrm{rng}(g') \cap x = \emptyset$. Položíme $g = g' \cup (\mathbf{Id} \upharpoonright x)$, $a = \mathrm{rng}(g)$ a $e = \{\langle g(v), g(w)\rangle;\ \ v \in w \in y\}$. Množiny g, a a e leží ve W, a i e jsou části Z, podle předpokladů proto $\langle a, e\rangle \in Z$. Extenzionální struktura $\langle a, e\rangle$ koncově rozšiřuje $\langle x, \in_x\rangle$, podle axiomu superuniverzality (v Z) existuje tranzitivní množina $t \in Z$ a izomorfizmus $h : \langle a, e\rangle \simeq \langle t, \in_t\rangle$ identický na x, $h \in Z$. Definujeme-li $f = h \circ g$, je $f \in W$ podobnost, $f(x_i) = x_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $f(u) \in Z$.

K dokončení důkazu stačí ověřit, že každá podobnost v W je částečné elementární vnoření struktury $\langle W, \in_W\rangle$ do sebe, tj.

$$\forall f \in \mathbf{Sim}^W\ \ \forall v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{dom}(f)\ \ (\varphi^W(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi^W(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

pro libovolnou formuli φ. (Každou podobnost lze v **UT** rozšířit na automorfizmus univerzální třídy a ten je zjevně elementárním vnořením, ovšem toto tvrzení se podstatně opírá o axiom silného výběru a ten nemůžeme v W zaručit.)

Postupujeme indukcí podle složitosti formule φ. Pro atomické formule tvrzení platí podle definice podobnosti. Indukční kroky pro výrokové spojky jsou triviální. Předvedeme indukční krok pro existenční kvantifikátor. Stačí ověřit implikaci zleva doprava, neboť inverzní zobrazení k libovolné podobnosti je opět podobnost. Nechť tedy $\exists w \in W\ \ \varphi^W(w, v_1, \ldots, v_n)$, nějaké w si zafixujeme. Jednoduchou aplikací axiomu superuniverzality (v W) najdeme podobnost $g \supseteq f$, $g \in W$ takovou, že $w \in \mathrm{dom}(g)$. Podle indukčního předpokladu $\varphi^W(g(w), g(v_1), \ldots, g(v_n))$, tedy také $\exists w \in W\ \ \varphi^W(w, f(v_1), \ldots, f(v_n))$. ⊣

Důsledek 2.1.17 *Nechť ϑ je formule z* 2.1.11 *a ψ sentence z* 2.1.16. *Pak následující podmínky jsou ekvivalentní pro libovolné třídy H a W:*

(*i*) *$\langle H, W\rangle$ je reflexe*

(*ii*) *H je zobrazení* **V** *do tranzitivní třídy W, platí ψ^W, $Z = \bigcup \mathrm{rng}(H)$ je kotranzitivní v W a*

$$\forall x_1, \ldots, x_n\ \ (\vartheta(x_1, \ldots, x_n) \to \vartheta(H(x_1), \ldots, H(x_n))).$$

Důkaz:
$(i)\to(ii)$: podle 2.1.4 je $\langle H, Z\rangle$ minimální reflexe a Z je kotranzitivní v W. Navíc ψ^W, protože W je elementárně ekvivalentní s $\mathbf{V}$, a H přenáší platnost omezené formule ϑ.

$(ii)\to(i)$: podle 2.1.11 je $\langle H, Z\rangle$ minimální reflexe, specielně Z je tranzitivní a ψ^Z. Díky kotranzitivitě Z v W je $\mathbf{On}^Z = (\mathbf{On}^W) \cap Z$. Navíc $\mathbf{On}^Z \supseteq H''\mathbf{On}$ je vlastní třída a $\mathbf{On}^W$ je lineárně uspořádané pomocí $\in$ (resp. lze volit ψ tak, že $\psi \vdash \forall x, y \in \mathbf{On}\ (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$), tudíž $\mathbf{On}^Z = \mathbf{On}^W$. Podle 2.1.16 je proto $Z \preccurlyeq W$, takže i $\langle H, W\rangle$ je reflexe. ∎

2.2 Kotranzitivní reflexe

Definice 2.2.1 Reflexi $\langle H, W\rangle$ nazveme *kotranzitivní,* je-li W kotranzitivní třída. Reflexe $\langle H, W\rangle$ je *triviální,* pokud $W = \mathrm{rng}(H)$.

Lemma 2.2.2 *Nechť W je tranzitivní třída obsahující fundované jádro, která je uzavřená na spočetné podmnožiny. Pak $(\mathbf{WF})^W = \mathbf{WF}$.*

Důkaz:
Je-li $x \in \mathbf{WF}$, tak též tranzitivní obal $TC(\{x\}) =: y$ leží ve $\mathbf{WF}$ a tedy ve W. Každá neprázdná podmnožina y má $\in$-minimální prvek a ten také leží ve $\mathbf{WF} \subseteq W$, takže $x \in (\mathbf{WF})^W$.

Nechť $x \in W \setminus \mathbf{WF}$. Existuje funkce $f : \omega \to W$ taková, že $f(0) = x$ a $f(n+1) \in f(n)$ pro každé $n \in \omega$. Je-li $y \in W$ tranzitivní množina (tato vlastnost je Δ_0 a tudíž absolutní mezi W a $\mathbf{V}$) a $x \in y$, tak $\mathrm{rng}(f)$ je neprázdná podmnožina y bez $\in$-minimálního prvku. Zároveň $\mathrm{rng}(f)$, jakožto spočetná podmnožina W, leží ve W, takže je svědkem pro $x \notin (\mathbf{WF})^W$. ∎

Lemma 2.2.3 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je reflexe a $(\mathbf{WF})^W = \mathbf{WF}$. Pak H je identické na $\mathbf{WF}$.*

Důkaz:
Označme $F = H \restriction \mathbf{WF}$. Pak F je zobrazení $\mathbf{WF}$ do sebe a pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ s parametry ve $\mathbf{WF}$ platí

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathbf{WF}}(x_1, \ldots, x_n) &\leftrightarrow (\varphi^{\mathbf{WF}})^W(H(x_1), \ldots, H(x_n)) \\
&\leftrightarrow \varphi^{(\mathbf{WF})^W}(F(x_1), \ldots, F(x_n)) \\
&\leftrightarrow \varphi^{\mathbf{WF}}(F(x_1), \ldots, F(x_n)),
\end{aligned}$$

čili F je elementární vnoření $\mathbf{WF}$ do sebe. Třída $\mathbf{WF}$ je modelem $\mathbf{ZFC}$ (včetně schématu nahrazení pro formule odvolávající se na funkci F), podle Kunenovy bariéry [Kun71] musí tedy být $F = \mathbf{Id} \restriction \mathbf{WF}$. ∎

Tvrzení 2.2.4 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je reflexe identická na $\mathbf{On}$. Pak její jádro je triviální kotranzitivní reflexe, identická na $\mathbf{WF}$.*

Důkaz:
Nejprve ukážeme, že minimální jádro H je triviální, tj. $\mathrm{rng}(H)$ je tranzitivní třída. Nechť $H(x)$ je libovolný prvek $\mathrm{rng}(H)$. Existuje kardinál $\varkappa$ a bijekce $f : \varkappa \approx x$, pak $H(f)$ je bijekce mezi $\varkappa = H(\varkappa)$ a $H(x)$. Je-li y libovolný prvek $H(x)$, existuje $\alpha \in \varkappa$ tak, že $y = (H(f))(\alpha)$. Pak ovšem

$$y = (H(f))(\alpha) = (H(f))(H(\alpha)) = H(f(\alpha)),$$

tedy $y \in \mathrm{rng}(H)$.

$\mathrm{rng}(H)$ je také kotranzitivní: je-li $x \subseteq \mathrm{rng}(H)$, označme $y = H(H^{-1''}x)$. Zřejmě $x \subseteq y$. Je-li $u \in y$, pak díky tranzitivitě $\mathrm{rng}(H)$ je $u = H(v)$ pro vhodné v. Pak ovšem $H(v) \in H(H^{-1''}x)$, tedy $v \in H^{-1''}x$ a $u = H(v) \in x$. Ukázali jsme, že $x = y$, tudíž $x \in \mathrm{rng}(H)$.

Podle lemmatu 2.2.2 je $(\mathbf{WF})^{\mathrm{rng}(H)} = \mathbf{WF}$, tedy podle 2.2.3 je H identické na **WF**. ∎

Důsledek 2.2.5 *Každá kotranzitivní reflexe má triviální a kotranzitivní jádro a je identická na* **WF**.

Důkaz:
Kotranzitivní reflexe je podle 2.2.2 a 2.2.3 identická na **WF**, podle 2.2.4 je tedy její jádro triviální a kotranzitivní. ∎

2.3 Klasifikace minimálních reflexí

Definice 2.3.1 Označme $X[u] = \{f(u);\ f \in X \text{ funkce}, u \in \mathrm{dom}(f)\}$, dále položme $X[\![v]\!] = \bigcup_{u\in v} X[u]$.

Nechť $\langle H, W\rangle$ je reflexe, označme $S = \mathrm{rng}(H)$. Reflexe $\langle H, W\rangle$ se nazývá

- *jednoduchá,* pokud existuje $d \in W$ tak, že $W = S[d]$,
- *polojednoduchá,* existuje-li podmnožina $w \subseteq W$ tak, že $W = S[\![w]\!]$.

Princip prodloužení pro reflexi $\langle H, W\rangle$ zní

$$\forall f : x \to W\ \ \exists g : H(x) \to W\ \ (g \in W \ \&\ f = g \circ H).$$

Minimální reflexe splňující princip prodloužení budeme stručně nazývat *PP-reflexe.*

Lemma 2.3.2 *Každá jednoduchá reflexe je polojednoduchá. Každá polojednoduchá nebo PP-reflexe je minimální.*

Důkaz:
Nechť $\langle H, W\rangle$ je polojednoduchá reflexe, tj. $W = S[\![w]\!]$ pro nějaké $w \subseteq W$. Je-li $x \in W$ libovolné, tak existuje $f \in S$ a $y \in w$ tak, že $\langle y, x\rangle \in S$, tudíž $W \subseteq \bigcup\bigcup S$. Třída $\bigcup S$ je dle 2.1.4 tranzitivní, tudíž $W = \bigcup S$ a $\langle H, W\rangle$ je minimální reflexe. Ostatní implikace jsou triviální. ∎

Definice 2.3.3 Nechť $\langle H, W\rangle$ je minimální reflexe a $S = \mathrm{rng}(H)$. Jsou-li x a y prvky W, definujeme

$$\begin{aligned} x \preceq y \quad &\leftrightarrow \quad \exists f \in S \;\; (f \text{ je funkce}, f(y) = x), \\ x \simeq y \quad &\leftrightarrow \quad \exists f \in S \;\; (f \text{ je prostá funkce}, f(y) = x). \end{aligned}$$

Lemma 2.3.4 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je minimální reflexe. Relace $\preceq$ je kvaziuspořádání na W, jehož jádro je ekvivalence $\simeq$. Uspořádání $\preceq / \simeq$ je úzké a tvoří horní polosvaz s nejmenším prvkem* $[\mathrm{rng}(H)]$.

Důkaz:
Je zřejmé, že $\preceq$ i $\simeq$ jsou tranzitivní a reflexivní a že $\simeq$ je symetrická relace. Evidentně $\simeq \subseteq \preceq$, ukážeme, že $\preceq \cap \preceq^{-1} \subseteq \simeq$. Nechť $f, g \in S = \mathrm{rng}(H)$ jsou funkce, $f(y) = x$, $g(x) = y$. Definujme $a = \{u \in \mathrm{dom}(f);\;\; g(f(u)) = u\}$. Pak $x \in a \in S$ a $f \restriction a \in S$ je prostá funkce.

Je-li $a \in S$ a $y \in W$, $y \in b \in S$, je $f = b \times \{a\} \in S$ a $f(y) = a$. Navíc S je uzavřené na ekvivalenci $\simeq$, takže S je třída $\simeq$, která je nejmenším prvkem $\leq = \preceq/\simeq$.

Nechť $x, y \in W$, tvrdíme, že $z = \langle x, y\rangle$ je supremem x a y v $\preceq$. Volme $a \in S$ tak, že $x, y \in a$. Označíme-li f_1 a f_2 levou resp. pravou projekci $a \times a$ na a, tak zřejmě $f_1, f_2 \in S$, $f_1(z) = x$ a $f_2(z) = y$, takže $x, y \preceq z$. Je-li naopak $x, y \preceq u$, volme funkce $g_1, g_2 \in S$ tak, že $g_1(u) = x$ a $g_2(u) = y$. Označme g funkci, která každému $v \in \mathrm{dom}(g_1) \cap \mathrm{dom}(g_2)$ přiřadí dvojici $g(v) = \langle g_1(v), g_2(v)\rangle$. Potom $g \in S$ a $g(u) = z$.

Nechť $x \in W$, $x \in a \in S$. Je-li $y \preceq x$, zvolme funkci $f \in S$ tak, že $f(x) = y$. Můžeme předpokládat, že $\mathrm{dom}(f) = a$. Nechť $g \in S$ je prosté zobrazení z $\mathrm{rng}(f)$ do a takové, že $f \circ g = \mathbf{Id} \restriction \mathrm{rng}(f)$. Pak $y \simeq g(y) \in a$, takže každá ekvivalenční třída $\simeq$ ležící pod $[x]$ obsahuje prvek množiny a, tj. uspořádání $\preceq / \simeq$ je úzké. ⊣

Definice 2.3.5 Uspořádání $\langle P, \leq\rangle$ nazveme *úplně usměrněné,* pokud každá podmnožina P má v $\leq$ horní závoru.

Lemma 2.3.6 *Minimální reflexe je*

- *jednoduchá právě tehdy, když má uspořádání $\leq = \preceq / \simeq$ největší prvek,*
- *polojednoduchá právě tehdy, když je nosič $\leq$ množinou,*
- *PP právě tehdy, když je $\leq$ úplně usměrněné uspořádání.*

Důkaz:
První bod plyne přímo z definic. Dále je zřejmé, že minimální reflexe je polojednoduchá právě tehdy, když má $\preceq$ kofinální podmnožinu. To je ekvivalentní s tím, že $\simeq$ má pouze množinu ekvivalenčních tříd, neboť uspořádání $\leq$ je úzké.

Předpokládejme, že $\leq$ je úplně usměrněné uspořádání. Je-li $f : x \to W$, zvolme $d \in W$ tak, že $d \succeq f(y)$ pro všechna $y \in x$. Zvolme a takové, že $d \in H(a)$, a funkce

$h(y)$ splňující $H(h(y))(d) = f(y)$, můžeme předpokládat, že $\mathrm{dom}(h(y)) = a$. Definujme $g(u) = ((H(h))(u))(d)$ (to lze: h je funkce z x, v jejímž oboru hodnot jsou funkce z a, takže $H(h)$ je funkce přiřazující prvkům $H(x)$ funkce definované na $H(a) \ni d$), pak $g \in W$ je funkce a platí $g(H(y)) = ((H(h))(H(y)))(d) = (H(h(y)))(d) = f(y)$.

Nechť naopak $\langle H, W\rangle$ je PP-reflexe a $x \subseteq W$, hledáme majorantu x v $\preceq$. Podle principu prodloužení existuje funkce $z : H(x) \to W$, $z \in W$ tak, že $z(H(y)) = y$ pro každé $y \in x$. Zvolme $a \in S$ tak, že $\mathrm{rng}(z) \subseteq a$. Je-li $y \in x$, definujme funkci $f \in S$, $f : {}^{H(x)}a \to a$ tak, že $f(h) = h(H(y))$ pro $h \in {}^{H(x)}a$. Potom $f(z) = z(H(y)) = y$, takže $y \preceq z$.

Důsledek 2.3.7 *Reflexe je jednoduchá právě tehdy, když je polojednoduchá a PP.*

Důkaz:
Úzké uspořádání má největší prvek právě tehdy, když je úplně usměrněné a jeho nosič je množina.

Definice 2.3.8 Nechť $I \neq 0$, Z je ultrafiltr na I a $\langle \mathcal{A}_i;\ i \in I\rangle$ soubor relačních struktur, $\mathcal{A}_i = \langle A_i, \in^{A_i}\rangle$. Pro $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$ položme

$$f =_Z g \ \leftrightarrow\ \{i \in I;\ f(i) = g(i)\} \in Z,$$
$$f \in_Z g \ \leftrightarrow\ \{i \in I;\ f(i) \in^{A_i} g(i)\} \in Z.$$

Relace $=_Z$ je ekvivalence kongruentní vzhledem k $\in_Z$, takže můžeme definovat *ultraprodukt* souboru $\langle \mathcal{A}_i;\ i \in I\rangle$ podle Z, $\prod_{I/Z} \mathcal{A}_i$, jako faktorovou strukturu $\langle \prod_{i\in I} A_i, \in_Z\rangle / =_Z$.

Pokud $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pro všechna $i \in I$, nazývá se ultraprodukt $\prod_{I/Z} \mathcal{A}$ *ultramocninou* struktury $\mathcal{A}$. V tomto případě též definujeme *kanonické vnoření* $K : \mathcal{A} \to \prod_{I/Z} \mathcal{A}$ předpisem $K(a) = [I \times \{a\}]_{=_Z}$.

Věta 2.3.9 (Łoś) *Nechť $\mathcal{B} = \prod_{I/Z} \mathcal{A}_i$ je ultraprodukt souboru $\langle \mathcal{A}_i; i \in I\rangle$ podle ultrafiltru Z, φ libovolná formule a $f_1, \ldots, f_n \in \prod_{i\in I} A_i$. Potom*

$$\varphi^{(\mathcal{B})}([f_1], \ldots, [f_n]) \ \leftrightarrow\ \{i \in I;\ \varphi^{(\mathcal{A}_i)}(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in Z,$$

kde $[f]$ značí třídu funkce f v ekvivalenci $=_Z$. Speciálně je-li $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pro všechna $i \in I$, tak kanonické vnoření z $\mathcal{A}$ do ultramocniny $\prod_{I/Z} \mathcal{A}$ je elementární vnoření.

Definice 2.3.10 Je-li K zobrazení do nosiče extenzionální úzké relační struktury $\mathcal{A} = \langle A, \in^A\rangle$, označíme dvojici $\langle F \circ K, W\rangle$ za *tranzitivní kolaps* $\langle K, \mathcal{A}\rangle$ (*zprostředkovaný* F), pokud W je tranzitivní třída a $F : \mathcal{A} \simeq \langle W, \in_W\rangle$.

Poznámka 2.3.11 Princip univerzality nám zaručuje existenci alespoň jednoho tranzitivního kolapsu dvojice $\langle K, \mathcal{A}\rangle$. Ten však není určen jednoznačně, pokud struktura $\mathcal{A}$ není fundovaná.

Je-li K elementární vnoření $\mathbf{V}$ do úzké relační struktury $\mathcal{A}$, tak každý tranzitivní kolaps $\langle K, \mathcal{A}\rangle$ je zřejmě reflexe.

Věta 2.3.12 (Pajas [Paj99]) *Jednoduchá reflexe = tranzitivní kolaps ultramocniny $\mathbf{V}$, podrobněji:*

(*i*) *Je-li Z ultrafiltr na množině I, je ultramocnina $\prod_{I/Z}\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle$ úzká a extenzionální. Libovolný tranzitivní kolaps $\langle F \circ K, W\rangle$ kanonického vnoření $\langle K, \prod_{I/Z}\mathbf{V}\rangle$ je jednoduchá reflexe; položíme-li $d = F([\mathbf{Id} \restriction I])$, platí $W = S[d]$, kde $S = \mathrm{rng}(F \circ K)$.*

(*ii*) *Nechť $\langle H, W\rangle$ je jednoduchá reflexe, $W = S[d]$, $d \in H(I) \in S = \mathrm{rng}(H)$. Definujme $Z = \{X \subseteq I;\ d \in H(X)\}$ a $F([f]) = (H(f))(d)$ pro $f : I \to \mathbf{V}$. Pak Z je ultrafiltr na I, F je korektně definované zobrazení a $\langle H, W\rangle$ je tranzitivní kolaps kanonického vnoření $\langle K, \prod_{I/Z}\mathbf{V}\rangle$ zprostředkovaný F.*

Poznámka 2.3.13 Uvedená věta charakterizuje (až na izomorfizmus) jednoduché reflexe jako určitý typ algebraické konstrukce (ultramocnina). Ve zbytku této kapitoly najdeme podobnou algebraickou charakterizaci pro minimální reflexe.

Definice 2.3.14 *Data pro konstrukci direktní limity ultramocnin* tvoří následující údaje:

- neprázdné nahoru usměrněné uspořádání $\langle P, \leq\rangle$ (může jít i o vlastní třídu),
- soubor $\{\langle I_p, Z_p\rangle\}_{p \in P}$, kde Z_p je ultrafiltr na neprázdné množině I_p,
- soubor zobrazení $\{f_{p,q} : I_q \to I_p;\ \ p \leq q\}$.

Navíc požadujeme, aby pro každé $p \leq q \leq r$ a $X \subseteq I_p$ platilo:

- $f_{p,p} = \mathbf{Id} \restriction I_p$,
- $f_{p,r} =_{Z_r} f_{p,q} \circ f_{q,r}$,
- $X \in Z_p$ právě tehdy, když $f_{p,q}^{-1}{}''X \in Z_q$.

Lemma 2.3.15 *Nechť jsou dána data pro konstrukci direktní limity, označená jako v 2.3.14. Potom pro $p \leq q$ předpis*

$$F_{p,q}([g]) = [g \circ f_{p,q}]$$

zadává korektně definované elementární vnoření $F_{p,q} : \prod_{I_p/Z_p}\mathbf{V} \to \prod_{I_q/Z_q}\mathbf{V}$. Pro všechna $p \leq q \leq r$ platí

$$F_{p,p} = \mathbf{Id} \restriction \prod_{I_p/Z_p}\mathbf{V},$$
$$F_{p,r} = F_{q,r} \circ F_{p,q},$$
$$K_q = F_{p,q} \circ K_p,$$

kde $K_p : \mathbf{V} \to \prod_{I_p/Z_p}\mathbf{V}$ je kanonické vnoření do ultramocniny.

Důkaz:
Jsou-li $g, h : I_p \to \mathbf{V}$, platí

$$\begin{aligned} g =_{Z_p} h &\leftrightarrow \{i \in I_p;\, g(i) = h(i)\} \in Z_p \\ &\leftrightarrow \{i \in I_q;\, g(f_{p,q}(i)) = h(f_{p,q}(i))\} \in Z_q \\ &\leftrightarrow g \circ f_{p,q} =_{Z_q} h \circ f_{p,q}, \end{aligned}$$

takže $F_{p,q}$ je korektně definované zobrazení (a je prosté). Dále

$$\begin{aligned} \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \models \varphi([g_1], \ldots, [g_n]) &\leftrightarrow \{i \in I_p;\, \varphi(g_1(i), \ldots, g_n(i))\} \in Z_p \\ &\leftrightarrow \{i \in I_q;\, \varphi(g_1(f_{p,q}(i)), \ldots, g_n(f_{p,q}(i)))\} \in Z_q \\ &\leftrightarrow \prod\nolimits_{I_q/Z_q} \mathbf{V} \models \varphi(F_{p,q}([g_1]), \ldots, F_{p,q}([g_n])), \end{aligned}$$

tudíž $F_{p,q}$ je elementární vnoření. Zjevně $F_{p,p} = \mathbf{Id}$, neboť $f_{p,p} = \mathbf{Id}$. Je-li $p \leq q \leq r$ a $g : I_p \to \mathbf{V}$, platí $F_{q,r}(F_{p,q}([g])) = [g \circ f_{p,q} \circ f_{q,r}]$ a $F_{p,r}([g]) = [g \circ f_{p,r}]$. Ovšem

$$\{i \in I_r;\, g(f_{p,q}(f_{q,r}(i))) = g(f_{p,r}(i))\} \supseteq \{i \in I_r;\, f_{p,q}(f_{q,r}(i)) = f_{p,r}(i)\} \in Z_r,$$

čili $[g \circ f_{p,q} \circ f_{q,r}] = [g \circ f_{p,r}]$ a $F_{p,r} = F_{q,r} \circ F_{p,q}$.

Konečně platí $F_{p,q}(K_p(x)) = F_{p,q}([I_p \times \{x\}]) = [(I_p \times \{x\}) \circ f_{p,q}] = [I_q \times \{x\}] = K_q(x)$. ⊣⊢

Definice 2.3.16 *Direktní limita ultramocnin* určená daty z 2.3.14 je izomorfní vnoření $K_\infty : \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle \to \mathcal{A} = \langle A, \in^A \rangle$ a soubor izomorfních vnoření $F_{p,\infty} : \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ pro každé $p \in P$, splňující

- $F_{p,\infty} = F_{q,\infty} \circ F_{p,q}$ pro všechna $p \leq q$,
- $K_\infty = F_{p,\infty} \circ K_p$ pro každé $p \in P$,
- $A = \bigcup_{p \in P} \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$,

kde K_p a $F_{p,q}$ jsou jako v 2.3.15. Vnoření $F_{p,\infty}$ se nazývají *kolimitní injekce.* Budeme též psát stručně

$$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{p \in P} \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V},$$

budou-li ostatní parametry zřejmé z kontextu.

Poznámka 2.3.17 Uvedená definice silně připomíná definici určitého typu kolimity ve smyslu teorie kategorií. Kategoriální aparát bohužel nemůžeme použít přímo, protože (1) „kategorie“ relačních struktur a izomorfních vnoření mezi nimi *netvoří* kategorii, neboť její objekty i morfizmy jsou vlastní třídy a je jich „příliš mnoho“, navíc (2) potřebujeme konstruovat „kolimity“ diagramů, které mají vlastní třídu objektů.

Podmínka $A = \bigcup_{p \in P} \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$ by byla v kategoriální definici nahrazena požadavkem existence a jednoznačnosti faktorizujících morfizmů. Lze nahlédnout, že obě formulace jsou navzájem ekvivalentní, s kategoriální definicí kolimity by však byly potíže formálního rázu, neboť obsahuje několik střídajících se třídových kvantifikátorů.

Lemma 2.3.18 *Direktní limita ultramocnin i její kolimitní injekce jsou elementární vnoření.*

Důkaz:
Použijeme značení z 2.3.14 a 2.3.16. Nejprve indukcí podle složitosti formule φ dokážeme, že pro každé $p \in P$ a $x_1, \ldots, x_n \in \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ platí

$$\prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \varphi(F_{p,\infty}(x_1), \ldots, F_{p,\infty}(x_n)).$$

Pro atomické formule to platí, neboť $F_{p,\infty}$ jsou izomorfní vnoření. Indukční kroky pro výrokové spojky jsou snadné. Ukážeme indukční krok pro existenční kvantifikátor.

Jestliže $\prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \vDash \exists y \ \ \varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$, zvolme $u \in \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, které to dosvědčuje, potom podle indukčního předpokladu $F_{p,\infty}(u)$ dosvědčuje, že

$$\mathcal{A} \vDash \exists y \ \ \varphi(y, F_{p,\infty}(x_1), \ldots, F_{p,\infty}(x_n)).$$

Nechť naopak $\mathcal{A} \vDash \exists y \ \ \varphi(y, F_{p,\infty}(x_1), \ldots, F_{p,\infty}(x_n))$, zvolme $u \in A$ tak, že

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(u, F_{p,\infty}(x_1), \ldots, F_{p,\infty}(x_n)).$$

Protože $A = \bigcup_{q \in P} \operatorname{rng}(F_{q,\infty})$, lze psát $u = F_{q,\infty}(v)$. Existuje $r \geq p, q$ a platí $u = F_{r,\infty}(F_{q,r}(v))$, můžeme rovnou předpokládat, že $q \geq p$. Pak ovšem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(F_{q,\infty}(v), F_{q,\infty}(F_{p,q}(x_1)), \ldots, F_{q,\infty}(F_{p,q}(x_n))),$$

podle indukčního předpokladu $\prod_{I_q/Z_q} \mathbf{V} \ \vDash \ \varphi(v, F_{p,q}(x_1), \ldots, F_{p,q}(x_n))$. Protože $F_{p,q}$ je elementární vnoření, dostáváme

$$\prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \vDash \exists y \ \ \varphi(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Zobrazení K_∞ je elementární vnoření, neboť je složením elementárních vnoření $F_{p,\infty} \circ K_p$ pro libovolné $p \in P$. ⫩⊨

Lemma 2.3.19 *Každý soubor dat z 2.3.14 určuje direktní limitu ultramocnin. Tato direktní limita je navíc dána jednoznačně až na jednoznačně určený izomorfizmus, komutující s kolimitními injekcemi.*

Důkaz:
Nejprve dokážeme unicitu. Nechť $K_\infty : \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ a $K'_\infty : \mathbf{V} \to \mathcal{A}'$ jsou dvě direktní limity s kolimitními injekcemi po řadě $\{F_{p,\infty}\}_{p \in P}$ a $\{F'_{p,\infty}\}_{p \in P}$. Protože $A = \bigcup_{p \in P} \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$, existuje nejvýše jedno zobrazení $G : A \to A'$ splňující

$$G(F_{p,\infty}(x)) = F'_{p,\infty}(x) \quad \text{pro každé } p \in P \text{ a } x \in \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V}.$$

Na druhou stranu tento předpis skutečně definuje zobrazení: nechť $x \in \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, $y \in \prod_{I_q/Z_q} \mathbf{V}$ a $F_{p,\infty}(x) = F_{q,\infty}(y)$. Zvolme $r \geq p, q$, potom

$$F_{r,\infty}(F_{p,r}(x)) = F_{p,\infty}(x) = F_{q,\infty}(y) = F_{r,\infty}(F_{q,r}(y)),$$

tudíž $F_{p,r}(x) = F_{q,r}(y)$ díky injektivitě $F_{r,\infty}$. Pak ovšem

$$F'_{p,\infty}(x) = F'_{r,\infty}(F_{p,r}(x)) = F'_{r,\infty}(F_{q,r}(y)) = F'_{q,\infty}(y).$$

Zobrazení G je zjevně na, neboť $A' = \bigcup_{p\in P} \mathrm{rng}(F'_{p,\infty})$. Nechť $a, b \in A$, můžeme předpokládat, že $a, b \in \mathrm{rng}(F_{p,\infty})$. Potom

$$a \in^A b \;\leftrightarrow\; F^{-1}_{p,\infty}(a) \in_{Z_p} F^{-1}_{p,\infty}(b) \;\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\; G(a) = F'_{p,\infty}(F^{-1}_{p,\infty}(a)) \in^{A'} F'_{p,\infty}(F^{-1}_{p,\infty}(b)) = G(b)$$

a podobně

$$a = b \;\leftrightarrow\; F^{-1}_{p,\infty}(a) = F^{-1}_{p,\infty}(b) \;\leftrightarrow\; G(a) = G(b),$$

tedy G je izomorfizmus.

Zbývá ukázat existenci direktní limity. Označme B disjunktní sjednocení

$$B = \dot{\bigcup_{p\in P}} \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V}.$$

Pro $\langle p, x\rangle, \langle q, y\rangle \in B$ definujme

$$\langle p, x\rangle \approx \langle q, y\rangle \;\leftrightarrow\; \exists r \geq p, q \;\; F_{p,r}(x) = F_{q,r}(y)$$
$$\langle p, x\rangle \,\varepsilon\, \langle q, y\rangle \;\leftrightarrow\; \exists r \geq p, q \;\; F_{p,r}(x) \in_{Z_r} F_{q,r}(y)$$

Relace $\approx$ je zřejmě reflexivní a symetrická. Nechť $\langle p, x\rangle \approx \langle q, y\rangle \approx \langle r, z\rangle$. Pak podle definice existují $s \geq p, q$ a $t \geq q, r$ tak, že $F_{p,s}(x) = F_{q,s}(y)$ a $F_{q,t}(y) = F_{r,t}(z)$. Zvolme $u \geq s, t$, potom platí $F_{p,u}(x) = F_{s,u}(F_{p,s}(x)) = F_{s,u}(F_{q,s}(y)) = F_{q,u}(y) = F_{t,u}(F_{q,t}(y)) = F_{t,u}(F_{r,t}(z)) = F_{r,u}(z)$, tudíž $\langle p, x\rangle \approx \langle r, z\rangle$. Relace $\approx$ je tedy ekvivalence a analogickou úvahou lze ukázat, že je kongruentní vzhledem k ε, tj.

$$\langle p, x\rangle \,\varepsilon\, \langle q, y\rangle \approx \langle r, z\rangle \;\rightarrow\; \langle p, x\rangle \,\varepsilon\, \langle r, z\rangle,$$
$$\langle p, x\rangle \approx \langle q, y\rangle \,\varepsilon\, \langle r, z\rangle \;\rightarrow\; \langle p, x\rangle \,\varepsilon\, \langle r, z\rangle.$$

Označme $\mathcal{A}$ faktorovou strukturu $\langle A, \in^A\rangle = \langle B, \varepsilon\rangle/\approx$. Definujme pro $p \in P$ zobrazení $F_{p,\infty} : \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \rightarrow A$ předpisem $F_{p,\infty}(x) = [\langle p, x\rangle]_\approx$. Zřejmě platí $A = \bigcup_{p\in P} \mathrm{rng}(F_{p,\infty})$. Zobrazení $F_{p,\infty}$ jsou prostá, neboť všechna $F_{p,r}$ jsou prostá zobrazení.

K ověření $F_{p,\infty} = F_{q,\infty} \circ F_{p,q}$ si stačí uvědomit, že $\langle p, x\rangle \approx \langle q, F_{p,q}(x)\rangle$.

Nechť p a q jsou libovolné, zvolme nějaké r tak, že $r \geq p$ a $r \geq q$. Pak platí $F_{p,\infty} \circ K_p = F_{r,\infty} \circ F_{p,r} \circ K_p = F_{r,\infty} \circ K_r = F_{r,\infty} \circ F_{q,r} \circ K_q = F_{q,\infty} \circ K_q$. Definujeme-li proto $K_\infty = F_{p,\infty} \circ K_p$ pro nějaké $p \in P$, platí žádaný vztah $K_\infty = F_{q,\infty} \circ K_q$ pro každé $q \in P$.

Zbývá ještě ověřit, že $F_{p,\infty}$ jsou izomorfní vnoření (potom musí být i K_∞ izomorfní vnoření). Jsou-li x, y prvky $\prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, platí

$$F_{p,\infty}(x) \in^A F_{p,\infty}(y) \;\leftrightarrow\; \langle p, x\rangle \,\varepsilon\, \langle p, y\rangle$$
$$\leftrightarrow\; \exists r \geq p \;\; F_{p,r}(x) \in_{Z_r} F_{p,r}(y)$$
$$\leftrightarrow\; x \in_{Z_p} y,$$

neboť $F_{p,r}$ je elementární vnoření. ⫩⊨

Lemma 2.3.20 *Nechť $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$ je kolimita určená daty z 2.3.14. Předpokládejme, že $K'_\infty : \mathbf{V} \to \mathcal{A}'$ a $F'_{p,\infty} : \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \to \mathcal{A}'$ jsou izomorfní vnoření pro každé $p \in P$, splňující $F'_{p,\infty} \circ K_p = K'_\infty$ a $F'_{q,\infty} \circ F_{p,q} = F'_{p,\infty}$ pro $p \leq q$. Pak existuje právě jedno izomorfní vnoření $G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ splňující $G \circ F_{p,\infty} = F'_{p,\infty}$ pro $p \in P$ a $G \circ K_\infty = K'_\infty$.*

Jsou-li navíc všechna $F'_{p,\infty}$ elementární vnoření, je i G elementární.

Důkaz:

Existenci a jednoznačnost G jsme vlastně ověřili v první části důkazu lemmatu 2.3.19, dodatečný předpoklad $A' = \bigcup_{p\in P} \operatorname{rng}(F'_{p,\infty})$ jsme tam použili pouze k důkazu surjektivity G, kterou nyní nepotřebujeme.

Předpokládejme, že všechna $F'_{p,\infty}$ jsou elementární vnoření. Nechť φ je libovolná formule a $x_1, \dots, x_n \in A$. Protože $A = \bigcup_{p\in P} \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$ a $\leq$ je usměrněné, najdeme $p \in P$ a $a_1 \dots a_n \in \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ tak, že $x_i = F_{p,\infty}(a_i)$ pro $i = 1, \dots, n$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}' \models \varphi(G(x_1) \dots, G(x_n)) \quad &\leftrightarrow \quad \mathcal{A}' \models \varphi(F'_{p,\infty}(a_1), \dots, F'_{p,\infty}(a_n)) \\
&\leftrightarrow \quad \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \mathbf{V} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \\
&\leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

díky elementaritě $F'_{p,\infty}$ a $F_{p,\infty}$.

Důsledek 2.3.21 *Nechť $\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, Q je usměrněná část $\langle P, \leq\rangle$ a $\mathcal{B} = \operatorname*{colim}_{p\in Q} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$. Pak existuje (právě jedno) elementární vnoření $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, které komutuje s kolimitními injekcemi. Je-li Q kofinální v P, je G izomorfizmus.*

Věta 2.3.22 *Nechť je dána direktní limita ultramocnin $\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$.*

(i) Je-li relace $\in^A$ úzká, je každý tranzitivní kolaps $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$ minimální reflexe.

(ii) Jestliže P je množina, je $\in^A$ úzké a libovolný tranzitivní kolaps $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$ je polojednoduchá reflexe.

(iii) Je-li $\langle P, \leq\rangle$ úplně usměrněné uspořádání a je-li $\in^A$ úzké, tak každý tranzitivní kolaps $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$ je PP-reflexe.

(iv) Má-li P největší prvek, je $\in^A$ úzké a každý tranzitivní kolaps $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$ je jednoduchá reflexe.

Důkaz:

Direktní limita $K_\infty : \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ je podle 2.3.18 elementární vnoření, takže $\mathcal{A}$ musí být extenzionální. Je-li navíc $\mathcal{A}$ úzké, lze sestrojit tranzitivní kolaps $\langle K_\infty, \mathcal{A}\rangle$. Direktní limita je určena až na izomorfizmus, můžeme předpokládat bez újmy na obecnosti, že přímo $\mathcal{A} = \langle W, \in_W\rangle$ je tranzitivní třída. Protože $H = K_\infty$ je elementární vnoření, je $\langle H, W\rangle$ reflexe. Každý prvek W je tvaru $x = F_{p,\infty}([g])$ pro nějaké $p \in P$ a $g : I_p \to \mathbf{V}$. Označíme-li $y = \operatorname{rng}(g)$, platí $g \in_{Z_p} I_p \times \{y\}$, tudíž $x \in F_{p,\infty}([I_p \times \{y\}]) = F_{p,\infty}(K_p(y)) = H(y)$. Dokázali jsme, že $W = \bigcup \operatorname{rng}(H)$, tedy reflexe $\langle W, H\rangle$ je minimální.

Definujme zobrazení $D : P \to W$ předpisem $D(p) = F_{p,\infty}([\mathbf{Id} \restriction I_p])$. Zřejmě $D(p) \in H(I_p)$. Tvrdíme, že D je homomorfizmus z $\langle P, \leq\rangle$ na kofinální část $\langle W, \preceq\rangle$. Je-li $p \leq q$, tak $H(f_{p,q}) : H(I_q) \to H(I_p)$ a platí $(H(f_{p,q}))(D(q)) = D(p)$, neboť $((I_q \times \{f_{p,q}\})(i))(\mathbf{Id}_{I_q}(i)) = \mathbf{Id}_{I_p}(f_{p,q}(i))$ pro každé $i \in I_q$. Tudíž $D(p) \preceq D(q)$. Je-li $x = F_{p,\infty}([f]) \in W$, platí $x \preceq D(p)$, neboť $(H(f))(D(p)) = x$: platí totiž $((I_p \times \{f\})(i))(\mathbf{Id}_{I_p}(i)) = f(i)$ pro $i \in I_p$.

Je-li tedy $\langle P, \leq\rangle$ množina resp. úplně usměrněné uspořádání resp. uspořádání s největším prvkem, má stejnou vlastnost i uspořádání $\preceq / \simeq$ (používáme zde úzkost relace $\preceq / \simeq$), podle lemmatu 2.3.6 je reflexe $\langle H, W\rangle$ polojednoduchá resp. PP resp. jednoduchá.

Zbývá ukázat, že struktura $\mathcal{A}$ je úzká, pokud P je množina. Protože $A = \bigcup_{p\in P} \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$ a P je množina, stačí ověřit, že ultramocnina $\mathcal{B} = \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ je úzká. Nechť $f : I_p \to \mathbf{V}$. Pokud $\{i;\ f(i) = \emptyset\} \in Z_p$, nemá $[f]$ v $\mathcal{B}$ žádný prvek. V opačném případě můžeme předpokládat, že $f(i) \neq \emptyset$ pro každé $i \in I_p$. Je-li $[g] \in [f]$, můžeme předpokládat, že $g(i) \in f(i)$ pro každé $i \in I_p$, takže třídu všech $\mathcal{B}$-prvků $[f]$ lze prostě zobrazit do množiny $\prod_{i\in I_p} f(i)$.

Lemma 2.3.23 *Uspořádání $\langle P, \leq\rangle$ je úplně usměrněné právě tehdy, když má největší prvek nebo když obsahuje kofinální část izomorfní* **On**.

Důkaz:
Největší prvek majorizuje každou podmnožinu P. Je-li (bez újmy na obecnosti) $\mathbf{On} \subseteq P$ kofinální a $x \subseteq P$, zvolme pro každé $y \in x$ ordinál $\alpha_y \in \mathbf{On}$, $y \leq \alpha_y$. Pak $\alpha = \sup\{\alpha_y;\ y \in x\} \in P$ majorizuje x.

Nechť P je úplně usměrněné uspořádání, očíslujme (ne nutně prostě) $P = \{p_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{On}\}$. Použitím úplné usměrněnosti snadno indukcí sestrojíme posloupnost $\langle q_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{On}\rangle$ prvků P tak, že $q_\alpha \geq p_\alpha$ a $q_\alpha \leq q_\beta$ pro $\alpha \leq \beta$. Zřejmě $\{q_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{On}\}$ je kofinální část P. Pokud existuje α tak, že $q_\alpha = q_\beta$ pro každé $\beta \geq \alpha$, musí být q_α největší prvek P. V opačném případě lze z posloupnosti $\langle q_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{On}\rangle$ vybrat prostou podposloupnost, ta tvoří kofinální část P izomorfní **On**.

Věta 2.3.24 *Nechť $\langle H, W\rangle$ je minimální reflexe, nechť P je kofinální část $\langle W, \preceq\rangle$, na které je $\preceq$ slabě antisymetrické. Zvolme pro každé $p \in P$ množinu I_p tak, že $p \in H(I_p)$, a definujme $Z_p = \{X \subseteq I_p;\ p \in H(X)\}$. Pro $p \preceq q$ lze volit funkci $f_{p,q} : I_q \to I_p$ tak, aby $(H(f_{p,q}))(q) = p$, přičemž $f_{p,p} = \mathbf{Id} \restriction I_p$. Pak dostáváme korektně zadaný soubor dat pro konstrukci direktní limity ultramocnin a platí $\langle H, W\rangle = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ s kolimitními injekcemi $F_{p,\infty}([g]) = (H(g))(p)$ pro $g : I_p \to \mathbf{V}$.*

Specielně každá minimální reflexe je direktní limitou ultramocnin podle nějakého úzkého uspořádání $\langle P, \leq\rangle$, přičemž lze volit

- $P = \mathbf{On}$ *s obvyklým uspořádáním pro PP-reflexi,*
- $|P| = 1$ *pro jednoduchou reflexi,*
- P *jako množinu pro polojednoduchou reflexi.*

Důkaz:
Protože $\langle P, \leq \rangle$ je izomorfní kofinální části usměrněného úzkého uspořádání $\preceq / \simeq$, je samo usměrněné a úzké. Množina Z_p je ultrafiltr na I_p, neboť H zachovává booleovské operace. Funkce $f_{p,q}$ lze volit podle definice $\preceq$, jejich domain a range snadno upravíme na předepsané hodnoty. Je-li $p \preceq q \preceq r$, platí

$$H(f_{p,q} \circ f_{q,r})(r) = (H(f_{p,q}))((H(f_{q,r}))(r)) = (H(f_{p,q}))(q) = p = (H(f_{p,r}))(r),$$

takže $\{i \in I_r;\ f_{p,q}(f_{q,r}(i)) = f_{p,r}(i)\} \in Z_r$. Je-li $X \subseteq I_p$ a $p \preceq q$, platí

$$\begin{aligned} X \in Z_p &\leftrightarrow p \in H(X) \\ &\leftrightarrow (H(f_{p,q}))(q) \in H(X) \\ &\leftrightarrow q \in H(\{i \in I_q;\ f_{p,q}(i) \in X\}) \\ &\leftrightarrow f_{p,q}^{-1\prime\prime} X \in Z_q. \end{aligned}$$

Předpis $F_{p,\infty}([g]) = (H(g))(p)$ korektně definuje prosté zobrazení z $\prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, neboť pro $g, h : I_p \to \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned} g =_{Z_p} h &\leftrightarrow \{i \in I_p;\ g(i) = h(i)\} \in Z_p \\ &\leftrightarrow p \in H(\{i \in I_p;\ g(i) = h(i)\}) \\ &\leftrightarrow (H(g))(p) = (H(h))(p). \end{aligned}$$

Zřejmě $\mathrm{rng}(F_{p,\infty}) = S[p]$, kde $S = \mathrm{rng}(H)$. Zobrazení $F_{p,\infty}$ je izomorfizmus struktur $\prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ a $\langle S[p], \in_{S[p]} \rangle$, neboť pro $g, h : I_p \to \mathbf{V}$ máme

$$\begin{aligned} g \in_{Z_p} h &\leftrightarrow \{i \in I_p;\ g(i) \in h(i)\} \in Z_p \\ &\leftrightarrow p \in H(\{i \in I_p;\ g(i) \in h(i)\}) \\ &\leftrightarrow (H(g))(p) \in (H(h))(p) \\ &\leftrightarrow F_{p,\infty}([g]) \in F_{p,\infty}([h]). \end{aligned}$$

Dále platí $F_{p,\infty}(K_p(x)) = F_{p,\infty}([I_p \times \{x\}]) = (H(I_p \times \{x\}))(p) = H(x)$ a

$$\begin{aligned} F_{q,\infty}(F_{p,q}([g])) = F_{q,\infty}([g \circ f_{p,q}]) = (H(g \circ f_{p,q}))(q) = \\ = (H(g))((H(f_{p,q}))(q)) = (H(g))(p) = F_{p,\infty}([g]). \end{aligned}$$

Je-li $x \in W$, existuje $p \in P$ tak, že $x \preceq p$, tedy $x \in S[p] = \mathrm{rng}(F_{p,\infty})$. Jinak řečeno $W = \bigcup_{p \in P} \mathrm{rng}(F_{p,\infty})$.

Dodatek věty je důsledkem lemmat 2.3.6 a 2.3.23. ⫷⫸

Důsledek 2.3.25 *Je-li $\langle H, W \rangle$ minimální reflexe a $d \in W$, platí $S[d] \preccurlyeq W$, kde* $S = \mathrm{rng}(H)$. ⫷⫸

Definice 2.3.26 Reflexe $\langle H_1, W_1 \rangle$ je *podreflexí* reflexe $\langle H_2, W_2 \rangle$, pokud existuje elementární vnoření $F : \langle W_1, \in_{W_1} \rangle \to \langle W_2, \in_{W_2} \rangle$ splňující $F \circ H_1 = H_2$. Je-li F izomorfizmus, označíme reflexe $\langle H_1, W_1 \rangle$ a $\langle H_2, W_2 \rangle$ za *izomorfní.*

Definice 2.3.27 Nechť G je ultrafiltr na množině J a pro každé $j \in J$ buď F_j ultrafiltr na I_j. Pak *součin souboru ultrafiltrů* $\{F_j;\ j \in J\}$ *podle* G, značený $\bigoplus_{J/G} F_j$, je ultrafiltr na množině $K = \dot{\bigcup}_{j \in J} I_j$ definovaný předpisem

$$\bigoplus_{J/G} F_j = \{X \subseteq K;\ \{j \in J;\ \{i \in I_j;\ \langle j, i\rangle \in X\} \in F_j\} \in G\}.$$

Je-li $I_j = I$ a $F_j = F$ pro všechna $j \in J$, píšeme též $G \otimes F = \bigoplus_{J/G} F$.

Tvrzení 2.3.28 *Reflexe je polojednoduchá právě tehdy, když je podreflexí jednoduché reflexe.*

Důkaz:
Elementární vnoření jedné reflexe do druhé je zřejmě také izomorfní vnoření příslušných kvaziuspořádání $\preceq$, které indukuje vnoření uspořádání $\leq = \preceq / \simeq$. Z toho je patrné, že podreflexe (polo-) jednoduché reflexe musí být polojednoduchá.

Nechť $\langle H, W\rangle$ je polojednoduchá reflexe, podle věty 2.3.24 ji můžeme vyjádřit jako direktní limitu $\operatorname*{colim}_{p \in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, kde $\langle P, \leq\rangle$ je množinové, nahoru usměrněné uspořádání. Systém $\{\{q \in P;\ q \geq p\};\ p \in P\}$ podmnožin P je centrovaný, existuje proto ultrafiltr Z na P, který jej rozšiřuje. Označme $Q = P \cup \{\bullet\}$, $I_\bullet = \dot{\bigcup}_{p \in P} I_p$ a $Z_\bullet = \bigoplus_{P/Z} Z_p$. Dodefinujme $q \leq \bullet$ pro každé $q \in Q$, $f_{\bullet,\bullet} = \mathbf{Id} \restriction I_\bullet$ a

$$f_{p,\bullet}(\langle q, i\rangle) = \begin{cases} f_{p,q}(i), & \text{pokud } q \geq p, \\ \text{cokoli} \in I_p, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $\{q \in P;\ \{i \in I_q;\ q \geq p\} \in Z_q\} = \{q \in P;\ q \geq p\} \in Z$, množina $\{\langle q, i\rangle;\ q \geq p, i \in I_q\}$ padne do $Z_\bullet$. Na hodnotě $f_{p,\bullet}$ v části „jinak" proto opravdu nezáleží. Pro $X \subseteq I_p$ platí

$$\begin{aligned} \{\langle q, i\rangle;\ f_{p,\bullet}(q,i) \in X\} \in Z_\bullet &\leftrightarrow \{\langle q, i\rangle;\ q \geq p, f_{p,q}(i) \in X\} \in Z_\bullet \\ &\leftrightarrow \{q \geq p;\ \{i \in I_q;\ f_{p,q}(i) \in X\} \in Z_q\} \in Z \\ &\leftrightarrow \{q \geq p;\ X \in Z_p\} \in Z \\ &\leftrightarrow X \in Z_p. \end{aligned}$$

Je-li $p \leq q$, tak množina

$$\{\langle r, i\rangle;\ f_{p,q}(f_{q,\bullet}(i)) = f_{p,\bullet}(i)\} \supseteq \{\langle r, i\rangle;\ r \geq q, f_{p,q}(f_{q,r}(i)) = f_{p,r}(i)\}$$

padne do $Z_\bullet$, neboť $\{r \geq q;\ \{i;\ f_{p,q}(f_{q,r}(i)) = f_{p,r}(i)\} \in Z_r\} = \{r;\ r \geq q\} \in Z$. Nadefinovali jsme tedy data pro konstrukci direktní limity. Uspořádání $\langle Q, \leq\rangle$ má největší prvek, $\operatorname*{colim}_{q \in Q} \prod_{I_q/Z_q} \mathbf{V}$ je proto jednoduchá reflexe. Ovšem P je usměrněná část Q, podle 2.3.21 musí být $\langle H, W\rangle = \operatorname*{colim}_{p \in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ podreflexí této jednoduché reflexe. ⧻⧺

Definice 2.3.29 Nechť Z je ultrafiltr na množině I a $\langle H_i, W_i\rangle$ reflexe pro $i \in I$. *Ultraprodukt souboru reflexí* $\{\langle H_i, W_i\rangle\}_{i \in I}$ podle ultrafiltru Z, značený $\prod_{I/Z}\langle H_i, W_i\rangle$, je tranzitivní kolaps dvojice $\langle K, \prod_{I/Z}\langle W_i, \in_{W_i}\rangle\rangle$, kde pro každé x definujeme

$$K(x) = [\{\langle i, H_i(x)\rangle;\ i \in I\}].$$

Lemma 2.3.30 *Ultraprodukt souboru reflexí je reflexe.*

Důkaz:
Nechť φ je formule a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{V}$. Podle Łošovy věty 2.3.9 platí

$$\begin{aligned}\prod\nolimits_{I/Z} W_i \models \varphi(K(x_1), \ldots, K(x_n)) \quad &\leftrightarrow \quad \{i \in I;\ \varphi^{W_i}(H_i(x_1), \ldots, H_i(x_n))\} \in Z \\ &\leftrightarrow \quad \{i \in I;\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)\} \in Z \\ &\leftrightarrow \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

takže K je elementární vnoření a jeho tranzitivní kolaps je reflexe. Tento tranzitivní kolaps vskutku existuje, neboť ultraprodukt úzkých extenzionálních struktur je úzký a extenzionální. ∎

Definice 2.3.31 Nechť $\langle P, \leq \rangle$ je nahoru usměrněné uspořádání, $\{\langle H_p, W_p \rangle\}_{p \in P}$ soubor reflexí a $\{F_{p,q} : W_p \to W_q;\ p \leq q\}$ soubor elementárních vnoření, splňujících $F_{p,p} = \mathbf{Id} \restriction W_p$, $F_{p,q} \circ H_p = H_q$ a $F_{q,r} \circ F_{p,q} = F_{p,r}$ pro $p \leq q \leq r$. *Direktní limita* tohoto souboru je izomorfní vnoření $\mathbf{V}$ do tranzitivní třídy $H : \mathbf{V} \to W$ spolu se souborem izomorfních vnoření $\{F_{p,\infty} : W_p \to W\}_{p \in P}$, splňujících $F_{p,\infty} \circ H_p = H$, $F_{q,\infty} \circ F_{p,q} = F_{p,\infty}$ pro $p \leq q$ a $W = \bigcup_{p \in P} \mathrm{rng}(F_{p,\infty})$. Píšeme stručně $\langle H, W \rangle = \operatorname*{colim}_{p \in P} \langle H_p, W_p \rangle$. Direktní limita se nazývá *množinová* resp. *úplně usměrněná,* je-li P množina resp. $\leq$ úplně usměrněné uspořádání.

Lemma 2.3.32 *Direktní limita souboru reflexí je reflexe.*

Důkaz:
Zcela analogicky jako v lemmatu 2.3.18 se ukáže, že kolimitní injekce $F_{p,\infty}$ jsou elementární vnoření, potom i vnoření H musí být elementární. ∎

Poznámka 2.3.33 Na rozdíl od ultraproduktu nemusí mít každý soubor reflexí direktní limitu. Analogicky jako v 2.3.19 lze sice najít (až na izomorfizmus jednoznačně určenou) direktní limitu každého souboru jako vnoření $\mathbf{V}$ do určité relační struktury, tato struktura však obecně nemusí být úzká, jestliže P není množina.

Definice 2.3.34 Nechť $\langle H_1, W_1 \rangle$ je reflexe a $\langle H_2, W_2 \rangle$ minimální reflexe. Jejich *složení* je dvojice $\langle H_2 \circ H_1, W \rangle$, kde $W = \bigcup \{H_2(w);\ w \subseteq W_1\}$.

Poznámka 2.3.35 Definice složení má smysl i pro neminimální reflexe $\langle H_2, W_2 \rangle$, výsledek však na W_2 nezávisí, obdržíme tedy totéž, jako při složení $\langle H_1, W_1 \rangle$ s minimálním jádrem H_2.

Je-li třída W_1 skorouniverzální, platí zjednodušený vztah $W = \bigcup H_2'' W_1$.

Lemma 2.3.36 *Složení reflexe $\langle H_1, W_1 \rangle$ a minimální reflexe $\langle H_2, W_2 \rangle$ je reflexe. Je-li navíc $\langle H_2, W_2 \rangle = \operatorname*{colim}_{p \in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$, pak toto složení je izomorfní*

$$\operatorname*{colim}_{p \in P} \prod\nolimits_{I_p/Z_p} \langle H_1, W_1 \rangle.$$

Důkaz:
Nechť $\langle H_2, W_2\rangle = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \mathbf{V}$ s kolimitními injekcemi $F_{p,\infty}$. Označme $F'_{p,\infty}$ restrikci $F_{p,\infty}$ na $\prod_{I_p/Z_p} W_1$, tvrdíme, že $\langle H_2 \circ H_1, W\rangle = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \langle H_1, W_1\rangle$ s kolimitními injekcemi $F'_{p,\infty}$.

Je-li $f : I_p \to W_1$, platí $F'_{p,\infty}([f]) = (H_2(f))(d_p)$, kde $d_p = F_{p,\infty}([\mathbf{Id} \restriction I_p]) \in H_2(I_p)$, takže $F'_{p,\infty}([f]) \in \operatorname{rng}(H_2(f)) = H_2(\operatorname{rng}(f)) \subseteq W$. Ovšem $F_{p,\infty}$ je izomorfní vnoření, takže $F'_{p,\infty}$ je izomorfní vnoření $\prod_{I_p/Z_p} W_1$ do W.

Protože vnoření $F'_{p,q} : \prod_{I_p/Z_p} W_1 \to \prod_{I_q/Z_q} W_1$ je restrikce $F_{p,q}$ a $F_{q,\infty} = F_{p,\infty} \circ F_{p,q}$, platí $F'_{q,\infty} = F'_{p,\infty} \circ F'_{p,q}$. Dále $F'_{p,\infty}([I_p \times \{H_1(x)\}]) = H_2(H_1(x))$.

Nechť $x \in W$, tj. $x \in H_2(w)$, $w \subseteq W_1$. Existuje $p \in P$ a $g : I_p \to w$ takové, že $x = F_{p,\infty}([g])$. Potom $[g] \in \prod_{I_p/Z_p} W_1$ a $F'_{p,\infty}([g]) = x$, tedy $W = \bigcup_{p\in P} \operatorname{rng}(F'_{p,\infty})$.

Ověříme ještě, že třída W je tranzitivní. Nechť $x \in y \in W$, nechť $y \in H_2(w)$, $w \subseteq W_1$. Třída W_1 je tranzitivní, existuje proto tranzitivní množina $u \subseteq W_1$ taková, že $w \subseteq u$. Pak $H_2(u)$ je také tranzitivní a $x \in y \in H_2(u)$, tedy $x \in H_2(u) \subseteq W$.

Protože $\langle H_2 \circ H_1, W\rangle = \operatorname*{colim}_{p\in P} \prod_{I_p/Z_p} \langle H_1, W_1\rangle$ a ultraprodukt i direktní limita konstruují z reflexí reflexe, je i $\langle H_2 \circ H_1, W\rangle$ reflexe. ⊣

Věta 2.3.37

(*i*) *Ultraprodukty, složení, direktní limity a podreflexe minimálních reflexí jsou minimální reflexe.*

(*ii*) (P. Pajas [Paj99]) *Ultraprodukty a složení jednoduchých reflexí jsou jednoduché reflexe.*

(*iii*) *Ultraprodukty, složení, množinové direktní limity a podreflexe polojednoduchých reflexí jsou polojednoduché reflexe.*

(*iv*) *Ultraprodukty, složení a úplně usměrněné direktní limity PP-reflexí jsou PP-reflexe.*

Důkaz:
Nechť $\langle H_1, W_1\rangle$ je podreflexe minimální reflexe $\langle H_2, W_2\rangle$ a F elementární vnoření, které to dosvědčuje. Je-li $x \in W_1$, existuje a tak, že $F(x) \in H_2(a) = F(H_1(a))$, tudíž $x \in H_1(a)$ a reflexe $\langle H_1, W_1\rangle$ je minimální. Je-li H_2 polojednoduchá reflexe, je i H_1 polojednoduchá podle 2.3.28.

Nechť $\langle H, W\rangle = \operatorname*{colim}_{p\in P} \langle H_p, W_p\rangle$ s kolimitními injekcemi $F_{p,\infty}$ a nechť reflexe $\langle H_p, W_p\rangle$ jsou minimální. Každý prvek W je tvaru $F_{p,\infty}(x)$ pro nějaké $p \in P$ a $x \in W_p$. Zvolme a tak, že $x \in H_p(a)$, potom $F_{p,\infty}(x) \in F_{p,\infty}(H_p(a)) = H(a)$.

Předpokládejme, že P je množina a $W_p = S_p[\![w_p]\!]$ jsou polojednoduché reflexe, $S_p = \operatorname{rng}(H_p)$. Označme $w = \bigcup_{p\in P} F_{p,\infty}{}'' w_p$, potom w je množina. Je-li $F_{p,\infty}(x)$ libovolný prvek W, existuje funkce f a $d \in w_p$ tak, že $x = (H_p(f))(d)$, tudíž $F_{p,\infty}(x) = (H(f))(F_{p,\infty}(d)) \in S[\![w]\!]$.

Je-li $\langle P, \leq\rangle$ úplně usměrněné, všechny $\langle H_p, W_p\rangle$ PP-reflexe a $f : x \to W$, existuje $p \in P$ tak, že $\operatorname{rng}(f) \subseteq \operatorname{rng}(F_{p,\infty})$. Podle principu prodloužení pro $F_{p,\infty}^{-1} \circ f$ existuje funkce $h \in W_p$, $h : H_p(x) \to W_p$ taková, že $F_{p,\infty}(h(H_p(y))) = f(y)$ pro $y \in x$. Potom $g = F_{p,\infty}(h) \in W$ splňuje $g \circ H = f$.

Nechť $\langle H, W\rangle = \prod_{I/Z}\langle H_i, W_i\rangle$ je ultraprodukt souboru minimálních reflexí, nechť F je izomorfizmus $F : \prod_{I/Z} W_i \to W$ komutující s příslušnými vnořeními univerzální třídy. Je-li $F([f]) \in W$, najdeme pro každé $i \in I$ množinu x_i tak, že $f(i) \in H_i(x_i)$, a označíme $x = \bigcup_{i\in I} x_i$. Potom $f(i) \in H_i(x)$ pro každé $i \in I$, takže $F([f]) \in H(x)$.

Předpokládejme, že $\langle H_i, W_i\rangle$ jsou PP-reflexe a $f : x \to W$. Pro $y \in x$ zvolíme f_y tak, že $f(y) = F([f_y])$. Podle principu prodloužení pro $\langle H_i, W_i\rangle$ najdeme $h_i \in W_i$, $h_i : H_i(x) \to W_i$ tak, že $h_i(H_i(y)) = f_y(i)$. Nechť h je funkce definovaná na I předpisem $h(i) = h_i$ a položme $g = F([h])$. Pak $g \in W$ je funkce, $g : H(x) \to W$ a $g(H(y)) = F([f_y]) = f(y)$.

Jsou-li $\langle H_i, W_i\rangle$ jednoduché reflexe, zvolme $d_i \in W_i$ tak, že $W_i = S[d_i]$ pro $i \in I$. Položme $d = F([e])$, kde $e(i) = \langle H_i(i), d_i\rangle$. Tvrdíme, že $W = S[d]$. Je-li $F([f]) \in W$, napišme si $f(i) = (H_i(g_i))(d_i)$ pro nějaké funkce g_i. Nechť g je funkce, definovaná na $\dot{\bigcup}_{i\in I} \operatorname{dom}(g_i)$ předpisem $g(\langle i, x\rangle) = g_i(x)$. Potom $(H_i(g_j))(x) = (H_i(g))(\langle H_i(j), x\rangle)$ pro každé $i, j \in I$ a $x \in H_i(\operatorname{dom}(g_j))$, takže $(H_i(g))(\langle H_i(i), d_i\rangle) = (H_i(g_i))(d_i) = f(i)$ pro každé $i \in I$ a $F([f]) = (H(g))(d)$.

Pokud jsou reflexe $\langle H_i, W_i\rangle$ polojednoduché, zvolíme w_i tak, že $W_i = S_i[\![w_i]\!]$ a položíme $w = \{F([e_h]);\ \ h \in \prod_{i\in I} w_i\}$, kde $e_h(i) = \langle H_i(i), h(i)\rangle$. Je-li $F([f]) \in W$, najdeme $h \in \prod_{i\in I} w_i$ a g_i tak, že $f(i) = (H_i(g_i))(h(i))$, pak $F([e_h]) \in w$ a podobně jako výše platí $F([f]) = (H(g))(F([e_h]))$, kde $g(\langle i, x\rangle) = g_i(x)$, takže $W = S[\![w]\!]$.

Složení dvou minimálních, jednoduchých, polojednoduchých resp. PP-reflexí si podle 2.3.36 a 2.3.24 můžeme vyjádřit jako vhodnou direktní limitu ultramocnin reflexí stejného typu, podle již dokázaného dostaneme opět minimální, jednoduchou, polojednoduchou resp. PP-reflexi.

2.4 Konstrukce konkrétních minimálních reflexí

Přestože jsme dokázali několik tvrzení o struktuře minimálních, jednoduchých, polojednoduchých a PP-reflexí, pořád ještě nevíme, jestli některé z těchto tříd nesplývají. Mohlo by se stát, že dokonce všechny minimální reflexe jsou ve skutečnosti jednoduché. Tento nedostatek se nyní pokusíme napravit.

První nejednoduchou reflexi sestrojil P. Pajas. Lze snadno nahlédnout, že jeho příklad je dokonce neminimální reflexe.

Definice 2.4.1 Tranzitivní třída W se nazývá *$\varkappa$-saturovaná,* kde $\varkappa$ je nespočetný kardinál, pokud každý centrovaný systém množin ležících v W, jehož mohutnost je menší než $\varkappa$, má neprázdný průnik. Reflexe $\langle H, W\rangle$ se nazývá *$\varkappa$-reflexí,* je-li W $\varkappa$-saturovaná třída.

Tvrzení 2.4.2 (Pajas [Paj99]) *Pro každý nespočetný kardinál $\varkappa$ existuje $\varkappa$-reflexe, která není minimální.*

Tvrzení 2.4.3 *Existuje polojednoduchá reflexe, která není jednoduchá. Tato reflexe je zároveň příkladem minimální reflexe, která není PP.*

Důkaz:
Dodatek tvrzení je důsledkem 2.3.7, soustředíme se proto na první část. Zvolme uniformní ultrafiltr Z na nějaké nekonečné množině I. Pro $n \in \omega$ definujeme reflexe $\langle H_n, W_n \rangle$ takto: $\langle H_0, W_0 \rangle$ je triviální reflexe $H_0 = \mathbf{Id}$, $W_0 = \mathbf{V}$. Je-li již $\langle H_n, W_n \rangle$ sestrojeno, položíme $\langle H_{n+1}, W_{n+1} \rangle = \prod_{I/Z} \langle H_n, W_n \rangle$. Definujeme $F_{n,n+1} : W_n \to W_{n+1}$ jako kanonické vnoření W_n do ultramocniny, složené se zobrazením realizujícím tranzitivní kolaps této ultramocniny na W_{n+1}, a pro každé $n \leq m$ dodefinujeme

$$F_{n,m} = F_{m-1,m} \circ F_{m-2,m-1} \circ \cdots \circ F_{n,n+1},$$

přičemž $F_{n,n} = \mathbf{Id} \restriction W_n$. Každé $F_{n,m}$ je elementární vnoření a pro $n \leq m \leq k$ platí $F_{n,m} \circ H_n = H_m$ a $F_{m,k} \circ F_{n,m} = F_{n,k}$, můžeme proto sestrojit reflexi $\langle H, W \rangle$ jako direktní limitu souboru $\{\langle H_n, W_n \rangle\}_{n \in \omega}$ podél ω se svým obvyklým uspořádáním. Označme si $F_{n,\infty} : W_n \to W$ příslušné kolimitní injekce.

Indukcí podle n plyne z tvrzení 2.3.37, že každé $\langle H_n, W_n \rangle$ je jednoduchá reflexe, tudíž $\langle H, W \rangle$ je podle téhož tvrzení polojednoduchou reflexí. Zbývá ukázat, že reflexe $\langle H, W \rangle$ není jednoduchá. Předpokládejme proto, že $W = S[d]$ pro nějaké $d \in W$, kde $S = \operatorname{rng}(H)$. Potom existuje $n \in \omega$ a $e \in W_n$ takové, že $d = F_{n,\infty}(e)$. Zvolme libovolný prvek $x \in W_m$, kde $m \geq n$. Existuje funkce f taková, že $F_{m,\infty}(x) = (H(f))(d)$. Pak ovšem

$$\begin{aligned} F_{m,\infty}(x) &= (F_{m,\infty}(H_m(f)))(F_{n,\infty}(e)) = \\ &= (F_{m,\infty}(H_m(f)))(F_{m,\infty}(F_{n,m}(e))) = F_{m,\infty}((H_m(f))(F_{n,m}(e))), \end{aligned}$$

tudíž

$$\begin{aligned} x &= (H_m(f))(F_{n,m}(e)) = \\ &= (F_{n,m}(H_n(f)))(F_{n,m}(e)) = F_{n,m}((H_n(f))(e)) \in \operatorname{rng}(F_{n,m}). \end{aligned}$$

Všechna elementární vnoření $F_{n,m}$ pro $n \leq m$ jsou proto izomorfizmy. Speciálně kanonické vnoření W_n do ultramocniny $\prod_{I/Z} W_n$ musí být izomorfizmus, to ovšem není možné, protože ultrafiltr Z je netriviální. ⫷⫸

Poznámka 2.4.4 Modifikací důkazu posledního tvrzení lze ukázat, že dokonce pro každý nespočetný kardinál $\varkappa$ existuje polojednoduchá $\varkappa$-reflexe, která není jednoduchá. Stačilo by zvolit Z jako $\varkappa$-dobrý $\aleph_1$-neúplný ultrafiltr, museli bychom ovšem konstruovat direktní limitu podél $\varkappa^+$ místo ω (nebo podél libovolného ordinálu α splňujícího $\operatorname{cf}(\alpha) > \varkappa$).

Tvrzení 2.4.5 *Předpokládejme, že třída všech měřitelných kardinálů je neomezená v* **On**. *Potom existuje minimální reflexe, která není polojednoduchá.*

Důkaz:
Hledanou reflexi sestrojíme jako direktní limitu řetězu reflexí $\{\langle H_\alpha, W_\alpha \rangle\}_{\alpha \in \mathbf{On}}$. Reflexe $\langle H_\alpha, W_\alpha \rangle$ a elementární vnoření $F_{\beta,\alpha} : W_\beta \to W_\alpha$ pro $\beta \leq \alpha$ zkonstruujeme indukcí podle α.

Položíme $\langle H_0, W_0\rangle = \langle \mathbf{Id}, \mathbf{V}\rangle$. Je-li α limitní, definujeme $\langle H_\alpha, W_\alpha\rangle$ jako direktní limitu dosud sestrojeného řetězu $\{\langle H_\beta, W_\beta\rangle\}_{\beta<\alpha}$, přičemž $F_{\beta,\alpha}$ budou příslušné kolimitní injekce. Konečně pro ordinální následníky položíme

$$\langle H_{\alpha+1}, W_{\alpha+1}\rangle = \prod\nolimits_{Z_\alpha} \langle H_\alpha, W_\alpha\rangle,$$

kde Z_α je měřitelný ultrafiltr na nějakém kardinálu $\lambda_\alpha > |H_\alpha(\aleph_\alpha)|$ a definujeme $F_{\beta,\alpha+1}$ jako složení $F_{\beta,\alpha}$ s kanonickým vnořením W_α do ultramocniny.

Indukcí dle α dostaneme z 2.3.37, že každé $\langle H_\alpha, W_\alpha\rangle$ je polojednoduchá reflexe. Nechť $\langle K, \mathcal{A}\rangle$ je direktní limita řetězu $\{\langle H_\alpha, W_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathbf{On}}$ s kolimitními injekcemi $F_{\alpha,\infty} : W_\alpha \to A$. Abychom mohli $\langle K, \mathcal{A}\rangle$ kolapsovat na reflexi, musíme ověřit, že struktura $\mathcal{A}$ je úzká. Vezměme libovolný prvek $x \in A$. Můžeme psát $x = F_{\beta,\infty}(y)$ pro nějaké $\beta \in \mathbf{On}$ a $y \in W_\beta$. Protože $H_\beta{}''\mathbf{On}$ je kofinální v $\mathbf{On}^{W_\beta}$, existuje kadinál $\varkappa$ a prostá funkce $f : y \to H_\beta(\varkappa)$, $f \in W_\beta$. Potom $F_{\beta,\infty}(f)$ určuje zřejmým způsobem prosté zobrazení z $(\in^A)^{-1}{}''\{x\}$ do $(\in^A)^{-1}{}''\{K(\varkappa)\}$, stačí proto ukázat, že $(\in^A)^{-1}{}''\{K(\varkappa)\}$ je množina pro každý nekonečný kardinál $\varkappa = \aleph_\alpha$.

Tvrdíme, že $(\in^A)^{-1}{}''\{K(\aleph_\alpha)\} \subseteq F_{\alpha,\infty}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha)$, k tomu stačí ověřit, že $H_\beta(\aleph_\alpha) \subseteq F_{\alpha,\beta}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha)$ pro každé $\beta \geq \alpha$, což provedeme indukcí podle β. Pro $\beta = \alpha$ tvrzení platí. Je-li $\beta > \alpha$ limitní, je

$$H_\beta(\aleph_\alpha) = \bigcup_{\gamma<\beta} F_{\gamma,\beta}{}''H_\gamma(\aleph_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\leq\gamma<\beta} F_{\gamma,\beta}{}''F_{\alpha,\gamma}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha) = F_{\alpha,\beta}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha).$$

Nechť $\beta = \gamma + 1$, označme si G funkci, realizující tranzitivní kolaps ultramocniny $\prod_{Z_\gamma} W_\gamma$ na W_β. Nechť $x \in H_\beta(\aleph_\alpha)$, můžeme předpokládat, že $x = G([f])$ pro nějakou funkci $f : \lambda_\gamma \to H_\gamma(\aleph_\alpha)$. Podle volby λ_γ máme $\lambda_\gamma > |H_\gamma(\aleph_\gamma)| \geq |H_\gamma(\aleph_\alpha)|$ a Z_γ je λ_γ-úplný ultrafiltr, musí proto existovat $y \in H_\gamma(\aleph_\alpha)$ takové, že $f =_{Z_\gamma} (\lambda_\gamma \times \{y\})$. Potom $x = F_{\gamma,\beta}(y)$, ovšem $y \in F_{\alpha,\gamma}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha)$, takže i $x \in F_{\alpha,\beta}{}''H_\alpha(\aleph_\alpha)$.

Tranzitivní kolaps $\mathcal{A}$ tedy vskutku existuje, a protože direktní limita je určena až na izomorfizmus, můžeme předpokládat, že přímo $\langle K, \mathcal{A}\rangle = \langle H, W\rangle$ je reflexe. Podle 2.3.37 je tato reflexe minimální, zbývá ukázat, že nemůže být polojednoduchá. Předpokládejme sporem, že $W = S[\![w]\!]$ pro nějaké $w \subseteq W$, kde $S = \mathrm{rng}(H)$. Potom musí existovat $\alpha \in \mathbf{On}$ takové, že $w \subseteq \mathrm{rng}(F_{\alpha,\infty})$. Stejným způsobem jako v důkazu tvrzení 2.4.3 lze ověřit, že pak všechna vnoření $F_{\alpha,\beta}$ pro $\beta \geq \alpha$ jsou izomorfizmy, což dává např. pro $\beta = \alpha + 1$ spor s netrivialitou ultrafiltru Z_α.

Poznamenejme ještě, že $\langle H, W\rangle$ ani žádné $\langle H_\alpha, W_\alpha\rangle$ pro $\alpha \geq \omega$ nesplňuje princip prodloužení. ⊣

Problém 2.4.6 Lze ukázat existenci minimální reflexe, jež není polojednoduchá, bez použití silných předpokladů o existenci velkých kardinálů?

Problém 2.4.7 Existuje PP-reflexe, která není jednoduchá?

Kapitola 3

Axiom silného výběru

Axiom globálního výběru v **UT** je nepostradatelný při konstrukci reflexí, automorfizmů univerzální třídy a dalších zajímavých objektů, které jsou vlastními třídami. Na druhou stranu většina běžné matematiky se zabývá pouze množinami. Přítomnost funkčního symbolu **C** v jazyce **UT** navíc ztěžuje srovnání této teorie s jinými teoriemi množin, které bývají formulované v jazyce obsahujícím pouze predikát náležení.

Vzniká proto přirozená otázka, zda axiom silného výběru má také důsledky formulovatelné v základním jazyce teorie množin, popřípadě jaké tyto důsledky jsou. Pro klasickou teorii množin s axiomem regularity tuto otázku zodpověděl U. Felgner.

Věta 3.1.1 (Felgner [Fel71]) *Teorie* **ZFS** *je konzervativním rozšířením* **ZFC**.

Neregulární teorie množin $\mathbf{ZFS}_-$ však *není* konzervativním rozšířením $\mathbf{ZFC}_-$, neboť je v ní dokazatelné např. schéma kolekce, které je na $\mathbf{ZFC}_-$ nezávislé.

Definice 3.1.2 Relace $<$ na třídě X se nazývá *strom,* je-li to úzké ostré uspořádaní na X s nejmenším prvkem, jehož restrikce na každý počáteční úsek je dobré uspořádání. (Počátečním úsekem míníme každou množinu tvaru $(\leftarrow, x) = \{y \in X;\ y < x\}$, kde $x \in X$.) Je-li $\langle X, < \rangle$ strom a $x \in X$, definujeme $ht(x)$ jako ordinál, který je typem dobrého uspořádání $<\restriction (\leftarrow, x)$.

Strom $\langle X, < \rangle$ se nazývá *omezený,* pokud existuje ordinál, který majorizuje množinu $\{ht(x);\ x \in X\}$. Množina $p \subseteq X$ je *větev,* je-li $<\restriction p$ lineární uspořádání. Větev p se nazývá *maximální,* je-li maximální vzhledem k inkluzi.

Definice 3.1.3 *Princip omezených stromů* je tvrzení

$$(BT) \qquad \text{Každý omezený strom obsahuje maximální větev.}$$

(BT kvantifikuje vlastní třídy, formálně vzato je to tedy schéma axiomů.) Teorii $\mathbf{ZF}_- + BT$ budeme značit $\mathbf{ZFT}_-$.

Lemma 3.1.4 $\mathbf{ZFS}_- \supseteq \mathbf{ZFT}_- \supseteq \mathbf{ZFC}_- + \mathbf{Coll}$.

Důkaz:
Předpokládejme sporem, že $\langle X, < \rangle$ je omezený strom bez maximální větve. Transfinitní rekurzí definujme posloupnost $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{On}}$ prvků X tak, že $ht(x_\alpha) = \alpha$ a $x_\beta < x_\alpha$ pro $\beta < \alpha$. (Takové x_α existuje, neboť $<$ nemá maximální větev, a axiom silného výběru dovoluje zvolit nějaký kanonický prvek s touto vlastností.) To je ovšem spor s omezeností stromu $<$.

Dále ukážeme, že $BT \to AC$. Nechť x je libovolná množina, najdeme prosté zobrazení z x do $\mathbf{On}$. Označme X množinu všech prostých zobrazení z nějaké podmnožiny x na počáteční úsek $\mathbf{On}$, uspořádanou inkluzí. Potom X je strom, omezený Hartogsovým číslem $\aleph(x) = \min\{\alpha;\ \sim\exists f : \alpha \to x \text{ prosté}\}$. Je-li p nějaká maximální větev X, tak $\bigcup p$ je opět prvek X, tedy p má největší prvek f, který musí být zároveň maximálním prvkem X. Pak ovšem f je definováno na celém x, protože jinak by šlo prodloužit.

Konečně z BT plyne schéma kolekce. Buď φ libovolná formule a x množina, hledáme y tak, aby

$$\forall u \in x\ \ (\exists v\ \ \varphi(u,v) \to \exists v \in y\ \ \varphi(u,v)).$$

Očíslujme $x = \{u_\alpha;\ \ \alpha < \varkappa\}$ a definujme třídu

$$X = \{f : \alpha \to \mathbf{V};\ \ \alpha \leq \varkappa \,\&\, \forall \beta < \alpha\ \ (\exists v\ \ \varphi(u_\beta, v) \to \varphi(u_\beta, f(\beta)))\},$$

uspořádáme ji opět inkluzí. Dostáváme strom omezený $\varkappa$. Stejně jako v předchozí části důkazu lze nahlédnout, že maximální větev X musí mít největší prvek f a $\mathrm{dom}(f) = \varkappa$, takže $y = \mathrm{rng}(f)$ je hledaná množina. ⟚

Poznámka 3.1.5 Nepodařilo se mi zjistit, zda je inkluze $\mathbf{ZFT}_- \supseteq \mathbf{ZFC}_- + \mathbf{Coll}$ ostrá. [Pozn. po odevzdání: ano, je.]

Věta 3.1.6

(*i*) $\mathbf{ZFS}_-$ *je konzervativní rozšíření* $\mathbf{ZFT}_-$.

(*ii*) *Každý spočetný model* $\mathbf{ZFT}_-$ *lze expandovat na model* $\mathbf{ZFS}_-$.

Navíc důkaz bodu (*i*) *lze formalizovat v* $I\Delta_0 + \Omega_1$ (*dokonce i v* S^1_2).

Důkaz:
Použijeme podobnou metodu jako [Fel71], v podstatě jde o to ověřit, že části Felgnerova důkazu využívající axiomu regularity lze simulovat pomocí principu omezených stromů.

Z technických důvodů budeme $\mathbf{ZFS}_-$ formulovat v jazyce s *binárním predikátem* $\mathbf{C}$, který definuje *graf* bijekce mezi $\mathbf{On}$ a $\mathbf{V}$. Pro jednoduchost budeme také používat klasickou predikátovou logiku se základními výrokovými spojkami $\to$ a $\perp$ a s univerzálním kvantifikátorem, ostatní spojky a kvantifikátory považujeme za definované.

Označme P třídu všech prostých zobrazení, jejichž definiční obor je počáteční úsek $\mathbf{On}$ (neboli prvek $\mathbf{On}$), nechť $\leq$ je uspořádání P inkluzí.

Pro každou formuli φ jazyka $\langle \in, \mathbf{C} \rangle$ definujeme indukcí formuli $\Vdash \varphi$ jazyka $\langle \in \rangle$, která má oproti φ navíc jednu volnou proměnnou pro prvek P:

$$
\begin{aligned}
&p \Vdash x \in y && \leftrightarrow \quad x \in y, \\
&p \Vdash x = y && \leftrightarrow \quad x = y, \\
&p \Vdash \mathbf{C}(x,y) && \leftrightarrow \quad \langle x,y \rangle \in p, \\
&p \Vdash \varphi \to \psi && \leftrightarrow \quad \forall q \geq p \ \ (q \Vdash \varphi \to q \Vdash \psi), \\
&p \nVdash \bot, && \\
&p \Vdash \forall x\, \varphi && \leftrightarrow \quad \forall x \ \ p \Vdash \varphi.
\end{aligned}
$$

Sublemma 1

(i) $\mathbf{ZF}_- \vdash p \leq q \;\&\; p \Vdash \varphi \to q \Vdash \varphi$

(ii) $\mathbf{ZF}_- \vdash \forall q \geq p \ \exists r \geq q \ \ r \Vdash \varphi \to p \Vdash \varphi$

(iii) *Neobsahuje-li* φ *symbol* C*, tak* $\mathbf{ZF}_- \vdash (\varphi \leftrightarrow p \Vdash \varphi)$.

Důkaz:
Bod (iii) plyne snadno z definice. Body (i) a (ii) lze dokázat indukcí podle složitosti formule, jediný netriviální krok je pro atomické formule tvaru $\mathbf{C}(x,y)$.

Bod (i): Jestliže $p \leq q$ a $p \Vdash \mathbf{C}(x,y)$, tak $\langle x,y \rangle \in p \subseteq q$, takže $q \Vdash \mathbf{C}(x,y)$.

Bod (ii): Předpokládejme, že $p \nVdash \mathbf{C}(x,y)$. Mohou nastat dva případy. Buďto je $x \in \mathrm{dom}(p)$ a $p(x) \neq y$, pak zřejmě $q \nVdash \mathbf{C}(x,y)$ pro každé $q \geq p$. Pokud $x \notin \mathrm{dom}(p)$, najdeme $q \supseteq p$ takové, že $x \in \mathrm{dom}(q)$ a $q(x) \neq y$, potom $q \geq p$ a $r \nVdash \mathbf{C}(x,y)$ pro všechna $r \geq q$.

Sublemma 2 *Nechť* $\mathbf{ZFS}_- \vdash \varphi$*. Potom* $\mathbf{ZFT}_- \vdash \forall p \in P \ \ p \Vdash \varphi$.

Důkaz:
Postupujeme indukcí podle délky důkazu. Probereme nejdříve indukční kroky pro odvozovací pravidla.

Modus ponens:

Podle indukčního předpokladu je v $\mathbf{ZFT}_-$ dokazatelné $\forall p \ \ p \Vdash \varphi$ a $\forall p \ \ p \Vdash \varphi \to \psi$, takže podle definice $\Vdash$ též $\forall p \ \ p \Vdash \psi$.

Generalizace:

Předpokládáme, že je dokazatelné $\forall p \ \ p \Vdash (\psi \to \varphi(x))$, přičemž proměnná x není volná ve formuli ψ. Potom je dokazatelné též $\forall x \forall p \ \ p \Vdash (\psi \to \varphi(x))$, tedy $\forall p \ \ (p \Vdash \psi \to \forall x \ \ p \Vdash \varphi(x))$, čili $\forall p \ \ p \Vdash (\psi \to \forall x \ \ \varphi(x))$.

Nyní probereme jednotlivé axiomy predikátové logiky a $\mathbf{ZFS}_-$.

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$:

Nechť $p \Vdash \varphi$, $q \geq p$ a $q \Vdash \psi$. Potom $q \Vdash \varphi$ dle předchozího sublemmatu.

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$:

Nechť $p \Vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$, $q \geq p$, $q \Vdash \varphi \to \psi$, $r \geq q$ a $r \Vdash \varphi$. Potom $r \Vdash \psi$ a $r \Vdash \psi \to \chi$, takže $r \Vdash \chi$.

$((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi$:

Pokud $p \Vdash (\varphi \to \perp) \to \perp$, tak $\forall q \geq p\ q \nVdash \varphi \to \perp$, tedy $\forall q \geq p\ \exists r \geq q\ r \Vdash \varphi$, tudíž $p \Vdash \varphi$.

$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(y)$:

Pokud $p \Vdash \forall x\ \varphi(x)$, tak $p \Vdash \varphi(x)$ pro každé x, tedy také $p \Vdash \varphi(y)$.

$x = x$:

Zřejmé.

$x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$:

Jestliže $p \Vdash x = y$, tak se x rovná y, a $q \Vdash \varphi(x)$ je totéž jako $q \Vdash \varphi(y)$ pro libovolné q.

Zbývá ověřit axiom silného výběru a schéma nahrazení — ostatní axiomy $\mathbf{ZFS}_{-}$ jsou množinové formule, stačí na ně proto použít bod (*iii*) předchozího sublemmatu.

Rozepíšeme-li ostatní výrokové spojky pomocí $\to$ a $\perp$, zjistíme, že

$$
\begin{aligned}
p \Vdash {\sim}\varphi &\ \leftrightarrow\ \forall q \geq p\ q \nVdash \varphi, \\
p \Vdash \varphi \vee \psi &\ \leftrightarrow\ \forall q \geq p\ \exists r \geq q\ (r \Vdash \varphi \ \vee\ r \Vdash \psi), \\
p \Vdash \varphi \,\&\, \psi &\ \leftrightarrow\ p \Vdash \varphi \,\&\, p \Vdash \psi, \\
p \Vdash \exists x\, \varphi &\ \leftrightarrow\ \forall q \geq p\ \exists r \geq q\ \exists x\ r \Vdash \varphi.
\end{aligned}
$$

Ověříme nyní axiom silného výběru, tj. $\mathbf{C}$ je graf prosté funkce, zobrazující $\mathbf{On}$ na univerzální třídu.

$\mathbf{C}(x,y) \,\&\, \mathbf{C}(x,z) \to y = z$:

Pokud $p \Vdash \mathbf{C}(x,y)$ a $p \Vdash \mathbf{C}(x,z)$, tak $y = p(x) = z$.

$\mathbf{C}(x,z) \,\&\, \mathbf{C}(y,z) \to x = y$:

Jestliže $p \Vdash \mathbf{C}(x,z)$ a $p \Vdash \mathbf{C}(y,z)$, tak $p(x) = z = p(y)$, tudíž $x = y$, neboť p je prostá funkce.

$\mathbf{C}(x,y) \to x \in \mathbf{On}$:

Pokud $p \Vdash \mathbf{C}(x,y)$, tak $x \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathbf{On}$. Formule $x \in \mathbf{On}$ neobsahuje $\mathbf{C}$, tudíž $p \Vdash x \in \mathbf{On}$.

$x \in \mathbf{On} \to \exists y\ \mathbf{C}(x,y)$:

Nechť $x \in \mathbf{On}$ a $p \in P$. Najdeme $q \supseteq p$ tak, že $x \in \mathrm{dom}(q)$, potom $q \geq p$ a $q \Vdash \mathbf{C}(x,y)$ pro $y = q(x)$.

$\exists x\ \mathbf{C}(x,y)$:

Nechť $p \in P$ a y jsou libovolné. Najdeme $q \supseteq p$ tak, aby $y \in \mathrm{rng}(q)$, potom $q \geq p$ a $q \Vdash \mathbf{C}(x,y)$, kde $q(x) = y$.

Až dosud jsme nikde nepoužili předpoklad (BT), ten bude potřeba teprve k ověření schématu nahrazení: nechť $p \Vdash \forall u,v,w\ (\varphi(u,v) \,\&\, \varphi(u,w) \to v = w)$ a nechť x je libovolné. Očíslujeme si $x = \{x_\alpha;\ \alpha < \varkappa\}$ a definujeme X jako třídu všech monotónních funkcí g z $\alpha \leq \varkappa$ do P takových, že $p \leq g(\beta)$ a

$$g(\beta) \Vdash \forall v\ {\sim}\varphi(x_\beta, v)\ \ \vee\ \ \exists v\ \ g(\beta) \Vdash \varphi(x_\beta, v)$$

pro všechna $\beta < \alpha$. Třída X uspořádaná inkluzí je strom omezený $\varkappa$. Je-li $p \subseteq X$ maximální větev, tak zřejmě $g = \bigcup p \in X$, tudíž $g \in p$ a g je maximální prvek X. Předpokládejme sporem, že $\alpha = \mathrm{dom}(g) < \varkappa$. Potom $q = \bigcup \mathrm{rng}(g)$ je prvek P majorizující $g(\beta)$, $\beta < \alpha$. Existuje $r \geq q$ tak, že $r \Vdash \forall v \ {\sim}\varphi(x_\alpha, v) \ \vee \ \exists v \ r \Vdash \varphi(x_\alpha, v)$: buď $q \Vdash \forall v \ {\sim}\varphi(x_\alpha, v)$, pak lze volit $r = q$, nebo existuje v tak, že $q \nVdash {\sim}\varphi(x_\alpha, v)$, pak existuje $r \geq q$ které forsuje $\varphi(x_\alpha, v)$. Funkce $g \cup \{\langle \alpha, r\rangle\}$ je prvek X ležící ostře nad g, spor. Tedy $\mathrm{dom}(g) = \varkappa$. Označíme-li $q = \bigcup \mathrm{rng}(g)$, platí

$$q \geq p \,\&\, \forall u \in x \ \ (q \Vdash \forall v \ {\sim}\varphi(u,v) \ \ \vee \ \ \exists v \ \ q \Vdash \varphi(u,v)).$$

Označme $y = \{v;\ \exists u \in x \ \ q \Vdash \varphi(u,v)\}$. ($y$ je množina podle axiomu nahrazení: k jednomu $u \in x$ existuje nejvýše jedno v tak, že $q \Vdash \varphi(u,v)$, neboť $q \Vdash \varphi(u,v) \,\&\, \varphi(u,w) \to v = w$.) Tvrdíme, že

$$q \Vdash \forall v \ \ (v \in y \leftrightarrow \exists u \in x \ \ \varphi(u,v)).$$

Buď v libovolné a $r \geq q$. Pokud $r \Vdash v \in y$, tj. $v \in y$, tak existuje $u \in x$ takové, že $q \Vdash \varphi(u,v)$, tím spíše $r \Vdash \varphi(u,v)$ a $r \Vdash \exists u \in x \ \ \varphi(u,v)$. Nechť naopak $r \Vdash \exists u \in x \ \ \varphi(u,v)$. Potom existuje $s \geq r$ a $u \in x$ tak, že $s \Vdash \varphi(u,v)$. Tudíž $q \nVdash \forall w \ {\sim}\varphi(u,w)$ a podle volby q existuje w tak, že $q \Vdash \varphi(u,w)$. Ovšem $s \Vdash \varphi(u,w)$ a $s \Vdash \varphi(u,v)$ implikuje $s \Vdash v = w$, tj. $v = w$ a $q \Vdash \varphi(u,v)$, tedy $v \in y$ a $r \Vdash v \in y$. ⋕

Konzervativita $\mathbf{ZFS}_-$ nad $\mathbf{ZFT}_-$ je již snadným důsledkem lemmat 1 a 2: předpokládejme, že $\mathbf{ZFS}_- \vdash \varphi$, kde φ je $\in$-sentence. Pak $\mathbf{ZFT}_- \vdash \forall p \ p \Vdash \varphi$ podle lemmatu 2, takže $\mathbf{ZFT}_- \vdash \varphi$ podle lemmatu 1.

Nechť $\mathcal{M} = \langle M, \in^M\rangle$ je spočetný model $\mathbf{ZFT}_-$, hledáme binární relaci C^M na M takovou, aby $\langle M, \in^M, C^M\rangle \models \mathbf{ZFS}_-$. Pro stručnost označíme

$$P^M = \{a \in M;\ \ \mathcal{M} \models a \in P\},$$
$$p \leq^M q \ \ \leftrightarrow \ \ \mathcal{M} \models p \leq q,$$
$$p \Vdash^M \varphi(a_1, \ldots, a_n) \ \ \leftrightarrow \ \ \mathcal{M} \models (p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)).$$

Podmnožina $D \subseteq P^M$ je *hustá,* pokud pro každé $p \in P^M$ existuje $q \in D$ tak, že $p \leq^M q$. *Generický ideál* je dolní nahoru usměrněná podmnožina P^M, která protíná každou hustou podmnožinu P^M, definovatelnou v $\mathcal{M}$.

Očíslujme $\{D_n;\ n \in \omega\}$ všechny husté definovatelné podmnožiny P^M. Sestrojíme rostoucí posloupnost $p_0 \leq^M p_1 \leq^M p_2 \leq^M \cdots$ prvků P^M tak, že $p_n \in D_n$ a definujeme $G = \{p \in P^M;\ \exists n \in \omega \ \ p \leq^M p_n\}$. Pak G je generický ideál.

Je-li φ libovolná formule s parametry z M, jsou množiny $\{p;\ \ p \Vdash^M \varphi \vee p \Vdash^M {\sim}\varphi\}$ a $\{p;\ \ p \Vdash^M \forall v\, \varphi(v) \ \vee \ \exists a \in M \ \ p \Vdash^M {\sim}\varphi(a)\}$ husté, takže

$$\exists p \in G \ \ p \Vdash^M \varphi \ \ \vee \ \ \exists p \in G \ \ p \Vdash^M {\sim}\varphi,$$
$$\exists p \in G \ \ p \Vdash^M \forall v \ \ \varphi(v) \ \ \vee \ \ \exists p \in G \ \ \exists a \in M \ \ p \Vdash^M {\sim}\varphi(a).$$

Označíme $C^M = \{\langle a,b\rangle \in M \times M;\ \exists p \in G \ \mathcal{M} \models \langle a,b\rangle \in p\}$. Tvrdíme, že $\mathcal{M}^+ = \langle M, \in^M, C^M\rangle$ je model $\mathbf{ZFS}_-$. K tomu stačí ukázat, že

$$\mathcal{M}^+ \models \varphi \ \ \leftrightarrow \ \ \exists p \in G \ \ p \Vdash^M \varphi$$

pro každou formuli φ s parametry z M.

Pro atomické formule a pro $\perp$ to platí přímo z definice.

Nechť $\varphi = \psi \to \chi$. Pokud existuje $p \in G$ tak, že $p \Vdash^M \chi$ nebo $p \Vdash^M {\sim}\psi$ (potom $q \nVdash^M \psi$ pro každé $q \in G$), tak $p \Vdash^M \psi \to \chi$, a zároveň $\mathcal{M}^+ \vDash \chi$ nebo $\mathcal{M}^+ \nvDash \psi$ dle indukčního předpokladu, takže $\mathcal{M}^+ \vDash \psi \to \chi$. V opačném případě musí existovat $p \in G$ tak, že $p \Vdash^M \psi$, a $q \nVdash^M \chi$ pro každé $q \in G$. Podle indukčního předpokladu $\mathcal{M}^+ \vDash \psi$ a $\mathcal{M}^+ \nvDash \chi$, takže $\mathcal{M}^+ \nvDash \psi \to \chi$. Zároveň neexistuje $q \in G$, které by forsovalo $\psi \to \chi$: libovolné $r \in G$, majorizující p i q, by totiž muselo forsovat χ, předpokládali jsme však opak.

Konečně nechť $\varphi = \forall v\, \psi(v)$. Pokud existuje $p \in G$ tak, že $p \Vdash^M \forall v\, \psi(v)$, dostáváme $p \Vdash^M \psi(a)$ pro každé $a \in M$, tudíž $\mathcal{M}^+ \vDash \forall v\, \psi(v)$ podle indukčního předpokladu. V opačném případě existuje $a \in M$ a $p \in G$ tak, že $p \Vdash^M {\sim}\psi(a)$. Potom žádné $q \in G$ neforsuje $\psi(a)$, takže $\mathcal{M}^+ \nvDash \psi(a)$ podle indukčního předpokladu a $\mathcal{M}^+ \nvDash \forall v\, \psi(v)$. $\dashv\vdash$

Důsledek 3.1.7 **UT** *je konzervativním rozšířením* $\mathbf{ZFT}_- + ASU$. $\dashv\vdash$

Důsledek 3.1.8 *Nechť T je rekurzivně spočetná množina $\in$-sentencí. Potom existuje věrná interpretace* $\mathbf{ZFS}_- + T$ *v* $\mathbf{ZFT}_- + T$.

Důkaz:
$\mathbf{ZFS}_- + T$ i $\mathbf{ZFT}_- + T$ jsou esenciálně reflexivní teorie, díky 3.1.6 je $\mathbf{ZFS}_- + T$ Π^0_1-konzervativní nad $\mathbf{ZFT}_- + T$ a $\mathbf{ZFT}_- + T$ je Σ^0_1-konzervativní nad $\mathbf{ZFS}_- + T$, takže stačí použít Lindströmovu větu [Lin84]. $\dashv\vdash$

Problém 3.1.9 Existuje interpretace (popř. věrná interpretace) I teorie $\mathbf{ZFS}_-$ v $\mathbf{ZFT}_-$ taková, že

$$\mathbf{ZFT}_- \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{(I)}$$

pro každou množinovou sentenci φ?

Poznamenejme, že forsing sestrojený v důkazu věty 3.1.6 *není* interpretací v pravém smyslu slova, přestože to je určitý typ syntaktického překladu a zachovává množinové sentence.

Literatura

[Bof72] M. Boffa: Forcing et négation de l'axiome de Fondement, *Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, Collection 8°,* 2e Série, 40 (1972), no. 7, 52pp.

[Fel71] U. Felgner: Comparison of the axioms of local and universal choice, *Fundamenta Mathematicae* 71 (1971), pp. 43–62

[Kun71] K. Kunen: Elementary embeddings and infinitary combinatorics, *Journal of Symbolic Logic* 36 (1971), pp. 407–413

[Lin84] P. Lindström: On faithful interpretability, in: M. M. Richter et al. (eds.), *Computation and Proof Theory,* Springer Verlag, Berlin 1984, pp. 279–288

[Mat70] Ju. V. Matijasevič: Diofantovosť perečislimych množestv, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 191 (1970), pp. 279–282

[Paj99] P. Pajas: *Endomorfismy, invariantní třídy a nestandardní principy v neregulárním universu množin,* diplomová práce, MFF UK, Praha 1999

Rejstřík