Příklady ke kapitole o extrémech funkcí více proměnných

Příklad 1. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Řešení. Extrémy mohou nastat buď v bodech, které jsou stacionární, anebo v bodech, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje. Druhá možnost je zde evidentně vyloučena. Hledejme stacionární body: $f_x(x, y) = 6x^2 - y^2 + 10x = 0$, $f_y(x, y) = -2xy + 2y = 0$. Řešením této soustavy (proveďte sami) dostáváme čtyři stacionární body: $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [-5/3, 0]$, $P_3 = [1, 4]$, $P_4 = [1, -4]$. Dále budeme potřebovat parciální derivace 2. řádu: $f_{xx}(x, y) = 12x + 10$, $f_{yy} = -2x + 2$, $f_{xy} = -2y$. Odtud dostáváme $D(P_1) = f_{xx}(P_1)f_{yy}(P_1) - (f_{xy}(P_1))^2 = 20 > 0$. Navíc platí $f_{xx}(P_1) = 10 > 0$. Proto má f v bodě P_1 ostré lokální minimum. V ostatních bodech extrém nenastává, neboť $D(P_i) < 0$, $i = 1, 2, 3$.

Příklad 2. U funkce z předchozího příkladu najděte absolutní extrémy na celém definičním oboru.

Řešení. Definičním oborem je $\mathbb{R}^2$. Položme např. $\tilde{f}(x) = f(x, 0) = 2x^3 + 5x^2$. Zřejmě $\lim_{x\to\pm\infty} \tilde{f}(x) = \pm\infty$, tedy

$$\sup_{[x,y]\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \infty, \qquad \inf_{[x,y]\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = -\infty.$$

Proto f zde nenabývá absolutních extrémů.

Příklad 3. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt[5]{(2 + x)^2}\sqrt[5]{(2 - y)^2}$.

Řešení. Derivováním najdeme

$$f_x(x, y) = \frac{2\sqrt[5]{(2 - y)^2}}{5\sqrt[5]{(2 + x)^3}}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2\sqrt[5]{(2 + x)^2}}{5\sqrt[5]{(2 - y)^3}}.$$

Není těžké vidět, že nelze najít bod, ve kterém jsou obě derivace rovny nule (rozmyslete si sami). Tedy funkce nemůže mít extrémy ve stacionárních bodech. Vyšetřujme body, v nichž alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

a) Obě derivace neexistují v bodě $[-2, 2]$. Zkoumejme chování funkce v okolí tohoto bodu. Platí

$$f(x, y) - f(-2, 2) = \sqrt[5]{(2 + x)^2}\sqrt[5]{(2 - y)^2} - 0 > 0$$

pro všechny $[x, y] \in O([-2, 2])$. Funkce f zde tedy má lokální minimum.

b) Pro všechny body přímky $x = -2$ platí, že f_x zde neexistuje a $f_y = 0$. Může tedy v těchto bodech nastat extrém. Platí

$$f(x, y) - f(-2, y) = \sqrt[5]{(2 + x)^2}\sqrt[5]{(2 - y)^2} - 0 > 0$$

pro všechny $[x, y]$ z okolí přímky $x = -2$. Funkce f zde tedy má (neostré) lokální minimum.

c) Pro všechny body přímky $y = 2$ platí, že f_y zde neexistuje a $f_x = 0$. Může tedy v těchto bodech nastat extrém. Platí

$$f(x, y) - f(x, 2) = \sqrt[5]{(2 + x)^2}\sqrt[5]{(2 - y)^2} - 0 > 0$$

pro všechny $[x, y]$ z okolí přímky $y = 2$.

Příklad 4. Součet tří kladných čísel je 21. Určete jednotlivé sčítance tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení. Označme hledaná čísla x, y, z. Platí $x+y+z = 21$. Odtud $z = 21-x-y$. Protože chceme maximalizovat výraz xyz, stačí najít extrém funkce $f(x, y) = xy(21 - x - y)$. Snadno najdeme stacionární body (proveďte sami): $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [7, 7]$. Zřejmě bod P_1 není vhodný, neboť pak by byl součin roven nule. Řešením problému je bod P_2 a hledané sčítance mají hodnotu $x = 7, y = 7, z = 7$.

Příklad 5. Najděte bod roviny $2x - y + 2z = 16$, který je nejblíže počátku.

Řešení. Označme hledaný bod $[x, y, z]$. Potom druhá mocnina jeho vzdálenosti od počátku je $d^2 = x^2+y^2+z^2$; zřejmě stačí uvažovat tuto druhou mocninu a nekomplikovat si situaci vyštřováním příslušné odmocniny. Poněvadž $y = 2x + 2z - 16$, platí $d^2 = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2 = f(x, z)$. Nalezneme stacionární bod (proveďte sami): $x = z = 32/9$. Z geometrického náhledu je zřejmé, že bod, ve kterém nastává minimum, existuje. Zřejmě tímto bodem musí být právě bod $[x, z] = [32/9, 32/9]$. Poznamenejme, že maximem tento bod zjevně být nemůže, což lze vidět buď z geometrického náhledu, nebo z tvaru funkce f. Hledaným bodem je tedy $[32/9, -16/9, 32/9]$