Oceňování amerických kupních opcí pomocí Blackova-Scholesova modelu

Eliška a Tomáš Vejchodští
(vejchode@vse.cz a vejchod@math.cas.cz)

Vysoká škola ekonomická
nám. W. Churchilla 4
130 67 Praha 3

Matematický ústav Akademie věd ČR
Žitná 25, 115 67 Praha 1

Matematika v ekonomické praxi, 9.–10. prosince 2010, Jihlava

Opce

Kupní opce (call option) = právo osoby A koupit v budoucnu (tj. nejpozději v čase T) od osoby B podkladový instrument za předem dohodnutou realizační cenu Z.

Opce

Kupní opce (call option) = právo osoby A koupit v budoucnu (tj. nejpozději v čase T) od osoby B podkladový instrument za předem dohodnutou realizační cenu Z.

- Patří mezi finanční deriváty (termínový charakter).
- 4 situace: prodej$\times$koupě kupní$\times$prodejní opce
- Mnoho variant:
  - Evropská – možnost uplatnit jen při expiraci
  - Americká – možnost uplatnit i kdykoli před expirací
  - Bermudská
  - s bariérou
  - exotická
- Hodnota opce? – různé modely

Modely oceňování opcí

- Blackův-Scholesův model
  Robert C. Merton a Myron Scholes –
  – Nobelova cena za ekonomii (1997)
- modely se stochastickou volatilitou (Hestonův model)
- oceňování pomocí binárních stromů
- oceňování metodou Monte Carlo
- modely založené na konečných diferencích

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0$$

Předpoklady:

- Peníze se půjčují za známou konstantní bezrizikovou úrokovou míru.
- Cena podkladového instrumentu sleduje geometrický Brownův pohyb s konstantním driftem a volatilitou.
- Neexistují trasakční náklady, daně, apod.
- Z podkladového instrumentu se nevyplácí dividendy.
- Všechny instrumenty jsou nekonečně dělitelné.
- Nejsou žádná omezení na krátké prodeje (short sales).
- Neexistuje možnost arbitráže.

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0$$

- $t \in [0, T]$ ... čas od počátku platnosti smlouvy
- $x \in [0, \infty)$ ... cena podkladového instrumentu
- $w = w(x, t)$ ... cena opce
- σ ... volatilita ceny podkladového instrumentu
- r ... bezriziková úroková míra

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0$$

Evropská opce

Okrajové podmínky

- $w(x, T) = \max\{x - Z, 0\}$ pro $x \in [0, \infty)$
- $w(0, t) = 0$ pro $t \in [0, T]$
- $w(x, t) \to x$ pro $x \to \infty$

Řešení v uzavřeném tvaru:

$$w(x, t) = N(d_1)x - N(d_2)Z\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

- $d_{1,2} = \dfrac{\ln(x/Z) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma(T - t)}$
- $N(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$ ... distribuční f. standard. normál. rozděl.

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0 \quad (x,t) \in D$$

Americká opce

Okrajové podmínky

- $w(x, T) = \max\{x - Z, 0\}$ pro $0 < x < s(t)$
- $w(0, t) = 0$ pro $t \in [0, T]$
- $w(s(t), t) = \max\{s(t) - Z, 0\}$
- $\dfrac{\partial w}{\partial x}(s(t), t) = 1$

$D = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ t \in (0, T]\}$

$s(t)$ …optimální realizační křivka – pokud $x \geq s(t)$ realizovat opci

Řešení v uzavřeném tvaru neexistuje.

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0 \quad (x,t) \in D$$

Americká opce

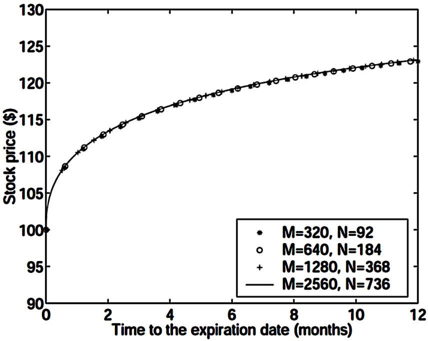
- Existuje právě jedno řešení? Ano. [Badea a Wang, 2000]
- Spojitá závislost řešení na σ? Ano. [Hlaváček, 2010]
- Numerické řešení. Např. [Allegretto, Lin, Yang, 2001]

Numerické výsledky

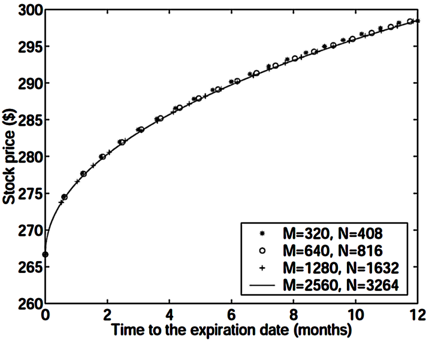
$T = 12$ měsíců
$Z = 100$ (USD)
$\sigma = 0.2$
$r = 8\,\%$

d ... míra výnosu z akcie výplatou dividend

$d = 12\,\%$



$d = 3\,\%$



Děkuji za pozornost

Eliška a Tomáš Vejchodští
(vejchode@vse.cz a vejchod@math.cas.cz)

Vysoká škola ekonomická
nám. W. Churchilla 4
130 67 Praha 3

Matematický ústav Akademie věd ČR
Žitná 25, 115 67 Praha 1