Diferenciální rovnice

součást předmětu Matematická analýza 3

Pavel Řehák

(verze 13. června 2013)

Pár slov na úvod

Tento text tvoří doplněk k části předmětu Matematická analýza 3 (partie týkající se diferenciálních rovnic). Nevyčerpává absolutně vše, co se na přednáškách probírá. Spíše se snaží stručně a přehledně zachytit najdůležitější pojmy a fakta. V kombinaci s poznámkami z přednášek (kde zejména podrobněji komentujeme probíranou látku, doplňujeme ji, uvádíme ilustrativní příklady a diskutujeme) by měl tvořit postačující zdroje k přípravě na zkoušku. Je samozřejmě vítána i samostatná iniciativa studentů, kdy sami čerpají i z jiných zdrojů (přičemž požadavky na rozsah znalostí jsou zřejmé z obsahu textu).

Nově zaváděné a důležité pojmy budou zpravidla vynačeny *kurzívou.*

Hlavním zdrojem při přípravě tohoto textu bylo (povedené) skriptum „R. Mařík, Diferenciální a diferenční rovnice, MZLU Brno, 2004“. Dále pak byly lehce využity učebnice „J. Kalas, M. Ráb, Obyčejné diferenciální rovnice, MU Brno, 1995“ a „R.K. Nagle, E.B. Staff, A.D. Snider, Fundamentals of differential equations. Fifth edition, Addison-Wesley 2000“.

Budu vděčný každému, kdo mne upozorní na nepřesnosti či chyby v textu (některé nepřesnosti – či spíše zjednodušení – jsou ovšem „záměrné“, neboť náš kurz má místy spíše pouze „informativní“ charakter).

Brno, 13. června 2013, Pavel Řehák

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici obsahující derivace neznámé funkce. Teorie těchto rovnic je velmi rozsáhlá a nachází četné aplikace jak při řešení reálných problémů, tak i v čisté matematice.

Diferenciální rovnice lze klasifikovat různými způsoby. Např. rozlišujeme diferenciální rovnice podle typu: *Obyčejnou diferenciální rovnicí* rozumíme diferenciální rovnici obsahující pouze „obyčejné“ derivace podle jedné proměnné (tj. ne parciální derivace podle různých proměnných) neznámé funkce. *Parciální diferenciální rovnicí* rozumíme diferenciální rovnici obsahující parciální derivace neznámé funkce podle více proměnných. Můžeme též klasifikovat diferenciální rovnice podle řádu, kde řád diferenciální rovnice odpovídá řádu nejvyšší derivace. Obvykle pak rozlišujeme *diferenciální rovnice prvního řádu* a *diferenciální rovnice vyšších řádů*. Dále např. klasifikujeme diferenciální rovnice jako *lineární* či *nelineární*.

My se zde budeme zabývat některými jednoduchými obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. a 2. řádu, zejména těmi, kde lze řešení nalézt jednoduchou analytickou cestou (což u naprosté většiny rovnic není možné).

Připomeňme, že obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (rozřešená vzhledem k 1. derivaci) má tvar

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

Řešením rovnice (1.1) na intervalu I rozumíme každou funkci, která je diferencovatelná na I a splňuje zde identicky rovnici (1.1). *Počáteční úloha* je úloha tvaru

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.2}$$

kde druhá z rovností se nazývá *počáteční podmínka*.

Formulace hlavních problémů:

- Má daná počáteční úloha řešení?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je možné toto řešení nalézt analytickou cestou? Pokud ano, jak?

Lze např. ukázat, že je-li $f(x, y)$ spojitá, je počáteční úloha řešitelná. Je-li $\partial f(x, y)/\partial y$ ohraničená, je řešení v nějakém okolí počáteční podmínky určeno jednoznačně.

Zpravidla lze všechna (nebo alespoň téměř všechna) řešení $y(x)$ rovnice (1.1) vyjádřit pomocí jediného univerzálního vzorce, který obsahuje konstantu C, tj. $y = y(x, C)$ (případně v implicitním tvaru $\Psi(y, x, C) = 0$). Toto řešení se nazývá *obecné řešení* a každé (nebo alespoň skoro každé) řešení počáteční úlohy lze obdržet vhodnou volbou konstanty C. Obecně, u nelineárních rovnic, nelze obdržet jeden univerzální vzorec pro obecné řešení. Z toho důvodu užíváme pojem obecného řešení zpravidla pouze v lineární teorii.

Pojem tzv. *partikulárního řešení* se v literatuře používá zpravidla ve dvou (odlišných) významech. Máme-li zadánu počáteční úlohu, rozumí se partikulárním řešením řešením této úlohy. Není-li počáteční podmínka zadána a hovoříme-li o partikulárním řešení dané rovnice, máme na mysli jedno libovolné řešení této rovnice.

Terminologie týkající se tzv. *singulárního řešení* je v literatuře ještě nejednoznačnější a v tomto kurzu nebudeme tento pojem zavádět.

V následující kapitole se budeme zabývat pouze čtyřmi speciálními případy rovnice (1.1), totiž diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými, homogenní diferenciální rovnicí, lineární diferenciální rovnicí a exaktní diferenciální rovnicí.

Nyní popíšeme jistý geometrický význam diferenciální rovnice. Uvažujme rovnici (1.1). Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici (1.1) chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k *integrální křivce* (tj. ke grafu řešení), která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů (x, y) v rovině kratičké úseky o směrnici $f(x, y)$, obdržíme *směrové pole diferenciální rovnice* – systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám. Často lze ze směrového pole odhadnout tvar integrálních křivek. Protože se však jedná pouze o odhad tvaru integrálních čar, používáme tuto metodu jen v případě, kdy nám stačí pouze hrubá informace o jednotlivých řešeních, nebo v případě kdy selhávají ostatní dostupné metody. Počáteční podmínka (tj. druhá rovnost v (1.2)) geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem (x_0, y_0). Má-li každá počáteční úloha jediné řešení, znamená to, že se integrální křivky nikde neprotínají. Poznamenejme, že na tomto geometrickém významu jsou založeny některé základní numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic prvního řádu.

Teorie diferenciálních rovnic 2. řádu je ještě komplikovanější. Ve třetí kapitole se zmíníme pouze o základních vlastnostech (týkajících se tvaru obecného řešení) lineární diferenciální rovnice 2. řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1.3}$$

a následně se naučíme hledat řešení rovnice (1.3) ve speciálním případě, kdy p, q jsou konstantní funkce.

Kapitola 2

Diferenciální rovnice prvního řádu speciálních tvarů

2.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{2.1}$$

kde f, g jsou spojité funkce.

Rovnici (2.1) řešíme následujícím způsobem:

1. Má-li „algebraická" rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \ldots, k_n$, jsou konstantní funkce $y = k_1, \ldots, y = k_n$ řešeními rovnice (2.1). V dalších krocích najdeme ostatní (nekonstantní) řešení.
2. Dále pracujeme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Píšeme-li (formálně) y' jako podíl diferenciálů dy/dx, potom (2.1) má tvar

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{2.2}$$

3. S derivací dy/dx nyní pracujeme jako s podílem dvou výrazů. Rovnici (2.2) převedeme na tvar, který na každé straně obsahuje pouze jednu proměnnou, tj

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

4. Získanou rovnost integrujeme (podle příslušných proměnných), tj.
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx. \tag{2.3}$$
Odtud dostáváme (obecné) řešení $G(y) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, kde G je primitivní funkce k $1/g$ a F je primitivní funkce k f.
5. Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme ji do obecného řešení a určíme C (toto je případně možné provést až zcela nakonec po obdržení explicitního tvaru).
6. Pokud je to možné, převedeme řešení do explicitního tvaru (tj. vyjádříme y).
7. Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty, zahrneme toto řešení do obecného.

Nakonec poznamenejme, že výše uvedená metoda je v podstatě založená na integrací substitucí. Skutečně, integrací obou stran rovnice
$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$
(podle proměnné x) dostáváme
$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx.$$
Provedeme-li nyní v integrálu na levé straně substituci $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$, dostáváme rovnici
$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(x)\,dx,$$
což je (po vhodném přeznačení) tatáž rovnice jako (2.3).

2.2 Homogenní diferenciální rovnice

Homogenní diferenciální rovnice je rovnice tvaru
$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right), \tag{2.4}$$

kde f je spojitá funkce.

Rovnici (2.4) lze vhodnou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Skutečně, zavedeme-li novou funkci u vztahem

$$u(x) = \frac{y(x)}{x},$$

platí $y(x) = u(x)x$ a $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Po dosazení do (2.4) dostáváme $xu' + u = f(u)$, což je ekvivalentní rovnici

$$u' = (f(u) - u)\frac{1}{x},$$

a to je již rovnice se separovanými proměnnými. Rovnici vyřešíme vzhledem k u. Řešení y původní rovnice pak obdržíme ze substitučního vztahu.

2.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť a, b jsou spojité funkce. Rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{2.5}$$

se nazývá *obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu*. Je-li navíc $b(x) \equiv 0$, nazývá se (2.5) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní* (pozor: nezaměňovat s homogenní rovnicí z předchozí podkapitoly).

Máme-li dánu rovnici (2.5), pak rovnice, která vznikne z (2.5) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2.6}$$

se nazývá *homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici* (2.5).

Jestliže a, b jsou spojité na intervalu I, pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (2.5), $y(x_0) = A$, $A \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, na celém I.

Homogenní rovnice (2.6) má vždy konstantní řešení $y = 0$, tzv. *triviální řešení*.

Struktura množiny všech řešení rovnice je v jistém smyslu (díky linearitě) velmi jednoduchá. Tzv. *princip superpozice* říká, že je-li y_i, $i = 1, 2$, řešením rovnice $y' + a(x)y = b_i(x)$, $i = 1, 2$, je potom funkce $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ pro libovolné $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ řešením rovnice $y' + a(x)y = C_1b_1(x) + C_2b_2(x)$. Důsledkem tohoto principu je následující tvrzení o tvaru obecného řešení rovnice (2.5): Uvažujme rovnici (2.5) a k ní příslušnou homogenní rovnici (2.6). Je-li y_p libovolné partikulární řešení rovnice (2.5) a $y_0(x, C)$ obecné řešení rovnice (2.6), je funkce

$$y(x, C) = y_p(x) + y_0(x, C)$$

obecným řešením rovnice (2.5). Navíc, je-li y_{p0} libovolné nenulové partikulární řešení rovnice (2.6), pak obecné řešení $y_0(x, C)$ rovnice (2.6) má tvar

$$y_0(x, C) = C y_{p0}(x).$$

Díky tomuto tvrzení stačí nalézt obecné řešení rovnice homogenní a pouze jedno řešení rovnice nehomogenní.

Nedříve si ukážeme, jak řešit homogenní rovnici (2.6). Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Z rovnice (2.6) dostáváme

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

a pro $y \neq 0$ platí

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

tedy

$$\ln|y| = -\int a(x)\, dx + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

neboli

$$|y| = e^K e^{-\int a(x)\, dx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Volbou $C = \pm e^K$ (můžeme takto odstranit absolutní hodnotu) pak máme

$$y = Ce^{-\int a(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Protože volbou $C = 0$ dostáváme triviální řešení $y \equiv 0$, povolíme $C = 0$ a obecné řešení rovnice (2.6) je tvaru

$$y_0(x, C) = Ce^{-\int a(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

a každé partikulární řešení rovnice (2.6) dostaneme vhodnou volbou konstanty C. Ještě připomeňme, že je-li y_{p0} libovolné nenulové partikulární řešení rovnice (2.6), pak obecné řešení $y_0(x, C)$ rovnice (2.6) má tvar $y_0(x, C) = C y_{p0}(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (2.5) najdeme pomocí tzv. *variace konstant*, kde využíváme znalosti řešení rovnice (2.6). Řešení y_p hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)y_{p0}(x)$, kde y_{p0} je nějaké pevné libovolné netriviální řešení příslušné rovnice (2.6) a $C(x)$ je zatím neznámá spojitě diferencovatelná funkce, kterou nyní nalezneme. Počítáme derivaci

$$y_p'(x) = C'(x)y_{p0}(x) + C(x)y_{p0}'(x).$$

Dosazením do (2.5) dostaneme

$$\begin{aligned} b(x) &= C'(x)y_{p0}(x) + C(x)y_{p0}'(x) + a(x)C(x)y_{p0}(x) \\ &= C'(x)y_{p0}(x) + C(x)[y_{p0}'(x) + a(x)y_{p0}(x)] \\ &= C'(x)y_{p0}(x), \end{aligned}$$

neboť y_{p0} je řešením rovnice (2.6). Odsud

$$C'(x) = \frac{b(x)}{y_{p0}(x)}.$$

Proto

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{y_{p0}(x)}\,dx = \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}dx$$

(integrační konstantu zde lze volit nulovou; přemýšlejte, proč), tedy

$$y_p(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}dx.$$

Dostáváme tak vzorec pro obecné řešení rovnice (2.5)

$$\begin{aligned} y(x, C) &= y_p(x) + Cy_{p0}(x) \\ &= e^{-\int a(x)\,dx} \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}dx + Ce^{-\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Nesnažte se zapamatovat si výsledný vzorec. Raději se soustřeďte na pochopení celého postupu.)

Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme tuto podmínku do obecného řešení a tím získáme hodnotu konstanty C.

Dále ještě poznamenejme, že existuje alternativní postup, jak vyřešit rovnici (2.5): Rovnici (2.5) nejdříve vynásobíme tzv. *integračním faktorem*

$e^{\int a(x)\,dx}$ a po jistých jednoduchých úpravách rychle dospějeme k obecnému řešení.

Na závěr této podkapitoly zmíníme pár rozdílů mezi lineárním a nelineárním případem, např.: (i) Věta o existenci a jednoznačnosti pro lineární rovnice je v jistém smyslu globální, zatímco obdobná věta pro obecnější (nelineární rovnice) zaručuje existenci/jednoznačnost pouze na malém, blíže neurčeném intervalu. (ii) Jak již bylo řečeno výše, univerzální vzorec pro všechna řešení (tedy obecné řešení) v obecném (nelineárním) případě neexistuje, zatímco v lineárním případě jej máme. Proto používáme pojem obecného řešení zpravidla pouze v lineární teorii. (iii) V obecném (nelineárním) případě obdržíme řešení v implicitním tvaru a v naprosté většině případů nejsme schopni z něj obdržet explicitní vyjádření. V lineárním případě máme vždy explicitně vyjádřené řešení (dokonce i v obecném tvaru).

2.4 Exaktní diferenciální rovnice – již neprobíráme

Nechť $P(x,y), Q(x,y)$ jsou funkce mající spojité parciální derivace. Řekneme, že diferenciální rovnice

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{2.7}$$

je exaktní, jestliže výraz

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{2.8}$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.

Připomeňme, že výraz

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

se nazývá *diferenciál* funkce $F(x,y)$. Funkce $F(x,y)$ se nazývá *kmenová funkce* tohoto diferenciálu.

Tedy (2.7) je exaktní, právě když existuje $F(x,y)$ s vlastnostmi

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \tag{2.9}$$

Proto, je-li F kmenová funkce diferenciálu (2.8), má rovnice (2.7) řešení implicitně určené rovnicí $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Dále připomeňme, že (2.8) je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Rovnici (2.7) řešíme následujícím způsobem. Přepíšeme ji do tvaru

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

a pomocí (2.10) ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici. Nyní nalezneme kmenovou funkci diferenciálu. Integrací první rovnosti v (2.9) vzhledem k x dostaneme

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y). \tag{2.11}$$

Vztah (2.11) zderivujeme podle y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + C'(y).$$

Užitím tohoto vztahu a druhé rovnosti v (2.9) máme

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

(zde nutně musí vyjít rovnice neobsahující proměnnou x). Integrací poslední rovnosti vzhledem k y získáme funkci $C(y)$, kterou dosadíme do (2.11) a máme nalezenu kmenovou funkci $F(x, y)$, a tím i implicitně zadané řešení $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, rovnice (2.7). Je-li možné převést řešení do explicitního tvaru (vyjádřit y jako funkci proměnné x, nebo x jako funkci proměnné y), provedeme to. Je-li zadána počáteční podmínka, dosadíme tuto podmínku do obecného řešení a tím získáme hodnotu konstanty C.

Poznamenejme, že lze postupovat i modifikovaným způsobem, kdy nejprve integrujeme druhou rovnost v (2.9) a pak provádíme další zřejmé modifikace výše popsaných kroků. Oba postupy vedou k řešení, ale nemusí být stejně obtížné.

Kapitola 3

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

3.1 Základní pojmy

Nechť p, q, f jsou spojité funkce na intervalu I. Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.1}$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu*. Je-li navíc $f(x) \equiv 0$, nazývá se (3.1) *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Počáteční úloha pro rovnici (3.1) je úloha, kde hledáme řešení rovnice (3.1) splňující *počáteční podmínky* $y(x_0) = A \in \mathbb{R}$, $y'(x_0) = B \in \mathbb{R}$. Jestliže p, q, f jsou spojité na intervalu I, $x_0 \in I$, pak existuje právě jedno řešení počátečního problému na celém I.

Homogenní (3.1) má vždy konstantní řešení $y = 0$, tzv. *triviální řešení*.

Všechna řešení rovnice (3.1) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Takovýto předpis se nazývá *obecné řešení rovnice* (3.1).

Máme-li dánu rovnici (3.1), pak rovnice, která vznikne z (3.1) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.2}$$

se nazývá *homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici* (3.1).

Podobně jako v případě lineární diferenciální rovnice i zde platí tzv. princip superpozice, jehož důsledkem jsou důležitá tvrzení o struktuře množiny řešení rovnic (3.1), resp. (3.2).

Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (3.2) na intervalu I (tzn., že jedna není násobkem druhé), je funkce y_0 definovaná vztahem

$$y_0(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

obecným řešením rovnice (3.2) na intervalu I. Dvojici funkcí y_1, y_2 nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice* (3.2). Je-li navíc y_p libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.1), je funkce definovaná vztahem

$$y(x, C_1, C_2) = y_0(x, C_1, C_2) + y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

obecným řešením nehomogenní rovnice (3.1).

K nalezení všech řešení rovnice (3.1) tedy stačí najít dvě lineárně nezávislá partikulární řešení příslušné homogenní rovnice a libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Poznamenejme, že na rozdíl od lineární rovnice 1. řádu dokážeme nalézt fundamentální systém řešení rovnice (3.2) pouze v jistých speciálních případech. Jednomu z těchto případů se budeme věnovat v následující podkapitole.

3.2 Homogenní lineární DR s konstantními koeficienty

Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.3}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$.

Ukážeme, že všechna řešení rovnice (3.3) umíme najít bez použití integrace jen použitím algebraických operací, a že je můžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Dosaďme do levé strany rovnice (3.3) $y = e^{\lambda x}$ (v podstatě hledáme řešení právě v tomto tvaru). Po úpravě dostáváme

$$y'' + py' + qy = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}.$$

Poněvadž výraz $e^{\lambda x}$ je vždy nenulový, bude y řešením rovnice (3.3), jestliže λ bude řešením tzv. *charakteristické rovnice* (pro rovnici (3.3))

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3.4}$$

Fudamentální systém rovnice (3.3) obdržíme následujícím způsobem. Uvažujme rovnici (3.3) a její charakteristickou rovnici (3.3).

- Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny rovnice (3.4), definujme $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
- Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem rovnice (3.4), definujme $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.
- Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny rovnice (3.4), definujme $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ a $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Potom funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.3). Obecné řešení y_0 rovnice (3.3) je tedy

$$y_0(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3 Nehomogenní lineární DR s konstantními koeficienty

Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{3.5}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že f je spojitá funkce.

Z předchozích úvah víme, že obecné řešení rovnice (3.5) je tvaru

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x), \tag{3.6}$$

kde $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém řešení rovnice (3.3), $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ a y_p je libovolné partikulární řešení rovnice (3.5). V přechozí podkapitole jsme se naučili nalézt fudamentální systém $\{y_1, y_2\}$. Zbývá nalézt nějaké řešení y_p. To provedeme metodou *variace konstant* (poznamenejme, že ve skutečnosti lze tento přístup použít i pro rovnici s nekonstantními koeficienty; tam však obecně nemáme metodu, která umožňuje nalézt příslušný fundamentální systém). Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x), \tag{3.7}$$

kde A, B jsou spojitě diferencovatelné funkce. Podobným postupem jako v případě rovnic prvního řádu (který je ovšem technicky komplikovanější, ale hlavní myšlenka zůstává stejná) dostáváme následující tvrzení: Nechť $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém rovnice (3.3). Nechť funkce $A(x), B(x)$ splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) &= 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Potom funkce $y_p(x)$ definovaná vzorcem (3.7) je partikulárním řešením nehomogenní rovnice (3.5). Obecné řešení rovnice (3.5) je tedy tvaru (3.6). Jsou-li navíc zadány počáteční podmínky, dosadíme je do obecného řešení (resp. do jeho derivace) a získáme tak hodnoty konstant C_1, C_2.

Poznamenejme, že díky lineární nezávislosti systému $\{y_1, y_2\}$ je soustava (3.8) vždy jednoznačně řešitelná.

Všimněte si, že zahrneme-li integrační konstanty C_1, C_2 již do funkcí $A(x), B(x)$, získáváme z (3.7) nikoliv pouze partikulární, ale již přímo obecné řešení rovnice (3.5).

Jinou metodou pro výpočet partikulárního řešení je tzv. *metoda neurčitých koeficientů*. V mnoha případech je efektivnější, není však aplikovatelná na libovolnou nehomogenitu f. Metoda spočívá v tom, že je-li pravá strana rovnice v jistém speciálním tvaru, můžeme „kvalifikovaně odhadnout“ tvar partikulárního řešení, který již pouze „doladíme“ tak, aby se jednalo o skutečné řešení. V našem kurzu se však detailně zabýváme pouze metodou variace konstant.

Konečně poznamenejme, že výše popsané metody pro řešení rovnice (3.5) lze velmi přirozeně zobecnit na lineární diferenciální rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty.

3.4 Lineární diferenciální systémy 1. řádu

Skalární diferenciální rovnice vyšších řádů velmi přirozeným způsobem souvisejí se systémy diferenciálních rovnic 1. řádu, kde počet rovnic odpovídá řádu skalární rovnice.

Pro jednoduchost uvažujme systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (takovýto systém se může objevit např. jako jednoduchý model samočištění soustavy dvou jezer). Za (přirozeného) předpokladu $b \neq$

0 lze z první rovnice systému (3.9) vyjádřit y. Toto y a jeho derivaci pak dosadíme do druhé rovnice systému (3.9). Odtud již snadno obdržíme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$x'' = (a + d)x' + (bc - da)x,$$

kterou umíme řešit. Pomocí obdrženého řešení x pak dopočítáme y a dvojice funkcí x, y je řešením původního systému (3.9).