Pár informací o diferenciálním počtu funkcí více proměnných

(doplňkový text k předmětu Matematická analýza 2)

Pavel Řehák

(verze 7. ledna 2013)

Několik slov na úvod

Tento text tvoří doplněk k části předmětu Matematická analýza 2 (partie týkající se diferenciálního počtu více proměnných). Nevyčerpává absolutně vše, co se na přednáškách probírá. Spíše se snaží stručně a přehledně zachytit nejdůležitější pojmy a fakta, případně jsou zde detailněji popsány některé vybrané pasáže, což nám pak při přednáškách „ušetří čas“. V kombinaci s poznámkami z přednášek (kde zejména podrobněji komentujeme probíranou látku, doplňujeme ji, uvádíme ilustrativní příklady a diskutujeme) a s poznámkami z příslušného cvičení by tento text měl tvořit postačující zdroj k přípravě na zkoušku. Je samozřejmě vítána i samostatná iniciativa studentů, kdy sami čerpají i z jiných zdrojů (přičemž požadavky na rozsah znalostí jsou zřejmé z obsahu textu a přednášek).

Existuje řada dalších zajímavých a důležitých témat, která se v rámci diferenciálního počtu funkcí více proměnných běžně probírají, avšak vy je zde nenajdete. Vzhledem k celkovému zaměření studia a s ohledem na časovou dotaci, může náš kurs totiž podat pouze velmi stručné přiblížení této disciplíny.

Budu vděčný každému, kdo mne upozorní na nepřesnosti či chyby v textu Některé nepřesnosti — jde vlastně spíš o zjednodušení — jsou ovšem „záměrné“, vzhledem k výše zmíněnému „informativnímu“ charakteru celého kurzu. Náš často intuitivní přístup snad i napomáhá snadnějšímu porozumění látky.

Brno, 7. ledna 2013, Pavel Řehák

Obsah

Kapitola 1

Funkce a graf

1.1 Pojem funkce více proměnných

Reálná funkce více reálných proměnných je speciálním případem zobrazení. Přestože na různých místech v tomto textu budeme zmiňovat obecný případ, tj. funkci n proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ či $n \geq 1$, většinu detailních úvah budeme provádět pro funkce dvou proměnných. Důvodem je, že v případě funkcí dvou proměnných si umíme řadu skutečností velmi názorně představit. Navíc toto omezení nepředstavuje až tak vážnou újmu na obecnosti. Skutečně, je zde totiž v mnoha zásadních aspektech daleko větší kvalitativní skok z teorie funkcí jedné proměnné do teorie funkcí dvou proměnných, než pak do dalších dimenzí, kde pak situace zůstává již do jisté míry analogická. Na rozdíly (ale i podobnosti) v paralelních teoriích budeme v textu upozorňovat.

Definice 1.1. Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných.*

Množina A je v tomto případě definičním oborem funkce f. Pokud máme funkci zadánu např. pouze předpisem (tj. není zadána množina A), pak se definičním oborem rozumí množina všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má předpis smysl. Dále v textu budeme z důvodu stručnosti někdy používat pro funkce n proměnných zápis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i když to nemusí nutně znamenat, že f je definována na celé množině $\mathbb{R}^n$.

Zvládněte nalezení definičního oboru funkce dvou proměnných a jejího případného zobrazení v rovině.

1.2 Graf funkce více proměnných

Definice 1.2. *Grafem funkce* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, máme na mysli množinu

$$Gr(f) = \big\{[x_1, \dots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1} : [x_1, \dots, x_n] \in A, y = f(x_1, \dots, x_n)\big\}.$$

Je žádoucí zvládnout nákres grafu (jednoduchých) funkcí dvou proměnných. K získání celkem názorné představy nám často pomohou následující nástroje:

- Řez rovinou $y = 0$ (tj. „bokorys“) a řez rovinou $x = 0$ (tj. „nárys“) a případně $\boxed{\text{řezy rovinami}}$ s nimi rovnoběžnými.
- $\boxed{\text{Vrstevnice funkce}}$ f na úrovni $c \in \mathbb{R}$, tj.

  $$f_c = \{[x, y] \in A : f(x, y) = c\}.$$

  Vlastně nejde o nic jiného než o řez rovinou $z = 0$ (tj. „půdorys“) a řezy rovinami s ní rovnoběžnými.

Pochopitelně nelze dát obecný (a nejlepší) návod, jak se rychle dobrat alespoň k hrubé představě o grafu. Každá situace je specifická, a proto je důležité využívat i specifických vlastností funkcí v konkrétních případech; zejména je užitečné (a to nejen zde) řešit jisté postačující množství typově různých úloh.

Kapitola 2

Limita a spojitost

2.1 Přípravné úvahy

Pojem limity už známe z teorie funkcí jedné reálné proměnné i z teorie posloupností. Základní myšlenka limity zůstává tatáž, i když vstoupíme do vyšší dimenze. Skutečně, není obtížné vydedukovat, že vlastní limita (tj. $L \in \mathbb{R}$) funkce dvou proměnných ve vlastním bodě (tj. $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) může být popsána nějak takto: Funkce f má limitu L v bodě $[x_0, y_0]$, píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

právě když lze zaručit, aby funkční hodnoty $f(x,y)$ byly libovolně blízko hodnotě L pro všechny body $[x,y]$ dostatečně blízké bodu $[x_0, y_0]$, přičemž jsou od tohoto bodu různé.

Tuto poněkud neformální definici později zpřesníme a zobecníme, a to tak, že bude zahrnovat případy s libovolnou dimenzí (pro proměnnou) a také případy, kdy limita či bod, k němuž se blížíme, je vlastní či nevlastní. K tomu je nezbytné aspoň trochu vstřebat pojmy $\boxed{\text{okolí}}$ a $\boxed{\text{vzdálenost}}$. Ve skutečnosti se lze při zavádění limity dokonce obejít i bez vzdálenosti; to už bychom však vstoupili na půdu zobrazení mezi topologickými prostory, což je pro naše účely zbytečné a navíc to značně překračuje rámec textu.

Uvažujme dva body $x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$. Potom jejich „běžně chápanou“ (tj. euklidovskou) vzdáleností ϱ_2 máme na mysli

$$\varrho_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2};$$

odvoďte si tento vzorec (je to snadné, užijte Pythagorovu větu). Jelikož standardní součástí učiva na PdF MU bohužel není teorie *metrických prostorů*, zmiňme pouze stručně, že tzv. *metrika* se zavádí axiomaticky a lze ji chápat jako zobecnění pojmu vzdálenost. V definici limity pak není nutno pracovat právě jen s euklidovskou metrikou (vzdáleností), ale s jakoukoliv jinou metrikou (vzdáleností), která je ekvivalentní v tom smyslu, že na ní nezávisí existence či neexistence limity. Pro určitost zde uveďme alespoň dvě další z takových metrik, totiž tzv. metriku maximální, kdy vzdálenost bodů je $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ je

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

a tzv. metrikou součtovou, vzdálenost bodů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je

$$\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots |x_n - y_n|.$$

S takovým chápáním vzdálenosti se běžně setkáváme, aniž si to uvědomujeme. Např. při překonávání vzdálenosti v zastavěné oblasti jistě častěji překonáváme vzdálenost spíš ve smyslu součtové metriky než té euklidovské (totiž pohybujeme se podél ulic a obcházíme domy). I v čistě teoretických úvahách, jako jsou např. ty naše, může být snazší použít jinou vhodnou metriku než euklidovskou, zde např. maximální. To však díky ekvivalenci metrik na hlavní myšlenku limity nemá žádný vliv. Ekvivalencí zde máme na mysli existenci $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$c_1 \varrho_i(x, y) \le \varrho_j(x, y) \le c_2 \varrho_i(x, y),$$

$i, j \in \{1, 2, \infty\}$, pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$. Promyslete si, jak vypadají jednotkové kružnice (při $n = 2$) v těchto metrikách.

Nyní si osvěžme pojem okolí.

Definice 2.1. *Okolím* (přesněji, je-li nutno specifikovat, δ okolím) $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}_\delta(a)$ vlastního bodu $a = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ máme na mysli

$$\mathcal{O}_\delta(a) = \{x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \varrho(x, a) < \delta\}.$$

Ryzím okolím $\mathcal{P}(a)$ bodu a rozumíme množinu $\mathcal{P}(a) = \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$.

Výraz $\varrho(x, a)$ chápejme jako vzdálenost bodů x, a ve smyslu libovolné ze tří metrik uvedených výše. *Nevlastním bodem* $a = [a_1, \dots, a_n]$ máme na mysli bod, kde alespoň jedna ze souřadnic má hodnotu ∞ nebo $-\infty$. Při rozšiřování pojmu okolí pro tyto body pak používáme následující myšlenku:

Definice 2.2. *Okolím nevlastního bodu* $[a_1, \dots, a_n] \in (\mathbb{R}^*)^n$ rozumíme množinu tvořenou kartézským součinem okolí $\mathcal{O}(\tilde{a})$ s intervaly typu (A, ∞) pro případ komponenty s hodnotou ∞ a typu $(-\infty, B)$, kde $\tilde{a}$ je třeba chápat jako „část“ a s vlastními komponentami.

Např.

$$\mathcal{O}([-\infty, \infty]) = (-\infty, c_1) \times (c_2, \infty),$$

pro nějaká $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, nebo

$$\mathcal{O}([a_1, \infty, a_3]) = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_3 - a_3)^2} < \delta, x_2 > A\}$$

pro nějaké $\delta > 0$, $A \in \mathbb{R}$, kde $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$. Experimentujte s okolími jiných (ne)vlastních bodů a to i ve smyslu jiných výše míněných metrik.

2.2 Definice limity, vlastnosti limity

Nyní již lze přesně vyslovit poměrně obecnou definici limity. Dobře si všimněte, že její základní myšlenka je v podstatě stejná jako v těch nejjednodušších případech, které známe z předchozího semestru.

Definice 2.3. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé $\mathcal{O}(L)$ existuje $\mathcal{P}(a)$ tak, že pro každý bod $x \in \mathcal{P}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Tato definice je univerzální; zahrnuje funkce jedné i více proměnných, vlastní i nevlastní limity, limity ve vlastních i nevlastních bodech. Specifikací okolí pro různé konkrétní případy (např. $n = 2$, $a \in \mathbb{R}^2$, $L \in \mathbb{R}$, nebo $n = 2$, $a = [\infty, a_2]$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$, nebo $n = 3$, $a = [a_1, \infty, a_3]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $L = \infty$) si tyto limity nadefinujte poněkud názorněji. Pokuste se též počítat (dokazovat) limity některých jednoduchých funkcí přímo z definice.

Uvědomte si $\boxed{\text{podstatné rozdíly}}$ mezi limitou funkce jedné proměnné a funkce více (tj. alespoň dvou) proměnných.

- Pro určitost uvažujme limitu ve vlastním bodě. U funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se ke zkoumanému bodu blížíme po přímkách, a to pouze ze dvou stran. U funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, máme nekonečně mnoho možností, jak se blížit (po přímkách, po parabolách, po libovolných křivkách, ...). Existence limity v podstatě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme.

- Dalším podstatným rozdílem je, že neexistuje analogie L'Hospitalova pravidla.

Tyto skutečnosti značně komplikují výpočet; používají se všemožné upravy funkce, různé přístupy a množství triků. Pokusme se zmíněnou nezávislost limity na cestě vysvětlit ještě podrobněji. Uvažujme množinu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\text{každé okolí } \mathcal{O}(a) \text{ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny } S, \tag{2.1}$$

kde $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Např. libovolná spojitá křivka procházející bodem a má jistě tuto vlastnost, ale také ji má např. množina $\{[a_1+1/N, a_2, \ldots, a_n] : N \in \mathbb{N}\}$

atd. Definujme nyní limitu funkce f v bodě a ve smyslu přibližování se v rámci množiny S, tj. $\lim_{x\to a,\, x\in S} f(x) = L$, přesně jako limitu v předchozí definici, kde pouze místo $x \in \mathcal{P}(a) \cap D(f)$ píšeme $x \in \mathcal{P}(a) \cap D(f) \cap S$. Potom zřejmě platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a,\, x\in S} f(x) = L \tag{2.2}$$

pro všechny množiny S splňující vlastnost (2.1) To znamená, že najdeme-li S takovou, že limita na pravé (2.2) existuje, případně najdeme-li dvě množiny S_1, S_2 tak, že $\lim_{x\to a,\, x\in S_1} f(x) = L_1 \neq \text{Ł}_2 = \lim_{x\to a,\, x\in S_2} f(x)$, pak nemůže existovat ani limita na levé straně (2.2).

Je však nutno poznamenat, že limity funkcí více proměnných mají řadu analogických vlastností, které $\boxed{\text{známe}}$ z teorie funkcí jedné proměnné. Pokud není řečeno jinak, máme v následujích tvrzeních na mysli vlastní či nevlastní limitu ve vlastním či nevlastním bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$. Vzhledem k tomu, že naše obecná definice v jistém smyslu kopíruje jednodimenzionální případ, jsou i důkazy následujících tvrzení obdobné jako v případě funkce jedné proměnné. Doporučujeme, abyste si důkazy provedli jako cvičení.

- Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.
- Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém $\mathcal{P}(a)$, potom $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
- Jestliže $h(x) \le f(x) \le g(x)$ v nějakém $\mathcal{P}(a)$ a platí $\lim_{x\to a} h(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
- Předpokládejme, že $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Potom pro každá $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to a}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 L_1 + c_2 L_2$, $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = L_1 L_2$, $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = L_1/L_2$, kde v případě poslední rovnosti je potřeba navíc předpokládat $L_2 \neq 0$.
- Jestliže existuje $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{P}(a)$, v němž je f ohraničená.

2.3 Spojitost a vlastnosti spojitých funkcí

Definice 2.4. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{x\to a} f(x) = L$ a platí $L = f(a)$.

Poněvadž spojitost funkce více proměnných definujeme — stejně jako u funkce jedné proměnné — pomocí limity, platí i analogie některých známých základních vlastností spojitosti:

- Jsou-li f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak jsou zde spojité i funkce $f + g, fg, f/g$, kde v posledním případě navíc předpokládáme $g(a) \neq 0$.

- Jestliže g_i jsou spojité v $a \in \mathbb{R}^n$, $u_i = g_i(a)$, $i = 1, \ldots, m$, a f je spojitá v $[u_1, \ldots, u_m]$, potom je v bodě a spojitá i složená funkce $F(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Následují $\boxed{\text{analogie vět Bolzanových a Weierstrassových}}$ o funkcích spojitých na intervalu. K tomu potřebujeme pojem spojitosti f na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, který zavádíme následujícím způsobem: pro každý bod $a \in M$ platí

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = f(a).$$

Všimněte si, že se v limitním vztahu vyskytuje $x \in M$; tuto limitu chápeme ve smyslu modifikované definice uvedené za podmínkou (2.1). Příslušná tvrzení pro funkce dvou proměnných pak lze formulovat třeba takto:

- (Weierstrassova věta) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na uzavřené ohraničené množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak f nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty. Důsledkem tohoto tvrzení je ohraničenost f na M.

- (Bolzanova věta) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť pro $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu k ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = k$. Důsledkem tohoto tvrzení je, že za dodatečného předpokladu $f(A)f(B) < 0$ existuje $C \in M$ s vlastností $f(C) = 0$.

Připomeňme, že otevřená množina $M \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *souvislá*, jestliže pro každé dva body $X, Y \in M$ existuje konečná posloupnost bodů $X_1, \ldots, X_N \in M$, $X = X_1$, $X_N = Y$, taková, že všechny úsečky $\overline{X_i X_{i+1}}$ jsou podmožinami M. Osvěžte si též pojem otevřených a uzavřených množin v $\mathbb{R}^2$.

Kapitola 3

Parciální derivace

3.1 Definice parciální derivace, základní vlastnosti

Již v případě limity funkce více proměnných jsme viděli, že situace je v jistém smyslu mnohem složitější než u funkce jedné proměnné. Můžeme se totiž k uvažovanému bodu blížit nekonečně mnoha způsoby. Proto je logické — v případě derivací — nejprve studovat situaci, kdy se k uvažovanému bodu blížíme ve směru souřadných os. Na jednu z proměnných se díváme jako na skutečnou proměnnou, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Tento přístup vede k pojmu parciální derivace, který se v podstatě nijak neliší od nám již známé klasické derivace funkce jedné proměnné.

Definice 3.1. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém $\mathcal{O}([x_0, y_0])$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

nazýváme ji *parciální derivací* podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$. Označujeme ji $f_x(x_0, y_0)$, příp. $f'_x(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, příp. — máme-li $z = f(x, y)$ — lze použít třeba $z_x(x_0, y_0)$, či $z'_x(x_0, y_0)$.

Poznámka 3.1. (i) Parciální derivace je skutečně „obyčejná“ derivace. Označíme-li totiž $\varphi(x) = f(x, y_0)$, pak $f_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$.

(ii) Analogicky definujeme parciální derivaci podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$; označujeme ji $f_y(x_0, y_0)$, případně dalšími zřejmými způsoby.

(iii) Analogicky také definujeme parciální derivace funkcí n proměnných. Kromě proměnné podle které derivujeme, vše ostatní zafixujeme. Promyslete si detaily.

(iv) Výše jsme zmínili, že při studiu derivace funkcí více proměnných je logické začít tím nejjednodušším případem, tj. parciálními derivacemi. Ty jsme získali zúžením definičního oboru na přímku jdoucí uvažovaným bodem a rovnoběžnou se souřadnicovou osou. Zobecněním parciálních derivací jsou tzv. *směrové derivace*, které získáme zúžením definičního oboru funkce na přímku jdoucí uvažovaným bodem a mající směr daného vektoru. Vzhledem k rozsahu a zaměření kurzu se však tímto jinak užitečným pojmem nebudeme zabývat.

Vzhledem k tvrzení v části (i) předchozí poznámky je zřejmé, že platí obvyklá pravidla pro derivování. Předpokládejme, že funkce f, g dvou proměnných mají parciální derivaci podle x na otevřené množině M. Potom jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci a platí

$$
\begin{aligned}
&(f(x,y)+g(x,y))_x = f_x(x,y)+g_x(x,y),\\
&(cf(x,y))_x = cf_x(x,y), \quad c\in\mathbb{R},\\
&(f(x,y)g(x,y))_x = f_x(x,y)g(x,y)+f(x,y)g_x(x,y),\\
&\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right)_x = \frac{f_x(x,y)g(x,y)-f(x,y)g_x(x,y)}{g^2(x,y)}, \quad \text{při předpokladu } g(x,y)\neq 0.
\end{aligned}
$$

Pochopitelně postrádá smysl derivování inverzní funkce. Parciální derivace složených zobrazení jsou již trochu komplikovanější a jelikož je v našem základním kurzu neupotřebíme, nebudeme je zde ani podrobněji zmiňovat.

Geometrický význam parciálních derivací: Uvažujme funkci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, která je spojitá. Hodnoty parciálních derivací v bodě $[x_0, y_0]$ odpovídají směrnicím tečen vedených ke křivkám, které získáme jako průsečíky plochy dané grafem funkce f s rovinami $y = y_0$ a $x = x_0$.

Lze snadno najít příklady — na rozdíl od jednodimenzionálního případu — ukazující, že existence parciálních derivací funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ v bodě $\boxed{\text{nemusí}}$ implikovat spojitost . To je vcelku pochopitelné, neboť parciální derivace dávají informaci pouze o chování ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, přičemž v jiných směrech se funkce může chovat velmi divoce.

3.2 Parciální derivace vyšších řádů

Pro jednoduchost opět uvažujme funkce dvou proměnných.

Definice 3.2. Nechť $[x_0, y_0]\in D(f_x)$. Jestliže existuje parciální derivace funkce $f_x(x,y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, případně ještě jinak, v souladu se značením parciální derivace 1. řádu.

Poznámka 3.2. Analogicky definujeme f_{yy} a také tzv. smíšené parciální derivace 2. řádu f_{xy} (lze též značit např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) a f_{yx}. Parciální derivace N-tého řádu ($N \geq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací řádu $N - 1$.

Pokud zkusíme počítat všechny možné parciální derivace (zafixovaného) N-tého řádu u dostatečně rozumné funkce, zjistíme, že výsledky jsou si vždy rovny. Jinými slovy, záleží pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle x a kolikrát podle y, nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo. To není náhoda, nýbrž důsledek (odvozený indukcí) z následující, tzv. Schwarzovy (někdy též Clairautovy) věty:

Jestliže f má spojité parciální derivace $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yx}(x_0, y_0)$, pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Bez předpokladu spojitosti smíšených derivací tato rovnost obecně neplatí.

3.3 Tečná rovina

Vzhledem k rozsahu a zaměření kurzu se zde nebudeme zabývat ani dalším velmi užitečným pojmem, tzv. totálním diferenciálem. Pouze stručně zmiňme, že (totální) diferenciál může být chápán jako přírůstek na tečné nadrovině vedené ke grafu funkce; lze zde vidět analogii s diferenciálem funkce jedné proměnné, což je přírůstek na tečně vedené ke grafu funkce. S pojmem diferenciálu velmi úzce souvisí pojem tečné roviny. Přestože oba pojmy od sebe v jistém smyslu nelze oddělit, pokusme se zde aspoň hrubě nastínit pár informací o tečné rovině (bez dalšího zmiňování pojmu diferenciál).

Uvažujme rovinu v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z = Ax + By + C$, funkci $z = f(x, y)$ se spojitými parciálními derivacemi a bod $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Má-li tato rovina procházet bodem T, musí tento bod vyhovovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, odkud

$$z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0). \tag{3.1}$$

Chceme-li, aby tato rovnice skutečně reprezentovala tečnou rovinu v T, pak její průsečík s rovinou $y = y_0$ musí být tečnou ke křivce vzniklé jako průsečík roviny $y = y_0$ a grafu f. Položme tedy v (3.1) $y = y_0$ a dostaneme $z = f(x_0, y_0) + A(x-$

x_0). Má-li tato rovnice reprezentovat tečnu, pak — jak již víme z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné — musí být $A = f_x(x_0, y_0)$. Podobně dostaneme $B = f_y(x_0, y_0)$. Rovnice tečné roviny má tedy tvar

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

Poynamenejme, že tato rovina je nejlepší lineární aproximací funkce $f(x, y)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Dalšími standardními pojmy z diferenciálního počtu funkce více proměnných, které zde však z časových (a snad i jiných) důvodů neprobíráme, jsou např. kmenová funkce (což lze chápat jako úlohu opačnou k hledání totálního diferenciálu) a Taylorova věta (tj. teorie o aproximaci funkce více proměnných polynomem více proměnných).

Kapitola 4

Extrémy

Hledání extrémů zaujímá v diferenciálním počtu význačné místo. O užitečnosti teorie extrémálních úloh v aplikacích není třeba diskutovat.

Nejprve budeme studovat tzv. lokální extrémy (tj. na blíže neurčeném okolí bodu) a poté tzv. globální extrémy (tj. na celé, předem zadané množině). Podobně jako v případě funkcí jedné proměnné i zde budou hrát důležitou roli derivace. Pro jednoduchost opět uvažujeme funkce dvou proměnných.

4.1 Lokální extrémy

Definice 4.1. Řekneme, že funkce f dvou proměnných nabývá v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ *lokálního maxima [lokálního minima]*, jestliže existuje $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ takové, že pro každé $[x, y] \in \mathcal{O}([x_0, y_0])$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) \geq f(x_0, y_0)]$.

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o ostrých lokálních maximech a minimech. Pro [ostrá] lokální minima a maxima používáme společný termín *[ostré] lokální extrémy.*

Kreslete si různé situace a zkoumejte, ve kterých případech mohou lokální extrémy nastat. Brzy zjistíte, že to jsou body, v nichž platí jedna z následujících podmínek:

- obě parciální derivace jsou nulové,
- obě parciální derivace neexistují,
- jedna z parciálních derivací neexistuje a druhá je nulová.

První případ nás přivádí k následující definici.

Definice 4.2. Řekneme, že $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je *stacionárním bodem funkce* f, jestliže v něm existují obě parciální derivace a platí

$$f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0).$$

Vzhledem k našemu sledování je poměrně zřejmé, že musí platit následující nutná podmínka existence lokálního extrému:

Jestliže f má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ lokální extrém a existují $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$, pak je tento bod stacionárním bodem.

Existence stacionárního bodu, stejně jako existence jiného bodu výše zmíněného typu, nezaručuje, že v něm nutně musí nastat lokální extrém. Najděte si vhodné protipříklady. Body uvedených třech typů jsou pouze „podezřelé z existence extrému“. Poněvadž v žádném jiném bodě extrém nastat nemůže, je vhodné si jako první krok nalézt právě tyto body, které následně zkoumáme pomocí dalších nástrojů. Jedním z nich je následující postačující podmínka, v níž opět vystupuje pojem stacionárního bodu.

Nechť f má v nějakém $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ spojité parciální derivace 2. řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Jestliže

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

pak má f v $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li navíc $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o maximum. Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Výraz pro $D(x_0, y_0)$ si lze snadno zapamatovat, pokud si uvědomíme, že vlastně platí

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Poněvadž jsme úspěšně opomenuli teorii Taylorových polynomů pro funkce více proměnných, je poněkud obtížné popsat přesněji důkaz uvedené postačující podmínky. Hlavní myšlenka je ovšem podobná jako u funkcí jedné proměnné. Používá se Taylorův vzorec s polynomem 1. stupně a zkoumá se rozdíl mezi funkční hodnotou ve stacionárním bodě a funkčními hodnotami v jeho okolí. Derivace 1. řádu jsou nulové a derivace 2. řádu tedy hrají rozhodující roli.

V případě, že nastane rovnost $D(x_0, y_0) = 0$, pak o existenci extrému v tomto bodě nelze pomocí druhých derivací rozhodnout. Pro funkce jedné proměnné máme k dispozici jednoduché nástroje v řeči derivací vyšších řádu, které mohou v těchto případech pomoci. U funkcí více proměnných však není aparát vyšších derivací v praktických případech příliš vhodný. V některých případech lze o existenci lokálního extrému rozhodnout vyšetřením lokálního chování funkce v $\mathcal{O}([x_0, y_0])$, bez počítání druhých derivací. Nelze však dát obecný návod; je jistě vhodné si všímat specifických vlastností funkcí a vhodně je využívat. Toto platí i v případě, kdy vyšetřujeme jiné typy bodů podezřelých z extrému než ty stacionární.

4.2 Globální extrémy

Definice 4.3. Nechť $M \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0] \in M$ *globálního maxima [globálního minima]*, jestliže pro každé $[x, y] \in M$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) \geq f(x_0, y_0)]$.

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o ostrých globálních maximech a minimech. Pro [ostrá] globální minima a maxima používáme společný termín *[ostré] globální extrémy*. Místo termínu globální extrém se často používá pojem *absolutní* extrém.

Všimněte si podobnosti s definicí lokálních extrémů. Ovšem rozdíl je ten, že nyní porovnáváme funkční hodnoty na celé, předem dané množině M a nikoliv na nějakém (libovolně malém) blíže neurčeném okolí.

Kombinací dříve uvedené Weierstrassovy věty a triviální úvahy dostáváme tvrzení, které lze chápat jako analogii faktu, že spojitá funkce jedné proměnné nabývá na ohraničeném a uzavřeném intervalu své nejmenší a největší hodnoty buď v bodě lokálního extrému ležícím uvnitř intervalu nebo v jeho krajním bodě.

Jestliže $M \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená a ohraničená a f je spojitá funkce na M, pak f nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálních extrémů ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Právě uvedená věta nám dává praktický návod, jak hledat globální extrémy „rozumných“ funkcí na „rozumných“ množinách. Tím máme na mysli zejména diferencovatelné funkce na množinách, jejichž hranice je po částech tvořena rozumnými funkcemi (jedné proměnné); s takovými se v praktických situacích (a při našem zaměření) setkáváme nejčastěji. Postupujeme takto:

(i) Najdeme stacionární body uvnitř množiny M. Totiž za uvedených předpokladů není možné, aby lokální extrémy uvnitř množiny byly jinde než ve stacionárních bodech.

(ii) Vyšetříme funkci na hranici množiny a najdeme zde extrémy. Díky tomu, že nyní pracujeme s funkcemi dvou proměnných, je situace poměrně jednoduchá; pro funkce více než dvou proměnných jde už o poměrně složitý problém. Pro lepší popis problému předpokládejme např., že $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Vyšetřujeme-li nyní funkci f na části hranice množiny M tvořené grafem funkce $\varphi_1(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, pak vlastně hledáme globální extrém funkce jedné proměnné $F_1(x) = f(x, \varphi_1(x))$ na intervalu $x \in \langle a, b\rangle$; to však již umíme z předchozího kurzu. Pochopitelně se může stát, že k popisu hranice potřebujeme více než dvě funkce na intervalu, případně též funkce proměnné y. V takových případech však postupujeme naprosto obdobně.

(iii) Porovnáním funkčních hodnot v bodech získaných v předchozích dvou krocích určíme globální maximum a globální minimum. Všimněte si, že zde není třeba používat aparát druhých derivací či nějaký další nástroj ke zjišťování lokálních extrémů, neboť ty správné hledané body z množiny všech podezřelých bodů získáme prostým porovnáním.

Kromě hledání extrémů u přímo takto zadaných problémů byste měli být schopni řešit i poněkud praktičtější úlohy, kde je (reálný) problém zadán „slovně“ a teprve vhodnou „matematizací“ jej převedete v extrémální úlohu (touto úlohou zde máme na mysli hledání extrémů, často globálních, funkce dvou proměnných):

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{(reálný) problém}} \\ \big\downarrow \text{matematizace} \\ \boxed{\text{extrémální úloha}} \end{array}$$

Toto převedení může být často obtížnější než pak samotné nalezení extrémů. Pochopitelně nelze pro tyto problémy dát obecný návod. Je potřeba propočítat a řádně pochopit jisté množství typově různých příkladů.

Existuje ještě řada zajímavých a důležitých témat, která se v rámci diferenciálního počtu funkcí více proměnných běžně probírají. Kromě již zmíněných směrových derivací, parciálních derivací složených funkcí, totálního diferenciálu, kmenové funkce, Taylorovy věty a jejich četných aplikací, je to ještě např. pojem gradientu, teorie funkcí zadaných implicitně, vázané extrémy (metoda Lagrangeových multiplikátorů) atd. Jak však již bylo řečeno v úvodu, náš kurs má za cíl podat pouze velmi stručné přiblížení této disciplíny. Vzhledem k celkovému zaměření studia a s ohledem na časovou dotaci se hlouběji nyní pouštět nebudeme. Snad někdy příště ...

Literatura

[1] Z. Došlá, O. Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, PřF MU Brno 1994.

[2] L.E. Garner, Calculus and Analytic Geometry, Dellen Publ. Comp., 1988.

[3] J. Stewart, Calculus, Concepts and Contexts, Brooks/Cole Pub Co., 2000