Pár informací o nekonečných řadách

(doplňkový text k předmětu Matematická analýza 3)

Pavel Řehák

(verze 29. ledna 2013)

Několik slov na úvod

Tento text tvoří doplněk k části předmětu Matematická analýza 3 (partie týkající se nekonečných řad). Nevyčerpává absolutně vše, co se na přednáškách probírá. Spíše se snaží stručně a přehledně zachytit nejdůležitější pojmy a fakta, případně jsou zde detailněji popsány některé vybrané pasáže, což nám pak při přednáškách „šetří čas." V kombinaci s poznámkami z přednášek (kde zejména podrobněji komentujeme probíranou látku, doplňujeme ji, uvádíme ilustrativní příklady a diskutujeme) a s poznámkami z příslušného cvičení by tento text měl tvořit postačující zdroj k přípravě na zkoušku. Je samozřejmě vítána i samostatná iniciativa studentů, kdy sami čerpají i z jiných zdrojů (přičemž požadavky na rozsah znalostí jsou zřejmé z obsahu textu a přednášek).

Existuje řada dalších zajímavých a důležitých témat, která se v rámci teorie nekonečných řad běžně probírají, avšak vy je zde nenajdete. Vzhledem k celkovému zaměření studia a s ohledem na časovou dotaci, může náš kurs totiž podat pouze velmi stručné přiblížení této disciplíny.

Budu vděčný každému, kdo mne upozorní na nepřesnosti či chyby v textu Některé nepřesnosti — jde vlastně spíš o zjednodušení — jsou ovšem „záměrné", vzhledem k výše zmíněnému „informativnímu" charakteru celého kurzu. Náš často intuitivní přístup snad i napomáhá snadnějšímu porozumění látky.

Brno, 29. ledna 2013, Pavel Řehák

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Posloupnost, řada, konvergence

Nejdříve připomeňme, že $\boxed{\text{posloupnost}}$ reálných čísel $\{a_n\}$ je $\boxed{\text{zobrazení}}$

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Jiné označení pro posloupnost je např. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, nebo (a_n). Nekonečnou řadu definujeme následovně.

Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$. Potom výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou* (nebo jen stručně *řadou*) a označujeme jej

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(\text{případně } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ nebo } \sum a_n\right)$$

Zajímáme se o součty a vlastnosti řad. Abychom mohli dát právě definovaným výrazům dobrý smysl, zavádíme tzv. $\boxed{\textit{posloupnost částečných součtů}}$ $\{s_n\}$, která se definuje jako:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots.$$

U posloupností částečných součtů pak rozlišujeme jejich limitní chování:

- Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{\textit{konverguje.}}$

- Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{\textit{diverguje,}}$ přičemž zde rozlišujeme tři případy:
  - Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, pak říkáme, že řada *určitě diverguje k* ∞.
  - Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, pak říkáme, že řada *určitě diverguje k* $-\infty$.
  - Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že řada *osciluje*.

Vyjádříme-li a_n jako $a_n = s_n - s_{n-1}$ a provedeme-li limitní přechod, pak okamžitě dostáváme tzv. *nutnou podmínku konvergence*:

> Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Odtud obdržíme jednoduché kritérium pro divergenci: Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, nebo $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Bezprostředně z definice plyne i následující tvrzení.

> Nechť $m \in \mathbb{N}$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Proto lze tvrdit, že na konvergenci resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu členů. Zároveň máme motivaci pro definici: Pokud nějaký předpoklad nemusí být splněn pro konečný počet členů, říkáme, že platí pro $\boxed{\textit{skoro všechna}}$ n. To však není nic jiného, než že platí od jistého indexu počínaje.

1.2 Některé triky používané při součtech řad

Obecně je problém nalezení součtu (konvergentní) řady velmi obtížný až v podstatě nemožný; neexistuje žádný univerzální návod. Existují však situace, které jsme schopni uspokojivě a někdy i překvapivě snadno řesit. My si zde uvedeme alespoň některé z nich.

- Rozpoznáme-li, že řada má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a \neq 0, q \neq 0$, pak se jedná o $\boxed{\text{geometrickou řadu,}}$ která konverguje v případě, kdy pro kvocient platí $|q| < 1$, a má součet
$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$
  Odvoďte si tuto skutečnost. Napovězme, že stačí uvažovat dva pomocné částečné součty $\tilde{s}_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ a $q\tilde{s}_n = q + q^2 \cdots + q^n$, které od sebe odečtete. Rovněž diskutujte, jaké typy divergence mohou nastat v závislosti na hodnotě kvocientu.

- Případ, kdy n-tý člen řady je $\boxed{\text{vhodným algebraickým součtem}}$ výrazů na n závislých, nebo se dá na takový součet upravit. Touto „vhodností" máme na mysli situaci, kdy se v n-tém částečném součtu „většina" sčítanců zruší díky opačným znaménkům a posunutému indexu a zbyde pouze zafixovaný počet sčítanců (tj. mající stejný počet členů pro libovolný částečný součet). Typickou takovou řadou je např. $\sum\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$, její součet je $1-\sqrt{2}$. Někdy tato vlastnost není na první pohled patrná a je potřeba úpravy (často, ale ne vždy, najde využití rozklad v parciální zlomky), např. $\sum \frac{1}{n(n+2)}$. Odvoďte si s detaily součty obou uvedených řad.

- Řady typu
$$\sum a_n b_n,$$
kde $\{a_n\}$ je $\boxed{\text{aritmetická posloupnost}}$ a $\{b_n\}$ je $\boxed{\text{geometrická posloupnost}}$ s kvocientem $|q|<1$. Využíváme toho, že pro n-tý částečný součet $\{s_n\}$ platí
$$\begin{aligned}(1-q)s_n =& s_n - qs_n\\ =& \text{„fixní počet členů závislých na } n\text{"} +\\ &+ \text{„}n\text{-tý částečný součet geometrické řady."}\end{aligned}$$
Např. řadu $\sum \frac{2n-1}{2^n}$ lze takto pohodlně sečíst. Pokuste se o to; mělo by vyjít $s=3$.

- Některé řady lze vidět jako $\boxed{\text{lineární kombinaci}}$ jednodušších řad. Jak uvidíme později, konvergentní řady se skutečně chovají lineárně. Sečtěte např. řadu $\sum \frac{6n-3+4\cdot 3^{-n}}{2^n}$. Nápověda: řadu lze napsat jako lineární kombinaci jisté geometrické řady a řady, kterou jsme uvedli v předchozím odstavci. Pro součet platí $s=9+\frac{4}{5}$.

1.3 Operace s číselnými řadami

Následující vlastnosti lze poměrně jednoduše dokázat s použitím příslušných posloupností částečných součtů a operacemi na jejich limitách.

- $\boxed{\text{Součet.}}$ Jestliže $\sum a_n, \sum b_n$ jsou konvergentní řady a $\sum a_n = A, \sum b_n = B$, potom $\sum(a_n+b_n)$ je konvergentní a platí
$$\sum(a_n+b_n)=A+B.$$
Najděte příklad ukazující, že tvrzení o konvergenci nelze obrátit.

- $\boxed{\text{Analogie distributivního zákona.}}$ Jestliže $\sum a_n$ konverguje, pak pro libovolné $C\in\mathbb{R}$ konverguje též $\sum Ca_n$ a platí
$$\sum Ca_n = C\sum a_n.$$
Tvrzení o konvergenci lze pro $C\neq 0$ obrátit.

- $\boxed{\text{Linearita.}}$ Dvě předchozí vlastnosti lze chápat jako aditivitu resp. homogenitu. S použitím indukce lze pak provést rozšíření, kde uvažujeme libovolnou lineární kombinaci.

- $\boxed{\text{Analogie asociativního zákona.}}$ Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ označme $b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- $\boxed{\text{Analogie komutativního zákona.}}$ Na tomto místě by mohl čtenář očekávat nějaké tvrzení o přerovnávání členů řady. Poněvadž však analogie komutativního zákona pro konvergentní řady obecně neplatí a k jeho platnosti je potřeba silnější vlastnosti, totiž tzv. absolutní konvergence, zformulujeme příslušné tvrzení později.

Kapitola 2

Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

V této kapitole uvažujeme řady typu $\sum a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž posloupnost částečných součtů je neklesající, je $\sum a_n$ konvergentní nebo určitě divergentní k ∞. Promyslete si, proč by stačilo předpokládat nezápornost pro skoro všechny členy řady (tj. pro velká n). Z důvodu formální jednoduchosti ji však předpokládáme pro všechny členy. Je též zřejmé, že uvedená kritéria lze snadno modifikovat, nahradíme-li předpoklad nezápornosti předpokladem nekladnosti.

2.1 Srovnávací kritérium

Manipulací s příslušnými posloupnostmi částečných součtů lze snadno dokázat následující intuitivní kritérium.

Předpokládejme, že $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum a_n \text{ konveguje;}$$
$$\sum a_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum b_n \text{ diveguje.}$$

Poznámka . (i) Typickými řadami vhodnými pro srovnávací účely jsou např. geometrická řada $\sum aq^{n-1}$ nebo řada $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. S použitím níže diskutovaného aparátu (Odstavec 2.6) určete, pro které hodnoty parametru α řada diverguje resp. konverguje. Tyto řady lze v případě nutnosti modifikovat např. ve smyslu $\sum \frac{1}{(n+C)^\alpha}$, kde C je nějaká konstanta. Všimněte si, že zachování konvergence či divergence — přidáme-li konstantu C — je snadným důsledkem využití neměnnosti konvergence resp. divergence těchto řad při změně konečně mnoha členů a případné aplikaci srovnávacího kritéria.

(ii) Pochopitelně nemůže existovat řada, která by sloužila jako univerzální majoranta (tj. řada s většími nebo rovnými členy) či minoranta (tj. řada s menšími nebo rovnými členy) pro každou řadu.

2.2 Limitní srovnávací kritérium

Následující kritérium srovnává členy řad v limitě. V důkazu se používá předchozího srovnávacího kritéria. Pro členy řady, které se ocitají ve jmenovateli, požadujeme kladnost.

Nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}$. Potom

$$L < \infty, \sum b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum a_n \text{ konveguje;}$$
$$L > 0, \sum b_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje.}$$

2.3 Odmocninové kritérium — Cauchyovo

Následující kritérium má dvě verze, nelimitní a limitní. Důkaz je založen na srovnání zkoumané řady s jistou konvergující geometrickou řadou, resp. na vyšetření nutné podmínky konvergence.

(i) Nelimitní verze:

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \text{ pro skoro všechna } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje;}$$
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \text{ pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje.}$$

(ii) Limitní verze: Nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}$. Potom

$$q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje;}$$
$$q > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje.}$$

Poznámka. Nastane-li $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

2.4 Podílové kritérium — d'Alembertovo

Následující kritérium je do velké míry podobné předchozímu. Má také dvě verze, nelimitní a limitní. Důkaz je opět založen na srovnání zkoumané řady s jistou konvergující geometrickou řadou, resp. na vyšetření nutné podmínky konvergence. Zde předpokládáme, že členy a_n jsou kladné.

(i) Nelimitní verze:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ pro skoro všechna } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje;}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \text{ pro skoro všechna } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje.}$$

(ii) Limitní verze: Nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}$. Potom

$$q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje;}$$
$$q > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje.}$$

Poznámka. Nastane-li $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

2.5 Srovnání účinnosti odmocninového a podílového kritéria

Lze dokázat, že

odmocninové kritérium je účinnější než podílové kritérium.

To plyne z toho, že:

- platí následující nerovnosti

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n};\end{aligned}$$

- existuje řada splňující postačující podmínku pro konvergenci z odmocninového kritéria, avšak nikoliv z podílového kritéria.

Zejména platí, že můžeme-li o konvergenci (či divergenci) rozhodnout podílovým kritériem, pak můžeme rozhodnout i odmocninovým kritériem.

Existuje celá řada dalších (a jemnějších) kritérií. Žádné z nich však není univerzální v tom smyslu, že bychom podle něj mohli rozhodnout o konvergenci (divergenci) libovolné řady.

2.6 Integrální kritérium

Vzhledem k definicím Riemannova integrálu a nevlastního integrálu na neomezeném intervalu není překvapující, že existuje úzká souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály.

Uvažujme funkci f definovanou na $\langle 1, \infty)$, která je zde nezáporná a nerostoucí. Dále nechť $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ (případně pro skoro všechna n). Potom

$$\sum a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nakreslete si obrázek ilustrující situaci např. při volbě $a_n = \frac{1}{n}$.

Kapitola 3

(Ne)absolutně konvergentní řady

Nyní se vrátíme k řadám, kde členy mohou nabývat libovolných reálných (kladných i záporných) hodnot. Začneme důležitým speciálním případem, kdy členy střídají znaménka.

3.1 Alternující řady

Řada $\sum a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vyloučíme-li řadu s nulovými členy, lze každou alternující řadu psát ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Již víme, že platí nutná podmínka konvergence. Následující tzv. *Leibnizovo kritérium* tvrdí, že za jistých podmínek je pro alternující řady i podmínkou postačující.

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nebudeme provádět detilní důkaz tohoto kritéria. Je však užitečné popsat si základní myšlenku. Pokuste se i o její grafické znázornění. Nejdříve na číselnou osu naneseme $s_1 = a_1$. Hodnotu s_2 dostaneme odečtením a_2, je tedy nalevo od s_1. K nalezení s_3 nyní potřebujeme přičíst a_3, které je menší než a_2, a je tedy s_3 mezi s_1 a s_2. Pokračujeme-li tímto způsobem, vidíme, že posloupnost částečných součtů osciluje zpět a dopředu. Poněvadž a_n jde monotonně k nule, každý následující krok je menší a menší. Částečné součty se sudým indexem jsou rostoucí a částečné součty s lichým indexem jsou klesající. Nyní již není těžké uvěřit, že oba konvergují k číslu s, které je součtem alternující řady.

3.2 Absolutní konvergence

S použitím předchozího kritéria není obtížné najít konvergentní alternující řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ s $a_n > 0$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje; najděte ji. Tato skutečnost nás může motivovat k definici následujících pojmů.

Řekneme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\sum |a_n|$. Jestliže $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje neabsolutně*.

Poznámka . (i) Konvergence řady $\sum |a_n|$ $\boxed{\text{implikuje}}$ konvergenci řady $\sum a_n$. Skutečně, stačí si uvědomit, že platí $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Jestliže $\sum |a_n|$ konverguje, pak i $\sum 2|a_n|$ konverguje a podle srovnávacího kritéria konverguje i $\sum(a_n + |a_n|)$. Potom

$$\sum a_n = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

je rozdíl dvou konvergentních řad a proto je konvergentní. $\boxed{\text{Opak}}$ (tj., že konvergence řady $\sum a_n$ implikuje konvergenci řady $\sum |a_n|$) však obecně $\boxed{\text{neplatí}}$; najděte vhodný protipříklad.

(ii) Při určování absolutní konvergence lze použít kritéria z předchozí kapitoly, neboť $\sum |a_n|$ má nezáporné členy. Existují i kritéria konvergence pro řady s libovolnými členy. Ty však probírat nebudeme.

3.3 Přerovnávání řad

Jak jsme již dříve naznačili, pro platnost analogie komutativního zákona nestačí pouhá konvergence. Tou správnou vlastností je až absolutní konvergence. Nejdříve si však vysvětlíme, co máme na mysli tzv. *přerovnáním* řady $\sum a_n$. Je to řada

$$\sum a_{k_n}, \text{ kde } \{k_n\} \text{ je permutace množiny } \mathbb{N}.$$

Platí následující tvrzení.

Jestliže $\sum a_n$ konverguje absolutně, pak absolutně konverguje i řada přerovnaná $\sum a_{k_n}$ a platí $\sum a_{k_n} = \sum a_n$.

Velmi zajímavě se při přerovnávání chovají neabsolutně konvegrentní řady. Tzv. *Riemannova věta* (jejíž důkaz je již trochu pracnější) nám říká, že tyto řady jsou vzhledem k přerovnávání značně „labilní.“

Nechť $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní a $s \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom existují taková přerovnání $\sum a_{k_n}$, $\sum a_{p_n}$, $\sum a_{q_n}$ řady $\sum a_n$, že

- $\sum a_{k_n} = s$;
- $\sum a_{p_n}$ určitě diverguje;
- $\sum a_{q_n}$ osciluje.

Kapitola 4

Numerické aspekty součtu řad

Jak jsme se již zmínili, přesné určení součtu konvergentní řady může být velmi obtížný problém. Situace se však může zjednodušit, použijeme-li „numerický přístup“, kdy nám stačí nalézt součet alespoň přibližně — ovšem při zachování jisté přesnosti — za pomocí konečného počtu členů, přičemž se snažíme určit velikost chyby. Tato myšlenka je založena na skutečnosti, že součet konvergentní řady $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lze psát ve tvaru

$$\boxed{s = s_n + R_n,}$$

kde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ je n-tý částečný součet řady a $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ je tzv. *zbytek po n-tém členu*. Poněvadž R_n vlastně udává velikost chyby, primárně nám půjde o nalezení odhadů pro velikost zbytku $|R_n|$. To provedeme pro tři speciální typy řad. Aplikace budou zmíněny v kapitole o mocninných řadách, především při přibližném vyjadřování funkčních hodnot a integrálů.

4.1 Odhad součtu alternující řady

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom platí

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

V důkazu hraje důležitou roli (dříve zmíněná) Leibnizova věta a její důkaz.

4.2 Odhad součtu pomocí geometrické řady

Nechť $\sum a_n$ je číselná řada, pro kterou platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}.$$

Důkaz je založen na následujících vztazích

$$|R_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| q^k = |a_n| q \sum_{k=0}^{\infty} q^k = |a_n| \frac{q}{1-q},$$

kde nerovnost $|a_{n+k}| \leq |a_n| q^k$ lze indukcí odvodit z předpokladu.

4.3 Integrální odhad

Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a $a_n = f(n)$, kde f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $[1, \infty)$. Potom

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V důkazu hraje důležitou roli nerovnost $a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Celá situace má též názornou geometrickou interpretaci. Pokuste se ji zobrazit např. pro posloupnost $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Kapitola 5

Funkční posloupnosti a řady

V této kapitole se budeme věnovat objektům, které lze chápat jako jisté zobecnění číselných posloupností a řad. Nyní místo posloupnosti čísel uvažujeme posloupnost reálných funkcí $\{f_n(x)\}$ definovaných na nějaké množině, např. intervalu I. Mluvíme pak o *funkční posloupnosti* nebo *posloupnosti funkcí*. Tedy je to zobrazení, které každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadí funkci $f_n : I \to \mathbb{R}$. Chceme-li popsat intuitivní představu posloupnosti $\{f_n(x)\}$ blížící se k nějaké funkci $f(x)$, nabízí se využití faktu, že při zafixovaném $x_0 \in I$ je $\{f_n(x_0)\}$ číselnou posloupností. V případě, že tato konverguje, její limita bude funkční hodnotou limitní funkce v x_0. Tzv. bodovou konvergenci zavádíme takto:

Funkční posloupnost $\{f_n(x)\}$ *bodově konverguje* k funkci f na intervalu I, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$ (tj. pro každé $x \in I$ konverguje číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$). Píšeme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ na I nebo $f_n \to f$ na I.

Uvažujeme-li $\{f_n(x)\}$ definovanou na intervalu I, potom symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí* (nebo *funkční řadou*). Tímto symbolem máme vlastně na mysli tzv. *posloupnost částečných součtů* $\{s_n(x)\}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Bodovou konvergenci funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na intervalu I (zcela v souladu s očekáváním) definujeme jako bodovou konvergenci posloupnosti částečných součtů na I; funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ pak nazýváme *součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Bodová konvergence posloupnosti funkcí, resp. řady funkcí, pochopitelně závisí na intervalu, na kterém konvergenci vyšetřujeme.

Největší množinu (vzhledem k množinové inkluzi), na níž posloupnost funkcí, resp. řada funkcí, bodově konverguje, nazýváme *oborem konvergence* poslounosti funkcí, resp. řady funkcí.

Bodová konvergence má bohužel ten nedostatek, že obecně $\boxed{\text{nepřenáší}}$ některé důležité vlastnosti funkcí na jejich limitu, resp. součet. Typickým příkladem je posloupnost $\{x^n\}$, která bodově konverguje na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Sami si určete $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$ a všimněte si, že zatímco x^n jsou funkce spojité na $\langle 0,1\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tak limitní funkce $f(x)$ tuto vlastnost nemá. Podobně nelze např. tvrdit, že je možné „beztrestně“ zaměňovat pořadí integrace a limity, příp. derivace a limity, příp. integrace a sumace, příp. derivace a sumace.

Tímto jsme získali dobrou motivaci k zavedení silnějšího typu konvergence, totiž tzv. stejnoměrné konvergence.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Chceme-li provést srovnání bodové a stejnoměrné konvergence, je rozumné nejdříve přeformulovat jejich definice do následujícího tvaru:

◦ Bodová konvergence ($f_n \to f$ na I):

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

◦ Stejnoměrná konvergence ($f_n \rightrightarrows f$ na I):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Všimněte si, jak se „pouze“ změnilo pořadí kvantifikátorů. V prvním případě n_0 závisí na ε a x, kdežto v druhém případě je n_0 závislé pouze na ε. Odtud přímo plyne

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } I \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \text{ na } I.$$

Opačná implikace však neplatí. Pokuste se též o geometrické znázornění bodové resp. stejnoměrné konvergence. Zejména si všimněte, že v případě stejnoměrné konvergence od jistého indexu n_0 všechny další členy posloupnosti leží v „epsilonovém pásu“, tj. mezi grafy funkcí $f + \varepsilon$ a $f - \varepsilon$ na I; tohle nemůže být evidentně splněno např. u posloupnosti $\{x^n\}$ na $\langle 0,1\rangle$.

Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na I definujeme (v souladu s očekáváním) jako stejnoměrnou konvergenci posloupnosti jejich částečných součtů.

5.1 Kritéria stejnoměrné konvergence

Je velmi jednoduché vysledovat následující nutnou a postačující podmínku; jde vlastně o upravený „přepis definice“.

Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na I a

$$a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\}.$$

Potom platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } I \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Následující (tzv. *Weierstrassovo kritérium*) umožňuje poměrně snadnou detekci stejnoměrné konvergence funkční řady za předpokladu, že příslušnou funkční posloupnost lze odhadnout vhodnou číselnou posloupností.

Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na I. Dále nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ taková, že řada $\sum a_n$ konverguje a platí

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Potom $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I.

Existují i další (silnější, avšak komplikovanější) kritéria pro zjišťování stejnoměrné konvergence řad, které si však nebudeme uvádět.

5.2 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

Jak již bylo naznačeno výše, při bodové konvergenci funkční posloupnosti resp. řady se na limitní funkci resp. součet nemusejí přenášet některé důležité vlastnosti. Stejnoměrná konvergence tento nedostatek poněkud napravuje.

Důležité vlastnosti stejnoměrně konvergentních funkčních posloupností jsou shrnuty v následujícím tvrzení.

- Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na I a $f_n(x)$ jsou spojité na I, potom je i $f(x)$ spojitá na I.
- Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a, b\rangle$ a $f_n(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, potom je i $f(x)$ integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

∘ Buď $\{f_n(x)\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu I derivaci. Nechť $\{f_n(x)\}$ konverguje na I a $\{f_n'(x)\}$ stejnoměrně konveguje na I. Pak funkce $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ má na I derivaci a platí

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Nyní zformulujeme analogická tvrzení pro stejnoměrně konvergentní funkční řady.

∘ Jestliže $f_n(x)$ jsou spojité na I, řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I a má součet $s(x)$, potom je i $s(x)$ spojitá na I.

∘ Jestliže $f_n(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na $\langle a, b\rangle$ a má součet $s(x)$, potom je i $s(x)$ integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

∘ Buď $\{f_n(x)\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu I derivaci. Nechť $\sum f_n(x)$ konverguje na I a $\sum f_n'(x)$ stejnoměrně konveguje na I. Pak funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ má na I derivaci a platí

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Kapitola 6

Mocninné řady

Velmi důležitým případem funkční řady je tzv. mocninná řada.

Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* (nebo též *potenční řadou*) se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots .$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že středem mocninné řady je počátek, tedy číslo 0. Na tento případ lze totiž snadno převést jakoukoliv řadu se středem v x_0 pomocí substituce $y = x - x_0$.

Jak uvidíme v následujích úvahách, oborem konvergence mocninné řady mohou být pouze množiny „jednoduchého" tvaru. Začněme s tvrzením, jehož důkaz — v případě existence $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ — využívá odmocninového kritéria k vyšetření absolutní konvergence číselné řady $\sum c_n$, kde $c_n = a_n x^n$. My sice níže máme poněkud slabší předpoklad, ovšem důkaz by byl obdobný.

Uvažujme mocninnou řadu $\sum a_n x^n$. Nechť

$$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

∘ Jestliže $a = 0$, potom řada absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$; říkáme, že řada *vždy konverguje*.

∘ Jestliže $a = \infty$, potom řada diverguje pro všechna $x \neq 0$; říkáme, že řada *vždy diverguje*.

∘ Jestliže $0 < a < \infty$, potom řada absolutně konverguje pro $|x| < 1/a$ a diverguje pro $|x| > 1/a$.

Vzhledem k právě uvedenému tvrzení zavádíme tzv. *poloměr konvergence* r následujícím způsobem:

$$r = \begin{cases} \infty & \text{pro } a = 0, \\ 0 & \text{pro } a = \infty, \\ \frac{1}{a} & \text{pro } a \in (0, \infty). \end{cases}$$

O poloměru konvergence hovoříme zvláště v tom třetím (jaksi smysluplnějším) případě, pro nějž máme několik dalších poznámek. Interval $(-r, r)$ nazýváme *konvergenční interval*. Chování řady v krajních bodech konvergenčního intervalu je třeba vyšetřit zvlášť, protože závisí na tvaru mocninné řady. Jinými slovy, nelze obecně říci, zda v těchto bodech řada konverguje či diverguje. Oborem konvergence mocninné řady (která vždy nekonverguje), je proto konvergenční interval s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada konverguje.

Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, pak má mocninná řada $\sum a_n x^n$ poloměr konvergence

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $r = \infty$, je-li $a = 0$, a $r = 0$, je-li $a = \infty$.

Ze vztahů uvedených v Odstavci 2.5 plyne, že v případě existence limity $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ platí

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

6.1 Vlastnosti mocninných řad

Jak jsme již dříve viděli, klíčovou roli u funkcionálních řad hraje stejnoměrná konvergence. Díky speciálnímu tvaru mocninné řady je situace u mocninných řad poměrně jednoduchá. Předně platí:

Jestliže $r > 0$ je poloměr konvergence řady $\sum a_n x^n$, pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném podintervalu $\langle -R, R\rangle$ intervalu $(-r, r)$.

Důsledkem tohoto faktu jsou následující vlastnosti (všude předpokládáme, že $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$).

- Součet řady je spojitá funkce na intervalu $(-r, r)$.
- Pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.

- Pro libovolný interval $\langle a, b\rangle \subset (-r, r)$ platí

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

- Pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n \mathrm{d}x)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.

6.2 Taylorova řada

Předchozí úvahy lze mimo jiné velmi efektivně využít při řešení úlohy typu:

„Je dána mocninná řada. Určete její součet.“

Nyní se budeme zabývat úlohou opačnou:

„Je dána funkce. Rozviňte ji do mocninné řady.“

Též uvidíme, že tato teorie má četné aplikace.

Nejdříve připomeňme jeden z důležitých výsledků diferenciálního počtu (tzv. Taylorovu větu). Jestliže funkce f má derivace až do řádu $n+1$ v intervalu $I = \langle x, x_0\rangle$ nebo v $I = \langle x_0, x\rangle$, potom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{6.1}$$

kde R_n je tzv. Taylorův zbytek, který lze vyjádřit např. jako

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kde $\xi \in I$, $x \neq \xi \neq x_0$. Je zde použita obvyklá konvence $f^{(0)} = f$ a $0! = 1$.

Výraz v (6.1) nás motivuje k definici tzv. Taylorovy řady.

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, pak hovoříme o *Maclaurinově řadě*.

O Taylorově řadě funkce f platí následující důležitá sledování.

○ Obecně $\boxed{\text{nemusí}}$ platit, že součet Taylorovy řady funkce f je roven této funkci. Jak však dále uvidíme, existují podmínky, za kterých rovnost platí.

○ $\boxed{\text{Nutná a postačující podmínka.}}$ Vzhledem k tomu, že Taylorův polynom lze chápat jako n-tý částečný součet, neboli jako rozdíl $f(x) - R_n(x)$, je následující tvrzení evidentní. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{6.2}$$

na intervalu I obsahujícím bod x_0 právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ Taylorových zbytků platí

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

pro všechna $x \in I$.

○ Dále se dá ukázat, že lze-li funkci f na nějakém intervalu, jehož vnitřním bodem je x_0, rozvést do mocninné řady se středem x_0, pak je takový rozvoj pouze $\boxed{\text{jediný}}$ a je současně Taylorovým rozvojem funkce f.

○ $\boxed{\text{Postačující podmínka.}}$ Předpokládejme, že funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a existuje $k \in (0, \infty)$ tak, že $|f^{(n)}(x)| \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$ (tzv. stejnoměrná ohraničenost posloupnosti $\{f^{(n)}\}$). Potom Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje k f, tj. platí (6.2).

Důkaz je snadný: máme odhad

$$|R_n(x)| \leq \frac{k}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

(tato nerovnost bývá někdy nazývána *Taylorovou nerovností* a může mít značné využití např. při aproximaci funkcí). Řada sestavená z posloupnosti na pravé straně odhadu konverguje (ověřte např. podílovým kritériem). Díky nutné podmínce konvergence číselné řady pak tato posloupnost jde v limitě do nuly a jde tedy do nuly i posloupnost Taylorových zbytků.

Nyní si uveďme, jak vypadají

$\boxed{\text{Maclaurinovy rozvoje některých elementárních funkcí.}}$

Odvození si jako cvičení proveďte sami. Zároveň si uvědomte, že zde vlastně máme alternativní definice známých funkcí, nyní pomocí „polynomů nekonečných stupňů".

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1],\\
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad x \in (-1,1),
\end{aligned}
$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

je *binomický koeficient*. Řada z posledního rozvoje se nazývá *binomická řada*. Jejím speciálním případem (pro $a = n \in \mathbb{N}$) je známá *binomická věta*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

kde se binomické koeficienty redukují na známá kombinační čísla. Při volbě $a = -1$ dostáváme $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ a binomická řada se stává geometrickou řadou.

6.3 Aplikace mocninných řad

Použití teorie mocninných řad je velmi široké, např.: přibližný výpočet funkčních hodnot, přibližný výpočet integrálů, výpočet limit, či řešení diferenciálních rovnic. My zde stručně naznačíme alespoň první dvě z těchto aplikací.

$\boxed{\text{Přibližný výpočet funkčních hodnot.}}$ Např. chtějme spočíst $\ln 2$ s chybou menší než 10^{-5}. Teorie mocninných řad nám umožňuje, abychom k tomu použili pouze konečný počet dat a pouze standardní aritmetické operace, což je z numerického hlediska klíčové. Připomeňme, že mocninnou řadu lze totiž chápat jako „polynom nekonečného stupně." Nejprve použijeme rozvoj funkce $\ln(1+x)$, kde klademe $x = 1$. Potom

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

a podle Odstavce 4.2 je chyba $|R_n| < \frac{1}{n+1}$. Je tedy potřeba sečíst aspoň 100 000 členů této řady, abychom dosáhli požadované přesnosti. Nyní použijeme rozvoj funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$. Uvědomíme-li si, že

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

je snadné odvodit

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$x \in (-1, 1)$. Chceme-li počítat $\ln 2$, pak je třeba zvolit $x = \frac{1}{3}$. Pro odhad chyby použijeme tvrzení z Odstavce 4.3, podle něhož

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q} < 10^{-5}, \quad \text{kde} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1.$$

Hodnota q zde závisí na x a poněvadž platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x^2 \frac{2n+1}{2n+3} \leq x^2 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

pro případ $x = \frac{1}{3}$ tedy vezmeme $q = \frac{1}{9}$. Snadno pak již lze ověřit, že $|R_5| < 10^{-5}$, a proto stačí vzít pro požadovanou přesnost prvních pět členů. Z uvedeného příkladu vidíme, že pro výpočet funkčních hodnot lze použít více přístupů, přičemž některé z nich mohou být podstatně výhodnější. Výhoda druhého přístupu v tomto případě spočívá dále v tom, že jej lze použít také tehdy, když hodnota x přesáhne konvergenční interval, např. $x = 5$. Připomeňme, že $\ln(1+x)$ umíme rozvinout pouze pro $x \in (-1, 1]$. Argument funkce logaritmus v $\ln \frac{1+x}{1-x}$ však může nabývat libovolné (kladné) hodnoty, přičemž x stále splňuje požadované omezení. Promyslete si to a doplňte detaily u všech předchozích úvah v tomto příkladu.

Dále se pokuste o nějaké vhodné přibližné vyjádření čísla π.

Přibližný výpočet integrálů. Již dříve jsme viděli, že výpočet určitých integrálů (což v našem případě v podstatě vždy znamenalo nalezení primitivní funkce k integrandu a dosazení mezí) může být úloha značně netriviální, či v jistém smyslu dokonce nemožná (v případě tzv. vyšších transcendentních funkcí).

Pomocí prvních tří členů příslušného rozvoje chceme přibližně vypočíst např. $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ a odhadnout chybu. Poznamenejme, že $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ je vyšší transcendentní funkce. Postupujeme takto:

- Napíšeme si Maclaurinův rozvoj funkce e^{-x^2}, což lze učinit velmi snadno, přímo z výše uvedeného rozvoje funkce e^x.
- Integrál $\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, kde $x \in \mathbb{R}$, můžeme (díky stejnoměrné konvergenci) psát jako řadu, kde jsme člen po členu integrovali původní rozvoj a dostaneme:

$$\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}.$$

- Určitý integrál pak lze vyjádřit řadou z předchozího bodu, kde klademe $x = 1$.
- Poněvadž se jedná o alternující řadu s klesajícími členy, podle Odstavce 4.2 platí, že velikost chyby při součtu prvních tří členů je menší než absolutní hodnota čtvrtého členu, tj. $|R_3| < \frac{1}{7\cdot 3!}$.
- Přibližná hodnota integrálu

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \doteq 0,77$$

  je určena s chybou menší než $0,03$ (neboť $\frac{1}{7\cdot 3!} < 0,03$).

Doplňte si všechny detaily výpočtu.

Literatura

[1] Z. Došlá, V. Novák, Nekonečné řady, skripta PřF MU Brno 1998.

[2] L.E. Garner, Calculus and Analytic Geometry, Dellen Publ. Comp., 1988.

[3] L. Kosmák, Základy matematickej analýzy, Alfa SNTL 1984.

[4] J. Stewart, Calculus, Concepts and Contexts, Brooks/Cole Pub Co., 2000.

[5] T. Šalát, Nekonečné rady, Academia 1974.