

# Vybrané kapitoly z fyziky kosmického plazmatu

P. Hadrava  
*Astronomický ústav AVČR,  
251 65 Ondřejov*

14. února 2014

# Obsah

<b>1</b>	<b>Základy teorie plazmatu</b>	<b>2</b>
1.1	Kinetický popis plazmatu . . . . .	2
1.1.1	Kinetická rovnice . . . . .	2
1.1.2	Ionizační rovnováha a Debyovské stínění . . . . .	4
1.1.3	Boltzmannova rovnice . . . . .	5
1.1.4	Momentové rovnice a hydrodynamická aproximace . . . . .	8
1.1.5	Magnetohydrodynamika . . . . .	12
1.2	Srážkový člen . . . . .	15
1.2.1	Binární srážky . . . . .	15
1.2.2	Obecný tvar . . . . .	16
1.2.3	Momentový rozvoj . . . . .	17
1.3	Termodynamická rovnováha . . . . .	20
1.3.1	Entropie a H–teorém . . . . .	20
1.3.2	Rovnovážné rozdělení . . . . .	21
1.3.3	Rovnováha chemických reakcí . . . . .	23
	<b>Literatura</b>	<b>24</b>

# Kapitola 1

## Základy teorie plazmatu

Tato kapitola shrnuje látku přednesenou autorem v zimním semestru 2013/2014 v rámci přednášky NTMF020 “Základy teorie plazmatu”. Další část tohoto předmětu tvoří přednášky dr. R. Pánka.

### 1.1 Kinetický popis plazmatu

Plazma je silně ionizovaný plyn. Pro vzájemnou interakci částic plazmatu i chování plazmatu jako celku je proto důležitá elektromagnetická interakce, především působení vnějšího nebo kolektivního magnetického pole, zároveň však i interakce se zářením. Pro velmi řídké plazma lze dynamiku plazmatu do značné míry odvodit z pohybových rovnic nabitých částic ve vnějším poli. Při vyšších hustotách nabývá na důležitosti kolektivní chování částic,<sup>1</sup> k jehož matematickému popisu je třeba užít statistických metod kinetické teorie. Z té lze užítím zjednodušujících předpokladů odvodit i magnetohydrodynamické rovnice, jak ukážeme v této podkapitole.

#### 1.1.1 Kinetická rovnice

Vyšetřujeme nejprve pravděpodobnost obsazení  $f^i$  v systému s konečným počtem stavů  $\{i|_{i=1}^n\}$  (např. excitační stavy elektronu v atomu vodíku). Pro časový vývoj obsazení stavů nekvantového systému<sup>2</sup> platí tzv. kinetická rovnice

$$\frac{d}{dt}f^i = \sum_j (P_{ji}f^j - P_{ij}f^i), \quad (1.1)$$

kde  $P_{ij}$  je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu  $i$  do stavu  $j$  za jednotku času. V důsledku symetrie kvantově mechanického popisu vůči inverzi času platí (pro přechod mezi elementárními kvantovými stavy) princip vratnosti

$$P_{ij} = P_{ji}, \quad (1.2)$$

a v důsledku zachování energie (a tedy homogenity v čase) jsou možné přechody pouze mezi stavy se stejnou energií  $E^i$ ,

$$P_{ij} \sim \delta(E^i - E^j). \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>V užším smyslu slova bývá plazma definováno právě jako kvazineutrální plyn dominovaný kolektivním chováním. V reálném vesmíru ovšem není ostrá hranice mezi plazmatem a dalšími stavy látky a v chování plazmatu často hrají podstatnou roli i další procesy.

<sup>2</sup>V odstavci 1.2.2 se budeme zabývat modifikací tohoto vztahu pro kvantový případ fermionové nebo bosonové povahy systému. To může být důležité např. pro volné stavy elektronů v plazmatu. Pro diskrétní stavy ovšem zpravidla předpokládáme jediný elektron v poli jádra, resp. statistiku excitací vzájemně nezávislých iontů.

To platí pro izolovanou soustavu. Pokud je soustava v interakci s vnější soustavou ('tepelným rezervoárem'; např. s kinetickými stupni volnosti okolních vodíkových atomů, nebo s polem záření) popsanou obsazovacími čísly  $F^k$  ve svých stavech, musíme vyjít z rovnic (1.1) pro sjednocení obou podsoustav

$$\frac{d}{dt}(f^i F^k) = \sum_{jl} (P_{jl,ik} f^j F^l - P_{ik,jl} f^i F^k). \quad (1.4)$$

Pouze pro toto sjednocení nyní platí vratnost i zachování energie ( $P_{ik,jl} = P_{jl,ik} \sim \delta(E^i + E^k - E^j - E^l)$ ). Jestliže rezervoár můžeme považovat za stacionární,  $\frac{d}{dt} F^k = 0$ , pak vystředováním rov. (1.4) přes rozdělení  $F^k$  dostaneme formálně opět rov. (1.1), kde ovšem pravděpodobnosti přechodu sledované podsoustavy

$$P_{ji} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{jl,ik} F^l}{\sum_m F^m}, \quad P_{ij} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{ik,jl} F^k}{\sum_m F^m}, \quad (1.5)$$

samostatně nesplňují ani (1.2) ani (1.3). Pokud naše sledovaná soustava interaguje současně s více vnějšími soustavami (např. opět excitační stupně volnosti se zářením i srážkově s nalétávajícími částicemi), můžeme celkové pravděpodobnosti přechodu zapsat jako součet příspěvků od jednotlivých procesů ( $P_{ij} = P_{ij}^{\text{rad}} + P_{ij}^{\text{col}}$ ).

Rovnice (1.1) můžeme integrovat v čase, přičemž vycházíme ze zvolených počátečních podmínek. Výsledkem integrace je exponenciální relaxace do stavu, v němž mají všechny stavy (mezi nimiž může docházet k přechodům a mají tedy stejnou energii ev. další zachovávané se veličiny) stejné obsazení. Např. pro dvou-stavový systém má kinetická rovnice (1.1) tvar

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

a její časové řešení

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ f_1 + f_2 \end{pmatrix}_{t=0} + \frac{1}{2} \exp(-2Pt) \begin{pmatrix} f_1 - f_2 \\ f_2 - f_1 \end{pmatrix}_{t=0}. \quad (1.7)$$

**Cvičení 1** Napište a vyřešte kinetickou rovnici pro troj-stavový systém, ve kterém pravděpodobnosti přechodů  $P_{23} = 0 < P_{13} = \varepsilon P_{12}$ . Diskutejte případ  $\varepsilon \ll 1$ .

Můžeme tedy hledat stacionární řešení kinetické rovnice,  $\frac{d}{dt} f^i = 0$ , ke kterému by měly stavy asymptoticky konvergovat. V tom případě se kinetická rovnice redukuje na soustavu lineárních algebraických rovnic statistické rovnováhy

$$0 = \sum_j (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i). \quad (1.8)$$

Tato soustava je homogenní a protože vzhledem ke svému fyzikálnímu smyslu má mít netriviální řešení, musí být singulární (což vyplývá i z rov. (1.2)). Proto k ní musíme doplnit normovací podmínku, např.

$$\sum_i f^i = 1. \quad (1.9)$$

Jak si ukážeme v odstavci 1.3, v termodynamické rovnováze je obsazení jednotlivých stavů dáno jistými funkcemi jejich energie, parametrizovanými teplotou. Rovnovážnému rozdělení se stejnou teplotou musí odpovídat všechny vzájemně interagující stupně volnosti všech částic. Jestliže některý z nich má odlišné rozdělení, může způsobit odchylky od rovnováhy i ostatních stupňů

volnosti. Pokud pravděpodobnosti přechodů mezi různými stavy jistého podsystemu jsou mnohem větší než jeho interakce s ostatními (např. nerovnovážnými) podsystemy, může se ustavit jeho vnitřní rozdělení velmi blízké rovnovážnému s takovou teplotou, při které je splněna jeho energetická rovnováha s ostatními podsystemy. Takový předpoklad může podstatně snížit počet neznámých v soustavě kinetických rovnic a tím zjednodušit její řešení. Pro stavy, jejichž interakci s nerovnovážnými podsystemy nelze zanedbat, je třeba vyjádřit všechny pravděpodobnosti přechodů (tzv. ‘rate(s)’) a řešit pro ně kinetické rovnice.

Příkladem mohou být hvězdné atmosféry, kde srážky mezi kinetickými stupni volnosti zpravidla dosti dobře zabezpečují ustavení termodynamické rovnováhy s kinetickou teplotou, která je ovšem závislá na hloubce v atmosféře (tzv. lokální termodynamická rovnováha, LTE). Naproti tomu záření je spektrálně i směrově odlišné od Planckova rovnovážného záření černého tělesa, protože z hlubších vrstev s vyšší teplotou přichází teplejší a z vnějších vrstev chladnější záření a tyto odchylky jsou větší ve frekvencích, ve kterých má atmosférický materiál menší opacitu a tedy větší střední volnou dráhu fotonů. Excitační stupně volnosti interagují srážkově s kinetickými stupni volnosti, čímž se jejich rozdělení přibližuje LTE, ale současně zářivé přechody (zejména v nejsilnějších čarách) mohou tuto rovnováhu narušovat a způsobovat NLTE (‘non-LTE’) rozdělení především základní a nejnižších excitovaných hladin vzhledem ke kontinuu a jeho kinetické teplotě. Protože prostřednictvím přeskoků do těchto nerovnovážných hladin se také vyměňuje energie mezi kinetickými stupni volnosti a zářením, může výsledek řešení NLTE podstatně ovlivnit i prostorovou závislost teploty těch stupňů volnosti, které v LTE jsou.

Ještě extrémnějším případem je statistická rovnováha okolohvězdné a mezihvězdné hmoty, kde díky nízké hustotě a tedy malému vzájemnému rušení mají ionty velký počet diskretních hladin. Jejich obsazení je dominováno interakcí se zářením centrálních (pro planetární mlhoviny) či okolních hvězd. Toto záření mívá spektrum odpovídající teplotám řádu  $10^4\text{K}$ , ale díky velkému zředění hustotu odpovídající teplotám řádu pouze  $10^{1\pm 1}\text{K}$ . V rovnici statistické rovnováhy proto zpravidla převažují členy fotoionizace ze základní (nejpopulovanější) hladiny, rekombinace do vyšších hladin a deexcitace, tj. postupné kaskádování zpět do nižších hladin.

### 1.1.2 Ionizační rovnováha a Debyovské stínění

I když plazma může být i v nerovnovážném stavu, předpoklad termodynamické rovnováhy často umožňuje alespoň přibližně popsat jeho vlastnosti. Předpokládejme tedy, že částice plazmatu obsazují diskretní stavy (např. vnitřní stupně volnosti) i spojité (např. kinetické) stupně volnosti s pravděpodobností danou Boltzmannovým rovnovážným rozdělením  $f \sim \exp(-E/kT)$ , kde  $E$  je energie stavu,  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je teplota, která rozdělení parametrizuje.<sup>3</sup>

Z tohoto předpokladu můžeme odvodit například střední hustotu rozdělení kladně i záporně nabitých částic v okolí každé zvolené nabitě částice. Hustota  $n_q$  částic s nábojem  $q$  ve vzdálenosti  $r$  od zvolené částice je tedy

$$n_q(r) = n_{q0} \exp\left(-\frac{q\phi(r)}{kT_q}\right) \simeq n_{q0} \left(1 - \frac{q\phi}{kT_q} + o(\phi^2)\right), \quad (1.10)$$

kde  $n_{q0}$  je střední hustota a  $T_q$  teplota těchto částic a  $\phi(r)$  je elektrostatický potenciál. Ten je řešením Poissonovy rovnice

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi \sum_q qn_q \simeq -4\pi \left(\sum_q \frac{q^2 n_{q0}}{kT_q}\right) \phi. \quad (1.11)$$

<sup>3</sup>Speciálním případem je Maxwelllovo rozdělení rychlostí  $v$  částic, které dostaneme pro kinetickou energii částic  $E = mv^2/2$ , nebo barometrická formule pro potenciální energii částic  $E = m\phi$ .

V úpravě této rovnice jsme využili předpokladu kvasineutrálnosti plazmatu  $\sum_q qn_{q0} = 0$  a zanedbali jsme členy nelineární ve  $\phi$ . Řešení této rovnice má tvar<sup>4</sup>

$$\phi = \frac{Q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (1.12)$$

kde

$$\lambda_D^{-2} = 4\pi \sum_q \frac{q^2 n_{q0}}{kT_q} \quad (1.13)$$

udává tzv. Debyeův stínící poloměr  $\lambda_D$ , na škále jehož velikosti je exponenciálně tlumen coulombický potenciál náboje  $Q$  zvolené částice.<sup>5</sup>

Aby mohly být užity postupy tohoto statistického výpočtu, musí být splněna podmínka, že uvnitř objemu o velikosti  $\lambda_D$  se nachází velký počet nabitých částic, čili že tzv. plazmový parametr

$$\Lambda \equiv \sum_q n_{q0} \lambda_D^3 \gg 1. \quad (1.14)$$

Výpočet relativního obsazení diskrétních (např. excitačních) i spojitých stavů (ve fázovém prostoru) v rovnováze pomocí Boltzmannova rozdělení je přímočarý. Při výpočtu ionizační rovnováhy ovšem musíme vzájemně porovnávat počty elementárních kvantových diskrétních i spojitých stavů. Fázový prostor tedy musíme kvantovat pomocí relací neurčitosti, abychom dostali spočetnou (stále však nekonečnou) množinu elementárních stavů o fázovém objemu  $d^6\Gamma = d^3x d^3p \simeq h^3$ . V případě jednoduchého Bohrova modelu atomu vodíku (a podobně i pro složitější atomy) je nekonečný také počet vázaných stavů, v nichž mají elektrony nižší energii a tedy větší pravděpodobnost výskytu než ve volných ionizovaných stavech. To by ovšem platilo pouze pro atom osamocený v celém vesmíru. Ve vyšších hladinách jsou vlnové funkce prostorově rozlehlejší a proto jsou v reálném plynu či plazmatu rušeny okolními částicemi. Faktický počet hladin je tedy konečný a musí být omezen v závislosti na hustotě částic. Alternativní způsob odhadu počtu stabilních hladin je založen na řešení Schrödingerovy v debyeovskey stíněném potenciálu, v němž je počet vázaných stavů redukován v závislosti na velikosti stínění. V poruchovém přiblížení mají vyšší hladiny pozitivní energii a jsou tedy nestabilní.

### 1.1.3 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že plyn se skládá z velkého počtu ( $N$ ) částic jednoho druhu, jejichž stav je popsán souřadnicemi  $x^i$  a hybnostmi  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Stav plynu lze potom popsat tzv. jednočásticovou rozdělovací funkcí  $f = f(t, x^i, p_i)$  udávající počet částic v jednotkovém objemu fázového prostoru

$$d^6N = f(t, x^i, p_i) d^3x d^3p. \quad (1.15)$$

Za jednotku fázového objemu můžeme zvolit objem elementárního kvantového stavu ( $d^6\Gamma = (dx dp)^3 \sim h^3$ ) a  $f$  potom bude znamenat pravděpodobnost obsazení stavu.

Z jednočásticové rozdělovací funkce  $f$  můžeme vypočítat některé makroskopické veličiny charakterizující plyn. Z nich nejdůležitější jsou hustota částic  $n$  (hmoty  $\rho$ ), hustota hybnosti  $\pi$  (rychlost

<sup>4</sup>Shodný tvar má také Yukawův potenciál v jaderné fyzice.

<sup>5</sup>V literatuře se někdy traduje chybné tvrzení, že k debyeovskému stínění přispívají pouze elektrony, protože ionizované atomy jsou těžké a málo pohyblivé. Rovnovážné řešení ovšem nezávisí na tepelné rychlosti různých částic a z kvadratické závislosti na  $q$  je zřejmé, že jednou ionizované atomy přispívají ke stínění stejně a vícekrát ionizované atomy dokonce ještě více než elektrony.

$v$ ) a složky tenzoru napětí  $T$  (vůči souřadnicové soustavě, resp.  $\tau$  vůči vlastní klidové soustavě plynu), tj. složky tenzoru energie-hybnosti, které jsou dány jako momenty  $f$

$$n = \rho/m = \langle f \rangle \equiv \int f d^3p \quad (1.16)$$

$$\pi^i = \rho v^i = \langle p_i f \rangle \equiv \int p_i f d^3p \quad (1.17)$$

$$mT^{ij} = m(\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = \langle p_i p_j f \rangle \equiv \int p_i p_j f d^3p, \quad (1.18)$$

kde  $m$  je hmotnost jedné částice. Ze stopy tenzoru napětí můžeme vypočítat i hustotu kinetické energie (nerelativistických částic)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) = \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_0 = \langle \frac{1}{2m} p_i p_i f \rangle \equiv \int \frac{p^2}{2m} f d^3p, \quad (1.19)$$

kde  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \sum_i \tau^{ii}$  je hustota tepelné energie.

Všimněme si, že zatím co veličiny  $n$ ,  $\rho$ ,  $\pi$  a  $T$  jsou lineární funkcionály rozdělovací funkce  $f$ , veličiny  $v$  a  $\tau$  častěji užívané v hydrodynamickém popisu (místo  $\pi$  a  $T$ ) jsou nelineární.

Pohyb každé částice lze popsat trajektoriemi  $x = x(t)$ ,  $p = p(t)$  ve fázovém prostoru (viz např. obr. 1.1.a). Jestliže částice nemohou s časem vznikat ani zanikat a jestliže platí tzv. Liouvilleův teorém<sup>6</sup>

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0, \quad (1.20)$$

tj. fázový objem je invariantem pohybu, pak je také  $f$  invariantem pohybu a platí pro něj bezsrážková Boltzmannova rovnice

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0. \quad (1.21)$$

Speciálním, ale přitom dosti obecným, případem kdy platí Liouvilleův teorém (1.20) je případ hamiltonovského pohybu popsaného kanonickými pohybovými rovnicemi

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (1.22)$$

Pak totiž

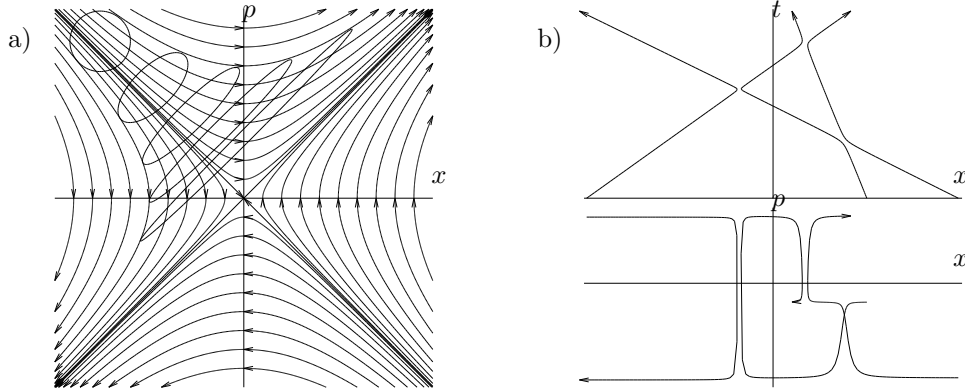
$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i} \right) = 0. \quad (1.23)$$

Boltzmannovu rovnici (1.21) lze v tom případě zapsat také pomocí Poissonových závorek

$$\frac{\partial f}{\partial t} - [H, f] = 0. \quad (1.24)$$

---

<sup>6</sup> Při jednoparametrické grupě transformací  $\xi = \xi(t, \xi_0)$  v  $N$ -dim prostoru se totiž objem  $\Gamma = \int d^N \xi = \int \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0$  mění  $\dot{\Gamma} = \int \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \int \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\partial \xi(t+\Delta t)}{\partial \xi(t)} \right| - |\mathbf{1}|}{\Delta t} \left| \frac{\partial \xi(t)}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right| d^N \xi_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} \Gamma$  (viz spec. rov. (??) a pro relativistické zobecnění rov. (??)).



Obrázek 1.1: Fázové trajektorie. Jednorozměrný pohyb a) neinteragujících částic ve vnějším poli potenciálové bariéry  $\Phi(x) = -x^2$ , b) volných částic interagujících  $\Phi_{\text{int.}}(x_A - x_B) = (x_A - x_B)^{-2}$ .

Pohyb každé částice je obecně určen jednak působením vnějších polí ale i vzájemnou interakcí s ostatními částicemi plynu. Hamiltonián každé částice je tedy závislý i na stavech ostatních částic a pohybové rovnice (1.22) všech  $N$  částic jsou vzájemně svázané. V tom případě je invariantní pouze fázový objem  $d^{6N}\Gamma$  v prostoru stavů celého systému  $N$  částic a místo rovnice (1.24) platí pouze rovnice

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} - [H_N, f_N] = 0, \quad (1.25)$$

pro  $N$ -částicovou rozdělovací funkci  $f_N = f_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N, t)$  reprezentující pravděpodobnost výskytu celého systému v daném stavu, resp. počet systémů z nějakého velkého souboru systémů, které jsou v daném stavu. Pro  $K$  částic ( $K = 1, \dots, N - 1$ ) můžeme zavést  $K$ -částicovou rozdělovací funkci

$$f_K(x_1, \dots, x_K, p_1, \dots, p_K, t) = \int f_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N, t) \prod_{i=K+1}^N d^3x_i d^3p_i, \quad (1.26)$$

vyjadřující pravděpodobnost jejich výskytu v jistém stavu z  $6K$ -dimenzionálního podprostoru prostoru stavů všech částic bez ohledu na stav zbývajících  $N - K$  částic (předpokládáme implicitně, že všechny částice jsou stejného druhu a záměna stavů každé dvojice je nerozlišitelná).

Hamiltonián  $H_N$  můžeme zpravidla považovat za součet jednočásticových hamiltoniánů  $H_1$  jednotlivých částic pohybujících se nezávisle ve vnějších a kolektivních polích a dvoučásticových (popřípadě několika málo více částicových) interakčních hamiltoniánů  $\Phi$ , vyjadřujících vzájemnou interakci pro každou dvojici částic

$$H_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N H_1(x_i, p_i) + \sum_{i<j} \Phi(x_i, x_j, p_i, p_j). \quad (1.27)$$

Vyintegrováním rovnice (1.25) přes stavy částic  $i = K + 1, \dots, N$  (analogicky definici (1.26)) dostaneme pohybovou rovnici pro  $f_K$ . Integrací per partes

$$\begin{aligned} \int [H_1, f_N] dx_i dp_i &= \int \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial x_i} \right) dx_i dp_i \\ &= \int \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x_i} f_N \right]_{p_i=-\infty}^{+\infty} dx_i - \int \left[ \frac{\partial H_1}{\partial p_i} f_N \right]_{x_i=-\infty}^{+\infty} dp_i = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$



se lze přesvědčit, že příspěvky jednočásticových hamiltoniánů  $H_1(x_i, p_i)$  pro  $i > K$  jsou nulové. Analogicky se vyruší i příspěvky interakčních hamiltoniánů  $\Phi_{i,j}$  pro  $K < i < j$ . Všechny interakční členy s pro  $i \leq K < j$  jsou dohromady  $N - K$  násobkem členu s  $j = K + 1$  a zbylé členy jednočásticové i interakční s  $i, j \leq K$  dávají analogicky (1.27) hamiltonián  $H_K$  soustavy  $K$  částic. Pohybová rovnice pro  $f_K$  má tedy tvar

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} - [H_K, f_K] = (N - K) \sum_{i=1}^K \int [\Phi_{i,K+1}, f_{K+1}] d^3 x_{K+1} d^3 p_{K+1} . \quad (1.29)$$

Tyto rovnice pro různá  $K$  tvoří tzv. hierarchii BBGKY.<sup>7</sup> První rovnice z této soustavy

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - [H_1, f_1] = (N - 1) \int [\Phi_{1,2}, f_2] d^3 x_2 d^3 p_2 \quad (1.30)$$

je analogicky (1.24) jednočásticová Boltzmannova rovnice na jejíž pravé straně však stojí příspěvek dvojčásticové rozdělovací funkce. Pro tu platí rovnice

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - [H_2, f_2] = (N - 2) \sum_{i=1}^2 \int [\Phi_{i,3}, f_3] d^3 x_3 d^3 p_3 , \quad (1.31)$$

atd. Pravou stranu rovnice (1.30) lze chápat rovněž jako změnu jednočásticové rozdělovací funkce v důsledku vzniku nebo zániku částice v daném stavu v důsledku její interakce (srážky) s ostatními částicemi. Mezi srážkami se každá částice pohybuje nezávisle na ostatních (viz obr.1.1.b – nahoře) podle rovnic (1.22), kde hamiltonián je již závislý pouze na souřadnicích dané částice (vnější a kolektivní pole vstupují do hamiltoniánu pouze jako parametry) a tedy jednočásticový fázový objem se zachovává. Srážka, jejíž pravděpodobnost je dána jednočásticovou rozdělovací funkcí druhé interagující částice (pokud jsou stavy různých částic nezávislé, nebo dvojčásticovou rozdělovací funkcí, pokud jsou jejich stavy korelované), se projeví jako přechod sledované částice na jinou fázovou trajektorii (viz obr. 1.1.b – dole), tj. jako zánik částice na její původní trajektorii a vznik na nové trajektorii (popřípadě pouze zánik nebo pouze vznik, jestliže jde o nepružnou srážku či chemickou reakci, při které se změní typ vstupujících částic). Působení srážek je zahrnuto do Boltzmannovy rovnice pomocí tzv. srážkového členu na pravé straně, která vyjadřuje pravděpodobnost vzniku částice (se záporným znaménkem též zániku),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c . \quad (1.32)$$

#### 1.1.4 Momentové rovnice a hydrodynamická aproximace

Vypočteme-li momenty Boltzmannovy rovnice (1.32) v prostoru hybností, dostaneme parciální diferenciální rovnice pro momenty definované rovnicemi (1.16) až (1.18). Odvoďme si tyto rovnice pro jednoduchý případ částic ve skalárním potenciálovém poli, kdy hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\Phi(x) , \quad (1.33)$$

podle (1.22) tedy

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p_i}{m} , \quad \frac{dp_i}{dt} = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} , \quad (1.34)$$

<sup>7</sup>Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon – podrobněji viz [3].

takže (1.32) má konkrétně tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} - m \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_c . \quad (1.35)$$

Nultý moment (tj.  $\int d^3p$ ) této rovnice dává

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \pi^i}{\partial x^i} = \left( \frac{\delta n}{\delta t} \right)_c , \quad (1.36)$$

kde na pravé straně je moment srážkového členu definovaný analogicky (1.16), který udává číselnou hustotu částic vzniklých srážkami za jednotku času (což musí být nula, pokud nedochází k chemickým reakcím). Integrál třetího členu na levé straně rovnice (1.35) je nulový, protože je to integrál derivace rozdělovací funkce  $f$ , která musí jít pro nekonečné  $p$  k nule, aby dávala konečnou hustotu. Přepíšeme-li tuto rovnici pomocí rychlosti  $v^i$  zavedené v (1.17), dostaneme známou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left( \frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c . \quad (1.37)$$

První momenty rovnice (1.35) dostaneme vynásobením  $p^j$  a vyintegrováním (tj.  $\int d^3p p^j$ )

$$\frac{\partial \pi^j}{\partial t} + \frac{\partial T^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left( \frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c . \quad (1.38)$$

Třetí člen na levé straně jsme upravili integrací per partes  $\int p^j \frac{\partial f}{\partial p_i} = -\delta_i^j \int f$ , na pravé straně je opět hustota hybnosti předaná srážkami za jednotku času (která musí být nulová, jestliže dochází pouze ke srážkám mezi částicemi téhož druhu). Kombinací s rovnicí kontinuity (1.37) odtud můžeme dostat pohybovou rovnici pro jednosložkový plyn ve tvaru obvyklejším v hydrodynamice

$$\rho \left( \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial \tau^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left( \frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c - v^j \left( \frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c . \quad (1.39)$$

Podobně pro druhé momenty rovnice (1.35) dostaneme (vyintegrováním  $\int d^3p p^j p^k / m$ ) rovnici pro složky tenzoru napětí

$$\frac{\partial T^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial Q^{ijk}}{\partial x^i} + \pi_j \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \pi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left( \frac{\delta T^{jk}}{\delta t} \right)_c , \quad (1.40)$$

kde na pravé straně je opět příspěvek srážkového členu ke změně tenzoru napětí. Tato rovnice obsahuje divergenci momentu vyššího řádu, a to toku složek tenzoru napětí (resp. energie, která je úměrná jeho stopě)

$$Q^{ijk} \equiv m^{-2} \langle p_i p_j p_k f \rangle . \quad (1.41)$$

Jestliže tenzor  $Q^{ijk}$  přepíšeme (analogicky (1.18)) pomocí transformace do vlastní klidové soustavy plynu (v níž by měl hodnotu  $q^{ijk}$ )

$$Q^{ijk} = q^{ijk} + v^i \tau^{jk} + v^k \tau^{ij} + v^j \tau^{ki} + v^i v^j v^k \rho , \quad (1.42)$$

pak rovnici (1.40) můžeme užitím nižších momentových rovnic přepsat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial q^{ijk}}{\partial x^i} + \frac{\partial (v^i \tau^{jk})}{\partial x^i} + \tau^{ki} \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \tau^{ji} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \\ = \left( \frac{\delta T^{jk}}{\delta t} \right)_c + v^j v^k \left( \frac{\delta \rho}{\delta t} \right)_c - v^j \left( \frac{\delta \pi^k}{\delta t} \right)_c - v^k \left( \frac{\delta \pi^j}{\delta t} \right)_c . \end{aligned} \quad (1.43)$$

Momentové rovnice (1.36), (1.38), (1.40) a další lze zapsat jednotně zavedením momentů

$$M^\alpha = \langle p^\alpha f \rangle = \int p^\alpha f d^3p \quad (1.44)$$

zobecnujících definice (1.16), (1.17), (1.18), (1.41) a další, kde  $\alpha$  je tzv. multi-index<sup>8</sup>, jehož norma udává stupeň (řád) momentu. Obecný moment rovnice (1.35) má potom tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} M^\alpha + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^i} M^{\alpha+i} + m \alpha^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} M^{\alpha-i} = \left( \frac{\delta M^\alpha}{\delta t} \right)_c, \quad (1.45)$$

kde na pravé straně je příslušný moment srážkového členu. Vidíme tedy, že každá momentová rovnice vždy obsahuje i momenty vyššího řádu, takže tyto rovnice tvoří nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic (ovšem v prostoru s nižší dimenzí než původní Boltzmannova rovnice, protože závislost rozdělovací funkce na hybnosti vlastně reprezentujeme spočetnou posloupností momentů, z nichž lze tuto funkci v principu zpětně rekonstruovat).

Aby soustava momentových rovnic byla uzavřená, musíme některé z vyšších momentů apriorně vyjádřit pomocí nižších momentů. Můžeme například učinit nejjednodušší předpoklad, že  $f$  bude dáno rovnovážným maxwellovským rozdělením (srovnej rov. (1.121))

$$f = n(2\pi mkT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}\right), \quad (1.46)$$

kde výška a střed gausovské křivky jsou v soulase s (1.16) a (1.17) dány  $\rho$  a  $v$ , které musí splňovat pohybové rovnice (1.37) a (1.39). Podle (1.18) je pro rozdělení (1.46) tenzor napětí ve vlastní soustavě izotropní, úměrný teplotě rozdělení  $T$ ,

$$\tau^{ij} = \delta^{ij} P = \delta^{ij} nkT = \delta^{ij} \frac{2\epsilon}{3}, \quad (1.47)$$

kde  $P$  je tlak a  $\epsilon$  je hustota tepelné energie. Teplota může být předem zadaná (např. určená rovnováhou se zářením), nebo pro ni (resp. pro  $\epsilon$ ) ze stopy rovnice (1.43), kde tok tepla  $q = 0$  v důsledku předpokladu (1.46), dostáváme rovnici energetické rovnováhy

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \epsilon + \frac{5}{3} \epsilon \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left( \frac{\delta \epsilon}{\delta t} \right)_c. \quad (1.48)$$

Druhý člen na levé straně této rovnice udává změnu vnitřní energie v důsledku práce vykonané stlačováním plynu proti jeho tlaku. Srážkový člen na pravé straně by byl nulový pro adiabatický

<sup>8</sup>Multi-index  $\alpha$  je vektorový index (vektor s celočíselnými složkami), pomocí kterého můžeme definovat mocninu  $p^\alpha$  vektoru  $p$

$$p^\alpha = \prod_{i=1}^3 (p^i)^{\alpha^i}.$$

Jeho norma je definovaná vztahem

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha^i.$$

Index  $i|_{i=1}^3$  můžeme chápat současně jako jednotkový multi-index ve směru  $i$ , takže např.

$$p^i p^\alpha = p^{\alpha+i}.$$

pohyb jednosložkového plynu, nebo může vyjadřovat příspěvek výměny energie s ostatními složkami nebo zářením — tento člen by v případě zářivé rovnováhy musel dominovat. Podobně i ostatní složky rovnice (1.43) mají význam kritéria oprávněnosti předpokladu (1.46) — srážkové členy na pravé straně musí být dostatečně dominantní aby zajistily relaxaci odchylek od rovnovážného rozdělení způsobovaných gradienty na levé straně.

Jestliže srážky nejsou dostatečně účinné aby zajistily platnost přiblížení (1.46), musíme do Boltzmannovy rovnice resp. jejích momentů pravou stranu dosadit a počítat odchylky skutečné rozdělovací funkce od (1.46). Skutečným tvarem srážkového členu se budeme zabývat v kapitole 1.2. Pro ilustraci jeho vlivu na řešení Boltzmannovy rovnice však můžeme vystačit se zjednodušeným ‘BGK’- modelem (Bhatnagar, Gross, Krook [1], [5])

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = -\frac{f - f_0}{\Delta t}, \quad (1.49)$$

kde  $\Delta t$  je nějaký relaxační čas<sup>9</sup> a  $f_0$  je rovnovážná rozdělovací funkce daná (v nerelativistickém případě) vztahem (1.46). Obecný moment tohoto srážkového členu má tvar

$$\left(\frac{\delta M^\alpha}{\delta t}\right)_c = -\frac{M^\alpha - M_0^\alpha}{\Delta t}, \quad (1.50)$$

takže např. v případě jednosložkového plynu je jeho příspěvek k hustotě a hybnosti (popřípadě i hustotě energie) nulový, protože  $f_0$  jsme volili tak, aby dávalo stejné hodnoty těchto momentů jako  $f$ . Vyšší momenty, jako např. složky tenzoru napětí (resp. pouze jeho odchylky od izotropního tlaku) nebo tenzoru  $Q$ , pak můžeme odhadnout pomocí rozvoje podle malého parametru  $\Delta t$  z dosazení (1.50) do (1.45)

$$M^\alpha = M_0^\alpha - \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial t} M_0^\alpha + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^i} M_0^{\alpha+i} + m \alpha^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} M_0^{\alpha-i} \right) + o(\Delta t^2), \quad (1.51)$$

a po jejich dosazení do příslušných nižších momentových rovnic dostaneme difúzní aproximaci, přičemž  $\Delta t$  určuje příslušné difúzní koeficienty (viskozitu, tepelnou vodivost aj.).

Všechny momenty  $M_0^\alpha$  přitom můžeme explicitně vypočítat dosazením (1.46) do (1.44). Je zřejmé, že ve vlastní soustavě plynu (ve které  $v = 0$ ) budou všechny momenty  $M_0^\alpha$ , pro které je alespoň jedna složka  $\alpha^i$  lichá, rovny nule, ale nekonečný počet sudých momentů bude nenulový. V obecné (nikoliv vlastní) soustavě pak bude podle binomické formule každý moment lineární kombinací stejného a nižších momentů klidových. Pro praktické výpočty proto může být výhodné<sup>10</sup> přejít od reprezentace  $f$  v  $p$ -prostoru nikoliv k mocninným momentům (1.44), ale k rozvoji  $f$  do vhodné soustavy funkcí (‘ket-vektorů’)  $|\alpha\rangle$

$$|f\rangle = f^\alpha |\alpha\rangle. \quad (1.52)$$

Koeficienty rozvoje  $f^\alpha$  jsou potom zobecněné momenty, které dostaneme vynásobením  $f$  s duálními ‘bra-vektory’  $f^\alpha = \langle \alpha | f \rangle$  (kde  $\langle \alpha | \beta \rangle = \delta^{\alpha\beta}$ ) a konkrétní tvar momentových rovnic analogických (1.45) pro ně dostaneme dosazením vyjádření operátorů  $\hat{p}$  a  $\frac{\partial}{\partial p}$  v  $|\alpha\rangle$ -reprezentaci do Boltzmannovy rovnice (1.32) s konkrétním vyjádřením složek Liouvilleova operátoru  $\frac{d}{dt}$  jako funkcí  $p$ . Například,

<sup>9</sup>Nepřesnost BGK-aproximace spočívá především v předpokladu že k této relaxaci dochází v celém rychlostním prostoru stejnou rychlostí.

<sup>10</sup>Přechod k nové reprezentaci je výhodný tehdy, jestliže tato reprezentace vystihuje (předpokládanou) symetrii řešení konkrétní úlohy, takže stačí nezanedbat menší počet zobecněných momentů. Ze stejných důvodů může být výhodné přejít k diskretní reprezentaci i ve smíšeném  $x$ - a  $p$ - řezu fázovým prostorem.

jestliže lze očekávat, že odchylky od rovnovážného rozdělení (1.46) částic budou malé, pak je výhodné užít tzv. Gradovy metody (viz např. [3]), ve které je reprezentace  $|\alpha\rangle$  tvořena Hermiteovými polynomy vynásobenými gaussovskou váhou (1.46) vůči níž jsou ortonormální, takže  $\langle\alpha|$  jsou samotné hermiteovské polynomy. Hermiteovské momenty jsou lineárními kombinacemi fyzikálně významných momentů (1.44) a kromě nultého jsou nulové pro (lokálně) rovnovážné rozdělení se správnou rychlostí a teplotou. Proto zpravidla stačí uvažovat prvních 20 momentů (tj. do třetího stupně) nebo 13 momentů (do druhého stupně a toky energie  $\sim Q^{ijj}$ ).

### 1.1.5 Magnetohydrodynamika

Předpokládejme, že plazma se skládá ze dvou druhů částic s kladným a záporným nábojem  $q_{\pm}$  a hmotami  $m_{\pm}$ . Každý z těchto druhů částic je popsán rozdělovací funkcí  $f_{\pm}$ , která splňuje Boltzmannovu rovnici

$$\partial_t f_{\pm} + \dot{x}^i \partial_{x^i} f_{\pm} + \dot{p}^i \partial_{p^i} f_{\pm} = \left( \frac{\delta}{\delta t} f_{\pm} \right), \quad (1.53)$$

kde rychlost každé částice (srovnej s (1.34))

$$\dot{x}^i = \frac{p^i}{m_{\pm}}, \quad (1.54)$$

a zrychlení je nyní působeno nejen gravitační, ale i elektrostatickou a Lorentzovou silou

$$\dot{p}^i = -m_{\pm} \nabla^i \Phi + q_{\pm} E^i + \frac{q_{\pm}}{cm_{\pm}} \varepsilon^{ijk} p^j B^k. \quad (1.55)$$

Nulté momenty rovnic (1.53) mají tvar<sup>11</sup>

$$\partial_t \rho_{\pm} + \nabla_i (\pi_{\pm}^i) = \left( \frac{\delta}{\delta t} \rho_{\pm} \right), \quad (1.56)$$

a první momenty

$$\partial_t \pi_{\pm}^i + \nabla_j T_{\pm}^{ij} + \rho_{\pm} \nabla^i \Phi - \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} \rho_{\pm} E^i - \frac{q_{\pm}}{cm_{\pm}} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k = \left( \frac{\delta}{\delta t} \pi_{\pm}^i \right). \quad (1.57)$$

Zavedeme-li celkovou hustotu hmoty  $\rho = \rho_+ + \rho_-$  a celkovou rychlost  $v = (\pi_+ + \pi_-)/\rho$ , pak sečtením rovnic (1.56) pro oba druhy částic dostaneme rovnici kontinuity hmoty

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = \left( \frac{\delta}{\delta t} \rho \right) = 0, \quad (1.58)$$

kde jsme zároveň předpokládali, že v procesech srážek částice žádného druhu nevznikají ani nezanikají a pravé strany rovnic (1.56) proto musí být nulové.<sup>12</sup> Podobně, zavedeme-li celkovou hustotu náboje  $\eta = \frac{q_+}{m_+} \rho_+ + \frac{q_-}{m_-} \rho_-$  a proud  $J = (\frac{q_+}{m_+} \pi_+ + \frac{q_-}{m_-} \pi_-)$ , pak váhovaným součtem rovnic (1.56) dostaneme rovnici kontinuity náboje

$$\partial_t \eta + \nabla_i (J^i) = \left( \frac{\delta}{\delta t} \eta \right) = 0. \quad (1.59)$$

<sup>11</sup>Neboť  $\int_p \varepsilon^{ijk} p^j \partial_{p^i} f_{\pm} = - \int_p \varepsilon^{ijk} \delta_i^j f_{\pm} = 0$ .

<sup>12</sup>V reálném plazmatu může docházet k rekombinaci a ionizaci. Pak je zapotřebí přidat ještě alespoň rovnici pro neutrální částice a nulový bude součet pravých stran.

Sečtením rovnic (1.57) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j T^{ij} + \rho \nabla^i \Phi - \eta E^i - \frac{1}{c} \varepsilon^{ijk} J^j B^k = \left( \frac{\delta}{\delta t} \pi^i \right) = 0, \quad (1.60)$$

kde vzhledem k zachování hybnosti při srážkách musí součet srážkových členů vymizet. Celkový tenzor napětí můžeme rozložit na část příslušející uspořádanému pohybu  $\rho v^i v^j$  a část tlakovou<sup>13</sup>  $P^{ij}$ , tj.  $T^{ij} \equiv T_+^{ij} + T_-^{ij} = \rho v^i v^j + P^{ij}$ . Předpokládáme-li tlak izotropní (což je ovšem při existenci proudu, tj. nenulových prvních momentů rozdělovacích funkcí, těžko přesně splnitelné) a předpokládáme nulový celkový náboj  $\eta$ , pak po úpravě  $\partial_t(\rho v^i) = \rho \frac{d}{dt} v^i - \nabla_j(\rho v^i v^j)$  využívající rovnice kontinuity (1.58) dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \frac{d}{dt} v = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{c} J \times B. \quad (1.61)$$

Váhováním součtem rovnic (1.57) dostaneme pohybovou rovnici pro proud

$$\partial_t J^i + \nabla_j \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} T_{\pm}^{ij} + \eta \nabla^i \Phi - \frac{q_{\pm}^2}{m_{\pm}^2} \rho_{\pm} E^i - \frac{q_{\pm}^2}{cm_{\pm}^2} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k = \left( \frac{\delta}{\delta t} J^i \right). \quad (1.62)$$

Srážkový člen na pravé straně je zde obecně nenulový, protože obě složky si ve srážkách vyměňují hybnost a tím disipuje proud. Jestliže předpokládáme charakteristický relaxační čas pro ustavení rovnováhy (tj. pro vymizení proudu po vypnutí síly, která jej způsobuje)  $\Delta t$ , pak v BGK aproximaci ( $(\frac{\delta}{\delta t} J) = -\frac{J}{\Delta t}$ ) má tato rovnice tvar

$$J^i = \Delta t \left( -\nabla_j \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} T_{\pm}^{ij} - \eta \nabla^i \Phi + \frac{q_{\pm}^2}{m_{\pm}^2} \rho_{\pm} E^i + \frac{q_{\pm}^2}{cm_{\pm}^2} \varepsilon^{ijk} \pi_{\pm}^j B^k \right), \quad (1.63)$$

tj. po rozepsání hybností obou složek jako lineárních kombinací  $v$  a  $J$

$$J^i = \alpha^i + \varepsilon^{ijk} J^j \beta^k, \quad (1.64)$$

kde

$$\alpha^i = \Delta t \left( -\nabla_j \eta v^i v^j - \nabla_j \left( \frac{q_+}{m_+} P_+^{ij} + \frac{q_-}{m_-} P_-^{ij} \right) - \eta \nabla^i \Phi - \frac{q_+ q_-}{m_+ m_-} \rho E^i + \left( \frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) \eta E^i - \frac{q_+ q_-}{cm_+ m_-} \varepsilon^{ijk} \rho v^j B^k \right), \quad (1.65)$$

a

$$\beta^k = \frac{\Delta t}{c} \left( \frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) B^k. \quad (1.66)$$

Řešení rovnice (1.64) má tvar<sup>14</sup>

$$J^i = \frac{1}{1 + \beta^2} (\alpha^i + \beta^i \beta_j \alpha^j + \varepsilon^{ijk} \alpha^j \beta^k). \quad (1.67)$$

Jestliže zanedbáme členy od druhého řádu v  $\Delta t$  (což znamená všechny členy s  $\beta$ ), v rovnici (1.65) předpokládáme nulovou hustotu náboje a zanedbáme gradienty parciálních tlaků obou složek, pak se tato rovnice redukuje na Ohmův zákon

$$J = \sigma \left( E + \frac{v}{c} \times B \right). \quad (1.68)$$

<sup>13</sup>Tj. napětí vzhledem k vlastnímu klidovému systému plazmatu. Tlak je součtem parciálních tlaků obou druhů částic.

<sup>14</sup>Oopakovaným zpětným dosazením totiž  $J = \alpha + J \times \beta = \alpha + \alpha \times \beta + (J\beta)\beta - (\beta\beta)J = \alpha + \alpha \times \beta + (\alpha\beta)\beta - (\beta\beta)J$ .

kde vodivost

$$\sigma = \frac{q_+q_-}{m_+m_-}\rho\Delta t . \quad (1.69)$$

Rovnice (1.61) a (1.68) popisují vliv elektromagnetického pole na pohyb plazmatu. Naproti tomu Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times B - \frac{1}{c}\partial_t E = \frac{4\pi}{c}J , \quad (1.70)$$

$$\nabla E = 4\pi\eta \simeq 0 , \quad (1.71)$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\partial_t B = 0 , \quad (1.72)$$

a

$$\nabla B = 0 , \quad (1.73)$$

popisují vliv zdrojů na pole. V rovnici (1.71) jsme opět zanedbali hustotu náboje. Jestliže v rovnici (1.70) zanedbáme polarizaci vakua proti el. proudu  $J$ , pak se zjednoduší na

$$\partial_t E \simeq 0 \Rightarrow J = \frac{c}{4\pi}\nabla \times B . \quad (1.74)$$

Dosadíme-li odsud proud do rovnice (1.61), dostaneme pohybovou rovnici pro plazma v zadaném magnetickém poli<sup>15</sup>

$$\rho\frac{d}{dt}v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi - \frac{1}{8\pi}\nabla(B \cdot B) + \frac{1}{4\pi}(B \cdot \nabla)B . \quad (1.75)$$

Naproti tomu vývoj magnetického pole je dán rovnicí (1.72), kde můžeme z Ohmova zákona (1.68) vyloučit  $E$  a z (1.74) opět i  $J$ , takže dostaneme pohybovou rovnici pro  $B$

$$\partial_t B = -c\nabla \times E = \nabla \times \left(-\frac{c}{\sigma}J + v \times B\right) = -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla \times B\right) + \nabla \times (v \times B) . \quad (1.76)$$

Můžeme ji dále přepsat do lagrangeovských souřadnic

$$\frac{d}{dt}B = \partial_t B + (v \cdot \nabla)B = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 B + (B \cdot \nabla)v - B(\nabla \cdot v) . \quad (1.77)$$

První člen na pravé straně popisuje difúzi magnetického pole, zatímco druhé dva členy jeho zamrznutí do plazmatu.

---

<sup>15</sup>Přitom jsme užili relace

$$((a \times b) \times c)_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}a_l b_m c_k = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{km})a_l b_m c_k = (ac)b_i - (bc)a_i .$$

## 1.2 Srážkový člen

### 1.2.1 Binární srážky

Metodou řetězce BBGKY jsme našli srážkový člen Boltzmannovy rovnice (1.30) ve tvaru

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int [\Phi_{1,2}, f_2] d^3x_2 d^3p_2. \quad (1.78)$$

Předpokládejme, že binární interakční potenciál  $\Phi_{1,2} = \Phi(|r|)$ , kde  $r = x_2 - x_1$  je vzájemná vzdálenost částic, a že  $\Phi(|r|) = 0$  pro  $r > R$ , tj. vně jistého malého poloměru interakce. Vně tohoto poloměru můžeme očekávat náhodné, vzájemně nekorelované rozdělení částic,

$$f_2(x_1, p_1, x_2, p_2) = f_1(x_1, p_1) f_1(x_2, p_2). \quad (1.79)$$

Naproti tomu pro menší vzdálenosti může  $\Phi$  divergovat, a potom  $f_2$  musí klesat k nule, což odpovídá skutečnosti, že částice se k sobě nemohou v důsledku své interakce neomezeně přiblížit. Abychom mohli podle (1.78) vyčíslit srážkový člen, musíme nalézt (anti-)korelaci částic v malých vzdálenostech. Předpokládejme, že dvojčásticová rozdělovací funkce je časově nezávislá, prostoro- vě závislá pouze na  $r$ , a že její ovlivnění dalšími částicemi je (alespoň během binární srážky) zanedbatelné. Dostáváme tak pro ni další rovnici (1.31) v explicitním tvaru

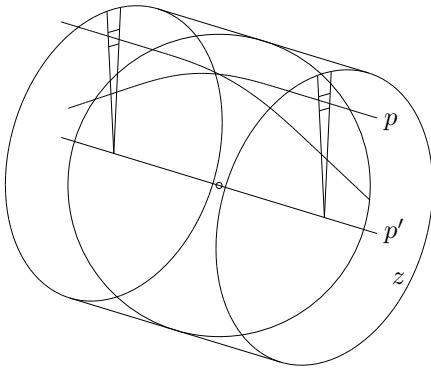
$$[H_2, f_2] \equiv \left[ \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \Phi(r), f_2 \right] = [\Phi(r), f_2] + \frac{p_1^i - p_2^i}{m} \frac{\partial f_2}{\partial r^i} = 0. \quad (1.80)$$

Odtud můžeme vyjádřit  $[\Phi(r), f_2]$  a po dosazení do (1.78) dostáváme

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int \frac{p_2^i - p_1^i}{m} \int \frac{\partial f_2}{\partial r^i} d^3r d^3p_2. \quad (1.81)$$

Vnitřní integrál gradientu dvojčásticové rozdělovací funkce přechází na integrál této funkce přes plochu kolmou ke směru  $p_2^i - p_1^i$ , tj. ve válcových souřadnicích  $b, \varphi, z$  ( $b$  je srážkový parametr)

$$\int \frac{\partial f_2}{\partial r^i} d^3r = \int [f_2]_{z=-z}^{z=+z} b db d\varphi, \quad (1.82)$$



Obrázek 1.2: Geometrie binární srážky.



kde  $Z \geq R$  je poloviční výška válce obsahující sféru binární interakce (přitom však stále podstatně menší než jsou prostorové nehomogenity vyjádřené závislostí  $f_1(x)$ ). V  $z = -Z$  je podle předpokladu (1.79) dvojčásticová rozdělovací funkce vyjadřující hustotu vzájemně proti sobě nalétávajících částic dána součinem lokálních (na prostorové škále  $b \leq R$  homogenních) jednočásticových funkcí. Naproti tomu v  $z = +Z$  je hustota vylétávajících částic  $f_2(b)$  obecně nehomogenní. Protože proces srážky dvou částic vyšetřujeme jako pohyb (neovlivněný interakcí s dalšími částicemi) ve dvoučásticovém fázovém prostoru,  $f_2$  je konstantní podél příslušné fázové trajektorie, takže

$$f_2(b, z = +Z, p_2 - p_1) = f_2(r > R, p'_2 - p'_1) = f_1(p'_1)f_1(p'_2), \quad (1.83)$$

kde  $p'_{1,2}$  jsou hybnosti které musí mít nalétávající částice aby se po srážce dostaly do směrů  $p_{1,2}$  a srážkového parametru  $b$  (vzhledem k časové reverzibilitě<sup>16</sup> tak jde o vyšetřování diferenciálního účinného průřezu  $d\sigma = 2\pi b db$  rozptylu  $-p_{1,2} \rightarrow -p'_{1,2}$ ). Po dosazení do (1.81) tak dostáváme srážkový člen ve tvaru

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = (N-1) \int \frac{p_2^i - p_1^i}{m} \int (f_1(p'_1)f_1(p'_2) - f_1(p_1)f_1(p_2)) 2\pi b db d^3 p_2. \quad (1.84)$$

Tento výraz obsahuje relativní rychlost  $\frac{p_2 - p_1}{m}$  částic vynásobenou diferenciálním účinným průřezem, čili, v soulase s představou znázorněnou v obr. 1.1-b, pravděpodobnost procesu srážek, při nichž částice odejdou z fázového elementu určeného  $p_{1,2}$  do  $p'_{1,2}$  nebo naopak. Tento výsledek může být zobecněn i pro kvantové procesy a různé počty interagujících částic (např. pro rozpady částic na částice jiných druhů), kdy mechanická analogie dvojčásticové srážky je neplatná.

## 1.2.2 Obecný tvar

Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (1.32) pro jednočásticovou rozdělovací funkci částic typu  $A$  udává celkovou fázovou hustotu pravděpodobnosti vzniku (nebo negativní hodnota zániku) těchto částic interakcí s ostatními částicemi téhož nebo jiného druhu. Proto jej můžeme vyjádřit jako součet kladných příspěvků od jednotlivých elementárních procesů, při nichž dochází ke vzniku takovéto částice ve sledovaném elementu fázového prostoru, a záporných příspěvků od procesů, při nichž částice zaniká. To znamená, že například rozptyl, což je přechod částice z jednoho bodu v prostoru hybností do druhého, chápeme jako zánik částice v původním a vznik v novém elementu fázového prostoru. Uvažujme tedy obecnou ('chemickou') reakci mezi částicemi  $X_B|_{B=1}^M$ , při níž vznikají částice  $X_B|_{B=M+1}^N$

$$\sum_{B=1}^M X_B \rightleftharpoons \sum_{B=M+1}^N X_B. \quad (1.85)$$

Pokud všechna  $X_B$  můžeme považovat za nekvantové částice (tj. jestliže můžeme zanedbat stimulovanou emisi pro bosony a vylučovací princip pro fermiony, což lze vždy, když jsou rozdělovací funkce zanedbatelné vůči fázové hustotě  $\phi_B$  elementárních kvantových stavů), pak příspěvek reakce

<sup>16</sup>Bezesrážková Boltzmannova rovnice pro  $N$ -částicovou rozdělovací funkci je časově reverzibilní. Binární interakce původně nekorelovaných nalétávajících částic způsobuje korelaci mezi vylétávajícími částicemi, kterou by bylo třeba si 'zapamatovat', aby byl celý systém stále vratný. Přiblížením dvojčásticové rozdělovací funkce vylétávajících částic opět nekorelovaným rozdělením v jiném elementu dvojčásticového fázového prostoru předpokládáme, že srážková korelace je vlivem dalšího vývoje 'zapomenuta' a proto takto odvozená jednočásticová Boltzmannova rovnice s pravou stranou se stává časově ireverzibilní.

(1.85) ke srážkovému členu částice  $X_A$  bude

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c(p_A) = \sum_{C, X_C \equiv X_A} \nu_C \int \left[ P(p_1, \dots, p_N) \prod_{B=1}^M f_B(p_B) \right]_{p_C=p_A} \prod_{B=1, B \neq C}^N d^3 p_B, \quad (1.86)$$

kde ‘stechiometrické koeficienty’  $\nu_C = +1$  pro částice vznikající ( $C > M$ ) a  $\nu_C = -1$  pro částice zanikající ( $C \leq M$ ).  $P(p_1, \dots, p_N)$  je pravděpodobnost proběhnutí reakce (1.85) za jednotku času mezi částicemi s počátečními hybnostmi  $p_1, \dots, p_M$  do koncových hybností  $p_{M+1}, \dots, p_N$ . Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice je tedy (na rozdíl od levé strany) obecně nelineární v rozdělovací funkci částic.

Jestliže rozdělovací funkce některé ze vznikajících částic (např.  $X_C$ ) není zanedbatelná vůči  $\phi_C$  můžeme do výrazu (1.86) ‘zabudovat’ bosonové nebo fermionové chování této částice přidáním do integrandu na pravé straně členu (jakési ‘modifikované’ rozdělovací funkce<sup>17</sup>)

$$\hat{f}_C \equiv 1 \pm \frac{f_C}{\phi_C}, \quad (1.87)$$

kde horní znaménko (+) platí pro bosony (a člen udává zvýšení pravděpodobnosti reakce (1.85) v důsledku stimulované emise) a dolní znaménko (−) pro fermiony (a člen pak udává snížení pravděpodobnosti reakce vlivem Pauliho vylučovacího principu). Takto zobecněný výraz (1.86) však můžeme formálně považovat za příspěvek reakce

$$X'_C + \sum_{B=1}^M X_B \rightleftharpoons \sum_{B=M+1}^N X_B + X''_C, \quad (1.88)$$

jejíž pravděpodobnost

$$P(p'_C, p_1, \dots, p_N, p''_C) = \pm \phi_C^{-1} P(p_1, \dots, p_N) \delta(p'_C - p_C) \delta(p''_C - p_C), \quad (1.89)$$

takže výraz (1.86) lze brát jako obecný tvar srážkového členu.

### 1.2.3 Momentový rozvoj

K řešení Boltzmannovy rovnice metodou rozvoje do zobecněných momentů ve tvaru (1.52) potřebujeme rozvinout i srážkový člen

$$\left| \left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c \right\rangle = \left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c^\alpha |\alpha\rangle \quad (1.90)$$

a jeho momenty vyjádřit pomocí momentů rozdělovacích funkcí částic účastnících se srážky. Podle (1.86) jsou momenty srážkového členu dány integrálem pravděpodobnosti  $P(p_1, \dots, p_N)$  reakce (1.85) přes všechny hybnosti

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c^\alpha = \langle \alpha | \left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c \rangle = \sum_{C, X_C \equiv X_A} \nu_C \int \langle \alpha(p_C) | P(p_1, \dots, p_N) \prod_{B=1}^M f_B(p_B) \prod_{B=1}^N d^3 p_B. \quad (1.91)$$

Tuto pravděpodobnost můžeme považovat za integrační jádro operátoru

$$\tilde{P} = |\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N\rangle P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_M |, \quad (1.92)$$

<sup>17</sup>Zde je zřejmá výhodnost volby elementárního kvantového stavu za jednotku fázového objemu, kdy  $\phi_C \equiv 1$ .

přirazujičho jistému rozdělení  $f(p_1, \dots, p_M) = \prod_{B=1}^M f_B(p_B)$  částic vstupujících do reakce (1.85) rozdělení  $f(p_{M+1}, \dots, p_N)$  částic vystupujících (báze těchto součinových prostorů jsou tvořeny součiny báзовých prvků v jednočásticových prostorech). Dosazením příslušných rozvoju (1.52) do (1.91) dostaneme moment srážkového členu ve tvaru multilineární kombinace momentů rozdělovacích funkcí částic do reakce (1.85) vstupujících

$$\left(\frac{\delta f_A}{\delta t}\right)_c^\alpha = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_M} P_A^{\alpha_1, \dots, \alpha_M} \prod_{B=1}^M f_B^{\alpha_B}, \quad (1.93)$$

kde koeficienty  $P_A^{\alpha_1, \dots, \alpha_M}$  jsou dány maticovými elementy  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N}$  operátoru  $\tilde{P}$

$$\begin{aligned} P_A^{\alpha_1, \dots, \alpha_M} &= + \sum_{C=M+1, X_C \equiv X_A}^N \delta_{\alpha_C}^\alpha P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \prod_{B=M+1, B \neq C}^N \langle 1 | \alpha_B \rangle \\ &- \sum_{C=1, X_C \equiv X_A}^M Q_{\alpha_C}^{\alpha \beta_C} P_{\alpha_1, \dots, \beta_C, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N} \prod_{B=M+1}^N \langle 1 | \alpha_B \rangle, \end{aligned} \quad (1.94)$$

kde

$$Q_{\alpha_C}^{\alpha \beta_C} = \langle \beta_C | (\langle \alpha(p) |) | \alpha_C \rangle. \quad (1.95)$$

Koeficient  $\langle 1 | \alpha \rangle \equiv \int 1 | \alpha \rangle$  je zpravidla  $\delta_\alpha^0$  (jestliže jednička je základním členem ortonormální báze funkcí), takže kladné členy v tomto součtu přes  $C$ , tj. členy pro částici  $X_C$  vystupující ( $C > M$ ), jsou přímo rovné některým maticovým elementům. Záporné členy (pro částice vstupující,  $C \leq M$ ) jsou naproti tomu zpravidla lineární kombinací více maticových elementů, protože v integrálu (1.91) se k jednomu ket-vektoru (v  $f_C$ ) vyskytují dva bra-vektory (v  $P$  a  $\langle \alpha |$ ), jejichž součin je nutné nejprve pomocí koeficientů  $Q$  rozložit na součet jednotlivých bra-vektorů.

Přímočarý výpočet koeficientů  $P_A^{\alpha_1, \dots, \alpha_M}$  nebo  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}^{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N}$  by byl značně obtížný, protože vyžaduje trojnásobnou integraci přes hybnost každé z  $N$  částic. Přitom počet těchto koeficientů roste alespoň s  $M + 1$ . resp.  $N$ -tou mocninou počtu uvažovaných momentů rozdělovací funkce. Řada z těchto koeficientů však vypadne a zbylé lze zjednodušit díky symetriím srážky. Je například zřejmé, že pro identické vstupující nebo vystupující částice musí tyto koeficienty být symetrické vůči záměně příslušných indexů. Jestliže  $P$  závisí pouze na relativní orientaci hybností částic účastnících se srážky (tj. srážka není anizotropní např. v důsledku vnějšího elektromagnetického pole), pak musí být shodné koeficienty lišící se pouze prohozením prostorových os. Další symetrie koeficientů musí vyplývat ze zákonů zachování hybnosti, popřípadě energie (pro pružnou srážku). Nechtě, obecně,  $P(p_1, \dots, p_N)$  je invariantní vůči jisté grupě transformací

$$p \rightarrow p' = p'(p, \xi) \quad (1.96)$$

parametrizované parametrem  $\xi$ . Báze  $\{|\alpha\rangle\}$  rozvoje (1.52) indukuje jistou reprezentaci  $T_\xi$  této grupy

$$|\alpha'(p')\rangle = T_\xi^{\alpha'} |\alpha(p)\rangle, \quad (1.97)$$

která určuje transformační vztahy pro maticové elementy  $P_\beta^\alpha$

$$P'_{\alpha'}^{\beta'} = (T_\xi^{-1})_{\alpha'}^{\alpha} P_\beta^\alpha T_\xi^{\beta}_{\beta'}. \quad (1.98)$$

V důsledku invariance  $P(p_1, \dots, p_N)$  vůči (1.96) tedy musí maticové elementy vyhovovat homogenním lineárním rovnicím

$$\left[ (T_\xi^{-1})_{\alpha'}^{\alpha} T_\xi^{\beta}_{\beta'} - \delta_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{\beta'}^{\beta} \right] P_\beta^\alpha = 0, \quad (1.99)$$

z nichž můžeme některé elementy vyjádřit jako lineární kombinace jiných. Protože v praxi může být i řešení těchto rovnic obtížné, je výhodnější využívat symetrií  $P$  přecházením k takovým bázím v prostorech hybností, v nichž se maticové elementy zjednoduší (např. se stanou diagonální).

**Rozvoj pro binární srážku.** Jako příklad uveďme výpočet rozvoje srážkového členu do prostorových Hermiteových polynomů  $|\vec{\alpha}\rangle = \prod_{i=1}^3 P_{\alpha_i}(p_i)$  pro binární srážku

$$X_1 + X_2 \rightleftharpoons X'_1 + X'_2 . \quad (1.100)$$

Pokud se omezíme na rozvoj do druhého řádu, tj. na 10 momentů, pak potřebujeme vypočítat řádově  $10^3$  maticových elementů<sup>18</sup> z celkového počtu  $10^4$  koeficientů rozvoje pravděpodobnosti  $P(p_1, p_2, p'_1, p'_2)$  této reakce jako funkce všech proměnných. Pokud ovšem provedeme transformaci  $\{p_1, p_2\} \rightarrow \{p_T, p\}$  (a analogicky pro čárkované veličiny) do těžišťových systémů před a po srážce,

$$p_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} p_T \mp p , \quad (1.101)$$

kde  $p_T$  je hybnost celé soustavy a  $p$  hybnost částice s relativní rychlostí ( $v = v_2 - v_1$ ) a redukovanou hmotností ( $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ), pak vzhledem k zachování hybnosti při srážce musí být maticové elementy funkce  $P$  úměrné jednotkové matici v indexech  $\alpha_T, \alpha'_T$  odpovídajících proměnným  $p_T, p'_T$ . Všech  $10^4$  elementů funkce  $P(p_1, p_2, p'_1, p'_2)$  je tak lineární kombinací pouhých  $10^2$  členů rozvoje téže funkce  $P(p, p')$  vyjádřené pouze v proměnných hybnosti relativního pohybu srážejících se částic,

$$\langle \alpha'_1 \alpha'_2 | P | \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \langle \alpha'_1 \alpha'_2 | \alpha'_T \alpha'_T \rangle \langle \alpha' | P | \alpha \rangle \langle \alpha_T \alpha | \alpha_1 \alpha_2 \rangle . \quad (1.102)$$

Pravděpodobnost  $P$  může kromě invariance vůči volbě rychlosti inerciálního systému (která je speciálním důsledkem výše započteného zákona zachování hybnosti) mít i další symetrie, např. může splňovat zachování energie nebo být invariantní vůči natočení vztažné soustavy. Vliv těchto symetrií se nejnázve vyjádří v reprezentaci sférických harmonik<sup>19</sup>

$$|nlm\rangle = \sum_{|\alpha|=2n+l} \langle \alpha | nlm \rangle | \alpha \rangle . \quad (1.103)$$

V případě pružné srážky se zachovává kinetická energie relativního pohybu, tj.  $|p'| = |p|$ . V obecném případě se změní o uvolněnou energii vnitřních stupňů volnosti, tj.  $P(p, p') \sim \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE})$ . V obou případech však můžeme separovat a integrovat radiální část  $P(p, p')$  v proměnné  $p'$ . Úhlová závislost pravděpodobnosti rozptylu  $P$  zpravidla bývá invariantní vůči rotaci prostoru hybností a závisí pouze na úhlu  $\chi$  rozptylu mezi směry  $\vartheta\varphi$  a  $\vartheta'\varphi'$  nalétávající a rozptýlené částice,

$$P(p, p') = \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \sigma(\chi) , \quad (1.104)$$

kde  $\sigma$  je diferenciální účinný průřez. Vhodnou rotací prostoru hybností pak můžeme dosáhnout splynutí směru  $\vartheta\varphi$  s osou  $z$  a směru  $\varphi' = 0$  s osou  $x$ , takže zbývá rozvinout úhlovou závislost rozptylu pouze do Legendreových polynomů v  $\cos \chi$ ,

$$\begin{aligned} \langle n'l'm' | P | nlm \rangle &= \langle n'l' | \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \langle l'm' | \sigma(\chi, |p|) | lm \rangle | nl \rangle \\ &= \delta_l^{l'} \delta_m^{m'} \langle n'l' | \delta(|p'| - \sqrt{p^2 + 2mE}) \frac{p}{m} \sigma^l(|p|) | nl \rangle . \end{aligned} \quad (1.105)$$

Všechny maticové elementy se tak redukují na lineární kombinace několika málo integrálů úhlové a rychlostní závislosti účinného průřezu srážky.

<sup>18</sup>Tj. pro všechny indexy částice, pro níž srážkový člen počítáme, a pro indexy obou částic do reakce vstupujících.

<sup>19</sup>Protože Hermiteovy polynomy jsou vlastní funkce 1-dim. kvantového harmonického oscilátoru, je zřejmé, že prostorové Hermiteovy polynomy musí být lineární kombinací vlastních funkcí  $|nlm\rangle = |nl\rangle |lm\rangle$  příslušného sféricky symetrického hamiltoniánu. Radiální část  $|nl\rangle$  je přitom dána zobecněnými Laguerrovými polynomy.

## 1.3 Termodynamická rovnováha

### 1.3.1 Entropie a H–teorém

Rozdělovací funkce  $f$  umožňuje konkrétně vypočítat střední hodnoty různých makroskopických veličin pro jí popsané makroskopické rozdělení částic a obecně tedy nese jistou informaci o stavu souboru těchto částic. Mírou této informace je Boltzmannova entropie

$$S = k \ln W, \quad (1.106)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $W$  je počet různých mikrostavů odpovídajících danému makrostavu.<sup>20</sup> Máme-li např.  $g$  stavů pro  $N$  identických klasických částic, pak  $W^{\text{kl}} = g^N/N!$ . Pro Fermiho – Diracovy částice  $W^{\text{FD}} = g!/(g - N)!/N!$  (protože s každou částicí ubude jeden stav k dispozici pro ostatní) a pro Boseho – Einsteinovy částice  $W^{\text{BE}} = (N + g - 1)!/(g - 1)!/N!$  (protože s každým bosonem roste pravděpodobnost přechodu jiného bosonu do téhož stavu, tedy efektivně přibývá další stav). Dosazením  $W^{\text{kl}}$  do (1.106) dostaneme pro  $N = f\Delta g$  částic v  $\Delta g$  stavech entropii<sup>21</sup>

$$\Delta S^{\text{kl}} = k \ln (\Delta g^N/N!) = kN (\ln \Delta g - \ln N + 1) = kf (1 - \ln f) \Delta g, \quad (1.107)$$

takže objemová hustota entropie klasického plynu<sup>22</sup>

$$s^{\text{kl}} = k \int f (1 - \ln f) h^{-3} d^3 p. \quad (1.108)$$

Podobně pro bosonový nebo fermionový plyn<sup>23</sup> (s rozdělovací funkcí  $f$  normovanou na elementární kvantový objem fázového prostoru)

$$s = -k \int (f \ln f \mp \hat{f} \ln \hat{f}) h^{-3} d^3 p, \quad (1.109)$$

kde ve shodě s (1.87)  $\hat{f} = 1 \pm f$  (horní znaménko platí pro bosony a dolní pro fermiony; výraz (1.108) odtud dostaneme pro  $f \ll 1$ ).

Pro celkovou entropii  $S$ , která je integrálem  $s$  přes objem, platí tzv. Boltzmannův H–teorém, podle něhož je  $S$  veličina neklesající během časového vývoje. Jestliže totiž vyjádříme entropii jako sumu přes elementární kvantové stavy

$$S = k \sum_i f^i (1 - \ln f^i), \quad (1.110)$$

pro jejichž obsazovací čísla  $f^i$  platí kinetická rovnice (viz rov. (1.1))

$$\frac{df^i}{dt} = \sum_{j, i \neq j} (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i), \quad (1.111)$$

kde  $P_{ij}$  je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu  $i$  do stavu  $j$ , pak derivováním (1.110) a dosazením (1.111) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -k \sum_i \frac{df^i}{dt} \ln f^i = -k \sum_{i \neq j} (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i) \ln f^i = \\ &= k \sum_{i < j} P_{ji} f^j \left( \frac{P_{ij} f^i}{P_{ji} f^j} - 1 \right) \ln \frac{f^i}{f^j} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.112)$$

<sup>20</sup>Počet možných kombinací, resp. pravděpodobnost každé z nich je totiž multiplikativní veličina přes jednotlivé podsystémy, zatímco množství informace o nich je aditivní.

<sup>21</sup>Předpokládáme, že  $N \gg 1$ , takže můžeme užít Stirlingovy formule  $\ln N! \simeq N(\ln N - 1)$ . Cf. [4].

<sup>22</sup>Sčítání přes jednotlivé stavy přitom nahradíme integrací přes prostor hybností,  $d^3 g = h^{-3} d^3 p$ .

<sup>23</sup>Ve výrazu pro  $W^{\text{BE}}$  zanedbáváme 1. Dále předpokládáme, že také  $g \gg 1$  a  $(g - N) \gg 1$ .

Pro pravděpodobnosti přechodů mezi elementárními kvantovými stavy platí  $P_{ij} = P_{ji}$  (viz rov. (1.2) a proto každý člen této sumy je nezáporný (protože je úměrný výrazu tvaru  $(x-1)\ln x$ ). Entropie je tedy konstantní právě když všechny přechody s nenulovou pravděpodobností jsou v detailní rovnováze<sup>24</sup>

$$P_{ji}f^j - P_{ij}f^i = 0. \quad (1.113)$$

V opačném případě roste, dokud není dosaženo tohoto rovnovážného stavu. Ke stejnému výsledku dojdeme vyjdeme-li místo z rov. (1.110) z výrazu pro bosony nebo fermiony analogického (1.109) a na pravé straně rov. (1.111) doplníme modifikované rozdělovací funkce  $\hat{f}$  koncových stavů.

**Cvičení 2** Dokažte Boltzmannův  $H$ -teorém pro kvantový plyn. Uvažte, jaký tvar má v tomto případě mít rov. (1.111).

### 1.3.2 Rovnovážné rozdělení

Hledejme nyní explicitní tvar rozdělení v rovnovážném stavu. Při rovnováze s tepelnou lázní o dané teplotě prostřednictvím anihilace a kreace částic musí být hustota energie

$$\varepsilon = \int E f h^{-3} d^3 p, \quad (1.114)$$

kde  $E = E(p)$  je energie jedné částice (tento vztah je zobecněním (1.19)), rovna zadané hodnotě. Při rovnováze s lázní pouze prostřednictvím srážek, při nichž se počet částic zachovává, musí být navíc i hustota částic daná výrazem (1.16) rovna zadané hodnotě. V obou případech tedy bude rovnovážný stav určen vázaným extrémem hustoty entropie  $s$  s vazbovými podmínkami  $\varepsilon = \text{konst.}$  nebo  $\varepsilon = \text{konst.}$  a  $n = \text{konst.}$  (přitom implicitně předpokládáme, že  $f$  vyjadřujeme ve vlastní klidové soustavě plynu, takže nemusíme klást další podmínku na hodnotu hustoty hybnosti, která je nulová)

$$0 = \delta s - \alpha \delta n - \beta \delta \varepsilon. \quad (1.115)$$

Pro fermionový nebo bosonový plyn podle (1.109)

$$\delta s = -k \int \left( (\ln f + 1) \delta f \mp (\ln \hat{f} + 1) \delta \hat{f} \right) h^{-3} d^3 p = -k \int (\ln f - \ln \hat{f}) \delta f h^{-3} d^3 p, \quad (1.116)$$

neboť  $\delta \hat{f} = \pm \delta f$ . Proto tedy podle (1.115), (1.16) a (1.114)

$$0 = - \int \left[ k (\ln f - \ln \hat{f}) + \alpha + \beta E \right] \delta f h^{-3} d^3 p, \quad (1.117)$$

pro každé  $\delta f$ , takže

$$\ln \frac{1 \pm f}{f} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k} E. \quad (1.118)$$

Odtud po přeznačení lagrangeovských součinitelů

$$\alpha = -\frac{\mu}{T}, \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (1.119)$$

<sup>24</sup>Je třeba si uvědomit, že  $P_{ij} \neq 0$  pouze pro stavy  $i$  a  $j$  (viz rov. (1.3)) se stejnou energií a proto je v pořádku, že i obsazení těchto stavů jsou v rovnováze stejná. Přechody mezi stavy s různou energií (a rozdílným obsazením) jsou možné pouze interakcí a výměnou energie s jiným systémem – např. excitace atomu zářením, nebo změna kinetické energie částice srážkou s jinou částicí. V tom případě však indexy  $i, j$  musí určovat elementární stavy obou podsystémů a  $f^i, f^j$  jsou součiny obsazení obou podsystémů.

dostaneme rovnovážné rozdělení bosonového nebo fermionového plynu ve tvaru

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \mp 1}. \quad (1.120)$$

Podobně pro klasický plyn můžeme variovat vztah (1.108), takže odpadne člen s  $\ln f$  (což odpovídá předpokladu  $f \ll 1$ ) a výsledkem je Boltzmanovo rozdělení

$$f = \exp\left(-\frac{E-\mu}{kT}\right), \quad (1.121)$$

kteří lze dostat rovněž jako limitu zanedbáním jedničky ve jmenovateli (1.120).

V případě volného vzniku a zániku částic (např. pro fotony absorbované a vyzařované jinými částicemi) bude  $n$  libovolné a proto  $\alpha=0$  i chemický potenciál  $\mu=0$ . Při dané hustotě  $n$  částic je vztah

$$n = \int f h^{-3} d^3 p = \int \frac{h^{-3} d^3 p}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \mp 1} \quad (1.122)$$

implicitní rovnicí pro chemický potenciál  $\mu = \mu(n, T)$ , nebo spolu s rovnicí (1.114) soustavou rovnic pro  $\mu = \mu(n, \varepsilon)$ ,  $T = T(n, \varepsilon)$ . Pro proměnné  $n$  je (1.114) implicitní rovnicí pro  $T = T(\varepsilon)$  a rovnice (1.122) pak udává závislost  $n = n(T)$ .

Např. pro degenerovaný fermionový plyn, tj. pro teploty  $kT \ll \mu$ , je  $f \simeq \exp(-\frac{E-\mu}{kT}) \rightarrow 0$  pro  $E > \mu$  a  $f \simeq 1 - \exp(\frac{E-\mu}{kT}) \rightarrow 1$  pro  $E < \mu$ , takže<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} n &= \int f h^{-3} d^3 p \simeq 4\pi h^{-3} \left[ \int_0^{p_\mu} p^2 dp + \int_0^\infty \frac{4p_\mu \Delta}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{kT} \frac{dE}{dp}\right)} d\Delta \right] = \\ &= \frac{4\pi}{3h^3} p_\mu^3 \left( 1 + \left[ \frac{\pi kT}{p \frac{dE}{dp}} \right]_{p_\mu}^2 \right), \end{aligned} \quad (1.123)$$

kde jsme zavedli transformaci  $p \rightarrow \Delta = p - p_\mu$  a  $p_\mu$  je řešením rovnice  $E_\mu \equiv E(p_\mu) = \mu$ . Pro nulovou teplotu je  $p_\mu$  rovno Fermiho hybnosti  $p_F$  definované vztahem

$$n = \frac{4\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (1.124)$$

Pro nenulovou teplotu se chemický potenciál liší od Fermiho energie  $E_F = E(p_F)$  o veličinu řádu  $o(T^2)$ . Podobně hustota energie

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int f E(p) h^{-3} d^3 p \simeq 4\pi h^{-3} \left[ \int_0^{p_\mu} E(p) p^2 dp + \int_0^\infty \frac{2p_\mu (2E_\mu + p_\mu \frac{dE}{dp}) \Delta}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{kT} \frac{dE}{dp}\right)} d\Delta \right] = \\ &= 4\pi h^{-3} \left[ \int_0^{p_\mu} E(p) p^2 dp + 2p_\mu (2E_\mu + p_\mu \frac{dE}{dp}) \left[ \frac{\pi kT}{\frac{dE}{dp}} \right]_{p_\mu}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.125)$$

<sup>25</sup>Užíváme přitom substituce  $p = p_\mu + \Delta$  pro  $p > p_\mu$  a  $p = p_\mu - \Delta$  pro  $p < p_\mu$  a přiblížení  $E(p) \simeq \mu + \left[ \frac{dE}{dp} \right]_{p_\mu} \Delta$ , v němž  $p^2 / [\exp(\frac{E-\mu}{kT}) + 1] \simeq (p_\mu + \Delta)^2 / [1 + \exp(E' \Delta / kT)] = p^2 - (p_\mu + \Delta)^2 / [1 + \exp(-E' \Delta / kT)]$ .

Výsledná hustota entropie rovnovážného rozdělení je

$$\begin{aligned} s &= \int \left[ \mp k \ln \left( 1 \mp \exp\left(-\frac{E-\mu}{kT}\right) \right) + f \frac{E-\mu}{T} \right] h^{-3} d^3 p = \\ &= \frac{1}{T} \int p^{(i)} \frac{\partial E}{\partial p^{(i)}} f h^{-3} d^3 p - \frac{\mu}{T} n + \frac{1}{T} \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.126)$$

kde  $i$  je libovolná prostorová složka 1, 2 nebo 3 (první řádek integrujeme per-partes v  $p^i$ , závorka ukazuje, že přes  $i$  nesčítáme). Speciálně, jestliže  $E = E(|p|)$ , pak první člen můžeme dále upravit, takže

$$s = \frac{1}{3T} \int |p| \frac{dE}{d|p|} f h^{-3} d^3 p - \frac{\mu}{T} n + \frac{1}{T} \varepsilon. \quad (1.127)$$

V případě nerelativistických částic, pro které

$$E = \frac{|p|^2}{2m}, \quad (1.128)$$

dostaneme

$$s = \frac{5}{3T} \varepsilon - \frac{\mu}{T} n. \quad (1.129)$$

V případě ultrarelativistických částic (např. fotonů), pro které je

$$E = c|p|, \quad (1.130)$$

dostaneme hustotu entropie

$$s = \frac{4}{3T} \varepsilon - \frac{\mu}{T} n, \quad (1.131)$$

přičemž  $n = M^0$  a  $\varepsilon = cM^1$  a obecný moment radiální části rovnovážné rozdělovací funkce<sup>26</sup>

$$M^n \equiv \int |p|^n f h^{-3} d^3 p = \pm 4\pi(n+2)! h^{-3} \left( \frac{kT}{c} \right)^{n+3} F\left(\pm \exp\left(-\frac{\mu}{kT}\right), n+3\right). \quad (1.132)$$

### 1.3.3 Rovnováha chemických reakcí

Pro směs částic různých typů  $X$ , které mohou být stále popsány nezávislými jednočásticovými funkcemi  $f_X$ , jsou celkové hustoty entropie a energie součty příspěvků hustot od jednotlivých typů částic, takže rovnici (1.115) je třeba zobecnit do tvaru

$$0 = \delta \sum_X s_X - \sum_X \alpha_X \delta n_X - \beta \sum_X \delta \varepsilon_X, \quad (1.133)$$

<sup>26</sup>Zde speciální funkce  $F$  je dána vztahem

$$F(z, s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} z^k = z\Phi(z, s, 1), \quad \Phi(z, s, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (v+k)^{-s} z^k.$$

Speciálně pro  $z = 1$

$$F(1, s) = \zeta(s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s},$$

kde  $\zeta$  je Riemannova zeta funkce,  $\zeta(3) \doteq 1.2020569031596$  a  $\zeta(4) = \pi^4/90 \doteq 1.0823232337111$ .



a variovat vůči všem  $f_X$ . Proto dostáváme rovnice typu (1.120) pro každé  $f_X$  se stejnou teplotou  $T$  (pokud dochází k výměně energie mezi různými typy částic), ale s různými chemickými potenciály  $\mu_X$ , jestliže hustoty částic příslušného typu jsou fixovány (nebo s nulovými  $\mu_X$ , když částice mohou vznikat a zanikat).

Jestliže dochází k chemické reakci

$$\sum_X \nu_X X \rightleftharpoons 0 \quad (1.134)$$

mezi částicemi různých typů, pak jejich chemické potenciály nemohou být nezávislé, ale musí splňovat lineární rovnice

$$\sum_X \nu_X \mu_X = 0 . \quad (1.135)$$

Příklad rovnováhy reakce beta-rozpadu

$$n \rightleftharpoons p + e + \bar{\nu} , \quad (1.136)$$

s relativistickými hodnotami Fermiho energie elektronů a nerelativistickými nukleony<sup>27</sup> je znázorněn na obr. 1.3. Tato reakce hraje důležitou roli při vzniku neutronových hvězd. Vzhledem ke kvazineutralitě musí být hustoty a v termodynamické rovnováze podle rov. (1.124) tedy i Fermiho hybnosti elektronů a protonů stejné, což ovšem vzhledem k řádovému rozdílu jejich klidových hmotností znamená, že elektrony mohou být již silně relativistické, zatímco protony stále nerelativistické,

$$m_e c \ll p_{F,e} = p_{F,p} \ll m_p c , \quad (1.137)$$

a Fermiho energie elektronů (a tím i chemický potenciál) podstatně větší než protonů

$$p_{F,p}^2 / (2m_p) \simeq E_{F,p} \ll E_{F,e} \simeq p_{F,e} c . \quad (1.138)$$

Podle rovnice (1.135) ovšem

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n \quad (1.139)$$

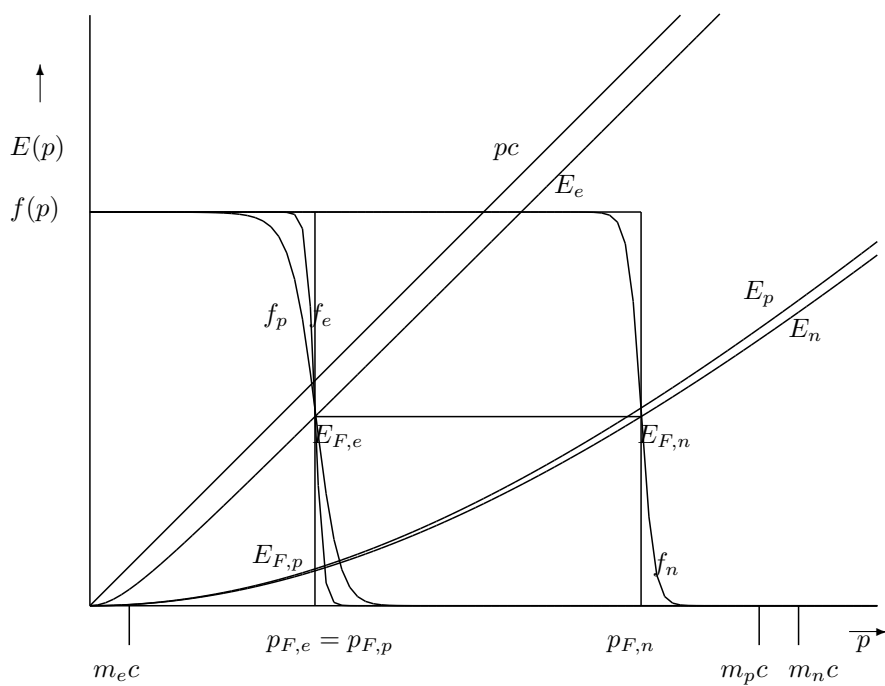
(když předpokládáme, že vzniklá neutrina mohou z prostoru hvězdy volně unikat, takže jejich hustota není fixována a jejich chemický potenciál je nulový), takže chemický potenciál neutronů musí být vyrovnán především chemickým potenciálem elektronů a tedy

$$E_{F,p} \ll E_{F,e} \simeq E_{F,n} . \quad (1.140)$$

Fermiho hybnost a tím i hustota neutronů je proto v rovnováze podstatně větší než hybnosti resp. hustoty elektronů a protonů.

---

<sup>27</sup>Tento tzv. URCA proces, ve kterém vznikající neutrina a antineutrina odnášejí energii, se uplatňuje v ochlazování vznikajících neutronových hvězd.



Obrázek 1.3: Rovnováha reakce  $n \rightleftharpoons p + e + \bar{\nu}$  s relativistickou Fermiho energií elektronů a nerenlativistickými nukleony.

# Literatura

- [1] Bhatnagar D., Gross E., Krook M., 1954: Phys. Rev. 94, 511
- [2] Kracík J., Tobiáš J.: Fyzika plazmatu, Academia, Praha 1966
- [3] Kracík J., Šesták B., Aubrecht L.: Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu, Academia, Praha 1974
- [4] Oxenius J.: Kinetic Theory of Particles and Photons (Springer Series in Electrophysics, vol. 20) Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1986
- [5] Stewart J. M.: Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory (Lecture Notes in Physics 10), Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1971
- [6] Sturrock P. A.: Plasma Physics, Cambridge University Press 1994