

Matematická logika

Lekce 4: Úvod do predikátové logiky

Petr Cintula a Igor Sedlár

Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

www.cs.cas.cz/sedlar/mal

Predikátové jazyky

Predikátový jazyk $\mathcal{P} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{ar} \rangle$:

F: nejvýše spočetná množina **funkčních** symbolů

P: nejvýše spočetná množina **predikátových** symbolů $\approx \notin \mathbf{F} \cap \mathbf{P} = \emptyset$

ar: funkce přiřazující každému symbolu jeho **aritu**

Pozn: funkčním/predikátovým symbolům s nulovou aritou říkáme
objektové/pravdivostní konstanty

Objektové proměnné OP: spočetná množina, zpravidla $x, y, z, x_1, x_2, \dots$

$\mathcal{P}$ -termy: nejmenší množina X

- obsahující objektové proměnné ($\text{OP} \subseteq X$)
- uzavřená na funkční symboly; tj. pokud $f \in \mathbf{F}$, $\mathbf{ar}(\mathbf{F}) = n$ a
 $t_1, \dots, t_n \in X$, pak $f(t_1, \dots, t_n) \in X$

Píšeme $t(x_1, \dots, x_n)$ pokud proměnné v termu t jsou mezi $x_1, \dots, x_n$

Formule

Atomické $\mathcal{P}$ -formule: a) výrazy tvaru $t_1 \approx t_2$, kde t_1, t_2 jsou $\mathcal{P}$ -termy.

b) výrazy tvaru $R(t_1, \dots, t_n)$, kde $R \in \mathbf{P}$, $\text{ar}(R) = n$
a $t_1, \dots, t_n$ jsou $\mathcal{P}$ -termy.

$\mathcal{P}$ -formule: nejmenší množina X

- obsahující atomické $\mathcal{P}$ -formule
- uzavřená na spojky $\rightarrow$ a $\neg$; tj. pokud $\varphi, \psi \in X$ pak $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in X$
- uzavřená na **kvantifikátory** $\exists$ a $\forall$; tj. pokud $x \in \text{OP}$ a $\varphi \in X$,
pak $\forall x \varphi, \exists x \varphi \in X$

Nadále používáme definované spojky:

$$\top = \forall x (x \approx x)$$

$$\perp = \neg \top$$

$$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Příklady

Jazyk teorie množin $\{\in\}$

Symbol	Druh	Arita
$\in$	P	2

Jazyk teorie grup $\{+, \bar{0}\}$

Symbol	Druh	Arita
$+$	F	2
$\bar{0}$	F	0

Aritmetický jazyk $\{+, \cdot, \bar{0}, S, \leq, <\}$

Symbol	Druh	Arita
$+$	F	2
$\cdot$	F	2
$\bar{0}$	F	0
S	F	1
$\leq$	P	2
$<$	P	2

Volné proměnné

Výskyt proměnné x ve fli φ je **vázaný** pokud je v podformuli tvaru $\forall x \psi$ nebo $\exists x \psi$; v opačném případě jde o výskyt **volný**

Příklady: volné výskyty jsou vyznačené červeně:

$$\exists y (x \approx y) \quad \forall x \exists x (x \approx 5) \quad x \approx 5 \rightarrow \exists x (x \approx 6)$$

Proměnná je ve v dané fli **volná** pokud v ní má nějaký volný výskyt

Sentence: formule bez volných proměnných

Píšeme $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ pokud volné proměnné ve φ jsou mezi $x_1, \dots, x_n$

Pozn. ne všechny proměnné z $x_1, \dots, x_n$ musí být volné v $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

Struktury pro daný jazyk

Uvažujme jazyk $\mathcal{P} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{ar} \rangle$,

$\mathcal{P}$ -struktura: systém $\mathbf{M} = \langle M, \langle f^{\mathbf{M}} \rangle_{f \in \mathbf{F}}, \langle P^{\mathbf{M}} \rangle_{P \in \mathbf{P}} \rangle$ kde

- $M \neq \emptyset$ je doména struktury
- interpretace n -árního funkčního symbolu $f \in \mathbf{F}$: $f^{\mathbf{M}}: M^n \rightarrow M$
- interpretace n -árního predikativního symbolu $P \in \mathbf{P}$: $P^{\mathbf{M}} \subseteq M^n$

Interpretace $\mathcal{P}$ -termu $t(x_1, \dots, x_n)$ v $\mathbf{M}$: funkce $t^{\mathbf{M}}: M^n \rightarrow M$ definovaná
pro $a_1, \dots, a_n \in M$

$$t^{\mathbf{M}}(\vec{a}) = \begin{cases} a_i & \text{pokud } t = x_i \\ f^{\mathbf{M}}(t_1^{\mathbf{M}}(\vec{a}), \dots, t_k^{\mathbf{M}}(\vec{a})) & \text{pokud } t = f(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

Píšeme pouze $t(\vec{a})$ pokud je struktura $\mathbf{M}$ zřejmá z kontextu

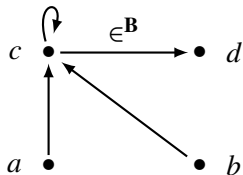
Příklady

Struktura **A** pro $\{+, \bar{0}\}$ s doménou $\{a, b\}$

$+^A$	a	b
a	a	b
b	b	a

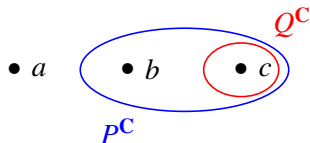
$\bar{0}^A = a.$

Struktura **B** pro $\{\in\}$ s doménou $\{a, b, c, d\}$



Příklady

Struktura $\mathbf{C}$ pro $\{P, Q\}$ se dvěma binárními predikáty a doménou $\{a, b, c\}$:



Struktura přirozených čísel jako struktura pro $\{+, \cdot, \bar{0}, S, \leq, <\}$:

$$\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathbf{N}}, \cdot^{\mathbf{N}}, \bar{0}^{\mathbf{N}}, S^{\mathbf{N}}, \leq^{\mathbf{N}}, <^{\mathbf{N}} \rangle$$

M-ohodnocení

M-ohodnocení v : zobrazení $v: OP \rightarrow M$

Pro term $t(x_1, \dots, x_n)$ a **M**-ohodnocení v píšeme

$$v(t) = t^{\mathbf{M}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

Pro každé **M**-ohodnocení v , proměnnou $x \in OP$ a prvek $a \in M$, definujeme ohodnocení $v_{x=a}$ jako

$$v_{x=a}(y) = \begin{cases} a & \text{pokud } y = x \\ v(y) & \text{pokud } y \neq x \end{cases}$$

Pozn. $(v_{x=a})_{x=b} = v_{x=b}$ a $v_{x=v(x)} = v$.

Splnitelnost

$\mathcal{P}$ -fle χ je splnitelná v $\mathbf{M}$ -ohodnocení v : píšeme $\mathbf{M} \models \chi[v]$

Definujeme indukci podle složitosti χ (součtu počtu kvantifikátorů
a spojek v χ):

$$\mathbf{M} \models (t_1 \approx t_2)[v] \text{ iff } v(t_1) = v(t_2)$$

$$\mathbf{M} \models P(t_1, \dots, t_k)[v] \text{ iff } \langle v(t_1), \dots, v(t_k) \rangle \in P_{\mathbf{M}}$$

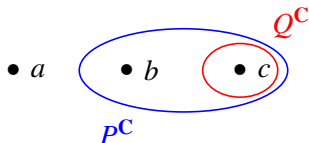
$$\mathbf{M} \models (\neg \varphi)[v] \text{ iff } \mathbf{M} \not\models \varphi[v]$$

$$\mathbf{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[v] \text{ iff } \mathbf{M} \not\models \varphi[v] \text{ nebo } \mathbf{M} \models \psi[v]$$

$$\mathbf{M} \models (\forall z \varphi)[v] \text{ iff pro každé } m \in M \text{ platí } \mathbf{M} \models \varphi[v_{z=m}]$$

$$\mathbf{M} \models (\exists z \varphi)[v] \text{ iff existuje } m \in M \text{ tž. } \mathbf{M} \models \varphi[v_{z=m}]$$

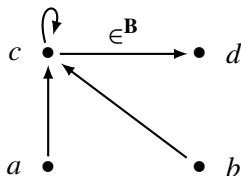
Příklady



$$\mathbf{C} \models P(x) \rightarrow Q(x)[v_{x=a}]$$

$$\mathbf{C} \not\models P(x) \rightarrow Q(x)[v_{x=b}]$$

$$\text{Tedy } \mathbf{C} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))[v]$$



$$\mathbf{B} \models (x \in y) \wedge (y \in y)[v_{x=a, y=c}]$$

Tedy

$$\mathbf{B} \models \exists x \exists y ((x \in y) \wedge (y \in y))[v]$$

Splnitelnost a volné proměnné

Splnitelnost fle závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Lemma 4.1

Nechť $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je formule. Pak pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v a v' tž. $v(x_i) = v'(x_i)$ pro každé $i \leq n$ platí:

$$\mathbf{M} \models \varphi[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models \varphi[v']$$

Důkaz.

Indukcí dle složitosti φ :

- $\varphi = P(t_1, \dots, t_k)$. Z předpokladu víme, že proměnné v t_i jsou mezi proměnnými $\{x_1, \dots, x_n\}$ a tudíž $v(t_i) = v'(t_i)$, ...
- $\varphi = \neg\psi$ nebo $\varphi = \psi \rightarrow \chi$: zřejmé
- $\varphi = \forall x \psi$ nebo $\varphi = \exists x \psi$ pro nějakou fli $\psi(x, \vec{x})$. Víme, že $(v_{x=m})(x_i) = (v'_{x=m})(x_i)$ a triviálně $(v_{x=m})(x) = (v'_{x=m})(x)$, tedy z IP dostaneme:
 $\mathbf{M} \models \psi[v_{x=m}]$ iff $\mathbf{M} \models \psi[v'_{x=m}]$, ...



Splnitelnost a volné proměnné

Splnitelnost fle závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Lemma 4.1

Nechť $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je formule. Pak pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v a v' tž. $v(x_i) = v'(x_i)$ pro každé $i \leq n$ platí:

$$\mathbf{M} \models \varphi[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models \varphi[v']$$

Důsledek 4.2

Nechť φ je fle, kde x není volná a v je $\mathbf{M}$ -ohodnocení a $\mathbf{M} \models \varphi[v]$. Pak pro každé $m \in M$ platí $\mathbf{M} \models \varphi[v_{x=m}]$

Splnitelnost a volné proměnné

Splnitelnost fle závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Lemma 4.1

Nechť $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je formule. Pak pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v a v' tž. $v(x_i) = v'(x_i)$ pro každé $i \leq n$ platí:

$$\mathbf{M} \models \varphi[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models \varphi[v']$$

Důsledek 4.3

Nechť φ je sentence a v je $\mathbf{M}$ -ohodnocení. Pak jsou následující podmínky ekvivaletní:

- $\mathbf{M} \models \varphi[v]$
- *pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v' platí $\mathbf{M} \models \varphi[v']$*
- *existuje $\mathbf{M}$ -ohodnocení v'' tž. $\mathbf{M} \models \varphi[v'']$*

Pro sentence tedy píšeme pouze $\mathbf{M} \models \varphi$ nebo $\mathbf{M} \not\models \varphi$

Substitutovateľnosť

Pomocí $\varphi(x/t)$ značíme formuli vzniklou z fle φ nahrazením každého volného výskytu objektové proměnné x termem t

Pro formuli φ , $\mathbf{M}$ -ohodnocení v a proměnnou y nevyskytující se ve φ :

$$\mathbf{M} \models \varphi[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models \varphi(x/y)[v_{y=v(x)}]$$

Tvrzení 4.4

Nechť φ je fle, y proměnná nevyskytující se ve φ a $\mathbf{M}$ -ohodnocení v .

$$\mathbf{M} \models (\forall x \varphi)[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models (\forall y \varphi(x/y))[v].$$

$$\mathbf{M} \models (\exists x \varphi)[v] \quad \text{iff} \quad \mathbf{M} \models (\exists y \varphi(x/y))[v].$$

Substitutovatelnost

Pomocí $\varphi(x/t)$ značímě formuli vzniklou z fle φ nahrazením každého volného výskytu objektové proměnné x termem t

Term t je **substitutovatelný** za x ve fli $\varphi(x, \vec{z})$ pro každou proměnnou z vyskytující se v t platí, že žádný volný výskyt x v $\varphi(x, \vec{z})$ není v dosahu kvantifikátoru přes z .

Lemma 4.5

Pokud je t substitutovatelný za x ve fli $\varphi(x, \vec{z})$, pak pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v :

- *Pokud $\mathbf{M} \models (\forall x \varphi)[v]$, pak $\mathbf{M} \models \varphi(x/t)[v]$.*
- *Pokud $\mathbf{M} \models \varphi(x/t)[v]$, pak $\mathbf{M} \models (\exists x \varphi)[v]$.*

Bez předpokladu substitutovatelnosti obě implikace nemusí platit.

Sémantický důsledek

$\mathcal{P}$ -Teorie T : libovolná množina $\mathcal{P}$ -sentencí

Model $\mathcal{P}$ -teorie T : $\mathcal{P}$ -struktura $\mathbf{M}$ tž., $\mathbf{M} \models \varphi$ pro každou $\varphi \in T$

píšeme $\mathbf{M} \models T$

Definice 4.6

Řekneme, že $\mathcal{P}$ -fle φ je **sémantickým důsledkem** teorie T , píšeme $T \models^{\mathcal{P}} \varphi$, pokud

pro každý model $\mathbf{M}$ teorie T a každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v platí $\mathbf{M} \models \varphi[v]$.

Horní index $\mathcal{P}$ vynecháváme pokud je zřejmý z kontextu

Role jazyka v definici $\models$

Tvrzení 4.7

Pro každou $\mathcal{P}$ -teorii T a $\mathcal{P}$ -fli φ jsou následující ekvivaletní:

- 1 $T \models^{\mathcal{P}} \varphi$
- 2 $T \models^{\mathcal{P}'} \varphi$ pro každý jazyk $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$
- 3 $T \models^{\mathcal{P}'} \varphi$ pro nejmenší jazyk $\mathcal{P}'$ tž. $T \cup \{\varphi\}$ jsou $\mathcal{P}'$ -fle
- 4 $T \models^{\mathcal{P}'} \varphi$ pro každý jazyk $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$ tž. $T \cup \{\varphi\}$ jsou $\mathcal{P}'$ -fle

Relace důsledku

Tvrzení 4.8

Relace $\models^{\mathcal{P}}$ je *relace důsledku* na množině $\mathcal{P}$ -sentencí, tj. platí:

- $\{\varphi\} \models^{\mathcal{P}} \varphi$
- pokud $T \models^{\mathcal{P}} \varphi$, tak $T \cup S \models^{\mathcal{P}} \varphi$
- pokud $T \models^{\mathcal{P}} \varphi$ a $S \cup \{\varphi\} \models^{\mathcal{P}} \psi$, pak $T \cup S \models^{\mathcal{P}} \psi$

reflexivita

monotonie

řez

Pozn. finitaritu zatím nevíme!

Tautologie a uzávěr formule

Tautologie: formule tž. $\emptyset \models \varphi$

Formuli $\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_n \varphi(y_1, \dots, y_n)$ říkáme **uzávěr fle** $\varphi(y_1, \dots, y_n)$,
značíme ji $\forall \varphi$

$\forall \varphi$ je sentence

Pokud je φ sentence, pak $\forall \varphi = \varphi$

Lemma 4.9

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\mathbf{M} \models \varphi[v]$ pro každé $\mathbf{M}$ -ohodnocení v
- $\mathbf{M} \models \forall \varphi$

Tedy φ je tautologie iff $\forall \varphi$ je tautologie

Formule

$$\neg(x \in x)$$

není tautologie (viz. strukturu **B**) ale je sémantickým důsledkem teorie

$$\{\forall x \forall y (x \in y \rightarrow \neg(y \in x))\}$$

Důležité tautologie

Tvrzení 4.10

Pro každý jazyk $\mathcal{P}$ jsou následující $\mathcal{P}$ -formule tautologie

(pokud x není volná v χ):

- | | |
|--|---|
| 1. $\chi \leftrightarrow \forall x \chi$ | 2. $\exists x \chi \leftrightarrow \chi$ |
| 3. $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$ | 4. $\forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$ |
| 5. $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi)$ | 6. $\exists x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$ |
| 7. $\forall x (\chi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \forall x \varphi)$ | 8. $\forall x (\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \chi)$ |
| 9. $\exists x (\chi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \exists x \varphi)$ | 10. $\exists x (\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \chi)$ |
| 11. $\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ | 12. $\forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$ |
| 13. $\exists x (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi \vee \exists x \psi$ | 14. $\chi \vee \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x (\chi \vee \varphi)$ |
| 15. $\forall x (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ | 16. $\chi \wedge \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x (\chi \wedge \varphi)$ |

Tautologie pro rovnost $\approx$

Tvrzení 4.11

Pro každý jazyk $\mathcal{P}$ jsou následující $\mathcal{P}$ -formule tautologie

(pokud y je substituovatelná za x v φ)

$x \approx x$ (reflexivita)

$x \approx y \rightarrow y \approx x$ (symetrie)

$x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z$ (transitivita)

$x \approx y \rightarrow t \approx t(x/y)$ (congruence)

$x \approx y \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi(x/y))$

Pokud bychom $\approx$ brali jako běžný predikátový symbol, tak by existovali i jiné interpretace než identita
pro $\mathcal{P} = \{\approx\}$ např. $\approx^{\mathbf{M}} = M^2$

Tautologie pro ekvivalenci $\leftrightarrow$

Tvrzení 4.12

Pro každý jazyk $\mathcal{P}$ jsou následující $\mathcal{P}$ -formule tautologie

$$\varphi \leftrightarrow \varphi \quad (\text{reflexivita})$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi) \quad (\text{symetrie})$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \chi) \quad (\text{transitivita})$$

Pokud navíc φ a ψ mají stejné volné proměnné a χ' je fle vzniklá z χ nahrazením **některých** výskytů fle φ flí ψ , pak i následující $\mathcal{P}$ -formule je tautologie

$$\forall(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\chi \leftrightarrow \chi').$$

Definice 4.13

Formule je v prenexní normální formě, pokud má tvar

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi,$$

kde Q_i jsou kvantifikátory, x_i vzájemně různé proměnné a φ fle bez kvantifikátorů.

Věta 4.14

Pro každou fli φ existuje fle φ' v prenexní normální formě tž. $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$

Důkaz prenexace formule φ s n kvantifikátory

Příprava: díky tvrzení 4.4. víme, že pro fli $\psi(x, \vec{z})$ a proměnnou y nevyskytující se ve φ platí:

$$\vdash \forall x \psi \leftrightarrow \forall y \psi(x/y)$$

Tudíž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že i tý kvantifikátor ve φ (číslováno zleva) váže proměnnou x_i a žádná z x_i není volná ve φ

Složitost kvantifikátoru ve φ : počet spojek v jejichž dosahu je

Dokazujeme indukcí podle součtu složitostí všech kvantifikátorů ve φ

Pokud je to 0, tak fle je v prenexní normální formě

Indukční krok

Konvence: Pokud Q je jeden z kvantifikátorů, tak $\bar{Q}$ je ten druhý

Ve φ musí existovat podformule jednoho z následujících tvarů:
které lze, díky tvrzení 4.12, ekvivalentně nahradit:

$$\begin{array}{ll} \neg Qx_i\psi & \bar{Q}x_i\neg\psi \\ Qx_i\psi \rightarrow \chi & \bar{Q}x_i(\psi \rightarrow \chi) \\ \chi \rightarrow Qx_i\psi & Qx_i(\chi \rightarrow \psi) \end{array}$$

Nechť φ' je příslušná fle ekvivalentní s φ

Složitost i -tého kvantifikátoru v φ' je o jednu nižší a ostatní se nezmění

Indukční předpoklad dokončí důkaz

Heuristika pro vlastní algoritmus: začít zevnitř

Doporučená četba

V. Švejdar. *Logika: Neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.
Volně ke stažení na <http://www1.cuni.cz/~svejdar/>
Kap. 3.1.