

Matematická logika

Lekce 2: Sémantika výrokové logiky

Petr Cintula

Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

www.cs.cas.cz/cintula/MAL

Připomeňme (a zkomplikujme) si definici formule

Var: množina výrokových atomů

For_n^V: množina formulí sestavených z $V \subseteq \text{Var}$ pomocí **maximálně n primitivních spojek** $\neg$ a $\rightarrow$

Píšeme $\text{For}^V = \bigcup_{n \geq 0} \text{For}_n^V$, $\text{For}_n = \text{For}_n^{\text{Var}}$ a $\text{For} = \text{For}^{\text{Var}}$

Píšeme $\varphi(p_1, \dots, p_n)$, pokud $\varphi \in \text{For}^{p_1, \dots, p_n}$

Připomeňme (a zkomplikujme) si definici formule

Var: množina výrokových atomů

For_n^V: množina formulí sestavených z $V \subseteq \text{Var}$ pomocí **maximálně n primitivních spojek** $\neg$ a $\rightarrow$

Píšeme $\text{For}^V = \bigcup_{n \geq 0} \text{For}_n^V$, $\text{For}_n = \text{For}_n^{\text{Var}}$ a $\text{For} = \text{For}^{\text{Var}}$

Píšeme $\varphi(p_1, \dots, p_n)$, pokud $\varphi \in \text{For}^{p_1, \dots, p_n}$

Definované spojky: binární $\vee, \wedge, \leftrightarrow$:

$$\varphi \vee \psi = \neg \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Připomeňme (a zkomplikujme) si definici formule

Var: množina výrokových atomů

For_n^V: množina formulí sestavených z $V \subseteq \text{Var}$ pomocí **maximálně n primitivních spojek** $\neg$ a $\rightarrow$

Píšeme $\text{For}^V = \bigcup_{n \geq 0} \text{For}_n^V$, $\text{For}_n = \text{For}_n^{\text{Var}}$ a $\text{For} = \text{For}^{\text{Var}}$

Píšeme $\varphi(p_1, \dots, p_n)$, pokud $\varphi \in \text{For}^{p_1, \dots, p_n}$

Definované spojky: binární $\vee, \wedge, \leftrightarrow$:

$$\varphi \vee \psi = \neg \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Navíc ještě definujeme **konstanty** $\top = p \rightarrow p$ a $\perp = \neg \top$,
očividně $e(\top) = 1$ a $e(\perp) = 0$

Ohodnocení

Ohodnocení je každé zobrazení $e: \text{For} \rightarrow \{0, 1\}$ tž.:

$$e(\neg\varphi) = 1 - e(\varphi) \qquad e(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } e(\varphi) \leq e(\psi) \\ 0 & \text{pokud } e(\varphi) > e(\psi) \end{cases}$$

Tvrzení 2.1

Nechť $V \subseteq \text{Var}$. Pak pro každou $\varphi \in \text{For}^V$ a každé ohodnocení e_1 a e_2 takové, že $e_1(p) = e_2(p)$ pro každé $p \in V$ platí $e_1(\varphi) = e_2(\varphi)$.

Ohodnocení

Ohodnocení je každé zobrazení $e: \text{For} \rightarrow \{0, 1\}$ tž.:

$$e(\neg\varphi) = 1 - e(\varphi) \qquad e(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } e(\varphi) \leq e(\psi) \\ 0 & \text{pokud } e(\varphi) > e(\psi) \end{cases}$$

Tvrzení 2.1

Nechť $V \subseteq \text{Var}$. Pak pro každou $\varphi \in \text{For}^V$ a každé ohodnocení e_1 a e_2 takové, že $e_1(p) = e_2(p)$ pro každé $p \in V$ platí $e_1(\varphi) = e_2(\varphi)$.

Důsledek 2.2

Pro každou funkci $e: \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ existuje právě jedno ohodnocení $\bar{e}$ tž. $e(p) = \bar{e}(p)$ pro každé $p \in \text{Var}$.

Splnitelné formule a tautologie

Definice 2.3

Řekneme, že formule φ je

- splněná ohodnocením e , pokud $e(\varphi) = 1$.
- splnitelná, pokud splněná **nějakým** ohodnocením.
- tautologie, pokud splněná **každým** ohodnocením.

Splnitelné formule a tautologie

Definice 2.3

Řekneme, že formule φ je

- **splněná ohodnocením e** , pokud $e(\varphi) = 1$.
- **splnitelná**, pokud splněná **nějakým** ohodnocením.
- **tautologie**, pokud splněná **každým** ohodnocením.

Tvrzení 2.4

Formule φ je tautologie iff $\neg\varphi$ není splnitelná.

Splnitelné formule a tautologie

Definice 2.3

Řekneme, že formule φ je

- **splněná** ohodnocením e , pokud $e(\varphi) = 1$.
- **splnitelná**, pokud splněná **nějakým** ohodnocením.
- **tautologie**, pokud splněná **každým** ohodnocením.

Tvrzení 2.4

Formule φ je tautologie iff $\neg\varphi$ není splnitelná.

Tvrzení 2.5

Existuje algoritmus, který pro každou fli rozhodne, zda je splnitelná/tautologie.

Příklady tautologií

tautologie

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

obvyklé jméno

zákon vyloučeného třetího

princip sporu

oslabení

záměna

distribuce

kontrakce

transitivita

zákon dvojí negace

kontrapozice

Ekvivalentní formule

Definice 2.6

Řekneme, že formule φ a ψ jsou **ekvivalentní**, píšeme $\varphi \equiv \psi$, pokud $e(\varphi) = e(\psi)$ pro každé ohodnocení e .

Tvrzení 2.7

- *Fle φ a ψ jsou ekvivalentní iff fle $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.*
- *Fle φ je tautologie iff je ekvivalentní s flí $\top$.*

Důsledek 2.8

Existuje algoritmus, který pro každé dvě fle rozhodne, zda jsou ekvivalentní.

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

Příklady ekvivalentních formulí

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Podformule a ekvivalentní formule

Indukcí definujeme pojem **podformule**:

- jedinou podformulí atomu je atom
- podformule $\neg\varphi$ jsou $\neg\varphi$ a všechny podformule φ
- podformule $\varphi \rightarrow \psi$ jsou $\varphi \rightarrow \psi$ a všechny podformule φ a ψ

Věta 2.9

Nechť φ a ψ jsou ekvivalentní formule a χ' je formule vzniklá z χ nahrazením její podformule φ formulí ψ . Pak χ a χ' jsou ekvivalentní.

Formule jako funkce

Definice 2.10

Nechť $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ je formule. Definujeme funkci $\bar{\varphi}: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ následovně

$$\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = e(\varphi),$$

kde e je libovolné ohodnocení tž. $e(p_i) = x_i$.

Pozn. definice je korektní díky tvrzení 2.1

Booleovská funkce (pohled logika)

Definice 2.11

Booleovská funkce n proměnných je libovolná fce $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Příklad 2.12

- Booleovské fce 0 proměnných: konstanty 0 a 1

Booleovská funkce (pohled logika)

Definice 2.11

Booleovská funkce n proměnných je libovolná fce $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Příklad 2.12

- Booleovské fce 0 proměnných: konstanty 0 a 1
- Booleovské fce 1 proměnné: konstantní fce $0(x) = 0$ a $1(x) = 1$;
identita $i(x) = x$ a negace $\neg(x) = 1 - x$

Booleovská funkce (pohled logika)

Definice 2.11

Booleovská funkce n proměnných je libovolná fce $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Příklad 2.12

- Booleovské fce 0 proměnných: konstanty 0 a 1
- Booleovské fce 1 proměnné: konstantní fce $0(x) = 0$ a $1(x) = 1$;
identita $i(x) = x$ a negace $\neg(x) = 1 - x$
- Základní Booleovské fce 2 proměnných: konjunkce $\wedge$,
disjunkce $\vee$, implikace $\rightarrow$, ekvivalence $\leftrightarrow$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Booleovské fce 2 proměnných

x	y																
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Booleovské fce 2 proměnných

x	y	1	x				y	$\neg$				$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \leftrightarrow y$	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Booleovské fce 2 proměnných

x	y	1	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	x	$x \leftarrow y$	y	$x \leftrightarrow y$	$x \vee y$			$\neg y$		$\neg x$			0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Booleovské fce 2 proměnných

x	y	1	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	x	$x \leftarrow y$	y	$x \leftrightarrow y$	$x \vee y$	$(x \wedge y) \neg$	$(x \leftrightarrow y) \neg$	$y \neg$	$(x \leftarrow y) \neg$	$x \neg$	$(y \neg \leftarrow x) \neg$	$(x \wedge y) \neg$	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Booleovské fce 2 proměnných

x	y	1	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	x	$x \leftarrow y$	y	$x \leftrightarrow y$	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$	$\neg(x \leftrightarrow y)$	$\neg y$	$\neg(x \rightarrow y)$	$\neg x$	$\neg(x \leftarrow y)$	$\neg(x \wedge y)$	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

- Funkce $\neg(x \leftrightarrow y)$ je známá jako *XOR* (exklusivní disjunkce) nebo jako $\oplus_2$ (sčítání v $\mathbb{Z}_2$)
- Funkce $\neg(x \wedge y)$ je známá jako *NAND*
- Funkce $\neg(x \vee y)$ je známá jako *NOR*

Pozn. $\neg x = x \text{ NAND } x$ a $x \rightarrow y = x \text{ NAND } \neg y = \neg(\neg x \text{ NOR } y)$

Zobecněné konjunkce/disjunkce

Definice 2.13

Pro každé n definujeme n -ární verze spojky $\wedge$ a $\vee$ indukcí. Nejprve definujeme: $\bigwedge() = \top$, $\bigvee() = \perp$ a

$$\bigwedge(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\bigwedge(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \wedge \varphi_n$$

$$\bigvee(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\bigvee(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \vee \varphi_n.$$

Lemma 2.14

Pro každou n -tici flí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ platí, že

$$e(\bigwedge(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = \min\{e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n)\}$$

$$e(\bigvee(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = \max\{e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n)\}.$$

V definici $\bigvee$ a $\bigwedge$ nezávisí na závorkování ani na pořadí argumentů

Věta o funkční úplnosti

Věta 2.15

Nechť f je Booleovská funkce n proměnných. Pak existuje formule $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ taková, že $f = \bar{\varphi}$.

Důkaz.

Pro $\vec{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \{0, 1\}^n$ definujme formuli

$$\chi_{\vec{x}} = \bigwedge (p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \dots, p_n^{x_n}),$$

kde $p^1 = p$ a $p^0 = \neg p$. Platí: $\chi_{\vec{x}}(\vec{y}) = 1$ iff $\vec{x} = \vec{y}$.

Hledanou formuli φ pak definujeme takto:

$$\varphi = \bigvee_{\vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ a } f(\vec{x})=1} \chi_{\vec{x}}. \quad \square$$

Věta o funkční úplnosti

Věta 2.15

Nechť f je Booleovská funkce n proměnných. Pak existuje formule $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ taková, že $f = \bar{\varphi}$.

Důkaz.

Pro $\vec{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \{0, 1\}^n$ definujeme formuli

$$\delta_{\vec{x}} = \bigvee (p_1^{1-x_1}, p_2^{1-x_2}, \dots, p_n^{1-x_n}),$$

kde $p^1 = p$ a $p^0 = \neg p$. Platí: $\bar{\delta}_{\vec{x}}(\vec{y}) = 0$ iff $\vec{x} = \vec{y}$.

Hledanou formuli φ' pak definujeme takto:

$$\varphi' = \bigwedge_{\vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ a } f(\vec{x})=0} \delta_{\vec{x}}. \quad \square$$

CNF a DNF

Pozn. atomům a jejich negacím se říká **literály**

Definice 2.16

Formule tvaru:

$$\bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq n_i} \varphi_{i,j},$$

kde $\varphi_{i,j}$ jsou literály, je v **konjunktivní normální formě**. Formule tvaru:

$$\bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq n_i} \varphi_{i,j},$$

kde $\varphi_{i,j}$ jsou literály, je v **disjunktivní normální formě**.

Důsledek 2.17

Každá formule je ekvivalentní nějaké formuli v konjunktivní a nějaké formuli v disjunktivní normální formě.

Více o CNF a DNF

CNF ani DNF nejsou unikátní

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$$

Více o CNF a DNF

CNF ani DNF nejsou unikátní

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$$

Je zřejmé, že použitím následujících ekvivalencí a věty 2.9 lze každou fli převést na CNF a DNF

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Více o CNF a DNF

CNF ani DNF nejsou unikátní

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$$

Je zřejmé, že použitím následujících ekvivalencí a věty 2.9 lze každou fli převést na CNF a DNF

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Každá fle je ekvivalentní fli v CNF/DNF, která v každém kon/disjunktů:

- má každý literál nejvýše jednou a
- nemá p i $\neg p$ zároveň (pokud to není (negace) tautologie).

Obečné množiny spojek

Atomické formule (výrokové atomy): spočetná nekonečná množina Var

Ztotožníme **spojky** a **Booleovské funkce**

Jazyk $\mathcal{L}$: množina Booleovských funkcí

Arita: arita spojky je počet proměnných

$\mathcal{L}$ -Formule: nejmenší množina $\text{For}_{\mathcal{L}}$ obsahující Var , tž. pro každou n -ární $c \in \mathcal{L}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \text{For}_{\mathcal{L}}$$

Báze

Ohodnocení je každé zobrazení $e: \text{For} \rightarrow \{0, 1\}$ tž. pro každou n -ární $c \in \mathcal{L}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$e(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n))$$

Jako dříve definujeme pro každou φ Booleovskou fci $\bar{\varphi}$.

Báze

Ohodnocení je každé zobrazení $e: \text{For} \rightarrow \{0, 1\}$ tž. pro každou n -ární $c \in \mathcal{L}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$e(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n))$$

Jako dříve definujeme pro každou φ Booleovskou fci $\bar{\varphi}$.

Definice 2.18

Množina $\mathcal{L}$ Booleovských funkcí je **bází** (ekv. jazyk $\mathcal{L}$ je **funkčně úplný**) pokud pro každou Booleovskou funkci f existuje formule $\varphi \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ taková, že $f = \bar{\varphi}$.

Báze

Ohodnocení je každé zobrazení $e: \text{For} \rightarrow \{0, 1\}$ tž. pro každou n -ární $c \in \mathcal{L}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$e(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n))$$

Jako dříve definujeme pro každou φ Booleovskou fci $\bar{\varphi}$.

Definice 2.18

Množina $\mathcal{L}$ Booleovských funkcí je **bází** (ekv. jazyk $\mathcal{L}$ je **funkčně úplný**) pokud pro každou Booleovskou funkci f existuje formule $\varphi \in \text{For}_{\mathcal{L}}$ taková, že $f = \bar{\varphi}$.

Příklad 2.19

Následující množiny Booleovských funkcí jsou báze:

$$\{\rightarrow, \neg\} \quad \{\rightarrow, \perp\} \quad \{\wedge, \neg\} \quad \{\vee, \neg\} \quad \{NAND\} \quad \{NOR\}.$$

Teorie a model

Teorie: množina formulí

Model teorie Γ : ohodnocení e , t.ž. $e(\varphi) = 1$ pro každou $\varphi \in \Gamma$

Někdy říkáme, že teorie je **splnitelná**, pokud má model

Teorie a model

Teorie: množina formulí

Model teorie Γ : ohodnocení e , t.ž. $e(\varphi) = 1$ pro každou $\varphi \in \Gamma$

Někdy říkáme, že teorie je **splnitelná**, pokud má model

Věta 2.20 (Věta o kompaktnosti)

Teorie Γ má model iff každá její konečná podmnožina má model.

Aplikace věty o kompaktnosti

Věta 2.21 (Věta o 4 barvách pro nekonečné grafy)

Každý planární graf lze obarvit čtyřmi barvami.

Vezměme graf $\langle V, R \rangle$ a proměnné $p_{n,i}$ pro $n \in V$ a $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned}\Gamma^V = & \{p_{n,1} \vee p_{n,2} \vee p_{n,3} \vee p_{n,4} \mid n \in V\} \cup \\ & \{\neg(p_{n,j} \wedge p_{n,i}) \mid n \in V \text{ a } i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}\} \cup \\ & \{\neg(p_{n,i} \wedge p_{m,i}) \mid n, m \in V, \langle m, n \rangle \in R, \text{ a } i \in \{1, 2, 3, 4\}\}\end{aligned}$$

Interpretace $p_{n,i}$: vrchol n je obarven barvou i

Fakt: graf $\langle V, R \rangle$ lze obarvit 4 barvami iff Γ^V má model

Aplikace věty o kompaktnosti

Věta 2.21 (Věta o 4 barvách pro nekonečné grafy)

Každý planární graf lze obarvit čtyřmi barvami.

Vezměme graf $\langle V, R \rangle$ a proměnné $p_{n,i}$ pro $n \in V$ a $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned}\Gamma^V = & \{p_{n,1} \vee p_{n,2} \vee p_{n,3} \vee p_{n,4} \mid n \in V\} \cup \\ & \{\neg(p_{n,j} \wedge p_{n,i}) \mid n \in V \text{ a } i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}\} \cup \\ & \{\neg(p_{n,i} \wedge p_{m,i}) \mid n, m \in V, \langle m, n \rangle \in R, \text{ a } i \in \{1, 2, 3, 4\}\}\end{aligned}$$

Interpretace $p_{n,i}$: vrchol n je obarven barvou i

Fakt: graf $\langle V, R \rangle$ lze obarvit 4 barvami iff Γ^V má model

Pokud V je konečná, tak Γ^V má model (konečná věta o 4 barvách)

Když V je nekonečná, pak pro každou konečnou $\Gamma' \subseteq \Gamma^V$ existuje konečná $V' \subseteq V$ tž. $\Gamma' \subseteq \Gamma^{V'}$ a tak Γ' má model. Tj. Γ^V má model.

Příprava: lokální konečnost a Königovo lemma

For^V : množina formulí s atomy z $V \subseteq \text{Var}$

Věta 2.22 (O lokální konečnosti)

Nechť $V \subseteq \text{Var}$ je konečná množina. Pak v For^V existuje pouze konečně mnoho neekvivalentních formulí.

Důkaz: plyne z tvrzení 2.1.

Příprava: lokální konečnost a Königovo lemma

For^V : množina formulí s atomy z $V \subseteq \text{Var}$

Věta 2.22 (O lokální konečnosti)

Nechť $V \subseteq \text{Var}$ je konečná množina. Pak v For^V existuje pouze konečně mnoho neekvivalentních formulí.

Důkaz: plyne z tvrzení 2.1.

Lemma 2.23 (Königovo lemma)

Každý nejvýše spočetný binární strom je buď konečný nebo v něm existuje nekonečná větev.

Důkaz.

Pokud je T nekonečný, pak z kořene existují cesty libovolné délky. Jelikož T je binární, musí to platit i pro jeden z následníků kořene. Opakováním tohoto argumentu zkonstruujeme nekonečnou větev. □

Reprezentace ohodnocení

Očíslujme si proměnné $v_1, v_2, v_3, \dots$

Definujme binární strom S s vrcholy $\bigcup_{i \geq 0} \{0, 1\}^i$, kořenem $\langle \rangle$ a kde následníci vrcholu u jsou vrcholy $u \circ \langle 0 \rangle$ a $u \circ \langle 1 \rangle$

Ohodnocení e je **kompatibilní s vrcholem u** na úrovni n , pokud $e(v_i) = u_i$ pro $i \leq n$ **pozn. kořen je na nulté úrovni**

Pozn. pokud e je kompatibilní s u tak

- je kompatibilní s jeho předchůdcem
- je kompatibilní s jedním z jeho následníků

Větev B v S **kóduje** ohodnocení e : e je kompatibilní s každým $u \in B$

Každé ohodnocení je kódováno právě jednou větví v S

Důkaz: Γ má model iff každá její konečná podmnožina má model

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že v Γ nejsou dvě různé
ekvivalentní formule

Předpoklad: každá konečná podmnožina $\Gamma' \subseteq \Gamma$ má model

Definujme $\Gamma_n = \Gamma \cap \text{For}\{v_1, \dots, v_n\}$

Fakt 1: Pro každé $\varphi \in \Gamma$ existuje n tž. $\varphi \in \Gamma_n$ zřejmé

Fakt 2: $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ zřejmé

Fakt 3: Γ_n je konečná množina Věta 2.22

Důkaz: Γ má model iff každá její konečná podmnožina má model

Definice: Vrchol u na úrovni n stromu S ohodnocení je **dobrý**, pokud existuje model Γ_n kompatibilní s u

Fakt 4: Pokud vrchol u je dobrý, tak **každé** ohodnocení kompatibilní s u je **model** Γ_n tvrzení 2.1

Fakt 5: předchůdce dobrého vrcholu je dobrý Fakt 2

Fakt 6: na každé hladině stromu S existuje dobrý vrchol Fakt 3 a předpoklad

Fakt 7: podgraf S' dobrých vrcholů S je nekonečný strom Fakt 5 a 6

Fakt 8: v S' je nekonečná větev B Fakt 7 a Königovo lemma

Důkaz: Γ má model iff každá její konečná podmnožina má model

Nechť e je ohodnocení dané větví B v S'

Vezměme libovolnou $\varphi \in \Gamma$, víme že $\varphi \in \Gamma_n$ pro nějaké n

zřejmé

Víme, že existuje vrchol $u \in B$ na úrovni n

zřejmé

e je kompatibilní s u a proto e splňuje φ

Fakt 4



Sémantický důsledek

Definice 2.24

Řekneme, že φ je **sémantickým důsledkem** teorie Γ , píšeme $\Gamma \models \varphi$, pokud každý model Γ splňuje φ .

Lemma 2.25

- $\Gamma \models \varphi$ *iff* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.
- $\emptyset \models \varphi$ *iff* φ je tautologie.

Tvrzení 2.26

*Relace $\models$ je **finitární relace důsledku** na množině For , tj.:*

- $\{\varphi\} \models \varphi$. *reflexivita*
- Pokud $\Gamma \models \varphi$, tak $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$. *monotonie*
- Pokud $\Gamma \models \varphi$ a $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$, pak $\Gamma \cup \Delta \models \psi$. *řez*
- Pokud $\Gamma \models \varphi$, pak existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tž. $\Gamma' \models \varphi$. *finitarita*

Sémantický důsledek 2

Substituce: zobrazení $\sigma: \text{For} \rightarrow \text{For}$ tž.

$$\sigma(\neg\varphi) = \neg\sigma(\varphi) \quad \sigma(\varphi \rightarrow \psi) = \sigma(\varphi) \rightarrow \sigma(\psi)$$

Lemma 2.27

*Relace $\models$ je **strukturální**, tj. pokud $\Gamma \models \varphi$, pak $\sigma[\Gamma] \models \sigma(\varphi)$ pro každou substituci σ .*

Důkaz.

Snadno ukážeme, že pro každou substituci σ a ohodnocení e je její složení $e \circ \sigma$ také ohodnocení. Zbytek je zřejmý. □

Lemma 2.28

Nechť Γ je konečná. Pak $\Gamma \models \varphi$ iff formule $(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma) \rightarrow \varphi$ je tautologie.