

Matematická logika

Lekce 3: Axiomatizace výrokové logiky

Petr Cintula

Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

www.cs.cas.cz/cintula/MAL

Gentzenovský kalkul

Sekventy a konvence

Sekvent: dvojice konečných množin formulí, píšeme $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$

Píšeme $\langle \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle$ místo $\langle \Gamma \cup \Pi \Rightarrow \Delta \cup \{\varphi\} \rangle$

Někdy vynecháváme závorky kolem sekventů

Připomeňme si definice $\top = p \rightarrow p$ a $\perp = \neg \top$ a fakta $e(\top) = 1$
a $e(\perp) = 0$

Připomeňme si konvenci $\bigwedge \emptyset = \top$ a $\bigvee \emptyset = \perp$

Splnitelné a tautologické sekventy

Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ lze vidět jako formuli $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$

Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je:

- **splněný** ohodnocením e pokud $e(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta) = 1$
- **tautologický** pokud $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ je tautologie

Tvrzení 3.1

- Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *splněný ohodnocením e iff existuje $\psi \in \Gamma$ tž. $e(\psi) = 0$ nebo existuje $\varphi \in \Delta$ tž. $e(\varphi) = 1$.*
- Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *tautologický iff je splněn každým ohodnocením iff pro každé e tž. $e[\Gamma] \subseteq \{1\}$, existuje $\varphi \in \Delta$, tž. $e(\varphi) = 1$.*
- Formule φ je *tautologie iff sekvent $\langle \emptyset \Rightarrow \{\varphi\} \rangle$ je tautologický.*

Speciální sekventy

Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je:

- **iniciální** pokud $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$
- **atomický** pokud $\Gamma \cup \Delta \subseteq \text{Var}$

Lemma 3.2

- *Každý iniciální sekvent je tautologický.*
- *Atomický sekvent je iniciální iff je tautologický.*

Minimální Gentzenovský kalkul MG

$$\begin{array}{ll} (\rightarrow\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} & (\rightarrow\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\neg\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} & (\neg\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi} \end{array}$$

Terminologie:

- kalkul je složen z tzv. operátorových pravidel
- každé pravidlo má závěr (pod čarou) a jeden předpoklad nebo dva předpoklady (nad čarou)
- vyznačené formulí v závěru pravidla se říká **principální** formule daného pravidla

Minimální Gentzenovský kalkul MG

$$(\rightarrow\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\neg\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\neg\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

Pozorování (Vlastnost podformule)

Mezi předpoklady každého pravidla jsou **právě** podformule formulí z jeho závěru.

Minimální Gentzenovský kalkul MG

$$(\rightarrow\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\neg\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\neg\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

Lemma 3.3

Pro každé pravidlo a každé ohodnocení e platí, že e splňuje jeho závěr iff splňuje jeho předpoklad(y).

Minimální Gentzenovský kalkul MG

$$(\rightarrow\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\neg\text{-L}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\neg\text{-R}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

Důsledek 3.4

*Pro každé pravidlo platí, že jeho závěr je tautologický iff
jeho předpoklad(y) je(jsou) tautologické.*

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg \varphi} \quad (\neg\text{-R}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg \varphi \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg \varphi} \quad (\neg\text{-R}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg \varphi \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow\text{-L}) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \quad (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg \varphi} \quad (\neg\text{-R}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg \varphi \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi} \quad (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \varphi, \neg \varphi} (\neg\text{-R}) \quad \frac{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}{\neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi} (\neg\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi} (\rightarrow\text{-R}) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \varphi, \neg \varphi} (\neg\text{-R}) \quad \frac{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}{\neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi} (\neg\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi} (\rightarrow\text{-R}) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \varphi, \neg\varphi} (\neg\text{-R}) \quad \frac{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow \varphi} (\neg\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi} (\rightarrow\text{-R}) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Definice 3.5 (Důkaz)

Důkaz sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je strom s vrcholy označenými sekventy tž.

- kořen je označen $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- listy jsou označeny iniciálními sekventy,
- pro každý vrchol existuje pravidlo, jehož závěr označuje daný vrchol a jehož předpoklady označují jeho předchůdce.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \varphi, \neg \varphi} (\neg\text{-R}) \quad \frac{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}{\neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi} (\neg\text{-L}) \\
 \hline
 \frac{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi} (\rightarrow\text{-R}) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

Odvozená pravidla pro $\wedge$ a $\vee$

$$(\wedge\text{-L}) \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge\text{-R}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\vee\text{-L}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee\text{-R}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi} (\neg\text{-R}) \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\neg \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow\text{-L})$$
$$\frac{\neg \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma, \neg \varphi \Rightarrow \Delta, \psi} (\neg\text{-L})$$
$$\frac{\Gamma, \neg \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow\text{-R})$$
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

Odvozená pravidla pro $\wedge$ a $\vee$

$$(\wedge\text{-L}) \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge\text{-R}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\vee\text{-L}) \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee\text{-R}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \neg\psi} (\neg\text{-R})}{\Gamma, \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \neg\psi} (\rightarrow\text{-R})}{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\neg\text{-L}) \quad \frac{}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} (\neg\text{-R})}{\varphi \rightarrow \neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow\text{-L})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)} (\neg\text{-R}) \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

Věta o úplnosti

Věta 3.6 (O úplnosti)

Sekvent je tautologický iff existuje jeho důkaz v kalkulu MG.

Důkaz.

Korektnost (implikace zprava doleva): mějme stromový důkaz
sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$.

Sekventy označující listy jsou tautologické. (lemma 3.2)

Každý sekvent označující nějaký vrchol (tedy i kořen) je tautologický.
(důsledek 3.4)

Úplnost (implikace zleva doprava): ...

Důkaz druhé implikace

Složitost sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je součet počtů spojek ve formulích z $\Gamma \cup \Delta$

Tvrzení dokážeme indukcí dle složitosti sekventu $\Gamma \Rightarrow \Delta$

Předpokládejme, že $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je tautologický, chceme jeho důkaz

0: sekvent složitosti 0 je atomický a tudíž iniciální (lemma 3.2) a tudíž strom s jediním vrcholem označeným tímto sekventem je jeho důkaz

$n + 1$: vezmeme libovolnou neatomickou flí $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$ a uvažme pravidlo se závěrem $\Gamma \cup \Delta$ a principální flí φ

Předpoklady toho pravidla mají složitost nejvýše n a dle důsledku 3.3 jsou tautologické

Tak z IP existují jejich důkazy a konstrukce důkazu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je zřejmá

Rozhodovací algoritmus

- vezměme sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$
- aplikujme pravidla kalkulu **MG** pozpátku dokud nedostaneme v listech atomické sekventy
- jsou-li všechny listy jsou iniciální, tak máme důkaz $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ a víme, že je tautologický
- pokud některý list označený $\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle$ není iniciální, pak $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ není tautologický a libovolné hodnocení, pro které platí

$$e(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \in \Gamma' \\ 0 & \text{if } p \in \Delta' \end{cases}$$

nesplňuje sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$

Pravidlo řezu

Gentzenovský kalkul LK vznikne z kalkulu MG přidáním pravidla

$$(\text{Řez}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Lemma 3.7

*Každé ohodnocení e splňující předpoklady Řezu, splňuje jeho závěr.
Pokud jsou předpoklady Řezu tautologické i závěr je tautologický.*

Pozn: opačné implikace neplatí

Pravidlo řezu

Gentzenovský kalkul LK vznikne z kalkulu MG přidáním pravidla

$$(\text{Řez}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Věta 3.8 (O eliminovatelnosti/přípustnosti řezu)

Sekvent je dokazatelný v kalkulu LK iff je dokazatelný v kalkulu MG.

Gentzenovský kalkul LK vznikne z kalkulu MG přidáním pravidla

$$(\text{Řez}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Existuje posloupnost formulí φ_n taková že:

- l_{LK} a l_{MG} jsou délky nejkratších důkazů sekventu $\langle \emptyset \Rightarrow \varphi_n \rangle$
v kalkulech LK a MG
- funkce l_{LK} a l_{MG} jsou rostoucí (očividně $l_{LK}(n) \leq l_{MG}(n)$)
- pro žádný polynom p neplatí pro všechna n : $l_{MG}(n) \leq p(l_{LK}(n))$

Věta o silné úplnosti

Věta 3.9 (O silné úplnosti)

Nechť $\Gamma \cup \{\varphi\}$ je množina flí, pak následující jsou ekvivalentní:

- ❶ $\Gamma \models \varphi$.
- ❷ *Existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tž. sekvent $\langle \Gamma' \Rightarrow \varphi \rangle$ je dokazatelný v kalkulu MG.*

Důkaz.

1. $\rightarrow$ 2.: díky lemma 2.26 víme, že existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tž. $\Gamma' \models \varphi$.

Pak dle lemma 2.28 je fle $\bigwedge \Gamma' \rightarrow \varphi$ tautologie, t.j. sekvent $\langle \Gamma' \Rightarrow \varphi \rangle$ je tautologický.

A tedy díky větě 3.6 je dokazatelný v kalkulu MG.

2. $\rightarrow$ 1.: díky větě 3.6 víme že $\langle \Gamma' \Rightarrow \varphi \rangle$ je tautologický.

Tudíž (díky lemma 2.28) $\Gamma' \models \varphi$, důkaz dokončí lemma 2.26. □

Hilbertovský kalkul

H: axiomatický systém Hilbertova typu

Axiomy (pro libovolné φ, ψ, χ):

$$\text{A1 } \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{A2 } (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{A3 } (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{A4 } (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\text{A5 } (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Dedukční pravidlo *Modus Ponens* (pro libovolné φ, ψ): $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$

Lemma 3.10

- Axiomy A1–A5 jsou tautologie a tudíž dokazatelné v MG.
- $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$, t.j. pro každé ohodnocení e :
pokud $e(\varphi) = e(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, pak $e(\psi) = 1$.

Důkaz

Důkaz formule φ z množiny předpokladů Γ je konečná posloupnost formulí $\langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ tž. $\psi_n = \varphi$ a pro každé $i \leq n$, buď

- ψ_i je instance axiomu nebo prvek Γ , nebo
- existují $j, k < i$ tž. $\psi_k = \psi_j \rightarrow \psi_i$

Píšeme $\Gamma \vdash \varphi$ pokud existuje důkaz φ z množiny předpokladů Γ

Teorém: formule dokazatelná z prázdné množiny předpokladů

Tvrzení 3.11 (Korektnost)

Pro každou množinu $\Gamma \cup \{\varphi\}$ platí:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{implikuje} \quad \Gamma \models \varphi.$$

Důkaz.

Indukcí dle délky důkazu a použitím lemma 3.10. □

Relace dokazatelnosti je relace důsledku

Tvrzení 3.12

*Relace $\vdash$ je **finitární strukturální relace důsledku** na množině For , tž.:*

- $\{\varphi\} \vdash \varphi.$ *reflexivita*
- *Pokud $\Gamma \vdash \varphi$, tak $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi.$* *monotonie*
- *Pokud $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, pak $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi.$* *řez*
- *Pokud $\Gamma \vdash \varphi$, pak existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tž. $\Gamma' \vdash \varphi.$* *finitarita*
- *Pokud $\Gamma \vdash \varphi$, pak $\sigma[\Gamma] \vdash \sigma(\varphi)$ pro každou substituci $\sigma.$* *strukturalita*

Substituce: zobrazení $\sigma: \text{For} \rightarrow \text{For}$ tž.

$$\sigma(\neg\varphi) = \neg\sigma(\varphi) \quad \sigma(\varphi \rightarrow \psi) = \sigma(\varphi) \rightarrow \sigma(\psi)$$

Příklady teorémů

Lemma 3.13

Následující formule jsou teorémy (systému H):

T1 $\varphi \rightarrow \varphi$

T2 $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

T3 $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \chi).$

Důkaz T1 (necht' ψ je libovolný axiom):

$$\psi$$

předpoklad

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

A1

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$$

A2

$$\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$$

MP

$$\varphi \rightarrow \varphi$$

MP

Příklady teorémů

Lemma 3.13

Následující formule jsou teorémy (systému H):

T1 $\varphi \rightarrow \varphi$

T2 $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

T3 $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \chi).$

Důkaz T2:

$$\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \quad \text{A1}$$

$$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \quad \text{A5}$$

$$[\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)] \rightarrow ([(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]) \quad \text{A3}$$

$$[(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \quad \text{MP}$$

$$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \quad \text{MP}$$

Příklady teorémů

Lemma 3.13

Následující formule jsou teorémy (systému H):

T1 $\varphi \rightarrow \varphi$

T2 $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

T3 $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \chi).$

Důkaz T3:

$$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

T2

$$[\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)]$$

A2

$$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

MP

Věta o dedukci

Věta 3.14 (Věta o dedukci)

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$: důsledek pravidla modus ponens.

Věta o dedukci

Věta 3.14 (Věta o dedukci)

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$: necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \psi$ je důkaz ψ z Γ, φ . Ukážeme indukcí, že pro každé $i \leq n$ platí $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \alpha_i$.

- $\alpha_i = \varphi$: plyne z T1
- $\alpha_i \in \Gamma$ nebo to je axiom: $\alpha_i; \alpha_i \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha_i); \varphi \rightarrow \alpha_i$ je důkaz z Γ
- existují $j, k < i$ tž. $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$:

- ▶ $\varphi \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$
- ▶ $\alpha_j \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha_i)$
- ▶ $\varphi \rightarrow \alpha_j$
- ▶ $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha_i)$
- ▶ $\varphi \rightarrow \alpha_i$

IP
A2, MP
IP
A3 a MP 2x
A4 a MP



Zákon vyloučeného třetího

Lemma 3.15

Následující formule je teorém (systému H):

$$\text{T4 } (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi.$$

Dokážeme $\neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash \varphi$ a použijeme větu o dedukci

$\neg\varphi \rightarrow \varphi$	předpoklad
$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp)$	T3
$\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp)$	A3, MP 2x
$(\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp)) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp)$	A4
$\neg\varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$	MP a def $\perp$
$p \rightarrow p$	T1
$(\neg\varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow \varphi)$	A5
φ	MP 2x

Pár dalších teoremů

Lemma 3.16

Následující formule jsou teoremy (systému H):

$$\text{T5 } \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\text{T6 } \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

$$\text{T7 } (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

Důkaz T5:

$$(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

T4

$$\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \varphi)$$

T2

$$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

A3, MP 2x

Pár dalších teorémů

Lemma 3.16

Následující formule jsou teorémy (systému H):

T5 $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

T6 $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

T7 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$

Důkaz T6:

$$\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$$

T5

$$(\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$$

A5

$$\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

MP

Pár dalších teorémů

Lemma 3.16

Následující formule jsou teorémy (systému H):

T5 $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

T6 $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

T7 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Důkaz T7 (ukážeme $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ a použijeme větu o dedukci):

$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	T5
$\varphi \rightarrow \psi$	předpoklad
$\neg\neg\varphi \rightarrow \psi$	A3 a 2x MP
$\psi \rightarrow \neg\neg\psi$	T6
$\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	A3 a 2x MP
$(\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	A5
$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	MP

Důkaz po případech

Lemma 3.17 (Důkaz po případech)

Pokud $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ a $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$, pak $\Gamma \vdash \varphi$.

Důkaz: Následující posloupnost je důkaz φ z předpokladů Γ .

$\vdots$

• $\psi \rightarrow \varphi$

věta o dedukci a $\Gamma, \psi \vdash \varphi$

• $(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$

T7

• $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

MP

$\vdots$

• $\neg\psi \rightarrow \varphi$

věta o dedukci a $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$

• $\neg\varphi \rightarrow \varphi$

A3 a 2x MP

• $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

T4

• φ

MP



Konsistentí a úplné množiny flí

Definice 3.18

Množina flí Γ je

- **úplná** pokud pro každou flí φ platí: $\Gamma \vdash \varphi$ nebo $\Gamma \vdash \neg\varphi$,
- **konsistentní** pokud pro žádnou flí φ neplatí $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Gamma \vdash \neg\varphi$,
- **sporná** pokud pro každou flí φ platí $\Gamma \vdash \varphi$.

Lemma 3.19

Množina flí Γ je sporná iff není konsistentní.

Důkaz.

Sporná množina očividně není konsistentní. Opačná implice plyne z teorému T2 a dvou použití MP □

Lindenbaumovo lemma

Lemma 3.20 (Lindenbaumovo lemma)

Pokud $\Gamma \not\vdash \varphi$, pak existuje úplná konsistentní množ. $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tž. $\Gamma' \not\vdash \varphi$.

Důkaz.

Očíslujme se všechny formule $\psi_0, \psi_1, \dots$

Zkonstruujeme množiny $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \dots$ tž. $\Gamma_i \not\vdash \varphi$:

- (a) pokud $\Gamma_i, \psi_i \not\vdash \varphi$, definujeme $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\psi_i\}$,
- (b) pokud $\Gamma_i, \psi_i \vdash \varphi$, definujeme $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\neg\psi_i\}$.

V případě (a) očividně $\Gamma_{i+1} \not\vdash \varphi$.

Předpokládejme případ (b) a, pro spor, $\Gamma_{i+1} \vdash \varphi$, pak díky důkazu po případech víme $\Gamma_i \vdash \varphi$, což je spor s IP.

Množina $\Gamma' = \bigcup \Gamma_i \supseteq \Gamma$ je úplná a $\Gamma' \not\vdash \varphi$ (jinak by totiž platilo $\Gamma_i \vdash \varphi$ pro nějaké i , spor) a tudíž je Γ konsistentní. □

Věta o úplnosti

Věta 3.21 (Korektnost a úplnost)

Pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ platí:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \Gamma \models \varphi.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$: Tvrzení 3.11.

Věta o úplnosti

Věta 3.21 (Korektnost a úplnost)

Pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ platí:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \Gamma \models \varphi.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$: necht' $\Gamma \not\vdash \varphi$ a $\Gamma' \supseteq \Gamma$ je úplná konsistentní množina tž. $\Gamma' \not\vdash \varphi$ (existenci zaručuje Lindenbaumovo lemma). Definujeme:

$$e(\psi) = 1 \quad \text{iff} \quad \Gamma' \vdash \psi.$$

Očividně $e[\Gamma] \subseteq e[\Gamma'] = \{1\}$ a $e(\varphi) = 0$. **Je ale e opravdu ohodnocení?**

Věta o úplnosti

Věta 3.21 (Korektnost a úplnost)

Pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ platí:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \Gamma \models \varphi.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$: necht' $\Gamma \not\models \varphi$ a $\Gamma' \supseteq \Gamma$ je úplná konsistentní množina tž. $\Gamma' \not\models \varphi$ (existenci zaručuje Lindenbaumovo lemma). Definujeme:

$$e(\psi) = 1 \quad \text{iff} \quad \Gamma' \vdash \psi$$

• $e(\neg\psi) = 1$ iff $\Gamma' \vdash \neg\psi$ iff (Γ' je konsistentní a úplná) $\Gamma' \not\models \psi$ iff $e(\psi) = 0$.

• $e(\psi \rightarrow \chi) = 1$ iff $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \chi$ iff (?) $\Gamma' \vdash \chi$ nebo $\Gamma' \not\models \psi$ iff $e(\chi) = 1$ nebo $e(\psi) = 0$.

- ▶ Pokud $\Gamma' \vdash \chi$ pak $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \chi$ díky A1.
- ▶ Pokud $\Gamma' \not\models \psi$ pak $\Gamma' \vdash \neg\psi$ (Γ' je úplná) a pak $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \chi$ díky T2.
- ▶ Pokud $\Gamma' \vdash \psi \rightarrow \chi$, pak buď $\Gamma' \not\models \psi$ nebo $\Gamma' \vdash \psi$, což díky MP implikuje $\Gamma' \vdash \chi$.



Osvěžení paměti a pár dalších teorémů

- $\varphi \equiv \psi$, pokud $e(\varphi) = e(\psi)$ pro každé ohodnocení e
- Fle φ a ψ jsou ekvivalentní iff fle $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie

Z minule známe následující ekvivalence

$$\perp \equiv \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\top \equiv \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$$

$$\varphi \equiv \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Osvěžení paměti a pár dalších teorémů

- $\varphi \equiv \psi$, pokud $e(\varphi) = e(\psi)$ pro každé ohodnocení e
- Fle φ a ψ jsou ekvivalentní iff fle $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie

Tudíž následující formule jsou teorémy:

$$\perp \leftrightarrow \varphi \wedge \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \leftrightarrow \neg \varphi \vee \psi$$

$$\neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge \varphi$$

$$\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\top \leftrightarrow \varphi \vee \neg \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$$

$$\varphi \leftrightarrow \varphi \vee \varphi$$

$$\varphi \leftrightarrow \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Osvěžení paměti a pár dalších teorémů

- $\varphi \equiv \psi$, pokud $e(\varphi) = e(\psi)$ pro každé ohodnocení e
- Fle φ a ψ jsou ekvivalentní iff fle $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie

Pár dalších užitečných teorémů/tautologií:

$$\text{T8} \quad \varphi \vee \neg\varphi$$

$$\text{T10} \quad \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$$

$$\text{T12} \quad \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$$

$$\text{T9} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$$

$$\text{T11} \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$$

$$\text{T13} \quad \perp \rightarrow \varphi$$

Alternativní formulace věty o úplnosti

Ohodnocení e je **model** množiny Γ flí Γ pokud $e[\Gamma] \subseteq \{1\}$.

Důsledek 3.22

Množina formulí je konsistentní iff má model.

Důkaz.

Pokud je Γ konsistentní tak existuje φ tž. $\Gamma \not\vdash \varphi$. Z věty 3.21 víme, že $\Gamma \not\models \varphi$, tj. existuje model Γ . □

Alternativní formulace věty o úplnosti

Ohodnocení e je **model** množiny flí Γ pokud $e[\Gamma] \subseteq \{1\}$.

Důsledek 3.22

Množina formulí je konsistentní iff má model.

Důkaz.

Pokud má Γ model e tak $\Gamma \not\models \perp$. Z věty 3.21 víme, že $\Gamma \not\vdash \perp$, tj. Γ je konsistentní. □

Věta o úplnosti plyne z výše uvedeného důsledku:

- předpokládejme $\Gamma \vdash \varphi$
- tudíž $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ není konsistentní (použitím T2: $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$)
- tj. množina flí $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model
- tj. pro každý model Γ musí platit $e(\varphi) = 1$

Alternativní formulace věty o úplnosti

Ohodnocení e je **model** množiny Γ flí Γ pokud $e[\Gamma] \subseteq \{1\}$.

Důsledek 3.22

Množina formulí je konsistentní iff má model.

Důkaz.

Pokud má Γ model e tak $\Gamma \not\models \perp$. Z věty 3.21 víme, že $\Gamma \not\vdash \perp$, tj. Γ je konsistentní. □

Věta o úplnosti plyne z výše uvedeného důsledku:

- předpokládejme $\Gamma \not\models \varphi$
- tudíž $\Gamma, \neg\varphi \not\models \varphi$ (jinak bychom z $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ a důkazu po případech dostali $\Gamma \vdash \varphi$)
- tj. množina flí $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ je konsistentní a tudíž má model e
- tj. e je model Γ ale $e(\varphi) = 0$

Alternativní důkaz věty o kompaktnosti

Důsledek 3.23

Množina Γ má model iff každá její konečná podmonžina má model.

Důkaz.

- Předpokládejme, že Γ nemá model,
- tudíž Γ není konsistentní,
- tedy existuje φ tž. $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Gamma \vdash \neg\varphi$,
- tudíž z finitarity $\vdash$ existují konečné $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ tž. $\Gamma_1 \vdash \varphi$ a $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$,
- tudíž $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ není konsistentní,
- tudíž $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ nemá model. □

Věta 3.24

Následující jsou ekvivalentní pro každou konečnou množinu flí Γ :

- 1 $\Gamma \models \varphi$.
- 2 $\Gamma \vdash \varphi$.
- 3 *Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \varphi \rangle$ je dokazatelný v kalkulu MG.*

Věta 3.25

Následující jsou ekvivalentní:

- 1 $\Gamma \models \varphi$.
- 2 $\Gamma \vdash \varphi$.
- 3 *Existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tž. sekvent $\langle \Gamma' \Rightarrow \varphi \rangle$ je dokazatelný v kalkulu MG.*