

Matematická logika: cvičení

Lekce 4: Úvod do predikátové logiky

1. Necht' $\langle R, =, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ a $\langle Q, =, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ jsou struktury reálných/racionálních čísel s rovností a běžně definovanými operacemi. Nalezněte sentenci, která platí jen v jedné z těchto struktur.
2. Necht' $\langle Q, < \rangle$ a $\langle Z, < \rangle$, $\langle N, < \rangle$ jsou struktury racionálních, celých a přirozených čísel s běžnou ostrou nerovností. Pro každou z těchto struktur nalezněte sentenci, která v ní platí a neplatí v druhých dvou strukturách.
3. Formule φ a ψ jsou ekvivalentní, pokud je formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ tautologie. Nalezněte alternativní *přímou* sémantickou definici tohoto pojmu a dokažte, že se opravdu jedná o relaci ekvivalence.
4. Dokažte, že následující formule jsou tautologie (pokud x není volná v χ):
 1. $\chi \leftrightarrow \forall x \chi$
 2. $\exists x \chi \leftrightarrow \chi$
 3. $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$
 4. $\forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$
 5. $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi)$
 6. $\exists x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$
 7. $\forall x (\chi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \forall x \varphi)$
 8. $\forall x (\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \chi)$
 9. $\exists x (\chi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \exists x \varphi)$
 10. $\exists x (\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \chi)$
 11. $\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$
 12. $\forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$
 13. $\exists x (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi \vee \exists x \psi$
 14. $\chi \vee \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x (\chi \vee \varphi)$
 15. $\forall x (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$
 16. $\chi \wedge \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x (\chi \wedge \varphi)$
5. Nalezněte struktury a ohodnocení demonstrující, že omezení kladené na x v předchozím cvičení nejde vynechat.
6. Nalezněte struktury a ohodnocení demonstrující, že následující fle nejsou tautologie:
$$\begin{array}{ll} (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi) \rightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi) & \forall x (\varphi \vee \psi) \rightarrow \forall x \varphi \vee \forall x \psi \\ (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi) & \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \rightarrow \exists x (\varphi \wedge \psi) \\ \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists x \forall y \varphi & \end{array}$$
7. Formulujte a dokažte analogii věty o dedukci pro sémantický důsledek.
8. Dokažte Tvrzení 4.7.
9. Dokažte Tvrzení 4.11 a 4.12.
10. Nalezněte formule v prenexní normální formě ekvivalentní s následujícími formulami:
 1. $\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(x, y) \rightarrow \neg \forall z R(y, z)))$
 2. $\exists x A(x, y) \rightarrow (B(x) \rightarrow \neg \exists u A(x, y))$
 3. $P(x, y) \rightarrow \exists y (Q(y) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow R(y)))$.