

Matematická logika: cvičení

Lekce 2: Sémantika výrokové logiky

1. Dokažte následující ekvivalence:

$$\begin{array}{lll}
 \varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) & \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi & \perp \equiv \varphi \wedge \neg\varphi \\
 \varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) & \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) & \top \equiv \varphi \vee \neg\varphi \\
 \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi & \neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi & \varphi \equiv \neg\neg\varphi \\
 \varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi & \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi & \varphi \equiv \varphi \vee \varphi \\
 \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi & \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi & \varphi \equiv \varphi \wedge \varphi \\
 \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) & \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi & \\
 \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) & \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi &
 \end{array}$$

2. Určete, které formule jsou splnitelné a které jsou tautologie:

$$\begin{array}{llll}
 \varphi \vee \neg\varphi & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi) & \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi & \varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi \\
 \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi & \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi & \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) & \varphi \vee \psi \rightarrow \varphi \\
 \psi \rightarrow \varphi \vee \psi & \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi & \psi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) & \perp \\
 \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp) & \perp \rightarrow \varphi & \varphi \wedge \neg\varphi & \varphi \rightarrow \varphi
 \end{array}$$

3. Dokažte následující sémantické důsledky (bez použití vět o úplnosti):

$$\begin{array}{ll}
 \{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \models \chi \rightarrow \varphi \wedge \psi & \{\varphi\} \models \psi \rightarrow \varphi \\
 \{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \models \varphi \vee \psi \rightarrow \chi & \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi\} \models \varphi \rightarrow \chi \\
 \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \models \varphi \rightarrow \chi & \{\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \varphi \rightarrow \psi \\
 \{\varphi \rightarrow \psi\} \models \neg\psi \rightarrow \neg\varphi &
 \end{array}$$

4. Dokažte příklad 2.19, tj. že následující množiny booleovských funkcí jsou báze $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{NAND\}$, a $\{NOR\}$. Dále ukažte tři různé příklady množin, které bázi nejsou. (Hint: můžete použít Větu 2.14)

5. Formulujte a dokažte (bez použití věty o úplnosti) *sémantickou* verzi věty o dedukci, tj. analogii věty 3.14 pro relaci $\models$.

6. Dokažte, že $\Gamma \models \varphi$ IFF $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

7. Dokažte lemma 2.27, tj. pokud $\Gamma \models \varphi$, pak $\sigma[\Gamma] \models \sigma(\varphi)$ pro každou substituci σ .

8. Dokažte lemma 2.28, tj. že pro každou konečnou množinu formulí Γ platí: $\Gamma \models \varphi$ IFF formule $(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma) \rightarrow \varphi$ je tautologie.

9. Dokažte, že pokud pro každé ohodnocení e existuje $\varphi \in \Gamma$ tž. $e(\varphi) = 1$, pak existují fle $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ tž. $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i$ je tautologie. (Hint: použijte větu o kompaktnosti.)

10. Dokažte, že finitarita $\models$ je ekvivalentní větě o kompaktnosti.