Matematická logika: cvičení

Lekce 5: Axiomatizace predikátové logiky

1. Dokažte implikaci zleva do prava Věty 5.1.

2. Nechť $\mathcal{P}$ je libovolný predikátový jazyk. Dokažte, že třída všech konečných struktur, označme ji K, není axiomatizovatelná (i.e. neexistuje $\mathcal{P}$-teorie T taková, že pro každou sstrukturu M platí: $M \models T$ právě tehdy, když $M \in \mathsf{K}$). (Hint: věta o kompaktnosti)

3. Dokažte, že třída všech nekonečných struktur pro jazyk $\mathcal{P} = \emptyset$ (tzn. jazyk pouze s rovností $\approx$) je axiomatizovatelná. Dále dokažte, že každá teorie T, která ji axiomatizuje je nekonečná. (Hint: pro důkaz druhé části použijte předchozí cvičení)

4. Dokažte (aspoň nemalou část) Lemma 5.4 (bez použití věty o úplnosti).

5. Dokažte Větu 5.5 (bez použití věty o úplnosti). (Hint: věta platí i ve výrokové logice, důkaz je třeba modifikovat pouze po posledni formuli.)

6. Dokažte, že úplná teorie T je Henkinovská iff pro každou $\varphi(x)$ tž. $T \nvdash \forall x\, \varphi(x)$ existuje konstanta c tž. $T \nvdash \varphi(x/c)$.

7. Dokažte, že Důsledek 5.12 je ekvivaletní formulace věty o úplnosti.

8. Formule je univerzální/existenční pokud je ekvivaletní formuli v prenexním normálním tvaru, která obsahuje pouze univerzální/existenční kvantifikátory.

   Dokažte následující tvrzení: Nechť $\varphi(x)$ je $\mathcal{P}$-fle bez kvantifikátorů, ψ existenční sentence a T množina univerzálních sentencí. Pak $T, \forall x\, \varphi(x) \models \psi$ iff existují uzavřené $\mathcal{P}^c$-termy $t_1, \ldots, t_k$ tž. $T, \bigwedge_{i \leq k} \varphi(t_i) \models \psi$. (Hint: použijte Herbrandovu větu.)

9. Dokažte, že pokud je teorie T' konzervativní rozšíření $\mathcal{P}$-teorie T, pak pro každou $\mathcal{P}$-sentenci φ platí, že $T' \cup \{\varphi\}$ konzervativní rozšíření $T \cup \{\varphi\}$.

10. Dokažte Větu 5.19 užitím věty 5.15 (Skolemova věta).