

Matematická logika: cvičení

Lekce 6: Aritmetika a Gödelovy věty o neúplnosti

1. Dokažte, že $\mathbb{N}$ je model Peanovy aritmetiky
2. Dokažte tvrzení 6.3.
3. Dokažte, že struktura ze stránky 8 je model Robinsonovy aritmetiky
4. Dokažte v PA aspoň 5 tvrzení ze strany 9
5. Dokažte lemma 6.9. a větu 6.12.
6. Neformálně argumentujte, proč platí věta 6.10. a lemma 6.13.
7. Dokažte, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí: $\mathbb{Q} \vdash \bar{m} + \bar{n} = \overline{m + n}$ a $\mathbb{Q} \vdash \bar{m} \cdot \bar{n} = \overline{m \cdot n}$
8. Dokažte větu 6.26 aspoň pro atomické sentence, nebo i pro sentence bez kvantifikátorů.
(Hint: použijte předchozí cvičení.)
9. Rozhodněte zda následující tvrzení platí pro všechny sentence nebo aspoň pro všechny Σ -sentence:
$$\text{PA} \vdash \varphi \vee \psi \quad \text{implikuje} \quad \text{PA} \vdash \varphi \text{ nebo } \text{PA} \vdash \psi$$
10. Neformálně argumentujte, proč platí Důsledek 6.28.