Matematická logika

Lekce 5: Axiomatizace predikátové logiky

Petr Cintula

Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

www.cs.cas.cz/cintula/MAL

Axiomatický systém pro jazyk $\mathcal{P} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{ar} \rangle$

(P)	axiomy A1–A5, kde místo výrokových atomů dosadíme libovolné $\mathcal{P}$-formule	
$\forall 1$	$\forall x\, \varphi \to \varphi(x/t)$	t substitutovatelný za x v φ
$\exists 1$	$\varphi(x/t) \to \exists x\, \varphi$	t substitutovatelný za x v φ
$\forall 2$	$\forall x\, (\chi \to \varphi) \to (\chi \to \forall x\, \varphi)$	x není volná v χ
$\exists 2$	$\forall x\, (\varphi \to \chi) \to (\exists x\, \varphi \to \chi)$	x není volná v χ
Refl	$x \approx x$	
Sym	$x \approx y \to y \approx x$	
Trans	$x \approx y \wedge y \approx z \to x \approx z$	
Cong$_f$	$\bigwedge_{i \leq n} x_i \approx y_i \to f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(y_1, \ldots, y_n)$	pro každý $f \in \mathbf{F}$
Cong$_P$	$\bigwedge_{i \leq n} x_i \approx y_i \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))$	pro každý $P \in \mathbf{P}$
MP	*modus ponens* pro $\mathcal{P}$-fle: z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ	
gen	*generalizace:* z φ odvoď $\forall x\, \varphi$.	

Důkaz

Důkaz $\mathcal{P}$-fle φ z množiny předpokladů Γ je konečná posloupnost $\mathcal{P}$-flí $\langle\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle$ tž. $\psi_n = \varphi$ a pro každé $i \leq n$, buď

- ψ_i je instance axiomu nebo prvek Γ, nebo
- existují $j,k < i$ tž. $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$, nebo
- existuje $j < i$ tž. $\psi_i = \forall x\, \psi_j$

Píšeme $\Gamma \vdash^{\mathcal{P}} \varphi$ pokud existuje důkaz φ z množiny předpokladů Γ.

Pozorování: $\Gamma \vdash^{\mathcal{P}} \varphi$ iff $\{\forall\psi \mid \psi \in \Gamma\} \vdash^{\mathcal{P}} \forall\varphi$

Můžeme tedy chápat $\vdash^{\mathcal{P}}$ jako relaci na $\mathcal{P}$-sentencích

Ale nemůžeme definovat důkaz jako posloupnost sentencí!!

Věta o úplnosti

Věta 5.1 (Gödelova věta o úplnosti)

Pro každý jazyk $\mathcal{P}$ a každou $\mathcal{P}$-teorii $T \cup \{\varphi\}$ platí:

$$T \vdash^{\mathcal{P}} \varphi \qquad \textit{iff} \qquad T \models^{\mathcal{P}} \varphi$$

Na jazyku opět moc nezáleží

Lemma 5.2

Pro každý jazyk $\mathcal{P}$ a každou $\mathcal{P}$-teorii $T \cup \{\varphi\}$ jsou následující ekvivaletní:

1. $T \vdash^{\mathcal{P}} \varphi$
2. $T \vdash^{\mathcal{P}'} \varphi$ *pro každý jazyk* $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$
3. $T \vdash^{\mathcal{P}'} \varphi$ *pro nejmenší jazyk* $\mathcal{P}'$ *tž.* $T \cup \{\varphi\}$ *jsou* $\mathcal{P}'$*-fle*
4. $T \vdash^{\mathcal{P}'} \varphi$ *pro každý jazyk* $\mathcal{P}'$ *tž.* $T \cup \{\varphi\}$ *jsou* $\mathcal{P}'$*-fle*

Pozn. bez důkazu; není obtížný ale pracný a technický

Dostaneme to jako důsledek věty o úplnosti

Relace dokazatelnosti je relace důsledku

Lemma 5.3

Relace $\vdash$ je finitární relace důsledku na množině $\mathcal{P}$-sentencí, tj. platí:

- $\{\varphi\} \vdash \varphi$ — *reflexivita*
- *pokud* $T \vdash \varphi$, *tak* $T \cup S \vdash \varphi$ — *monotonie*
- *pokud* $T \vdash \varphi$ *a* $S \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *pak* $T \cup S \vdash \psi$ — *řez*
- *pokud* $T \vdash \varphi$, *pak existuje konečná* $T' \subseteq T$ *tž.* $T' \vdash \varphi$ — *finitarita*

Důležité teorémy

Teorém: formule dokazatelná z prázdné množiny předpokladů

Lemma 5.4

Následující formule jsou teorémy (pokud x není volná v χ):

0. *Teorém výrokové logiky, kde místo výrokových atomů dosadíme libovolné $\mathcal{P}$-formule*
1. $\chi \leftrightarrow \forall x\, \chi$
2. $\exists x\, \chi \leftrightarrow \chi$
3. $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$
4. $\forall x\, \forall y\, \varphi \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, \varphi$
5. $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\exists x\, \varphi \to \exists x\, \psi)$
6. $\exists x\, \exists y\, \varphi \leftrightarrow \exists y\, \exists x\, \varphi$
7. $\forall x\, (\chi \to \varphi) \leftrightarrow (\chi \to \forall x\, \varphi)$
8. $\forall x\, (\varphi \to \chi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi \to \chi)$
9. $\exists x\, (\chi \to \varphi) \leftrightarrow (\chi \to \exists x\, \varphi)$
10. $\exists x\, (\varphi \to \chi) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi \to \chi)$
11. $\exists x\, \varphi \leftrightarrow \neg \forall x\, \neg \varphi$
12. $\forall x\, \varphi \leftrightarrow \neg \exists x\, \neg \varphi$
13. $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$
14. $\chi \vee \forall x\, \varphi \leftrightarrow \forall x\, (\chi \vee \varphi)$
15. $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi$
16. $\chi \wedge \exists x\, \varphi \leftrightarrow \exists x\, (\chi \wedge \varphi)$

Něco málo o ekvivalentci

Věta 5.5

Nechť φ, ψ *jsou sentence a* χ *formule. Pak*

$$\varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \qquad \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \delta, \delta \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \chi \leftrightarrow \hat{\chi}$$

kde $\hat{\chi}$ *je fle vzniklá z* χ *nahrazením* *některých* *výskytů fle* φ *flí* ψ

Věta o dedukci

Věta 5.6

Pro každou teorii $T \cup \{\varphi, \psi\}$*:*

$$T, \varphi \vdash \psi \qquad \textit{iff} \qquad T \vdash \varphi \to \psi.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$: důsledek pravidla modus ponens

Věta o dedukci

Věta 5.6

Pro každou teorii $T \cup \{\varphi, \psi\}$:

$$T, \varphi \vdash \psi \qquad \textit{iff} \qquad T \vdash \varphi \to \psi.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$: nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \psi$ je důkaz ψ z T, φ. Ukážeme indukcí, že pro každé $i \leq n$ platí $T \vdash \varphi \to \alpha_i$.

- $\alpha_i = \varphi$: jako ve výrokové logice
- $\alpha_i \in T$ nebo to je axiom: jako ve výrokové logice
- existují $j, k < i$ tž. $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$: jako ve výrokové logice
- existuje $j < i$ tž. $\alpha_i = \forall x\, \alpha_j$:
  - $\varphi \to \alpha_j$ IP
  - $\forall x\, (\varphi \to \alpha_j)$ gen
  - $\varphi \to \forall x\, \alpha_j$ $\forall$2 a MP (x určitě není volná ve φ)

$\square$

Důkaz po případech

Věta 5.7 (Důkaz po případech)

Nechť $T \cup \{\varphi, \psi\}$ *je teorie. Pokud* $T, \psi \vdash \varphi$ *a* $T, \neg\psi \vdash \varphi$*, pak* $T \vdash \varphi$*.*

Důkaz je úplně stejný jako ve výroké logice.

Věta o konstantách

Věta 5.8 (Věta o konstantách)

Nechť T je teorie, $\varphi(x)$ formule a c konstanta, která se v T and φ nevyskytuje. Pak $T \vdash \varphi$ iff $T \vdash \varphi(x/c)$.

Důkaz.

Z $T \vdash \varphi$ díky generalizaci dostaneme $T \vdash \forall x\, \varphi$

Díky axiomu $\forall 1$ a MP máme $T \vdash \varphi(x/c)$

(konstanta je vždy substituovatelná za x)

Opačný směr: uvažme důkaz $\varphi(x/c)$ z T a proměnnou y nevyskytující se v tomto důkazu.

Nahrazení konst. c proměn. y transformuje ten důkaz v důkaz $\varphi(x/y)$

Tudíž díky generalizaci dostaneme $T \vdash \forall y\, \varphi(x/y)$

Díky axiomu $\forall 1$ a MP máme $T \vdash \varphi$ (x je substituovatelná za y ve $\varphi(x/y)$ a $\varphi = \varphi(x/y)(y/x)$!) □

Teorie

$\mathcal{P}$-Teorie T: libovolná množina $\mathcal{P}$-sentencí

Definice 5.9

Teorie T je

úplná	pokud pro každou sentenci φ platí: $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$
konsistentní	pokud pro žádnou sentenci φ neplatí $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \neg\varphi$
sporná	pokud pro každou sentenci φ platí $T \vdash \varphi$
Henkinovská	pokud pro každou fli $\varphi(x)$, tž. $T \vdash \exists x\, \varphi$ existuje konstanta $c \in \mathcal{P}$ tž. $T \vdash \varphi(x/c)$

Jako ve výrokové logice: teorie je sporná IFF není konsistentní.

Lemma 5.10

Nechť T je $\mathcal{P}$-teorie a φ $\mathcal{P}$-sentence, tž. $T \nvdash \varphi$. Pak existuje jazyk $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$ a úplná konsistentní Henkinovská $\mathcal{P}'$-teorie $T' \supseteq T$ tž. $T' \nvdash \varphi$.

Důkaz Lemma 5.10

Vezměme jazyk $\mathcal{P}'$ vzniklý přidáním spočetně mnoho konstant do $\mathcal{P}$.

Enumerujme $\mathcal{P}'$-formule s nejvýše jednou volnou proměnnou

$$\chi_0(x), \chi_1(x), \ldots$$

Konstrujeme rostoucí posloupnost $\mathcal{P}'$-teorií T_i tž. $T_i \nvdash \varphi$.

Začneme $T_0 = T$, což splňuje naši podmínku.

V indukčním kroku odlišíme dvě možnosti:

Indukční krok A je to!

(H1) Pokud $T_i, \exists x\, \chi_i \vdash \varphi$: definujeme $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\exists x\, \chi_i\}$.

(H2) Pokud $T_i, \exists x\, \chi_i \nvdash \varphi$: definujeme $T_{i+1} = T_i \cup \{\chi_i(x/c)\}$

pro nějakou c nevyskytující se v $T_i \cup \{\chi_i\}$.

Pro spor předpokládejme, že $T_{i+1} \vdash \varphi$.

(H1) díky důkazu po případech dostaneme $T_i \vdash \varphi$; spor s IP!

(H2)
- $T_i \vdash \chi_i(x/c) \to \varphi$ — věta o dedukci
- $T_i \vdash (\chi_i \to \varphi)(x/c)$ — x není volná ve φ
- $T_i \vdash \chi_i \to \varphi$ — věta o konstantách
- $T_i \vdash \forall x\, (\chi_i \to \varphi)$ — pravidlo generalizace
- $T_i \vdash \exists x\, \chi_i \to \varphi$ — axiom $(\exists 2)$ a MP
- $T_i \cup \{\exists x\, \chi_i\} \vdash \varphi$ — věta o dedukuci

Indukční krok A je to!

(H1) Pokud $T_i, \exists x \chi_i \vdash \varphi$: definujeme $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\exists x \chi_i\}$.

(H2) Pokud $T_i, \exists x \chi_i \nvdash \varphi$: definujeme $T_{i+1} = T_i \cup \{\chi_i(x/c)\}$
pro nějakou c nevyskytující se v $T_i \cup \{\chi_i\}$.

Pak $\mathcal{P}'$-teorie $T' = \bigcup T_i \nvdash \varphi$ (díky finitaritě) a je tedy konsistentní

T' je úplná: Pokud $T' \nvdash \chi_i$ a χ_i je sentence, tak jsme použili případ (H1)
protože jinak $\chi_i = \chi_i(x/c) \in T'$

Tudíž $T \vdash \neg\exists x \chi_i$ a jelikož $\chi_i \leftrightarrow \exists x \chi_i$ je teorém, dostaneme: $T \vdash \neg\chi_i$

T' je *Henkinovská:* Pokud $T' \vdash \exists x \chi_i$, tak jsme použili případ (H2)
jinak $T' \vdash \neg\exists x \chi_i$ tj. T' by byla sporná

Tudíž $T' \vdash \chi_i(x/c)$

Kanonický model

Nechť T je úplná Henkinovská konsistentní $\mathcal{P}$-teorie a UT je množina uzavřených $\mathcal{P}$-termů

Pro každý uzavřený term t definujeme

$$[t]_T = \{s \in UT \mid T \vdash t \approx s\}$$

$\mathcal{P}$-struktura $\mathfrak{CM}_T = \langle C, \left\langle f^{\mathfrak{CM}_T} \right\rangle_{f \in \mathbf{F}}, \left\langle P^{\mathfrak{CM}_T} \right\rangle_{P \in \mathbf{P}} \rangle$ kde

- $C = \{[t]_T \mid t \in UT\}$
- $f^{\mathfrak{CM}_T}([t_1]_T, \dots, [t_n]_T) = [f(t_1, \dots, t_n)]_T$ pro každý n-ární $f \in \mathbf{F}$
- $\langle [t_1]_T, \dots, [t_n]_T \rangle \in P^{\mathfrak{CM}_T}$ iff $T \vdash P(t_1, \dots, t_n)$ pro každý n-ární $P \in \mathbf{P}$.

Je definice $\mathfrak{CM}_T$ korektní?

Uvažme binární funkční symbol f a termy t, s, t', s', t.ž.

$$[t]_T = [t']_T \qquad [s]_T = [s']_T$$

Musíme dokázat, že

$$f^{\mathfrak{CM}_T}([t]_T, [s]_T) = [f(t,s)]_T \stackrel{?}{=} [f(t',s')]_T = f^{\mathfrak{CM}_T}([t']_T, [s']_T)$$

Pozorování: $[t]_T = [t']_T$ iff $T \vdash t' \approx t$

Důkaz pozorovaní:

- $t \in [t]_T$ — $x \approx x$, $\forall x(x \approx x)$, $t \approx t$
- $[t]_T = [t']_T$ implikuje $t \in [t']$, což dle def: $T \vdash t' \approx t$
- obráceně: pokud $r \in [t]_T$ pak dle def: $T \vdash t \approx r$
- tedy $T \vdash t' \approx r$ a tade dle def: $r \in [t']_T$ — Trans

Je definice $\mathfrak{CM}_T$ korektní?

Uvažme binární funkční symbol f a termy t, s, t', s', t.ž.

$$[t]_T = [t']_T \qquad [s]_T = [s']_T$$

Musíme dokázat, že

$$f^{\mathfrak{CM}_T}([t]_T, [s]_T) = [f(t,s)]_T = [f(t', s')]_T = f^{\mathfrak{CM}_T}([t']_T, [s']_T)$$

Pozorování: $[t]_T = [t']_T$ iff $T \vdash t' \approx t$

Odstranění otazníku:

- $x \approx x' \wedge y \approx y' \to f(x,y) \approx f(x', y')$ — Congr$_f$
- $t \approx t' \wedge s \approx s' \to f(t,s) \approx f(t', s')$ — $\forall 1$
- Tedy $[f(t,s)]_T \approx [f(t', s')]_T$ — pozorovaní

Je definice $\mathfrak{CM}_T$ korektní?

Uvažme binární funkční symbol f a termy t, s, t', s', t.ž.

$$[t]_T = [t']_T \qquad [s]_T = [s']_T$$

Musíme dokázat, že

$$f^{\mathfrak{CM}_T}([t]_T, [s]_T) = [f(t, s)]_T = [f(t', s')]_T = f^{\mathfrak{CM}_T}([t']_T, [s']_T)$$

Pozorování: $[t]_T = [t']_T \qquad \text{iff} \qquad T \vdash t' \approx t$

Analogicky bychom dokázali

$$\langle [t]_T, [s]_T \rangle \in P^{\mathfrak{CM}_T} \text{ iff } T \vdash P(t, s) \text{ iff } T \vdash P(t', s') \text{ iff } \langle [t']_T, [s']_T \rangle \in P^{\mathfrak{CM}_T}$$

Kanonický model pro Henkinovské teorie

Lemma 5.11

Nechť T je úplná Henkinovská konsistetní teorie T. Pak pro každou sentenci φ platí:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi \qquad \textit{iff} \qquad T \vdash \varphi.$$

Důkaz.

Dokážeme, že pro každou fli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a každé $\mathfrak{CM}_T$-ohodnocení $\mathrm{v}(x_i) = [t_i]_T$:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi[\mathrm{v}] \qquad \text{iff} \qquad T \vdash \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Pokud φ je atomická fle, tak tvrzení plyne z definice $\mathfrak{CM}_T$

Pokud $\varphi = \neg\psi$ nebo $\varphi = \psi \to \chi$ postupujeme jako ve výrokové logice

Kanonický model pro Henkinovské teorie

Lemma 5.11

Nechť T je úplná Henkinovská konsistetní teorie T. Pak pro každou sentenci φ platí:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi \qquad \text{iff} \qquad T \vdash \varphi.$$

Důkaz.

Dokážeme, že pro každou fli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a každé $\mathfrak{CM}_T$-ohodnocení $\mathrm{v}(x_i) = [t_i]_T$:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi[\mathrm{v}] \qquad \text{iff} \qquad T \vdash \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Pokud $\varphi = \exists x\, \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, pak píšeme řetez ekvivalencí:

- $\mathfrak{CM}_T \models \exists x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)[\mathrm{v}]$
- $\mathfrak{CM}_T \models \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)[\mathrm{v}_{x=[t]_T}]$ pro nějaký $t \in UT$
- $T \vdash \varphi(t, t_1, \ldots, t_n)$ pro nějaký $t \in UT$
- $T \vdash \exists x\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_n)$ zde použijeme, že T je Henkinovská!

Kanonický model pro Henkinovské teorie

Lemma 5.11

Nechť T je úplná Henkinovská konsistetní teorie T. Pak pro každou sentenci φ platí:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi \qquad \textit{iff} \qquad T \vdash \varphi.$$

Důkaz.

Dokážeme, že pro každou fli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a každé $\mathfrak{CM}_T$-ohodnocení $\mathrm{v}(x_i) = [t_i]_T$:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi[\mathrm{v}] \qquad \text{iff} \qquad T \vdash \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Pokud $\varphi = \forall x\, \psi(x, y_1, \dots, y_n)$, pak píšeme řetez ekvivalencí:

- $\mathfrak{CM}_T \models \forall x\, \varphi(x, y_1, \dots, y_n)[\mathrm{v}]$
- $\mathfrak{CM}_T \models \varphi(x, y_1, \dots, y_n)[\mathrm{v}_{x=[t]_T}]$ pro každý $t \in UT$
- $T \vdash \varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ pro každý $t \in UT$
- $T \vdash \forall x\, \varphi(x, t_1, \dots, t_n)$ tady musíme jestě něco dokázat!

Kanonický model pro Henkinovské teorie

Lemma 5.11

Nechť T je úplná Henkinovská konsistetní teorie T. Pak pro každou sentenci φ platí:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi \qquad \textit{iff} \qquad T \vdash \varphi.$$

Důkaz.

Dokážeme, že pro každou fli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a každé $\mathfrak{CM}_T$-ohodnocení $\mathrm{v}(x_i) = [t_i]_T$:

$$\mathfrak{CM}_T \models \varphi[\mathrm{v}] \qquad \text{iff} \qquad T \vdash \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Tvrzení: pro každou $\varphi(x)$ tž. $T \nvdash \forall x\, \varphi$ existuje konst. c tž. $T \nvdash \varphi(x/c)$

Důkaz: $T \nvdash \forall x\, \varphi$ implikuje (díky úplnosti T), že $T \vdash \neg\forall x\, \varphi$

Tudíž $T \vdash \exists x\, \neg\varphi$ a tedy (T je Henkin.) existuje konst. c tž. $T \vdash \neg\varphi(x/c)$

Tudiž (díky konsistentnosti T) máme $T \nvdash \varphi(x/c)$. □

Důkaz věty o úplnosti

Předpokládejme $T \nvdash^{\mathcal{P}} \varphi$

Pak dle lemma 5.10 existuje jazyk $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$-teorie T' tž.

- T' je úplná konsistentní Henkinovská
- $T' \supseteq T$
- $T' \nvdash^{\mathcal{P}'} \varphi$

Pak Lemma 5.11 říká, že $\mathfrak{CM}_{T'}$ je $\mathcal{P}'$-model teorie T' a $\mathfrak{CM}_{T'} \not\models \varphi$

Uvažme $\mathcal{P}$-model $\models M$ vzniklý z $\mathfrak{CM}_{T'}$ opomenutím symbolů z $\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}$

Očividně $\mathbf{M}$ je model $\mathcal{P}$-teorie T a $\mathbf{M} \not\models \varphi$

Tedy $T \not\models^{\mathcal{P}} \varphi$

Alternativní formulace úplnosti a kompaktnost

Pozorování: teorie T je konsistentní iff $T \nvdash \bot$

Důsledek 5.12 (Úplnost)

Teorie T je konsistentní iff má model.

Pozorování: tento důsledek je ekvivalentní formulace věty o úpnosti

Důsledek 5.13 (Kompaktnost)

Teorie T má model iff každá její končná podteorie má model.

Herbrandova věta

Definujeme $\mathcal{P}^c$ jako $\mathcal{P}$ pokud $\mathcal{P}$ obsahuje nějakou konstantu, jinak jako rozšíření $\mathcal{P}$ o konstantu c

Věta 5.14

Nechť φ je $\mathcal{P}$-fle bez kvantifikátorů. Pak $\exists x\, \varphi$ je tautologie iff existují uzavřené $\mathcal{P}^c$-termy $t_1, \ldots, t_k$ tž. formule $\bigvee_{i \leq k} \varphi(x/t_i)$ je tautologie.

Jeden směr důkazu je zřejmý: $\varphi(x/t) \to \exists x\, \varphi$

Důkaz druhého směru

Z předpokladu víme, že fle $\forall x \neg\varphi$ nemá $\mathcal{P}^c$-model

Tvrzení: teorie $T = \{\neg\varphi(x/s) \mid s \in UT\}$ také nemá $\mathcal{P}^c$-model

Důkaz tvrzení: nechť $\mathbf{M}$ je model T, uvažme jeho *podstrukturu* $\mathbf{M}'$:

- $M' = \{s^{\mathbf{M}} \mid s \in UT\}$
- $f^{\mathbf{M}'}(s_1^{\mathbf{M}}, \ldots, s_n^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}(s_1^{\mathbf{M}}, \ldots, s_n^{\mathbf{M}})$ pro každý n-ární $f \in \mathcal{P}^c$
- $\langle s_1^{\mathbf{M}}, \ldots, s_n^{\mathbf{M}} \rangle \in P^{\mathbf{M}'}$ iff $\langle s_1^{\mathbf{M}}, \ldots, s_n^{\mathbf{M}} \rangle \in P^{\mathbf{M}}$ pro každý n-ární $P \in \mathcal{P}^c$

Indukcí je snadné ukázat, že pro otevřenou fli ψ a $\mathbf{M}'$-ohodnocení v:

$$\mathbf{M}' \models \psi[\mathrm{v}] \qquad \text{iff} \qquad \mathbf{M} \models \psi[\mathrm{v}]$$

Tedy pro každý term $s \in UT$ máme $\mathbf{M}' \models \neg\varphi(x/s)$, t.j. $\mathbf{M}' \models \neg\varphi[\mathrm{v}_{x=s^{\mathbf{M}}}]$
a tudíž $\mathbf{M}' \models \forall x \neg\varphi$ — spor

Důkaz druhého směru

Z předpokladu víme, že fle $\forall x \neg\varphi$ nemá $\mathcal{P}^c$-model

Tvrzení: teorie $T = \{\neg\varphi(x/s) \mid s \in UT\}$ také nemá $\mathcal{P}^c$-model

Z kompaktnosti: existují uzavřené $\mathcal{P}^c$-termy $t_1, \dots, t_k$ tž.

$$\{\neg\varphi(x/t_1), \dots, \neg\varphi(x/t_k)\} \text{ nemá model}$$

Tedy $\models \bigvee_{i \leq k} \varphi(x/t_k)$ pro uzavřené $\mathcal{P}^c$-termy $t_1, \dots, t_k$

Skolemova věta

Věta 5.15

Nechť T je $\mathcal{P}$-teorie, $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ je $\mathcal{P}$-formule, ve které se nikde nekvantifikuje přes x_i, a f je n-ární funkční symbol nevyskytující se v $T \cup \{\varphi\}$.

Pak $T \models \exists x_1, \ldots, x_n \, \forall y \, \varphi$ iff $T \models \exists x_1, \ldots, x_n \, \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))$.

Jeden směr důkazu je zřejmý, jelikož máme:

$$\forall y \, \varphi \to \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))$$

Důkaz druhého směru

Předpokládejme, že $T \not\models \exists x_1, \ldots, x_n \forall y \, \varphi$

Vezměme model T t.ž. $\mathbf{M} \not\models \exists x_1, \ldots, x_n \forall y \, \varphi$

Tudíž pro každou $a_1, \ldots, a_n \in M$ existuje $b \in M$ tž.

$$\mathbf{M} \not\models \varphi[\mathrm{v}_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n,y=b}]$$

Rozšiřme $\mathbf{M}$ o funkční symbol f intepretovaný jako $f^{\mathbf{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = b$

Očividně $\mathbf{M}' \models T$ a $\mathbf{M}' \not\models \exists x_1, \ldots, x_n \, \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))$

Konzervativní rozšíření teorie

Definice 5.16

Nechť $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ jsou predikátové jazyky, T je $\mathcal{P}$-teorie a S je $\mathcal{P}'$-teorie.

- S je rozšíření T, pokud pro každou $\mathcal{P}$-sentenci platí:

$$T \vdash \varphi \quad \text{implikuje} \quad S \vdash \varphi$$

- S je konzervativní rozšíření T, pokud pro každou $\mathcal{P}$-sentenci platí:

$$T \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad S \vdash \varphi$$

Lemma 5.17

Nechť $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ jsou predikátové jazyky, T je $\mathcal{P}$-teorie a S je $\mathcal{P}'$-teorie rozšiřující T. Pokud pro každý model T existuje model S se stejnou doménou a interperací symbolů z $\mathcal{P}$. Pak S je konzervativní rozšíření T.

Konzervativní rozšíření teorie

Definice 5.16

Nechť $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ jsou predikátové jazyky, T je $\mathcal{P}$-teorie a S je $\mathcal{P}'$-teorie.

- S je rozšíření T, pokud pro každou $\mathcal{P}$-sentenci platí:

$$T \vdash \varphi \quad \text{implikuje} \quad S \vdash \varphi$$

- S je konzervativní rozšíření T, pokud pro každou $\mathcal{P}$-sentenci platí:

$$T \vdash \varphi \quad \text{iff} \quad S \vdash \varphi$$

Věta 5.18

Nechť T je $\mathcal{P}$-teorie, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je $\mathcal{P}$-formule a $\mathcal{P}'$ je rozšíření $\mathcal{P}$ o nový n-ární predikátový symbol P. Pak následující $\mathcal{P}'$-teorie:

$$S = T \cup \{\forall x_1, \ldots, x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi)\}$$

je konzervativní rozšíření T.

Další příklad

Věta 5.19

Nechť T je $\mathcal{P}$-teorie, $\forall x_1, \ldots, x_n \exists y \varphi$ je $\mathcal{P}$-sentence dokazatelná v T a $\mathcal{P}'$ je rozšíření $\mathcal{P}$ o nový n-ární funkční symbol f. Pak následující $\mathcal{P}'$-teorie:

$$S = T \cup \{\forall x_1, \ldots, x_n \, \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))\}$$

je konzervativní rozšíření T.

Důkaz.

Obě věty plynou snadno z Lemma 5.17. $\square$