

Mezi malými a velkými čísly

Zuzana Haniková
Ústav informatiky AV ČR

Týden AV ČR, 3. 11. 2021

starý dům, vysoká hora, červené auto

- nejasné vymezení
- hraniční případy,
- plynulý přechod mezi "určitě ano" a "určitě ne"

Přítomnost hraničních případů **neznamená**, že vlastnost je **nesmyslná**.

Predikátům **starý**, **vysoká**, **červené** (v kontextu) rozumíme a umíme je používat.

Vágní predikáty a hraniční případy

Některá auta jsou nepochybně červená.

Některá auta nepochybně nejsou červená.

U některých aut není jasné, zda jsou červená.



“Být hraničním případem” je také vágní predikát.

(Typicky) stupňování a porovnávání: starý dům, starší dům, ...

Porovnat stáří lze i u dvou starých domů.

Vágní predikáty – v čem jsou užitečné?

Vágní vlastnost lze často podložit číselnou veličinou:

starý ... datum
vysoký ... výška
horký ... teplota

- Tato hodnota je měřitelná, ale (zpravidla) ne zjevná.
Vágní pojmy lépe odpovídají našemu vnímání a zpracování informace (smysly, paměť).
- Číselná hodnota nenahrazuje význam odpovídající vágní vlastnosti.
- Role typických příkladů v poznávání významů slov (vs. vymezování hranic).

Komunikace: **vágní pojmy používáme s vědomím jejich vágnosti.**

Nechť X je velké číslo.

X zrněk písku tvoří hromadu.

Odebráním zrnka písku hromada nepřestane být hromadou.

(Tedy) $X - 1$ zrněk písku tvoří hromadu.

... ..

Jediné zrnko písku tvoří hromadu.

sórités (*sóros* – hromada)



Konečná posloupnost objektů taková, že

- první objekt má vlastnost V
- poslední objekt nemá vlastnost V
- po sobě jdoucí objekty posloupnosti se jeví nerozlišitelné (vůči V).

Nechť X je libovolné kladné přirozené číslo.

- 1 je malé číslo.
- Je-li n malé, pak i $n + 1$ je malé.
-
- X je malé číslo.

[...] reprezentuje opakované užití pravidla modus ponens:
$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

X je libovolně zvolené číslo.

Každé přirozené číslo je tedy malé (!)

Ale: pokud by všechna čísla byla malá, pojem “malý” ztrácí smysl.

- M. Dummett: Wang's paradox.
(nadsázka) Číslo je malé, pokud je menší než většina ostatních.

Matematický model (fuzzy logika)

Pravdivostní hodnoty: $\{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 0\}$; tedy $\{0\} \cup \{1/2^n\}_{n=0}^{\omega}$

Přirozené uspořádání: 1 zcela pravdivé výroky, 0 zcela nepravdivé.

Operace \rightarrow :

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leq y; \\ y/x & \text{pro } x > y. \end{cases}$$

Atomickému výroku "n je malé" přiřadíme pravdivostní hodnotu:

$$v(\text{"n je malé"}) = \frac{1}{2^n}.$$

Tedy speciálně $v(\text{"pokud } n \text{ je malé, i } n + 1 \text{ je malé"}) = 1/2$

(hodnota nezávisí na volbě n)

Modifikace:

pravdivostní hodnoty $\{0\} \cup \{1/2^{nr}\}_{n=0}^{\omega}$ pro malé $r > 0$ (např. $r = 10^{-6}$)

Premisy jsou skoro úplně pravdivé!

$\text{malé}(x)$ je atomická formule.

složená formule: $\forall x(\text{malé}(x) \rightarrow \text{malé}(x + 1))$

lze vyhodnotit pomocí funkcí interpretujících \forall a \rightarrow .

Vypočítáme: pravdivostní hodnotu složené formule
z pravdivostních hodnot atomických formulí (pomocí funkcí)

(\rightarrow jako dělení, \forall jako infimum)

nebudou platit některé zákonitosti klasické logiky
například princip vyloučeného třetího $P(x) \vee \neg P(x)$.

Fuzzy logika tedy

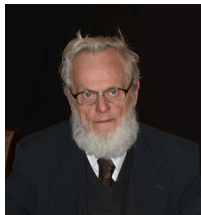
- modeluje některé situace lépe než logika klasická, ale
- některé klasicky platné principy v ní nelze použít.

Matematická fuzzy logika studuje pravidla usuzování s vágními predikáty.

Prameny a souvislosti:

- vícehodnotová logika (konečně i nekonečně hodnot)
- teorie fuzzy množin
- algebraická logika
- intuicionistická logika

Pracovní skupina v ÚI AV založená prof. Petrem Hájkem.



Monografie:

- P. Hájek: *Metamathematics of Fuzzy Logic*. *Kluwer Academic Publishers*, 1998.
- P. Cintula, C. Fermüller, P. Hájek, C. Noguera: *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*. *College Publications*, 2011 a 2015.

- **závislost na kontextu:**

- vysoká pokuta za překročení povolené rychlosti
- vysoká mzda v IT sektoru
- vysoká výhra v loterii

- **nejistota:**

Počet dopravních přestupků mezi dvěma po sobě následujícími zatměními slunce pozorovatelnými ve Francii je prvočíslo.

- **nedefinovaná pravdivostní hodnota**

Zítra dojde k propadu na pražské burze.

- **víceznačnost:**

Káča, Amerika, osel, . . .

- “vyostření”

Dospělý člověk . . . dosáhl 18 let věku

vysoký krevní tlak . . . vyšší než 140/90 mm Hg.

(přijatelný (!) dělicí bod)

Ale: snížená viditelnost

- kategorizace

– Důvěřujete českým značkám?

- Zcela
- Spíše ano
- Nemám preference
- Spíše ne
- Vůbec

Beaufortova stupnice síly větru

St.	Označení	Rychlost (km/h)	Účinky na souši	Účinky na moři
0	bezvětří	< 1	kouř stoupá svisle vzhůru	zrcadlově hladké
1	vánek	1–5	kouř ve směru větru	zčeřené vlny bez pěny
2	větřík	6–11	vítr ve tváři, listí šelestí, korouhev se hýbe	malé výraznější vlny, nelámou se
3	slabý vítr	12–19
4	mírný vítr	20–28
5	čerstvý vítr
6	silný vítr	39–49	dráty sviští, pohyb větví, používání deštníků je obtížné	...
7	mírný vichr
8	čerstvý vichr	...	láme větve, vzpřímená chůze proti větru je nemožná	...
9	silný vichr
10	plný vichr	...	vyvrací stromy, působí škody na obydlích	...
11	vichřice
12	orkán	> 118	ničivé účinky hýbe těžkými hmotami	moře bílé, vodní tříšť, není výhled

Nové zpracování pojmu nekonečna:

Konečná posloupnost objektů taková, že

- první objekt má vlastnost V
- poslední objekt nemá vlastnost V
- po sobě jdoucí objekty posloupnosti se jeví nerozlišitelné (vůči V).

~~Konečná~~ posloupnost objektů ...

... takovéto posloupnosti konečné nejsou!

Konečné je pouze to, co je zcela přehledné.

Soubory, které v sobě zahrnují nepřehledné části, jsou nekonečné.

“Velké” soubory objektů jsou již nekonečné.

Inspirace nestandardními modely aritmetiky (Thoralf Skolem) a nestandardní analýzou (Abraham Robinson cca 1960).

Petr Cintula, Petr Hájek, Carles Noguera (eds.): Handbook of Mathematical Fuzzy Logic. *College Publications*, 2011 a 2015.

Michael Dummett: Wang's paradox. *Synthese* 30, 1975.

Petr Hájek: Metamathematics of Fuzzy Logic. *Kluwer*, 1998.

David Lanius: What is the value of vagueness? *Theoria* 87, 251–280, 2021.

Nicholas J. J. Smith: Fuzzy logics in theories of vagueness. Chapter XVIII of *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*, vol. 3, pp. 1237–1281, College Publications, 2015.

Petr Vopěnka: Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín. *Alfa*, Bratislava, 1989.