Český příspěvek k moderním teoriím integrálu

Štefan Schwabik

Matematický ústav AV ČR,
Žitná 25, 115 67 Praha, Česká republika,
Email: schwabik@math.cas.cz

Úvodem připomeňme situaci s integrály, kterou známe leckdy už od střední školy, či od úvodních vysokoškolských kurzů matematické analýzy.

První z integrálů, se kterým se setkáváme, a který občas vskutku lze i vypočítat, je

Newtonův integrál

Buď $-\infty < a < b < \infty$. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v intervalu $[a,b]$. Předpokládejme, že

existuje primitivní funkce F k funkci f v $[a,b]$,

tj. pro $x \in [a,b]$ platí $F'(x) = f(x)$ (v koncových bodech intervalu $[a,b]$ uvažujeme příslušné jednostranné derivace).

Položme

$$F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f(x)dx.$$

Číslo $(N) \int_a^b f(x)dx$ nazveme *Newtonovým integrálem funkce f od a do b*. Množinu všech funkcí $f \to \mathbb{R}$, které mají Newtonův integrál označíme znakem $N([a,b])$.

Uvedená definice Newtonova integrálu patří do kategorie tzv. deskriptivních definicí integrálu. Integrál je popsán pomocí pojmu primitivní funkce. Na první pohled není u Newtonova integrálu patrné, že s jeho pomocí lze popsat obsah rovinného útvaru, který je například určen nezápornou funkcí f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Deskriptivní definice tuto skutečnost přímo nepopisuje.

Trochu jiná je, rovněž elementární, definice, která je konstruktivní. Využívá myšlenku popisu obsahu výše zmíněného rovinného útvaru pomocí starověké exhaustivní metody. Jde o

Riemannův integrál

Předpokládejme, že je $-\infty < a < b < \infty$. Je-li dáno $k+1$ bodů

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = b,$$

říkáme, že je dáno *dělení* intervalu $[a, b]$ na intervaly $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \ldots, k$. Dělení intervalu $[a, b]$ označme D, nebo podrobněji

$$D = \{a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = b\}.$$

Číslo

$$\nu(D) = \max_{j=1,\ldots,k} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

nazveme *normou dělení D.*

Jestliže v každém intervalu $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \ldots, k$ dělení D je dán bod $\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, mluvíme o dělení s význačnými body a označíme jej symbolem $(D, \tau) = (D, \tau_1, \ldots, \tau_k)$, tedy je

$$(D, \tau) = (D, \tau_1, \ldots, \tau_k) = \{a = \alpha_0 \le \tau_1 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_{k-1} \le \tau_k \le \alpha_k = b\}.$$

Nechť je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. K dělení $(D, \tau_1, \ldots, \tau_k)$ s význačnými body a k funkci f utvořme tzv. *Riemannův integrální součet*

$$\sigma(f; D, \tau) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *Riemannovým integrálem funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *od a do b,* když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení s význačnými body (D, τ), pro které $\nu(D) < \delta$, platí nerovnost

$$|\sigma(f; D, \tau) - I| < \varepsilon.$$

Když existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ uvedené v definici, říkáme, že existuje Riemannův integrál $I = (R) \int_a^b f(x)dx$.

Když je $-\infty < b < a < +\infty$, položíme $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ a klademe $\int_a^a f(x)dx = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Jestliže existuje $(R) \int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrovatelná v Riemannově smyslu.* Množinu všech funkcí $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelných v Riemannově smyslu označíme $R([a, b])$, tj.

$$R([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; (R) \int_a^b f(x)dx \text{ existuje } \}.$$

Možno známější je Darbouxova ekvivalentní definice Riemannova integrálu pomocí dolních a horních integrálních součtů a dolního a horního Riemannova integrálu. Nebudeme se jí zde ale věnovat.

Zde uvedená definice pochází vskutku od B. Riemanna z roku 1854. Už v samotné definici je vidno, že jde o obsah rovinného útvaru, sčítají se obsahy obdélníků o stranách $f(\tau_j)$ a $\alpha_j - \alpha_{j-1}$, odtud pak název "konstruktivní definice".

Na tomto místě se sluší připomenout, že pojmy Newtonova a Riemannova integrálu jsou různé. Na příkladech lze totiž ukázat, že existují funkce integrovatelné dle Newtonovy definice ale neintegrovatelné dle definice Riemannovy, integrovatelné dle Riemannovy definice ale neintegrovatelné dle definice Newtonovy.

Riemannův integrál v elementárních matematických kurzech na vysokých školách dělá velmi dobrou službu v tom, že s jeho pomocí lze snadno ukázat, že spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má vždy primitivní funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Podívejme se na chvíli na situaci, ve které bychom chtěli Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ přibližně vyjádřit pomocí riemannovských integrálních součtů $\sigma(f; D, \tau) = \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$.

Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Newtonův integrál

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Protože F je primitivní funkcí k funkci f v $[a, b]$, je $F'(\tau) = f(\tau)$ pro každé $\tau \in [a, b]$, a to dle definice derivace znamená, že k danému $\varepsilon > 0$ a $\tau \in [a, b]$ existuje $\Delta = \Delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $x \in [a, b]$, $0 < |x - \tau| < \Delta$ je

$$\left| \frac{F(x) - F(\tau)}{x - \tau} - f(\tau) \right| < \varepsilon,$$

tj. je

$$|F(x) - F(\tau) - f(\tau)(x - \tau)| \le \varepsilon |x - \tau|$$

pro každé $x \in [a, b]$, $0 < |x - \tau| < \Delta$.

Když tedy bude

$$\tau - \Delta(\tau, \varepsilon) < \alpha_1 \le \tau \le \alpha_2 < \tau + \Delta(\tau, \varepsilon) \quad \text{a} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$$

pak bude také

$$\begin{gathered} |F(\alpha_2) - F(\alpha_1) - f(\tau)(\alpha_2 - \alpha_1)| \le \\ |F(\alpha_2) - F(\tau) - f(\tau)(\alpha_2 - \tau)| + |F(\tau) - F(\alpha_1) - f(\tau)(\tau - \alpha_1)| \le \\ \le \varepsilon(|\alpha_2 - \tau| + |\tau - \alpha_1|) = \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1). \end{gathered} \tag{1}$$

Předpokládejme, že dovedeme sestrojit dělení intervalu $[a, b]$

$$D = \{a = \alpha_0 \le \tau_1 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_{k-1} \le \tau_k \le \alpha_k = b\}$$

tak, že pro něj bude platit

$$\tau_j - \Delta(\tau_j, \varepsilon) < \alpha_{j-1} \le \tau_j \le \alpha_j < \tau_j + \Delta(\tau_j, \varepsilon)), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Podle definice a (1) pak máme

$$|(N) \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})| = |F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^k f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{k} [F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1}) - f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, tato poslední nerovnost znamená, že Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x)dx$ lze libovolně přesně aproximovat integrálním součtem $\sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$, který je stejného tvaru jako u Riemannova integrálu.

Výše provedená úvaha je korektní až na to, že není zřejmé, zda existuje dělení D intervalu $[a, b]$, které splňuje požadavek z (2). Když tedy budeme chtít splnit úkol, který podle výše uvedeného postupu umožní definovat Newtonův integrál pomocí riemannovských integrálních součtů, musíme vyjasnit otázku existence dělení, které splňuje (2).

Uveďme několik jednoduchých pojmů.

Předpokládejme, že je na intervalu $[a, b]$ dána kladná funkce $\Delta : [a, b] \to (0, +\infty)$; pro naše potřeby ji nazveme *kalibrem*.

Dělení

$$D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$$

intervalu $[a, b]$, které splňuje

$$\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset (\tau_j - \Delta(\tau_j), \tau_j + \Delta(\tau_j)), \quad j = 1, \ldots, k \tag{3}$$

nazveme *Δ-jemným dělením intervalu* $[a, b]$. Množinu všech dělení, která jsou Δ-jemná vzhledem ke kalibru Δ, označme symbolem $A(\Delta)$.

Odpověď na výše položenou otázku o existenci dělení dává následující

Cousinovo lemma. *Je-li $\Delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ kalibr, potom je*

$$A(\Delta) \neq \emptyset,$$

tj. ke každému kalibru Δ existuje dělení, které je Δ-jemné.

S tímto aparátem nyní uvedeme nový pojem integrálu a tím je

Kurzweilův integrál

Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *Kurzweilovým integrálem funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ od a do b*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta > 0$ tak, že pro každé Δ-jemné dělení s význačnými body (D, τ) platí nerovnost

$$|\sigma(f; D, \tau) - I| < \varepsilon.$$

Když existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ uvedené v definici, říkáme, že existuje Kurzweilův integrál $I = (K) \int_a^b f(x)dx$.

Jestliže existuje $(K) \int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrovatelná v Kurzweilově smyslu.* Množinu všech funkcí $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelných v Kurzweilově smyslu označíme $K([a, b])$, tj.

$$K([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; (K) \int_a^b f(x)dx \text{ existuje } \}.$$

Nejprve několik komentářů k tomuto novému pojmu:

Ve srovnání s Riemannovou definicí se Kurzweilova definice liší jen nepatrně; nerovnost $\nu(D) < \delta$ pro normu dělení je nahrazena Δ-jemností dělení. Budeli pro kalibr $\Delta(x) = \delta$, potom Δ-jemné dělení splňuje nerovnost $\nu(D) < 2\delta$, a tedy je každá funkce $f \in R([a, b])$ také v $K([a, b])$. Výše uvedená úvaha o vyjádřitelnosti Newtonova integrálu dále ukazuje, že každá funkce $f \in N([a, b])$ je také v $K([a, b])$. Poznamenejme ještě, že každá spojitá funkce $f \in C([a, b])$ je prvkem $N([a, b])$ a také $R([a, b])$. Tím dostáváme inkluze

$$C([a, b]) \subset N([a, b]) \subset K([a, b])$$

a

$$C([a, b]) \subset R([a, b]) \subset K([a, b]).$$

Kurzweilův integrál tedy zahrnuje jak Newtonův tak i Riemannův integrál. Má tedy schopnost integrovat každou derivaci. Tuto vlastnost má Newtonův integrál, nemá ji ale integrál Riemannův.

Tento pojem integrálu se v roce 1957 poprvé objevil v práci českého matematika Jaroslava Kurzweila: *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter,* Czech. Math. Journal, 7 (82), 418 – 449.

Jak název práce prozrazuje, týkala se spojité závislosti na parametru pro obyčejné diferenciální rovnice a specialisté v teorii integrálu jí pochopitelně pozornost nevěnovali.

Nezávisle na práci J. Kurzweila tento způsob definice integrálu objevil v roce 1960 britský matematik Ralph Henstock.

Počátkem minulého století se v matematice objevil pojem Lebesgueova integrálu, tj. třída funkcí $L([a, b])$. Lebesgueův integrál je základním pojmem matematické analýzy dneška. Brzy se ale ukázalo, že pomocí Lebesgueova integrálu nelze integrovat každou derivaci. Lebesgueův integrál dovede integrovat pouze derivace absolutně spojitých funkcí. Toto zjištění vedlo k tomu, že ve dvacátých letech se mnoho matematiků věnovalo budování teorie takových integrálů, které dovedou integrovat každou derivaci. Tak spatřil světlo světa pojem perronovsky integrovatelných funkcí $P([a, b])$ a pojem funkcí inegrovatelných v (úzkém) Denjoyově smyslu $D([a, b])$. Brzy se ukázalo, že je $L([a, b]) \subset P([a, b]) = D([a, b])$.

Už ve výše zmíněné práci J. Kurzweil dokázal, že je

$$K([a, b]) = P([a, b]).$$

Máme tedy v případě $K([a,b])$ co do činění s pojmem integrálu, který je definován pomocí riemannovských integrálních součtů a tento konstruktivně definovaný integrál je ekvivalentní deskriptivně definovanému Perronovu integrálu $P([a,b])$.

Zajímavý je také vztah Kurzweilova integrálu k integrálu Lebesgueovu. V této souvislosti platí následující

Tvrzení. *$f \in L([a,b])$ právě když je f a $|f| \in K([a,b])$.*

Kurzweilův integrál integrál má totiž tu vlastnost, že když je $f \in K([a,b])$ nemusí být $|f| \in K([a,b])$. Říká se proto, že jde o *neabsolutně konvergentní integrál.* Z uvedeného tvrzení ale ihned plyne, že nezáporná funkce je lebesgueovsky integrovatelná právě když je integrovatelná v Kurzweilově smyslu.

O některých vlastnostech Kurzweilova integrálu

Zajímavá a v případech klasických integrálů neobvyklá je následující

Hakeova věta *Buď dána funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, že pro každé $c \in [a,b]$, $c < b$ existuje integrál $(K) \int_a^c f(x)dx$. Předpokládejme, že existuje vlastní limita*

$$\lim_{c \to b-} (K) \int_a^c f(x)dx = I.$$

Potom existuje také integrál $(K) \int_a^b f(x)dx$ a platí rovnost

$$(K) \int_a^b f(x)dx = I.$$

Obdobná věta platí i pro případ levého konce intervalu $[a,b]$. Tuto přirozenou a žádoucí vlastnost nemá Riemannův a ani Lebesgueův integrál. V případech těchto integrálů to vede k zavedení pojmu *nevlastního integrálu* tak, že se limita I deklaruje jako hodnota integrálu.

Na tomto místě se zcela přirozeně objeví otázka definice *integrálu funkce f přes neomezené intervaly* typu $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ nebo $(-\infty,+\infty)$. Uvažujme např. interval $[a,+\infty)$. Je pochopitelně žádoucí zachovat vlastnost, kterou v tomto případě popisuje výše uvedená Hakeova věta pro $b = +\infty$.

Formálně je několik možností jak takovou "součtovou" definici integrálu uvést. Uvedeme jednu z nich.

Definice. Buď $a \in \mathbb{R}$. Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *Kurzweilovým integrálem funkce $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ od a do $+\infty$*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta : [a,+\infty) \to (0,+\infty)$ a konstanta $L > 0$ tak, že pro každý omezený interval $[a,b]$, pro který je $[a,L] \subset [a,b]$ a každé Δ- jemné dělení D intervalu $[a,b]$ platí nerovnost

$$|\sigma(f;D) - I| < \varepsilon.$$

Obdobně lze postupovat i ve zbylých dvou případech. Výsledný integrál zachová všechny vlastnosti integrálu, které platí pro kompaktní intervaly a navíc "obsahuje" nevlastní Riemannův i Lebesgueův integrál.

V souvislosti s různými teoriemi integrálu je z hlediska jejich použitelnosti v aplikacích důležité znát "dobré" konvergenční věty.

V nejjednodušší podobě jde o tvrzení následujícího typu:

Buď dána posloupnost funkcí $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ a funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tak, že platí $f_n \to f$, f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou integrovatelné v intervalu $[a,b]$.

Potom je funkce f integrovatelná v $[a,b]$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f.$$

Zde je třeba dát význam tomu, co znamená zápis $f_n \to f$. Když např. $f_n \to f$ znamená *stejnoměrnou konvergenci* posloupnosti funkcí f_n k funkci f na intervalu $[a,b]$, potom lze jednoduše (na úrovni elementárního kurzu analýzy) dokázat, že bez dalších podmínek konvergenční věta platí v případě Riemannova integrálu. Obdobně je tomu i v případě integrálu Lebesgueova a Kurzweilova. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí f_n k funkci f na intervalu $[a,b]$ ale je silný, v konkrétních situacích často nesplněný, požadavek.

Za dobré konvergenční tvrzení se považuje situace, když zápis $f_n \to f$ znamená *bodovou konvergenci* posloupnosti funkcí f_n k funkci f na intervalu $[a,b]$, tj. když je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro $x \in [a,b]$, případně pro skoro všechna (ve smyslu Lebesgueovy míry) $x \in [a,b]$. Takové věty známe pro Lebesgueův integrál (Leviova věta o monotonní konvergenci, Lebesgueova věta o dominované konvergenci, Vitaliova věta).

Z pohledu výuky jsou dobré i věty, které lze snadno a rychle dokázat.

Podívejme se na situaci, když zápis $f_n \to f$ znamená bodovou konvergenci posloupnosti funkcí f_n k funkci f na intervalu $[a,b]$ a na Kurzweilův integrál. Všimněme si, že v konvergenční větě jde o rovnost $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$, tj. o záměnu pořadí limity a integrálu. Dalším pozorováním budiž poznatek, že Kurzweilův integrál definovaný výše je výsledkem procedury, která formálně připomíná definici jisté "limity" (tuto skutečnost lze v rámci současné matematiky upřesnit).

Dále je dobré si uvědomit, že dva limitní procesy závislé na dvou proměnných lze vzájemně zaměnit, když jeden z nich je stejnoměrný vzhledem ke zbylé proměnné.

Co v dané situaci bodové konvergence posloupnosti bude znamenat, že proces Kurzweilovy integrace je stejnoměrný vzhledem k proměnné n? Toto lze upřesnit následujícím způsobem.

Nechť $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost funkcí .

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ je *stejně integrovatelná* v $[a,b]$, když jsou splněny následující dvě podmínky:

1) Každá funkce f_n je integrovatelná v $[a,b]$ v Kurzweilově smyslu.

2) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta : J \to (0, +\infty)$ tak, že pro každé Δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$|\sigma(f_n; D) - (K) \int_a^b f_n(x)dx| < \varepsilon.$$

Použitím pojmu stejné integrovatelnosti není obtížné dokázat, že platí následující

Konvergenční věta. *Nechť posloupnost funkcí* $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ *je stejně integrovatelná v* $[a,b]$.

Když je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in [a,b]$, *kde* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *potom je funkce* f *v Kurzweilově smyslu integrovatelná v* $[a,b]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (K) \int_a^b f_n(x)dx = (K) \int_a^b f(x)dx.$$

Tato věta má stručný a jednoduchý důkaz. Není ale jednoduché pro danou posloupnost ověřit, že je stejně integrovatelná. Lze ale dokázat následující postačující podmínku:

Když je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in [a,b],\ f_n \in K([a,b])$$

a platí

$$g(x) \le f_n(x) \le h(x),\ x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}$$

kde $g, h \in K([a,b]$, *potom je posloupnost* $\{f_n\}$ *stejně integrovatelná v* $[a,b]$.

S touto podmínkou dostaneme z uvedené konvergenční věty větu, která je blízká Lebesgueově větě o dominované konvergenci.

Pro definici Kurzweilova integrálu jsme užili pojem dělení Δ-jemných vzhledem ke kalibru Δ, tj. požadovali jsme splnění podmínky (3). Když tuto podmínku nahradíme podmínkou

$$[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset (\tau_j - \Delta(\tau_j), \tau_j + \Delta(\tau_j)), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

tj. nebudeme požadovat, aby $\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, nazveme dělení D *Δ-jemným M-dělením intervalu* $[a,b]$.

Použijeme-li tento pojem, dostaneme

McShaneův integrál

Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *McShaneovým integrálem funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *od* a *do* b, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta > 0$ tak, že pro každé Δ-jemné M-dělení s význačnými body (D, τ) platí nerovnost

$$|\sigma(f; D, \tau) - I| < \varepsilon.$$

Když existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ uvedené v definici, říkáme, že existuje McShaneův integrál $I = (M) \int_a^b f(x)dx$.

Jestliže existuje $(M)\int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrovatelná v McShaneově smyslu.* Množinu všech funkcí $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelných v McShaneově smyslu označíme $K([a, b])$, tj.

$$M([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; (M)\int_a^b f(x)dx \text{ existuje } \}.$$

Protože zřejmě každé Δ-jemné dělení s význačnými body (D, τ) je také Δ-jemné M-dělení, lze očekávat, že McShaneův pojem integrálu je užší než Kurzweilův, tj. že platí $M([a, b]) \subset K([a, b])$. Vskutku lze dokázat, že platí

Tvrzení. *$f \in M([a, b])$ právě když je f a $|f| \in K([a, b])$.*

To ale, dle dříve uvedeného tvrzení, znamená, že pojem McShaneova integrálu vede ke třídě absolutně integrovatelných funkcí a je ekvivalentní Lebesgueovu integrálu.

Popsaný přístup k pojmu integrálu má díky osobnosti Jaroslava Kurzweila svůj původ v Čechách a letos uplynulo 50 let od doby, kdy byl publikován.

Kurzweilův integrál vznikl pro potřeby teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Umožnil popsat fyzikální konvergenční jevy, které před jeho vznikem nebylo možno matematicky uchopit. Zúplnil "prostor" diferenciálních rovnic, dobře popsal tzv. obyčejné diferenciální rovnice s impulsy, otevřel cestu ke klasickému vyšetřování okrajových úloh s obecnými okrajovými podmínkami, posloužil k průzkumu integrálních rovnic v prostoru funkcí s konečnou variací, apod.

S ohledem na definici pomocí integrálních součtů, lze Kurzweilův integrál přímo přenést na funkce, které mají hodnoty v topologickém vektorovém prostoru. Významný z hlediska potřeb dnešní matematiky je zejména případ Banachova prostoru.

Jde o velmi obecnou koncepci pojmu, který má všechny dobré vlastnosti, které by slušný integrál měl mít. Otázkou je proč tato koncepce zůstává mezi specialisty a nedostává se v širší míře do obecně užívané matematiky. Důvod proto je třeba hlavně hledat v tom, že v případě funkcí více proměnných lze sice integrál definovat integrál však ztrácí dobré a příjemné vlastnosti, např. věta o substituci neplatí v obecné poloze, i jednoduchá transformace převede existující integrál do neexistujícího. Analogie toho, že integrál z každé derivace existuje (Stokesova věta) platí pro integrál, který je třeba definovat alternativním, složitějším způsobem.

Seznam vědeckých prací, které se vykládanému pojmu integrálu věnují je velmi dlouhý. Zde uvedu jen seznam některých knižních publikací, které k našemu integrálu mají vztah.

R. Bartle: *A modern theory of integration*, American Mathematical Society, Providence, 2001

R. G. Bartle, D. R. Sherbert: *Introduction to real analysis. 2nd ed.*, Wiley, New York, 1992

J. DePree, Ch. Swartz: *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1988

J. Foran: *Fundamentals of Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1991

R. A. Gordon: *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, American Mathematical Society, 1994

R. Henstock: *Theory of Integration*, Butterworths, London, 1963

R. Henstock: *Lectures on the Theory of Integration*, World Scientific, Singapore, 1988

R. Henstock: *The General Theory of Integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991

D. S. Kurtz, Ch. W. Swartz: *Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*, World Scientific, River Edge, 2004

J. Kurzweil: *Nichtabsolut konvergente Integrale*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1980

J. Kurzweil: Henstock-Kurzweil integration: its relation to topological vector spaces World Scientific, Singapore, 2000

J. Kurzweil: Integration between the Lebesgue integral and the Henstock-Kurzweil integral. Its relation to local convex vector spaces. World Scientific, Singapore, 2002

Lee Peng-Yee: *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore, 1989

Lee Peng-Yee, R. Výborný: *Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999

S. Leader: *The Kurzweil-Henstock integral and its differentials: A unified theory of integration on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{R}^n$, Marcel Dekker, New York, 2001

J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*, Univerzita Karlova, Praha, 1993

J. Mawhin: *Analyse. Fondements, techniques, évolution*, De Boeck Université, Bruxelles, 1992

R. M. McLeod: *The Generalized Riemann Integral*, Math. Assoc. of America, 1980

E. J. McShane: *Unified Integration* Academic Press, New York, London, 1983

W. F. Pfeffer: *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

W. F. Pfeffer: *Derivation and integration*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001

Š. Schwabik: *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*, Karolinum, Praha, 1999

Š. Schwabik, Ye Guoju: *Topics in Banach space integration*, World Scientific, Singapore, 2005

Ch. Swartz: *Introduction to gauge integrals*, World Scientific, Singapore, 2001

(Sepsání této úvahy bylo podpořeno grantem IAA100190702 GA AV ČR.)