

MODELOVÁNÍ KRACHŮ NA KAPITÁLOVÝCH TRZÍCH: APLIKACE TEORIE STOCHASTICKÝCH KATASTROF *

Miloslav Vošvrda^{1,2}, Jozef Baruník^{1,2},

¹Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd České republiky, v.v.i.

²Institut ekonomických studií, FSV UK Praha

1. Úvod

Neočekávané krachy kapitálových trhů jsou noční můrou pro finanční svět od samého počátku jejich existence. Teorie katastrof, jež je speciální větví teorie dynamických systémů, se pokouší vnést více světla do porozumění jeho náhlých změn. Tato teorie speciálně studuje vliv malých spojitých změn v řídicích parametrech systému, které ovlivňují jeho výstup, a mohou významně působit na diskontinuální efekty v závislých proměnných. Budeme se tedy zabývat bifurkacemi systému, přičemž pod bifurkací budeme rozumět kvalitativní změnu v chování struktury atraktoru, při mírné změně hodnoty řídicích parametrů. To např. znamená, že v rovnovážném bodě systému neboli v fixním bodě atraktoru dojde při mírné změně řídicích parametrů k periodickému, anebo naopak chaotickému chování. V tomto článku aplikujeme teorii náhlých změn stavu kapitálových trhů, které jsou známy jako krachy. Zeeman (1974) byl první kdo kvalitativně popisuje nestabilní chování trajektorie cen cenných papírů na základě Thomovy (1975) teorie katastrof. Pro tento popis si vybral dvoudimenzionální prostor řídicích parametrů.

Článek patří do skupiny těch článků, které se zabývají empirickou analýzou teorie katastrof. Uváděný přístup je sice postaven na Zeemanově kvalitativním popisu, ale náš primární cíl je odpovědět na otázku zda jsou katastrofické modely schopny identifikovat a významně odhadnout příznaky krachů kapitálových trhů. Výsledky jsou tedy obohacením dosažených poznatků o kvantitativní analýzu modelu, kterou dosavadní literatura neuvádí. Struktura článku je následující: první část je věnována základním principům teorie katastrof. Jelikož byly statistické metody pro historii teorie katastrof rozhodující, zejména v rukou kritiků Sussmana a Zahlera (1977), uvádíme i stochastickou teorii katastrof a přehled testovacích procedur. Druhá část je věnována konzistentní teorii testování hypotéz o formě modelu reprezentující kapitálový trh. Detailně je diskutována základní Zeemanova hypotéza o nestabilitě kapitálových trhů. Poslední část je věnována úloze fundamentalistů a chartistů na kapitálovém trhu a jejich vlivu na stabilitu chování kapitálového trhu.

Nejvýznamnějším aspektem článku je empirické testování popsáných jevů na kapitálovém trhu. Klíčové tvrzení je, že model katastrof typu Cusp (dále uváděný jako model Cusp) je schopen popsat data výrazně lépe než alternativní lineární regresní model, resp. nelineární (logistický) model. Pro naši empirickou analýzu katastrofického modelu jsme si vybrali data z kapitálového trhu USA, z 19. října 1987, známého jako černé pondělí. Pro srovnání jsme vybrali data reprezentující další velký krach, a to z 11. září 2001. Ukážeme, že krach z 1987 byl zapříčiněn endogenními silami, zatímco krach 2001 byl zapříčiněn exogenními silami. Katastrofický model odpovídající krachu z roku 1987 obsahuje bifurkace vedoucí k nestabilitě, zatímco katastrofický model z roku 2001 prakticky bifurkační body neobsahuje. Parametry, které používáme k empirické analýze jsou míry sentimentu jako poměr prodejních

*Výzkum byl podporován GA ČR granty 402/06/0990, 402/06/1417, výzkumným záměrem MSM0021620841 a Centrem základního výzkumu MSMT CZVDEE LC06075.

a nákupních opcí na Standard & Poor's 100 index (Put/Call ratio), který je velmi dobrou mírou spekulativních peněz na kapitálovém trhu. Další jsou objemy obchodů, které jsou dobrou mírou sentimentu pro fundamentální agenty. Použitá data jsou běžnými indikátory sentimentu, které využívá např. i technická analýza. Objemy obchodů i poměr prodejních a nákupních opcí jsou v praxi často používány obchodníky k posouzení situace na trhu.

2. Teorie katastrofických modelů

Významnou součástí moderní teorie nelineární dynamiky je katastrofická teorie. Je to speciální případ teorie singularit, která je klíčová v bifurkační teorii (Rosser (2007)). Vyvinul ji matematik R. Thom (1975), který s její pomocí vysvětlil biologickou morfogenezi jako jednu z největších záhad matematické biologie. Rozsah potenciálních aplikací této teorie je velice široký, protože katastrofická teorie má blízko k teorii Taylorových řad. Zeeman (1974) byl první kdo aplikoval tuto teorii k analýze chování kapitálového trhu. Ačkoliv jeho práce byla zaměřena spíše na kvalitativní než na kvantitativní analýzu, jeho hypotézy byly na tu dobu velice zajímavé. Katastrofické teorii se bohužel v důsledku zdrcující kritiky vedené Zahlerem a Sussman (1977) a Sussman a Zahler (1988a,b) nedostalo pozornosti, kterou by zasluhovala. Jejich argumenty proti teorii katastrof byly založeny na nadměrném spoléhání se na kvalitativní metody, nevhodnou kvantifikaci v aplikacích, na užívání omezujících matematických předpokladů, a na neexistenci statistické teorie, která by byla schopná kvantitativní výzkum aplikovat na reálná data. Diskuse byla zřejmě také výrazně podpořena provokativním jménem teorie. Na druhé straně tato diskuze poukázala na netriviální aspekty chování nelineárních dynamických modelů (Cobb, Zacks (1985)).

Ačkoliv některé argumenty Sussmana a Zahlera byly podloženy, jejich kritika vedla k potlačení výzkumu v tomto směru. Na tento fakt upozornil ve své rozsáhlé kritice Rosser (2007), který ve skutečnosti předchází kritiky zesměšňuje. Ve své práci diskusi sumarizuje a ukazuje, že použité argumenty proti teoriím katastrof jsou chabé. Neexistence statistické teorie je na druhé straně problém, který způsobil, že se teorie aplikovala pouze kvalitativně. Statistické metody se tedy začaly rychle v tomto oboru rozvíjet. Například Cobb (1981) a Coob, Watson (1980) poskytují spolehlivou metodu pro odhad cusp katastrofických modelů založených na maximálně věrohodném odhadu (MLE). Souběžně byly rozvíjeny další dvě metody. Prvá Guastellem (1984), který užívá jednoduchou regresní techniku a druhá autory Oliva, Desabro, Day a Jedidi (1987) užívající pro odhad metodu nejmenších čtverců. Tato metoda je uváděna pod zkratkou GEMCAT, což znamená A General Multivariate Methodology for Estimating Catastrophe Models. A konečně Hartelman (1997) nabízí přehled metod a výsledků, a navrhuje konzistentní invariantní stochastickou teorii katastrof pro empirickou verifikaci a testování. Velmi dobrý přehled o těchto metodách a výsledcích je uveden v publikaci Rosser (2007).

2.1 Základní struktura

Pro představení základních konceptů teorie katastrof použijeme následující, běžně užívaný příklad, který byl vybrán pro jednoduchost. Uvažujme dynamický systém reprezentovaný obyčejnou diferenciální rovnicí

$$\dot{y} = x + y - y^3. \quad (2.1)$$

kde $\dot{y} = dy/dt$. Tento systém má jeden nebo tři rovnovážné body pro každou hodnotu x . Rovnovážné body rovnice (2.1) jsou kořeny rovnice $\dot{y} = 0$, která je prezentována na obrázku 1. Systém ukazuje dva tzv. katastrofické body, což jsou body na ose x , ve kterých se počet rovnovážných bodů mění z jednoho na tři. Rovnovážný bod nazveme stabilním, jestliže sousední body v okolí rovnovážného bodu zůstávají v tomto okolí pro všechna další období.

Rovnovážný bod, který není stabilní, nazveme nestabilním. Uvnitř množiny bifurkací existují dva stabilní rovnovážné body a jeden nestabilní bod. Řešení je ilustrované fázovým portrétem. Tato koexistence dvou různých atraktorů ve stejném bodě je nazývána bistabilitou. Jestliže uvažujeme dynamický systém, tj. nepředpokládáme statickou rovnováhu v jednom bodě, systém skoky mění polohu z jedné stabilní rovnováhy do jiné. Tento jev se nazývá hysterezní smyčka.

(vložit Obr. 1)

2.2 Model Cusp

Pro lepší pochopení navrhované analýzy začneme s předpokladem, že uvažovaný jev můžeme popsat aparátem lineárního regresního modelu. Předpokládejme tedy, že máme závislou proměnnou Y a množinu n nezávislých náhodných proměnných $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Výraz y reprezentuje realizaci náhodné proměnné Y , výraz x_i reprezentuje realizaci náhodné proměnné X_i . Lineární regresní model popisuje povrch, který je plochý ve všech uvažovaných dimenzích. Regresní model bude tedy mít následující tvar

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + u, \quad (2.2)$$

kde u představuje realizaci náhodné proměnné U s distribuční funkcí normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Tento model má $n+2$ stupňů volnosti.

Pro větší variabilitu modelovacího aparátu nelineárního modelu (2.1) zvýšíme počet stupňů volnosti na hladinu $2n+2$ zavedením řídicích faktorů do modelu. Definujme řídicí faktory následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \\ \beta_x &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tyto faktory potom dosadíme do rovnovážného tvaru rovnice (2.1). Tudíž hodnotou predikce y při dané realizaci $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ budou kořeny následující rovnice

$$0 = \alpha_x + \beta_x y - y^3. \quad (2.4)$$

V případě existence tří různých kořenů (viz. obr. 2), je prostřední z nich nazýván antipredikce. Jinými slovy to je nejméně pravděpodobný stav systému.

(vložit Obr. 2)

Tato vlastnost je jasná také z bimodality hustoty pravděpodobnostního rozdělení proměnné y (obr. 3).

Řídicí parameter α_x je nazýván faktorem asymetrie a řídicí parameter β_x je nazýván faktorem bifurkace. Kanonická forma (2.4) je charakterizována minimálním počtem nezbytných proměnných a faktem, že pouze kritický bod (α_x, β_x, y) je lokalizován do počátku. Je zřejmé, že kritickým bodem může být jakýkoliv bod v trojdimensionálním vektorovém prostoru R^3 . Je tedy vhodné, aby souřadnice kanonické formy byly standardizovány následujícím způsobem:

$$0 = \alpha_x + \beta_x \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right) - \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^3, \quad (2.5)$$

kde α_x a β_x jsou lineárně závislé na realizaci nezávislých proměnných $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, λ je parametr polohy, a σ je parametr měřítka. Je tedy potřeba nalézt odhady pro $2n + 4$ parametrů

$$\{\lambda, \sigma, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n\} \quad (2.6)$$

z n pozorování $n+1$ náhodných proměnných $\{Y, X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

2.3 Stochastická dynamika modelu Cusp

Nechť y_t je funkcí času t pro $t \in \langle 0, T \rangle$. Rovnice (2.5) je z pohledu dynamických systémů nadrovina rovnovážných bodů dynamického systému stavové proměnné y_t , která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$dy_t = g(x, y_t) dt, \quad (2.7)$$

kde $g(x, y_t)$ je pravou stranou rovnice (2.5). Přidejme do rovnice (2.7) stochastický prvek v podobě Gaussova bílého šumu. Systém potom popisuje stochastická diferenciální rovnice ve tvaru

$$dy_t = g(x, y_t) dt + \sigma_{y_t} dW_t, \quad (2.8)$$

kde $g(x, y_t)$ je nazývána deterministickou částí nebo-li driftem. Substitujme drift do rovnice (2.8) a obdržíme následující rovnici

$$dy_t = \left[\alpha_x + \beta_x \left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma_{y_t}} \right) - \left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma_{y_t}} \right)^3 \right] dt + \sigma_{y_t} dW_t, \quad (2.9)$$

kde W_t je standardní Wienerův proces. Hartelmanovi (1997) se podařilo prokázat spojení mezi deterministickou funkcí modelu Cusp a hustotou pravděpodobnostního rozdělení (dále jen hustota) odpovídajícího stochastickému procesu. Ukázal, že hustota $f(y_t)$ konverguje, pro rostoucí t , k hustotě $f_S(y_\infty)$, která odpovídá hustotě limitního stacionárního stochastického procesu. Tato konstrukce vedla k určení stochastického rovnovážného stavu a bifurkací, která je spojená s deterministickou částí. Když aproximujeme deterministický proces, pak jsou hlavním středem pozornosti rovnovážné body systému. Zatímco v tomto případě je pozornost vztažena k extrémům podmíněné hustoty pravděpodobnosti y za podmínky x . Podle Hartelmana (1997) a Wangenmakers (2005) podmíněná hustota pravděpodobnostního rozdělení y za podmínky $x = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ je

$$f_S(y_\infty | x) = K \exp \left[\alpha_x y_\infty + \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{y_\infty - \lambda}{\sigma_{y_\infty}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y_\infty - \lambda}{\sigma_{y_\infty}} \right)^4 \right]. \quad (2.10)$$

Konstanta K normalizuje podmíněnou hustotu tak, aby byl integrál přes definiční obor jednotkový. Módem budeme nazývat lokální maximum podmíněné hustoty a antimódem její lokální minimum. Módy a antimódy podmíněné hustoty modelu Cusp jsou řešením rovnice $df_S(\cdot | \cdot) / dy = 0$, což je implicitní forma nadroviny modelu Cusp vyjádřené rovnicí (2.5). Parametry tohoto modelu budou odhadovány metodou uvedenou rovněž v Hartelman (1997) a Wangenmakers (2005).

Faktor β_x patří do množiny reálných čísel. Když β_x přechází ze záporných hodnot do kladných hodnot, hustota $f_S(y_\infty | x)$ mění svůj tvar z unimodální do bimodální formy, jak je vidět i na obr. 3. To je také důvod proč faktor β_x nazýváme bifurkačním faktorem. Pro $\alpha_x = 0$ je $f_S(y_\infty | x)$ symetrická. Pro $\alpha_x \neq 0$ je faktor nazýván faktorem asymetrie.

(vložit Obr. 3)

Podle Cobba (1983) je možné konstruovat statistiku, která je záporná v případě, že existují tři různé kořeny v rovnici (2.5), a nezáporná, jestliže existuje pouze jeden reálný kořen. Touto statistikou je Cardanův diskriminant. Pro náš případ má Cardanův diskriminant tvar

$$\delta_x = \left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_x}{3}\right)^3. \quad (2.11)$$

Když $\delta_x < 0$, potom je hustota bimodální. Zároveň v tomto případě faktor α_x ukazuje relativní váhu dvou módů a faktor β_x relativní separaci obou módů. Když $\delta_x \geq 0$, potom je hustota unimodální a současně faktor α_x je mírou špičatosti a faktor β_x je mírou sešikmení. Rovnice (2.11) také určuje tvar modelu Cusp, který určuje místo bodů pro asymetrii a místo bodů pro bifurkaci. Toto místo bodů také separuje oblast s dvěma stabilními řešeními od oblasti s jedním stabilním řešením (viz obr.2).

3. Empirický výzkum modelu krachů na kapitálových trzích

V této kapitole budeme testovat hypotézu, že realizace z modelu Cusp se shoduje s naměřenými daty z kapitálových trhů s menší chybou než realizace z lineárního regresního modelu. Je třeba zdůraznit, že neexistuje žádná jednoduchá statistická procedura pro ověření této hypotézy. Hlavně v důsledku multimodality hustoty modelu Cusp, nemůžeme použít žádný tradiční test dobré shody. Techniku reziduí má smysl aplikovat pouze tehdy, jestliže rozdělení reziduí je unimodální. V testování této hypotézy budeme tedy aplikovat přístup Hartelmana (1987), který je založen na věrohodnostním poměru empirické hustoty z realizací modelu Cusp a empirické hustoty z realizací lineárního regresního modelu. Tato statistika má asymptoticky χ^2 rozdělení s počtem stupňů volnosti, který je roven absolutní hodnotě rozdílu stupňů volnosti uvažovaných modelů.

Hartelman (1987) používá pro srovnání modelu Cusp kromě lineárního modelu i nelineární logistický model následujícího tvaru

$$y = \lambda + \frac{\sigma}{1 + \exp\left(-\frac{\xi}{\zeta^2}\right)}, \quad (3.1)$$

kde $\sigma > 0$, ξ odpovídá α_x a ζ odpovídá β_x . Pro srovnání těchto modelů se používají, jako již obvykle, Akaikeho informační kritérium a Schwarz-Bayesovo informační kritérium.

3.1 Míra nejistoty v tržním indexu

Zeeman (1974) byl první kdo jasně formuloval hypotézu, že model Cusp je schopen vysvětlit chování kapitálového trhu za nejistoty. Zeeman předpokládá, že existují dva typy investorů. A to fundamentalisti a chartisti. Fundamentalisti jsou investoři, kteří operují v oblasti základních ekonomických modelů a jejich parametrů. Jejich záměry jsou ekonomicky nosné a dlouhodobé. Naopak chartisti operují v oblasti ukazatelů přímo vázaných na chování indikátorů kapitálového trhu. Z toho plyne krátkodobost záměrů a predikcí chartistů. Formálněji řečeno, mějme dvě proměnné C -chartisti a F -fundamentalisti. Chartisti operují s podílem v balíku spekulativních peněz a fundamentalisti operují se stavovou proměnnou J , reprezentující převis poptávky po kapitálu. Tedy

$$J = \dot{I} = \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.2)$$

je míra změny tržního indexu I . Jestliže $J = 0$, potom pracujeme se statickým kapitálovým trhem. Jestliže $J > 0$, potom pracujeme s kapitálovým trhem, který trpí převisem poptávky po kapitálu (Býčí trh), a jestliže $J < 0$, potom pracujeme s kapitálovým trhem, který trpí převisem nabídky kapitálu (Medvědí trh). Převedme rovnici (2.9) do Zeemanova označení.

$$dJ_t = \left[F_x + C_x \left(\frac{J_t - \lambda}{\sigma_{J_t}} \right) - \left(\frac{J_t - \lambda}{\sigma_{J_t}} \right)^3 \right] dt + \sigma_{J_t} dW_t. \quad (3.3)$$

Potom stavová proměnná y_t reprezentuje změnu tržního indexu I . Fundamentalisti, kteří jsou externím řídicím faktorem na kapitálovém trhu, budou reprezentováni asymetrií α_x . Chartisti, kteří jsou interním řídicím faktorem kapitálového trhu, ovlivňujícím spíše vnitřní mechanismus kapitálového trhu, budou reprezentováni bifurkací β_x . Přirozeně existuje mnohem více externích faktorů, které ovlivňují cenu na kapitálovém trhu. Aplikace dynamického vztahu mezi C , F a J , kterou popisuje stochastický model Cusp (rovnice (2.9) resp. (3.3)) ale nabízí řešení tohoto problému. Dále změna v podílu spekulativních peněz na kapitálovém trhu bude mít bezprostřední vliv na změnu tržního indexu. Tedy zafixování C a F zapříčiní rychlé nalezení rovnováhy podle J . Poptávka po kapitálu a nabídka kapitálu jsou vybilancované, když je počet chartistů nízký, a na trhu jsou dominantní dobře informovaní investoři. Naopak velký počet chartistů znamená posílení významu tržního indexu, a tím možnost výskytu nerovnováhy na kapitálovém trhu. To je také důvod proč se bifurkační body vyskytují v prostoru řídicích faktorů. Model je zobrazen na obr. 2. Detailnější popis modelu je uveden v Zeeman (1974).

3.2 Popis dat

Primárně budeme testovat model na množině dat s jednodenní periodou, která obsahuje data z 19. října 1987, kdy došlo ke krachu kapitálového trhu známého jako "černé pondělí". Krach byl největším poklesem v jednom dni, které Wall Street zaznamenala v kontinuálním obchodování. Důvody pro "černé pondělí" jsou předmětem jak praktických, tak teoretických diskuzí. Do dnešního dne ale neexistuje konsensus v pohledu na příčiny krachu. Pro srovnání budeme pracovat ještě s krachem z 11. září 2001, který byl způsoben teroristickým útokem na obchodní centrum v New Yorku. Zatímco budeme předpokládat, že krach ze dne 19.10.1987 byl zapříčiněn endogenními silami, o krachu z 11.9.2001 budeme předpokládat, že byl způsoben exogenními silami. Proto by měl katastrofický model být schopen popsat data z 19.10.1987, která nesou bifurkace, a vedou k nestabilitě. Model pro krach trhů 11.9.2001 by měl naopak být dobře reprezentován alternativním uvažovaným modelem, neboť se jedná o krach způsobený externími silami.

Data reprezentují denní výnosy S&P 500 (Standard and Poor's 500 index je dobrou aproximací USA trhů) v letech 1987 - 1988 a 2001 - 2002, které obsahují intervaly s krachy kapitálových trhů, na které se ve studii soustředíme. Pro parametr asymetrie, který reprezentuje změny objemu na kapitálovém trhu, uvažujeme denní změny objemu obchodů. Indikátor objemu obchodů je dobrou mírou pro fundamentalisty, protože je korelován s volatilitou, a je hlavně užíván při analýze trhu fundamentalisty. Pro zjištění bifurkací sbíráme data označená OEX Put/Call ratio, která reprezentují velmi dobrou míru pro spekulativní peníze. Tento poměr je konstruován jako poměr prodejních a nákupních opcí s podkladovým aktivem S&P 100 indexu a velmi dobře měří poměr spekulativních peněz na trhu. Oba indikátory jsou běžným měřítkem sentimentu, které obchodníci používají k posouzení tržní situace.

3.2.1 Bimodalita testovaných dat

Tab. 1 a Tab. 2 ukazují deskriptivní statistiky dat. Data mají těžké chvosty a jsou bimodální. Pro ilustraci bimodality užíváme odhad hustoty jádrového typu. V odhadu bylo použito Epanechnikovo jádro, které má následující tvar

$$\hat{f}_n(y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{h_m} K\left(\frac{y - Y_i}{h_m}\right), \quad (3.4)$$

kde

$$K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) \quad \text{pro } |u| \leq 1.$$

(vložit Obr. 4)

Jádrový odhad pro periodu 1970 – 2007 je vidět na obr. 4, kde pro ilustraci používáme třírozměrný jádrový odhad výnosů indexu S&P 500 pro toto období. Odhad hustoty pro dvouleté výnosy v letech 1987 – 1988 je možné vidět na obr. 5, a pro léta 2001 – 2002 na obr. 6.

(vložit Obr. 5 a 6)

Tabulka 1

Popisné statistiky pro data 1987

	Objemy obchodů	Poměr Put/Call opcí	Výnosy S&P500
Výběrový průměr	0.37082	0.02871	0.00036
Středně kvadratická chyba	0.06927	0.01433	0.00087
Median	0.01277	0.00000	0.00102
Modus	multi	0	multi
Středně kvadratická odchylka	1.39928	0.28943	0.01764
Výběrová variance	1.95798	0.08377	0.00031
Špičatost	50.54401	58.09584	47.26796
Šikmost	5.41975	5.35765	-3.92644
Minimum	-0.93786	-0.74005	-0.20457
Maximum	16.70808	3.54255	0.09099

Tabulka 2

Popisné statistiky pro data 2001

	Objemy obchodů	Poměr Put/Call opcí	Výnosy S&P500
Výběrový průměr	0.24162	0.06894	-0.00108
Středně kvadratická chyba	0.06161	0.01973	0.00072
Median	0.02315	0.01867	-0.00147
Modus	multi	0	multi
Středně kvadratická odchylka	1.24446	0.39850	0.01458
Výběrová variance	1.54868	0.15880	0.00021
Špičatost	153.42761	2.36763	1.31866
Šikmost	10.19473	1.09433	0.24263

Minimum	-0.95221	-0.78571	-0.04922
Maximum	19.88924	2.05063	0.05728

3.3 Výsledky

Hartelmanův test multimodality nezamítl, že v období 1987 – 1988 je ve třech čtvrtinách všech výskytů alespoň jeden bifurkační bod, a v letech 2001 – 2002 se v tomto testu vyskytuje alespoň jeden bifurkační bod pouze v jedné čtvrtině případů. Jiným znakem bimodality je výskyt hojného počtu skoků v datech, takže variance změn je v tomto případě výrazně vyšší, jak je možno vidět na obr.7 a obr. 8. V tabulce 3 jsou výsledky odhadnutého modelu Cusp s daty v letech 1987 – 1988.

(vložit Obr. 7 a 8)

Tabulka 3

Výsledky odhadů modelů pro data 1987 – 1988

model	Lineární model	Logistický model	Model Cusp
R ² (koeficient determinace)	0.1452	0.2558	0.4025
log věrohodnosti	-6.09×10 ³	-5.17×10 ²	-4.95×10²
AIC	1.23×10 ³	1.05×10 ³	1.00×10³
BIC	1.24×10 ³	1.07×10 ³	1.03×10³
Počet parametrů	4	5	6

Můžeme vidět, že logaritmus věrohodnosti je největší pro model Cusp. χ^2 - test nevyvrací, že model Cusp popisuje data z tohoto období lépe než ostatní modely. Rovněž Akaikeho (AIC) a Schwarz-Bayesova (BIC) informační kritéria odpovídají modelu Cusp. R² je také mnohem lepší pro model Cusp. Můžeme tedy říct, že model Cusp nabízí vhodné vysvětlení pro krach 1987. V souboru dat pro léta 2001 a 2002 můžeme naopak vidět, že model Cusp pro tento případ není příliš vhodný (viz. Tab.4).

Tabulka 4

Výsledky odhadů modelů pro data 2001-2002

model	Lineární model	Logistický model	Model Cusp
R ² (koeficient determinace)	0.1128	0.4682	0.2023
log věrohodnosti	-0.61×10 ³	0.45×10³	-0.55×10 ³
AIC	0.12×10 ⁴	0.91×10³	0.11×10 ⁴
BIC	0.12×10 ⁴	0.93×10³	0.11×10 ⁴
Počet parametrů	4	5	6

Logaritmus věrohodnosti modelu Cusp je větší než v případě lineárního modelu, ale mnohem menší v logistickém modelu. Další informační kritéria jsou také ve prospěch logistického modelu.

4. Závěr

Ze získaných výsledků můžeme tvrdit, že model Cusp vysvětluje krach kapitálových trhů způsobený endogenními faktory mnohem lépe než alternativní regresní modely nebo nelineární logistické modely. Pro empirickou analýzu byly použity míry sentimentu kapitálového trhu k modelování proporce mezi fundamentálními investory a technickými analytiky. OEX put/call ratio je velmi dobrá míra pro technické analytiky, a reprezentuje část balíku spekulativních peněz. Objem obchodů je míra fundamentálních investorů, která reprezentuje převis poptávky na kapitálovém trhu. Nejdůležitějším výsledkem je, že data z

roku 1987 obsahovala bifurkační body. Jasně jsme identifikovali bimodalitu výnosů aplikující Epanechnikův jádrový odhad hustoty, a podle testu multimodality se potvrdil zvýšený výskyt bifurkačních bodů v datech. Konečně model Cusp dokáže popsat tato data mnohem lépe než by tak činily jiné modely. Proto můžeme usoudit, že v roce 1987 vedly ke krachu vnitřní procesy na kapitálových trzích. Na druhé straně krach z 11. září 2001 může být dobře vysvětlen alternativním logistickým modelem. V daném období se bifurkační body vyskytují velice zřídka, což je v souladu s naším předpokladem, jelikož tento krach byl způsoben externími faktory.

Reference

- COBB, L. ZACKS, S. 1985. Applications of Catastrophe Theory for Statistical Modeling in the Biosciences *Journal of the American Statistical Association*. 1985, vol. 80, No. 392, pp. 793-802
- COBB, L. 1981. Parameter estimation for the cusp catastrophe model. *Behavioral Science*. 1981, No. 26, pp. 75-78.
- COBB, L., WATSON, B. 1980. Statistical catastrophe theory: an overview. *Math. Model.* 1980, No. 1, pp. 311-317.
- COBB, L. 1992. Cusp Surface Analysis: User's guide. Unpublished manuscript
- GUASTELLO, S.J. 1984. Cusp and butterfly catastrophe modeling of two opponent process models: Drug addiction and work performance. *Behavioral Science*. 1984, No. 29, 258-269.
- HARTELMAN, PASCAL A. I. 1997. Stochastic Catastrophe Theory. [Dissertatie reeks]. 1997. No.2. Faculteit Psychologie, Universiteit van Amsterdam.
- OLIVA, T.A., DESARBO, W.S., DAY, D.L., & JEDIDI, K. 1987. GEMCAT: A general multivariate methodology for estimating catastrophe models. *Behavioral Science*. 1987. No. 32, pp.121-137.
- ROSSER Jr., J.B. 2007. The rise and fall of catastrophe theory applications in economics: Was the baby thrown out with the bathwater?. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Elsevier. October 2007. vol. 31, No. 10, pp. 3255-3280.
- SILVERMAN, B.W. 1986. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida).
- SUSSMAN, H.J. and R. ZAHLER. 1978a. Catastrophe Theory as Applied to the Social and Biological Sciences. *Synthése*. 1987, vol. 37, No 2, pp. 117-216.
- SUSSMAN, H.J. and R. ZAHLER. 1978b. A Critique of Applied Catastrophe Theory in Applied Behavioral Sciences. *Behavioral Science*. 1987, No. 23, pp. 383-389.
- THOM, R. 1975. Structural Stability and Morphogenesis, New York: Benjamin.
- WAGENMAKERS, E.J., MOLENAAR, P.C.M., HARTELMAN, P.A.I., van der MAAS, H.L.J. 2005. Transformation invariant stochastic catastrophe theory. *Physica D*. 2005, pp. 211- 263
- ZAHLER, R. and H.J. SUSSMAN. 1977. Claims and Accomplishments of Applied Catastrophe Theory. *Nature*. 1977, 269:10, pp. 759-763.
- ZEEMAN, E. C. 1974. On the unstable behaviour of stock exchanges. *Journal of Mathematical Economics*. Elsevier. March 1977, vol. 1, No. 1, pp. 39-49.

Stock Market Crashes Modeling: Stochastic Cusp Catastrophe Application

Abstract:

We show that the cusp catastrophe model explains the crash of stock exchanges much better than other models. On the data of U.S. stock markets we demonstrate that the crash of 1987 may be better explained by cusp catastrophe theory, which is not true for the crash of 2001. With the help of sentiment measures, such as index put/call options ratio and volume (the former models the proportion of the chartists, while the latter the fundamentalists), we have found that the 1987 returns are clearly bimodal and contain bifurcation flags. The cusp catastrophe model fits these data better than alternative models. Therefore we may say that the crash may have been led by internal forces. However, the causes for the crash of Sept. 11, 2001 are external, which is also evident in much weaker presence of bifurcations in the data. Thus alternative models may be used for its explanation.

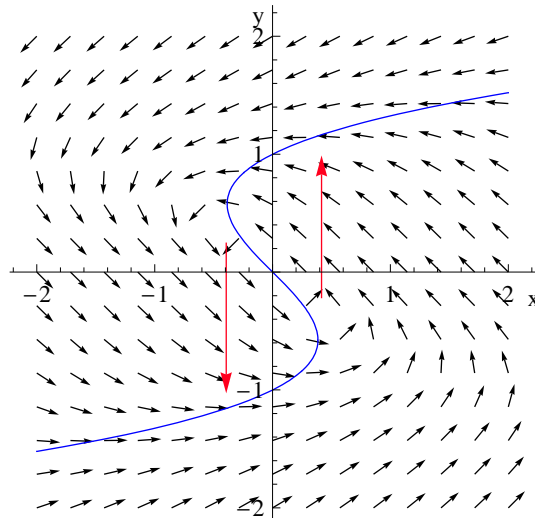
Keywords: cusp catastrophe, bifurcations, singularity, nonlinear dynamics, stock market crash

JEL classification: C01, C53

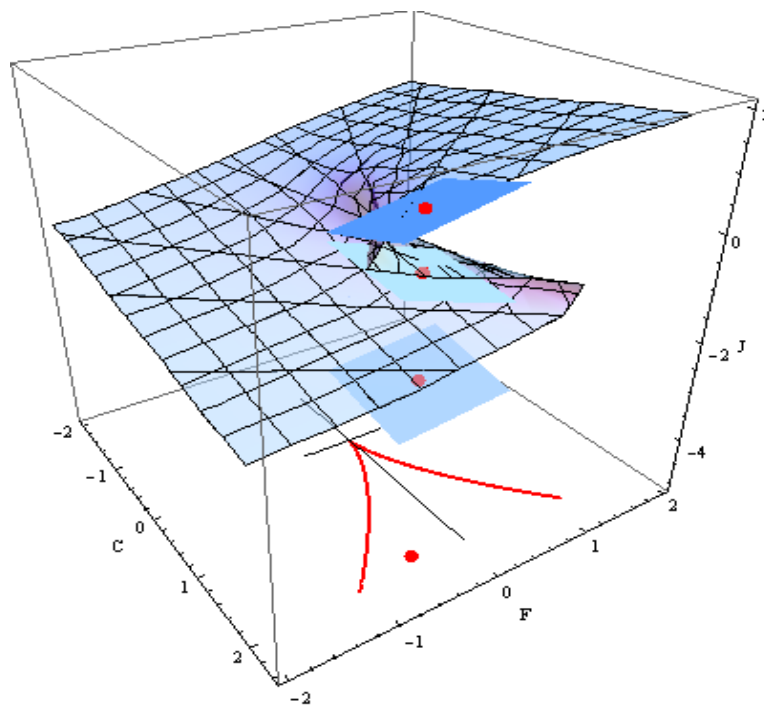
Prof. Ing. Miloslav Vošvrda, CSc. , PhDr. Jozef Baruník
ÚTIA AV ČR, v.v.i.
Pod Vodárenskou věží 4
182 08 Praha 8

vosvrda@utia.cas.cz
barunik@utia.cas.cz

Obrázek 1
Hysterezní smyčka: Rovnovážné body

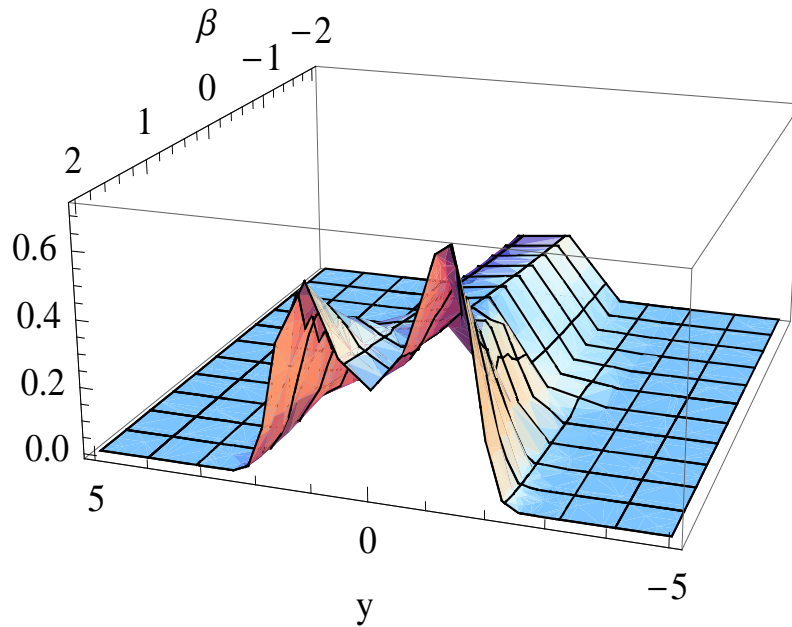


Obrázek 2
Plocha modelu Cusp. Řídícími parametry jsou změny podílů C-chartistů a F-fundamentalistů. Stavová proměnná J je míra změny tržního indexu.



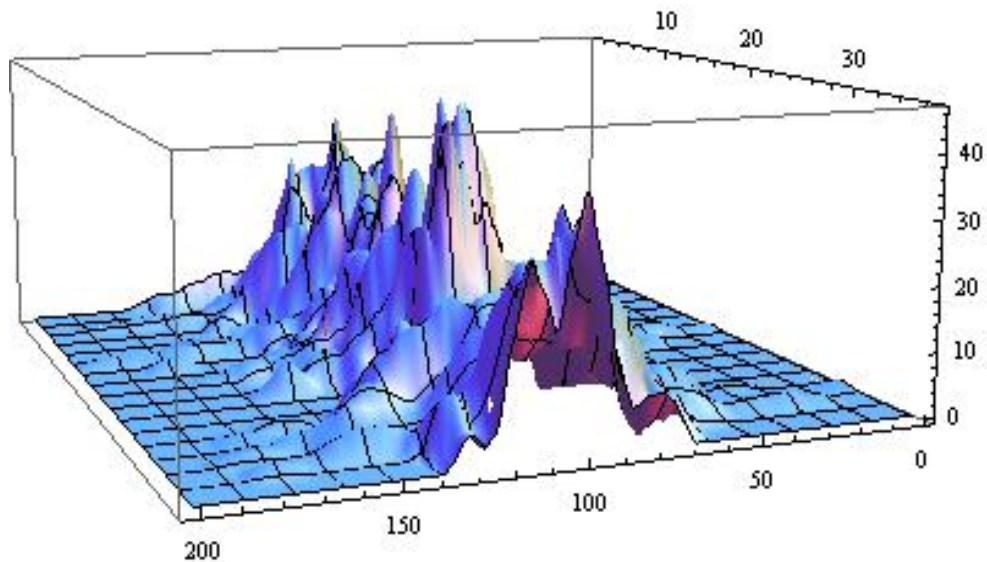
Obrázek 3

Hustota pravděpodobnostního rozdělení s parametry $\alpha_x=-0.1$, $K=-1.23$, $\lambda=0$, $\sigma=1$.
Hustota se mění z unimodální na bimodální při růstu parameteru bifurkace β_x

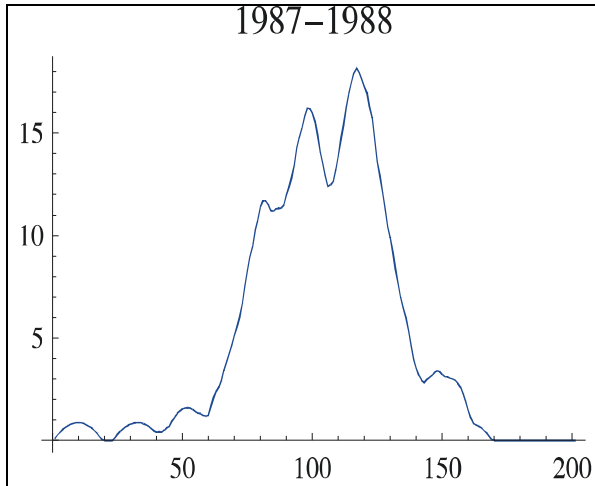


Obrázek 4

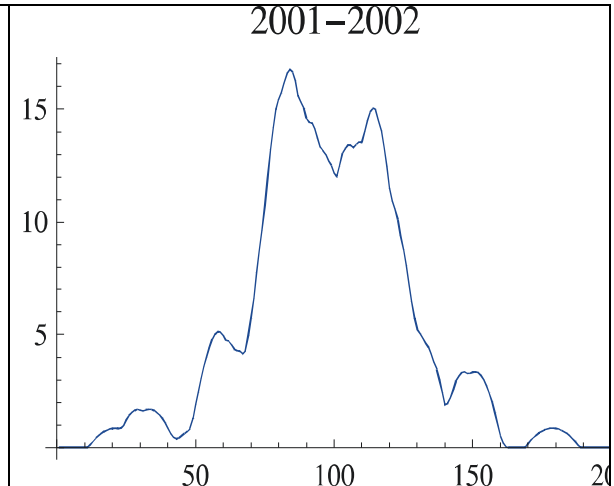
Třírozměrný jádrový odhad hustoty pravděpodobnostního rozdělení výnosů indexu S&P 500 v letech 1970-2007



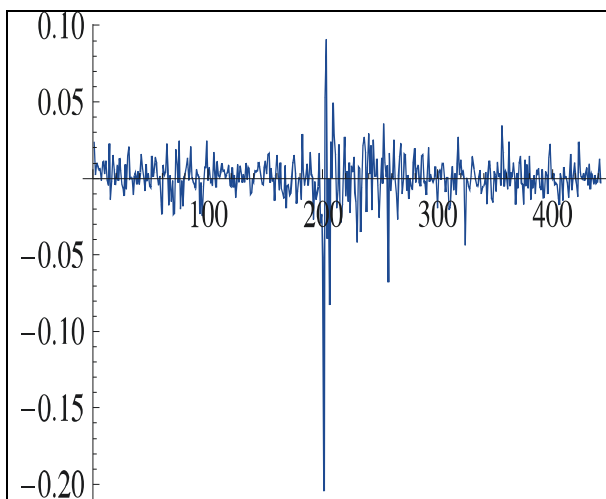
Obrázek 5
**Jádrový odhad hustoty
pravděpodobnostního rozdělení pro výnosy
indexu S&P 500 výnosů v letech 1987-1988**



Obrázek 6
**Jádrový odhad hustoty
pravděpodobnostního rozdělení pro
výnosy indexu S&P 500 výnosů v letech
2001-2002**



Obrázek 7
Výnosy indexu S&P 500 za období 1987-1988



Obrázek 8
Výnosy indexu S&P 500 za období 2001-2002

