Vlastnosti odhadů ukazatelů způsobilosti

Jiří Michálek
CQR při Ústavu teorie informace a automatizace AV ČR v Praze

Úvod

Ve výzkumné zprávě č. 2016 "Odhady koeficientů způsobilosti a jejich vlastnosti" viz [1], byly odvozeny aproximace hustot rozdělení pravděpodobnosti odhadu $\widehat{C}_p$ koeficientů C_p podle typu tzv. způsobilostní směrodatné odchylky. Volba odhadu směrodatné odchylky sledovaného jakostního znaku obvykle v praxi úzce souvisí s použitým tvarem regulačního diagramu. Jedná-li se o diagram $(\overline{x}, R)$, pak je vhodné použít pro odhad směrodatné odchylky σ veličinu $\overline{R}/d_2(n)$, kde n je rozsah logické podskupiny odebírané z procesu a $\overline{R}$ je průměrné rozpětí. Analogicky při regulačním diagramu $(\overline{x}, s)$, kdy směrodatná odchylka σ se odhaduje pomocí veličiny $\overline{s}/C_4(n)$, kde $\overline{s}$ je průměrná výběrová směrodatná odchylka. Koeficienty $d_2(n)$ a $C_4(n)$ jsou běžně tabelovány v literatuře zabývající se konstrukcí regulačních diagramů. Lze uvažovat i třetí typ odhadu odvozený od výběrové směrodatné odchylky, a to

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \right)^{1/2},$$

který je založen na odhadech rozptylu v podskupinách za předpokladu nezávislosti podskupin. Číslo k představuje počet vzatých podskupin do výpočtu. Jednotlivá měření v i-té podskupině jsou známa jako x_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Tento odhad se ale bohužel v praxi (ani v softwarech pro SPC) nepoužívá, i když dává velice dobré výsledky a má celou řadu výhod, např. při konstrukci odhadů ukazatele C_p.

Při odvozování aproximativních hustot se vychází z předpokladu, že v rámci každé podskupiny lze chování jakostního znaku popsat normálním rozdělením. Tato rozdělení se mohou od jedné podskupiny k druhé lišit v parametru polohy, nikoliv však v parametru variability σ a skupiny musí být navzájem nezávislé. Ukazatel C_p totiž vyjadřuje potencionální úroveň způsobilosti dosažitelnou pouze při centrování sledovaného jakostního znaku na prostředek tolerančního rozpětí.

Maximálně věrohodné odhady ukazatele C_p

V dalším provedeme odvození maximálně věrohodných odhadů ukazatele C_p pro výše uvedené tři případy:

a) Odhad založený na výběrovém rozpětí R:
Zde je hustota odhadu $\widehat{C}_p$ dána vyjádřením:

$$f_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{k}{2}\,\frac{\alpha_u^2}{\beta_u^2}\left(\frac{C_p}{x} - 1\right)^2\right\} \frac{\alpha_n}{\beta_n}\,\frac{\sqrt{k}}{x^2}\,C_p$$

pro $x \geq 0$. Jinak je $f_R(x) = 0$. Koeficienty α_n, β_n jsou tabelovány (viz [1]) a závisejí na velikosti podskupiny a souvisejí s asymptotickým rozdělením výběrového rozpětí R z normálního rozdělení.

Uvažujme situaci, kdy máme k dispozici N výběrů složených z k odebraných podskupin, za předpokladu nezávislosti je pak sdružená hustota dána součinem

$$f_R(x_1, x_2, \ldots, x_N) = C_p^N\,\rho_{n,k}^N \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\rho_{n,k}^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_p}{x_i} - 1\right)^2\right\} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2},$$

kde $\rho_{n,k} = \frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}$.

Odhad ukazatelů C_p založený na poměru věrohodnosti se získá hledáním maxima hustoty. Snadno zjistíme, že

$$\ln f_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N \ln C_p + N \ln \rho_{n,k} - \frac{1}{2}\rho_{n,k}^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_p}{x_i} - 1\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} \ln x_i^2$$

Odtud již

$$\frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial C_p} = \frac{N}{C_p} - \rho_{n,k}^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_p}{x_i} - 1\right) \cdot \frac{1}{x_i}.$$

Maximálně věrohodný odhad pak získáme řešením rovnice:

$$\frac{N}{C_p} = \rho_{n,k}^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{C_p}{x_i} - 1\right) \cdot \frac{1}{x_i^2}.$$

Tím se dostáváme ke kvadratické rovnici pro C_p, a to

$$\frac{1}{\rho_{n,k}^2} = T_2(x_1, \ldots, x_N)\,C_p^2 - T_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,C_p,$$

kde

$$T_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}, \quad T_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2}.$$

Řešení rovnice má pak tvar

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} = T_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \pm \sqrt{\frac{T_1^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 4\frac{T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\rho_{n,k}^2}}{2T_2(x_1, x_2, \ldots, x_N)}}.$$

Samozřejmě uvažujeme pouze případ se znamením $+$, neboť záporný odhad nemá smysl, neboť vždy $C_p > 0$.

V případě $N = 1$, což je nejčastěji se vyskytující situace v praxi (např. C_p se odhaduje na základě jediné regulační karty), pak

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} = \frac{\rho_{n,k} + \sqrt{\rho_{n,k}^2 + 4}}{2\rho_{n,k}}\, \widehat{C}_p,$$

kde

$$\widehat{C}_p = \frac{\mathrm{USL} - \mathrm{LSL}}{6\overline{R}/d_2(n)}.$$

Pro zjednodušení lze odhad $\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})}$ vyjádřit jako

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\rho_{n,k}^2}}\right) \widehat{C}_p,$$

což znamená při $k \nearrow +\infty$, že pro praktické účely se odhady $\widehat{C}_p$ a $C_p^{(\mathrm{MLE})}$ moc neliší. Při $k \geq 20$ lze uvažovat, že

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} \doteq \widehat{C}_p.$$

Pro $N > 1$ je pak situace již komplikovanější, neboť pak

$$T_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\widehat{C}_{p,i}}, \quad T_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\widehat{C}_{p,i}^2},$$

kde $\widehat{C}_{p,i}$ je odhad odvozený od $\overline{R}_i/d_2(n)$, tedy od i-té části logických podskupin. Pokud v tomto případě budeme uvažovat $N \nearrow \infty$ a současně $k \nearrow \infty$, pak lze snadno dokázat, že

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} \underset{k,N\to\infty}{\longrightarrow} C_p.$$

Jedná se tedy o konzistentní odhad.

b) Odhad založený na průměrné směrodatné odchylce $\overline{s}$:
Zde je hustota odhadu ukazatele C_p dána obdobně jako v případě a) vyjádřením:

$$f_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}\, k \left(\frac{C_p}{x} - 1\right)^2\right\} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \sqrt{k}\, \frac{C_p}{x^2}$$

pro $x > 0$. Pro $x \leq 0$ je $f_s(x) = 0$.

Z tvaru aproximativní hustoty ihned plyne, že její tvar se neliší od tvaru hustoty v případě a), pouze jsou zde jiné koeficienty a_{n-1}, b_{n-1}. Tyto jsou rovněž tabelovány, dokonce je možno je vyjádřit pomocí funkce $\Gamma(\cdot)$

$$a_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \qquad b_{n-1} = 1 - \frac{2}{n-1}\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Z tohoto faktu vyplývá, že maximálně věrohodný odhad počítaný pomocí $\overline{s}$ lze získat zcela stejným postupem jako v případě a) a se zcela stejnými vlastnostmi.

c) Odhad založený na průměrném rozptylu

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2 .$$

Zde lze napsat vzorec pro odpovídající hustotu rozdělení pravděpodobnosti přesně, neboť lze její tvar odvodit od χ^2-rozdělení, když rozdělení v podskupinách bude normální a podskupiny navzájem nezávislé. Hustota má tvar

$$f_{\mathrm{I}}(x) = \frac{C_p^{k(n-1)}[k(n-1)]^{\frac{k(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(n-1)}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k(n-1)}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{k(n-1)\,C_p^2}{2x^2}\right\} \frac{1}{x^{k(n-1)+1}}.$$

Opět uvažujeme situaci složenou z N nezávislých dílčích úseků logických podskupin o k podskupinách. Pak sdružená hustota má tvaru součinu, tedy

$$\begin{aligned} & f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = \; & \frac{C_p^{Nk(n-1)}[k(n-1)]^{\frac{Nk(n-1)}{2}}}{2^{\frac{Nk(n-1)}{2}-1}\Gamma^N\left(\frac{k(n-1)}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{k(n-1)\,C_p^2}{2x^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2}\right\} \frac{1}{\prod_{i=1}^{N} x_i^{k(n-1)+1}}. \end{aligned}$$

Odtud snadno odvodíme

$$\begin{aligned} & \ln f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ = \; & Nk(n-1)\ln C_p + \frac{Nk(n-1)}{2}\ln\{k(n-1)\} - \left(\frac{k(n-1)}{2} - 1\right)\ln 2 \\ & -N\ln\Gamma\left(\frac{k(n-1)}{2}\right) - \frac{C_p^2 k(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2} - \sum_{i=1}^{N}(k(n-1)+1)\ln x_i^2. \end{aligned}$$

Pak derivace logaritmu od hustoty je rovna:

$$\frac{\partial \ln f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial C_p} = \frac{Nk(n-1)}{C_p} - C_p k(k-1)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2},$$

a tedy maximálně věrohodný odhad splňuje rovnici:

$$1 = C_p^2 \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2},$$

neboli

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2}\right)^{-1/2}.$$

V nejjednodušším případě, $N = 1$, pak ihned máme, že

$$\widehat{C}_p^{(\mathrm{MLE})} = \widehat{C}_p$$

při aplikaci odhadu směrodatné odchylky založeném na průměrném rozptylu.

Věrohodnostní poměry a testy hypotéz o ukazateli C_p

Odhad založený na $\overline{R}$:

$$\widehat{\sigma}_R = \frac{\overline{R}}{d_2(n)}.$$

V tomto případě poměr věrohodnosti má tvar

$$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^N \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\rho^2_{n,k} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{C_1}{x_i} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}\,\rho^2_{n,k} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{C_0}{x_i} - 1\right)^2\right\}.$$

Odtud snadno

$$\begin{aligned} \ln \ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= N \ln \frac{C_1}{c_0} - \frac{\rho^2_{n,k}}{2} \sum_{i=1}^{N} \left\{\left(\frac{C_1}{x_i} - 1\right)^2 - \left(\frac{C_0}{x_i} - 1\right)^2\right\} \\ &= N \ln \frac{c_1}{C_0} - \frac{\rho^2_{n,k}}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{C_1^2 - C_0^2 - 2(C_1 - C_0)\,x_i}{x_i^2}. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že C_0, C_1 jsou hodnoty ukazatele C_p s tím, že pro jednoduchost $0 < C_0 < C_1$.

Speciálně, pro $N = 1$ máme

$$\ln \ell(x) = \ln \frac{C_1}{C_0} - \frac{\rho^2_{n,k}}{2} \cdot \frac{C_1^2 - C_0^2 - 2(C_1 - C_0)\,x}{x^2}.$$

Bohužel nelze tento věrohodnostní poměr rozepsat do tvaru

$$\ln(x_1, x_2, \ldots, x_N) = Q_N(C_0, C_1) + K_N(C_0, C_1)\,T_N(x_1, \ldots, x_N),$$

který by znamenal věrohodnostní funkci s monotónním poměrem věrohodností, kterého by se dalo využít např. pro konstrukci nejsilnějších testů pro složené alternativy. Znamená to, že tento věrohodnostní poměr se dá obecně využít pouze pro konstrukci testu jednoduché hypotézy $H_0 : C_p = C_0$ proti jednoduché alternativě $H_1 : C_P = C_1$. Nejdříve se budeme zabývat opět nejjednodušším případem $N = 1$.

Testujme hypotézu $H_0 : C_p = C_0$ proti alternativě $H_1 : C_p = C_1$. Klasické Neyman–Pearsonovo lemma dává nejsilnější test: hypotéza H_0 se zamítá, když

$$\ln \frac{C_1}{C_0} - \rho^2_{n,k}(C_1 - C_0)\left(\frac{\overline{C} - \widehat{C}_p}{\widehat{C}_p^2}\right) > \lambda_\alpha,$$

přičemž λ_α je stanoveno tak, aby

$$P\left\{\ln \frac{C_1}{C_0} - \rho^2_{n,k}(C_1 - C_0)\left(\frac{\overline{C} - \widehat{C}_p}{\widehat{C}_p^2}\right) > \lambda_\alpha \,|H_0\right\} = \alpha$$

(není problém vyjádřit věrohodnostní poměr ve výše uvedeném tvaru, kde $\overline{C} = \frac{C_0+C_1}{2}$). Lze totiž předpokládat, že hodnota testové statistiky bude větší, když hodnoty odhadů $\widehat{C}_p$ budou větší, a tím blíže k platnosti alternativy H_1. Jde tedy o to najít hodnotu λ_α tak, aby

$$P\left\{\frac{\overline{C}-\widehat{C}_p}{\widehat{C}_p^2} < \frac{\ln\frac{C_1}{C_2}-\lambda_\alpha}{\rho_{n,k}^2}\Big| H_0\right\} = \alpha.$$

Pro nalezení vhodné hodnoty λ_α je nutno odvodit hustotu rozdělení veličiny $\frac{\overline{C}-\widehat{C}_p}{\widehat{C}_p^2}$, při odhadu směrodatné odchylky založené na $\overline{R}$. Pro tento cíl je nutno analyzovat průběh funkce $T_1(x) = \frac{\overline{C}-x}{x^2}$. Tato funkce není monotónní, je definovaná na $(0,+\infty)$ a $T_1(x) = 0$ pro $x = \overline{C}$. Pro $x \in (0, \overline{C}\rangle$ je ostře klesající, pro $x \in (\overline{C}, +\infty)$ má parabolický průběh s $\lim_{x\to\infty} T_1(x) = 0$ a zde $T_1(x) < 0$. Je-li $u \in \langle 0, +\infty)$, pak rovnice $T_1(x) = u$ má jediný kořen

$$x_0 = -1 + \sqrt{\frac{1+4u\bar{c}}{2u}},$$

pro $u \in \left(0, -\frac{1}{4\overline{C}}\right\rangle$ existují dva kořeny

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}.$$

Na základě těchto faktů je pak hustota rozdělení pravděpodobnosti pro veličinu $T_1(\widehat{C}_p)$ rovna pro $u \geq 0$

$$h_{T_1}(x) = f_{\overline{R}}\left(\frac{-1+\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right) \cdot \frac{1}{\left|T_1'\left(\frac{-1+\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right)\right|}$$

pro $0 > u \geq -\frac{1}{4\overline{C}}$

$$\begin{aligned} h_{T_1}(x) \quad &= \quad f_{\overline{R}}\left(\frac{-1+\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right) \cdot \frac{1}{\left|T_1'\left(\frac{-1+\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right)\right|} \\ &\quad + f_{\overline{R}}\left(\frac{-1-\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right) \frac{1}{\left|T_1'\left(\frac{-1-\sqrt{1+4u\overline{C}}}{2u}\right)\right|}. \end{aligned}$$

Je vidět, že vzorec pro hustotu rozdělení $T_1(\widehat{C}_p)$ je poměrně složitý a pro nalezení požadované hodnoty λ_α podle předepsaného rizika α je nutno sáhnout k numerickému řešení.

Zcela analogicky lze postupovat v případě b), kdy je odhad směrodatné odchylky založen na $\overline{s}$.

Poněkud jiná situace nastává v případě c), kdy je odhad směrodatné odchylky odvozen od průměrného rozptylu. Tento případ byl již částečně uvažován v [2]. Nyní provedeme úplný rozbor této situace. Opět rozsah podskupiny je n, v každém úseku je uvažováno k podskupin a úseků je N. Odvodíme věrohodnostní poměr:

$$\ln \frac{f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n|C_1)}{f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n|C_0)} = \frac{Nk(n-1)}{2} \ln \frac{C_1^2}{C_2^2} - \frac{Nk(n-1)}{2} (C_1^2 - C_0^2) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2}.$$

Při tomto přístupu k testování hypotéz o ukazateli C_p je nutno předpokládat nezávislost mezi podskupinami a popsání hodnot jakostního znaku v rámci každé podskupiny pomocí normálního rozdělení s různými středními hodnotami, ale stejným rozptylem. Znamená to, že proces nemusí být zvládnut vůči parametru polohy, ale musí být zvládnut v úrovni variability.

Jak snadno vidět, logaritmus věrohodnostního poměru lze napsat do tvaru

$$\ln \frac{f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n|C_1)}{f_{\mathrm{I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n|C_0)} = K_N(C_0, C_1)\, T_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) + Q_N(C_0, C_1),$$

kde

$$\begin{aligned} K_N(C_0, C_1) &= \frac{Nk(n-1)}{2}(C_1^2 - C_0^2) \\ T_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} \\ Q_N(C_0, C_1) &= \frac{Nk(n-1)}{2} \ln \frac{C_1^2}{C_0^2}. \end{aligned}$$

Opět budeme předpokládat, že $C_0 < C_1$. Je vidět, že logaritmus věrohodnostního poměru je lineární funkce pro každou dvojici C_0, C_1. Na základě obecné teorie o testech založených na monotónním poměru věrohodnosti, viz např. [3], lze tvrdit, že v tomto případě existuje stejnoměrně nejsilnější test $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ hypotézy $H_0 : C_p = C_0$ proti složené alternativě $H_1 : C_p > C_0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1 \quad &\text{pro} \quad T_N(x_2, x_2, \ldots, x_N) < \text{konst} \\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \gamma \quad &\text{pro} \quad T_N(x_2, x_2, \ldots, x_N) = \text{konst} \\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \quad &\text{pro} \quad T_N(x_2, x_2, \ldots, x_N) > \text{konst.} \end{aligned}$$

Tedy hypotéza $C_p = C_0$ se zamítá, pokud platí nerovnost

$$T_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} < \text{konst.}$$

Otevřeným problémem zůstává odvození rozdělení pravděpodobnosti pro statistiku T_N za předpokladu platnosti H_0, aby bylo možno stanovit hodnotu konstanty při volbě rizika 1. druhu. V nejjednodušším případě $N = 1$ je situace daleko schůdnější, neboť pak se jedná o statistiku $T_1(x_1) = \frac{1}{x_1^2}$ a hypotéza H_0 se zamítá, když

$$\widehat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{q_\alpha(k(n-1))}},$$

kde $q_\alpha(k(n-1))$ je α-kvantil rozdělení χ^2 o $k(n-1)$ stupních volnosti. Odhad $\hat{C}_p$ je pak jediný odhad založený na k podskupinách o rozsahu n kusů.

V praxi je daleko vhodnější otočit role hypotézy H_0 a alternativy H_1. Proces bude tím kvalitnější, čím ukazatel C_p bude větší. Ptáme se tedy, zdali platí hypotéza, že $C_p = C_1$ proti tomu, že $C_p < C_1$. Pro $N = 1$ se hypotéza $C_0 = C_1$ zamítá, když

$$\widehat{C}_p < C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{q_\alpha(k(n-1))}}.$$

Testy založené na konfidenčních intervalech

V případech a) a b) nelze na základě věrohodnostního poměru zkonstruovat stejnoměrně nejsilnější test jednoduché hypotézy proti složené alternativě, protože uvažovaný věrohodnostní poměr nemá vlastnost monotonie. Hustoty rozdělení pravděpodobnosti však umožňují konstrukci konfidenčních intervalů pro požadované hodnoty ukazatele C_p. Lze postupovat následovně: hypotéza $H_0 : C_p = C_0$ proti alternativě $H_1 : C_p \neq C_0$ se nezamítá, když odhad $\widehat{C}_p$ parametru C_p bude obsažen v intervalu

$$q_{\alpha/2} < \widehat{C}_p < q_{1-\alpha/2},$$

kde $P\left\{q_{\alpha/2} < \widehat{C}_p < q_{1-\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$, kde α je riziko chyby 1. druhu. V případě odhadu C_p pomocí průměrného rozpětí $\overline{R}$ to znamená, že

$$C_p \frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}} < \widehat{C}_p < C_p \frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}}.$$

Hypotéza $H_0 : C_p = C_0$ se nezamítá tímto testem na hladině α, když

$$\widehat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}\right) < C_0 < \widehat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}\right).$$

Zde je tedy uvažován případ s pouze jedním úsekem, tedy $N = 1$.

Případ pro $N > 1$ bude řešen později, neboť pak odvození rozdělení pravděpodobnosti testové statistiky je daleko komplikovanější.

Kvalita testu se posuzuje jeho silou, tzn. pravděpodobností zamítnutí hypotézy, když ona neplatí. Čili jde o to určit pravděpodobnosti náhodných jevů

$$\widehat{C}_p \leq \frac{C_0}{\left(1+\frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n\sqrt{k}}\right)}, \qquad \widehat{C}_p \geq \frac{C_0}{\left(1-\frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n\sqrt{k}}\right)}$$

za platnosti alternativy $H_1 : C_p = C_1$, a zjistit, jak tato síla testu závisí jednak na rozdílu $C_1 - C_0$ a jednak na vztahu pravděpodobnosti pro $C_p = C_1$ jako $h_A(\cdot)$. Pak pravděpodobnost přijetí alternativy je

$$\int_0^{\frac{C_0}{1+\xi_n/\sqrt{k}}} h_A(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{C_0}{1-\xi_n/\sqrt{k}}}^{\infty} h_a(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_{\frac{C_0}{1+\xi_n/\sqrt{k}}}^{\frac{C_0}{1-\xi_n/\sqrt{k}}} h_a(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\xi_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} u_{1-\alpha/2}$, $u_{1-\alpha_2}$ je příslušný kvantil rozdělení $N(0,1)$. Snadno je vidět, že při $k \nearrow \infty$ síla testu roste k 1 pro každý rozsah podskupiny. Alternativní hustota má tvar:

$$h_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sqrt{k} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\alpha_u^2 k}{\beta_u^2} \left(\frac{C_1}{x} - 1\right) \cdot \frac{C_1}{x^2}.\right\}$$

Po dosazení do výše uvedených integrálů a transformaci proměnných lze psát: nechť $\beta_{n,k}(\alpha)$ je pravděpodobnost chyby 2. druhu, pak

$$\begin{aligned}\beta_{n,k}(\alpha) &= \int_{\frac{C_0}{1+\frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n\sqrt{k}}}}^{\frac{C_0}{1-\frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n\sqrt{k}}}} h_A(x)\,\mathrm{d}x = \Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0} - 1\right) + \frac{C_1}{C_0} u_{1-\alpha/2}\right) \\ &\qquad -\Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0} - 1\right) - \frac{C_1}{C_0} u_{1-\alpha/2}\right)\end{aligned}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce of $N(0,1)$ a $u_{1-\alpha/2}$ je její příslušný kvantil.

Odtud již ihned vidíme, že síla testu je rovna

$$\begin{aligned}1 - \beta_{n,k}(\alpha) &= 1 - \Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0} - 1\right) + \frac{C_1}{C_0} u_{1-\alpha/2}\right) \\ &\qquad +\Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0} - 1\right) - \frac{C_1}{C_0} u_{1-\alpha/2}\right).\end{aligned}$$

Pro ilustraci uvažujme případ, když $n = 5$, $k = 20$ a $\alpha = 0,05$. Pak $\alpha_5 = 2,326$, $\beta_5 = 0,864$, $u_{0,975} = 1,96$, a tudíž síla takovéhoto testu je rovna při $C_0 = \frac{4}{3}$ a $C_1 = \frac{5}{3}$ přibližně 0,7123. To znamená, že silou přibližně 71 % budeme detekovat proces, který je na skutečné úrovni $C_p = 1,67$.

Uvažujme ještě případ téhož zadání pouze se změnou $C_1 = 1$. Pak síla testu bude rovna přibližně $1-\Phi(-1,54)+\Phi(-4,47) \doteq 1-0,0618 = 0,9382$. Tedy pokud bude proces skutečně nezpůsobilý s $C_p = 1$, pak při tomto zadání tento test tuto nezpůsobilost detekuje s pravděpodobností 93,82 %. Všimněme si dosti značného rozdílu mezi uvažovanými příklady.

Lze se ptát, kolik podskupin je nutno uvažovat, aby síla u prvního příkladu se zvýšila ze 71 % na 95 %. Aby tomu tak bylo, musí být chyba 2. druhu $\beta_{n,k}(\alpha)$ maximálně 5 %, tedy hledáme k takové, aby $\beta_{5,k}(0,05) \leq 0,05$. Protože k bude muset být rozhodně nad 20, je možno hodnotu

$$\Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0}-1\right)+\frac{C_1}{C_0}u_{1-\alpha/2}\right)$$

nahradit 1, a tudíž je nutno volit k tak, aby bylo

$$\Phi\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\sqrt{k}\left(\frac{C_1}{C_0}-1\right)-\frac{C_1}{C_0}u_{1-\alpha/2}\right) \geq 0,95,$$

tedy

$$\Phi\left(2,6921 \cdot 0,25\sqrt{k} - 2,45\right) \geq 0,95,$$
$$\Phi\left(0,673\sqrt{k} - 2,45\right) \geq 0,95.$$

Když zvolíme $k = 38$, pak riziko 2. řádu bude 0,955.

Z toho plyne, že pro detekci procesu na úrovni $C_p = 1,67$ je nutno uvažovat cca $37-38$ podskupin o 5ti výrobcích v každé podskupině.

Zcela analogicky lze spočítat sílu testu založeného na konfidenčních intervalech pro C_p v případě statistiky průměrné směrodatné odchylky $\overline{s}$. Pouze místo koeficientů α_n, β_n se objeví koeficienty a_{n-1}, b_{n-1}, které jsou rovněž tabelovány.

Porovnejme tyto testy s nejsilnějším testem založeným na průměrném rozptylu. Máme tedy opět k dispozici k podskupin o rozsahu n kusů. Pak odpovídající hustota rozdělení pravděpodobnosti má tvar pro $x > 0$

$$f_{\mathrm{I}}(x) = \frac{C^s s^{s/2}}{2^{s/2-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{C^2 s}{2x^2}\right\} \frac{1}{x^{s+1}},$$

$s = k(n-1)$ a $f_{\mathrm{I}}(x) = 0$ jinak. Testujeme hypotézu $C_p = C_0$ proti obecné alternativě $C_p \neq C_0$. Není problém ukázat, že hustota $f_{\mathrm{I}}(\cdot)$, viz [1], je odvozena od vztahu

$$P\left\{\lambda < \frac{\widehat{C}_p}{C_0} < \mu\right\} = P\left\{\frac{k(n-1)}{\mu^2}\chi^2(k(n-1)) < \frac{k(n-1)}{\lambda^2}\right\},$$

kde $\chi^2(k(n-1))$ je náhodná veličina s χ^2-rozdělením s $k(n-1)$ stupni volnosti. Odtud již snadno zjistíme, že s pravděpodobností $1-\alpha$ je

$$C_0\sqrt{\frac{k(n-1)}{q_{1-\alpha/2}(k(n-1))}} < \widehat{C}_p < C_0\sqrt{\frac{k(n-1)}{q_{\alpha/2}(k(n-1))}},$$

kde $q_{\alpha/2}(k(n-1))$ a $q_{1-\alpha/2}(k(n-1))$ jsou příslušné kvantily od χ^2-rozdělení s $k(n-1)$ stupni volnosti. Odtud již snadno zjistíme, že chyba 2. druhu testu $C_p = C_0$ proti alternativě $C_p \neq C_0$ je dána výrazem

$$\beta_{n,k}(\alpha) = \int\limits_{C_0\sqrt{\frac{k(n-1)}{q_{1-\alpha/2}(k(n-1))}}}^{C_0\sqrt{\frac{k(n-1)}{q_{\alpha/2}(k(n-1))}}} f_{\mathrm{I}}(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde parametr C_1 v hustotě $f_{\mathrm{I}}(\cdot)$ představuje alternativní možnost, že $C_p = C_1 \neq C_0$. Výše uvedená chyba 2. druhu se dá snadno spočítat, a to pomocí distribuční funkce χ_1-rozdělení s $k(n-1)$ stupni volnosti. Platí totiž, že

$$\beta_{n,k}(\alpha) = \int\limits_{\frac{C_1}{C_0}\sqrt{q_{\alpha/2}(s)}}^{\frac{C_1}{C_0}\sqrt{q_{1-\alpha/2}(s)}} \frac{u^{s-1}}{2^{s/2-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \mathrm{d}u,$$

kde pro jednoduchost $s = k(n-1)$. Pak síla studovaného testu při alternativě $C_p = C_1$ je dána výrazem

$$1 - \beta_{n,k}(\alpha) = 1 - H_s^1\left(\frac{C_1}{C_0}\sqrt{q_{1-\alpha/2}(s)}\right) + H_s^1\left(\frac{C_1}{C_0}\sqrt{q_{\alpha/2}(s)}\right),$$

kde $H_s^1(\cdot)$ je distribuce rozdělení χ_1 o s stupních volnosti, $q_{1-\alpha/2}(s)$ a $q_{\alpha/2}(s)$ jsou kvantily χ^2-rozdělení o s stupních volnosti.

Když se nyní vrátíme k příkladům s $n = 5$, $k = 20$, $\alpha = 0,05$, pak zjistíme, že síla výše uvažovaného testu je pro $C_1 = \frac{5}{3}$, $C_0 = \frac{4}{3}$

$$1 - \beta_{5,20}(0,05) = 1 - H_{80}^1(1,25 \cdot 10,326) + H_{80}^1(1,25 \cdot 7,560).$$

Distribuční funkci $H_{k(n-1)}^1(\cdot)$ rozdělení $\chi^1(k-1)$ lze snadno vyjádřit pomocí distribuční funkce $H_{k(n-1)}^2$ rozdělení $\chi^2(k(n-1))$, totiž

$$H_{k(n-1)}^1(x) = H_{k(n-1)}^2(x^2).$$

Pak síla testu je dána hodnotou

$$1 - \beta_{5,20}(0,05) = 1 - H_{80}^2(166,6125) + H_{80}^2(89,30) = 1 - 1 + 0,7766 = 0,7766.$$

Z toho vyplývá, že test založený na průměrném roztylu je o něco silnější nežli testy založené na průměrném rozpětí či průměrné směrodatné odchylce.

Literatura

[1] J. Michálek: Odhady koeficientů způsobilosti a jejich vlastnosti, Výzkumná zpráva č. 2015, ÚTIA AV ČR, červen 2001.

[2] J. Michálek: Statistické testy koeficientů způsobilosti, Výzkumná zpráva č. 2154, ÚTIA AV ČR, prosinec 2005.

[3] E. L. Lehman: Testing statistical hypothesis, ruský překlad, Izdatelstvo Nauka, Moskva 1964.