Petriho sítě a zpětnovazební řízení

Petri nets and feedback control

Martin Papík[1,2], Jiří Brožek[1] , Jiří Vaníček[1]

[1]Katedra informačního inženýrství, PEF, Česká zemědělská univerzita v Praze, Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
[2]Ústav teorie informace a automatizace AVČR, v.v.i., Pod Vodárenskou věži 4, 182 08 Praha 8

papik@pef.czu.cz

Anotace. Příspěvek se zabývá návrhem zpětnovazebního řízení pro proces popsaný v Petriho síti. Metoda je založena na invariantách míst a přechodů v Petriho síti. Metoda je doložena příkladem návrhu řízení.

Klíčová slova: Petriho síť, invarianta, zpětná vazba, řídící člen, regulátor, řízení, proces

Annotation. Paper is dealing with question, how it is possible to better control process in the Petri net. We look on the Petri net as it is discrete event system. Method is based on the places and transitions invariants.

Key words: Petri net, invariant, feedback, controller, process

1 Úvod

Příspěvek se zabývá postupem jak je možné přesněji řídit probíhající proces, který je modelován pomocí Petriho sítě. Na Petriho síť budeme pohlížet jako na diskrétní systém řízení událostmi.
Řídící člen se bude skládat z míst, které budou připojeny do přechodů procesní sítě. Smyslem navrženého řízení je eliminovat nedovolené stavy procesní sítě. Konkrétně jde o generování invariant míst a přechodů navrženým zpětnovazebním řízením. Návrh řízení generuje omezení. Tyto omezující podmínky jsou vyjádřeny pomocí rovností, nerovností nebo logických výrazů a mohou zahrnovat vektor značení Petriho sítě. Návrh řízení je numericky dán pouze řešením příslušných algebraických rovností a nerovností nebo jednoduchých logických výroků. Počet míst řídícího členu je proporcionální k počtu omezujících podmínek, které se týkají modelovaného procesu.

2 Petriho síť

Neformálně můžeme Petriho síť popsat následovně.
Neoznačená Petriho síť je *orientovaný hranově a uzlově ohodnocený bipartitní* graf. Skládá z těchto třech základních objektů :
Místa (angl. Places), graficky reprezentována kruhy, tvoří konečnou množinu míst Petriho sítě.
Přechody (angl. Transitions), graficky reprezentována obdélníky, která tvoří konečnou množinu přechodů Petriho sítě.
Hrany (angl. Arcs), graficky reprezentována šipkami, přívlastek *orientovaný* vyjadřuje skutečnost, že hrany grafu jsou orientované a přívlastek *ohodnocený* vyjadřuje skutečnost, že hranám jsou přiřazeny *Váhy (angl. Weight)*. Váha udává násobnost (mohutnost) každé hrany.

Bipartitní graf je graf, u kterého je množina všech jeho vrcholů V sjednocením dvou disjunktních množin, $V = ((V_1 \cup V_2) \wedge (V_1 \cap V_2) = \emptyset)$. Pro každou orientovanou hranu h platí, že její počáteční vrchol h^p a koncový vrchol h^k patří do různých množin tohoto rozkladu, kde $(h^p \in V_1 \wedge h^k \in V_2) \vee (h^p \in V_2 \wedge h^k \in V_1)$.

Uveďme pro úplnost formální matematickou definici Petriho sítě podle [1,2], pro tuto práci praktickou, protože při algebraickém popisu v dalším textu pak budeme vycházet právě z ní.

Definice 1
F je binární relace, pokud použijeme (základní) „prefixový“ zápis můžeme psát, že $(x,y) \in F$, my však budeme nadále používat „infixový“ zápis, tedy yFx .

Věta 1
Označme $N = (P, T, F)$ Petriho sítí.
Pro všechna $x \in (P \cup T)$

1. $\bullet x = \{y \mid yFx\}$ se nazývá vstupní množinou (preset) prvku x. Obsahuje všechny hrany jdoucích z *míst* do *přechodů*.
2. $x\bullet = \{y \mid xFy\}$ se nazývá výstupní množinou (postset) prvku x. Obsahuje všechny hrany jdoucích z *přechodů* do *míst*.
3. Pro $X \subseteq (P \cup T)$ je $\bullet X = \cup \bullet x$ a $X\bullet = \cup\, x\bullet$, kde $x \in X$,

Příklad užití tohoto zápisu : $\bullet t1 = \{p1\}$, $\bullet t2 = \{p2\}$, $p1\bullet = \{t1\}$, $p2\bullet = \{t2\}$.

Poznámka: Vstupní / výstupní množinu lze popsat a vyjádřit jako matici typu $|P| \times |T|$, kde P a T je konečná množina a symbolem $|P|$ budeme označovat počet jejich prvků (přirozené číslo nebo 0), to platí analogicky i pro $|T|$. Existuje incidenční m x n matice C pro kterou platí $C = Post - Pre$.

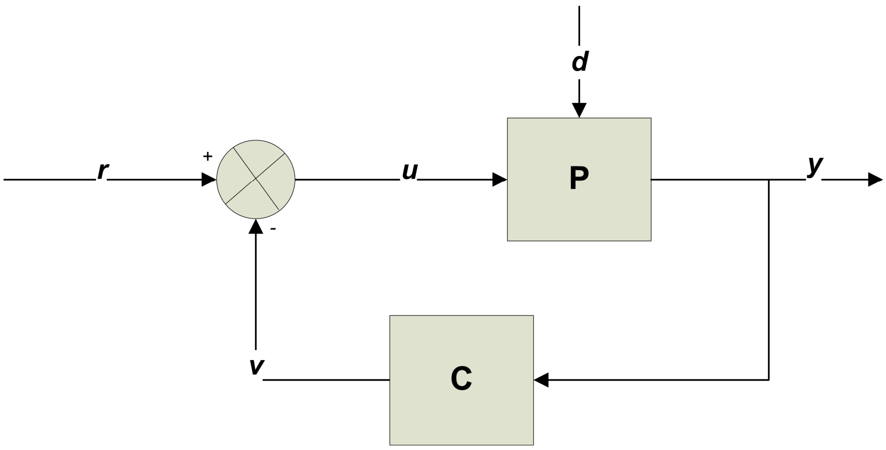
3 Zpětná vazba

Důležitou součástí tohoto příspěvku a později popsané metody je řízení modelovaného systému (Petriho sítě). Z tohoto důvodu, si tato práce „vypůjčila“ pojem zpětná vazba (*angl. feedback*), který patří více než do informatiky do oboru nazývaného kybernetika. Kybernetika je vědecká disciplína, která se zabývá obecnými principy řízení a přenosu informací ve strojích, živých organismech (společenstvích). Věc (stroj), organismus, které se řízení týká můžeme označit za objekt řízení. V našem případě je objektem řízení Petriho síť.
Nežádoucí vlastnosti systému lze měnit řízením, tak aby systém s řízením žádoucí vlastnosti(em) vyhovoval. Základním principem řízení je zde zpětnovazební řízení. Jde zde o zpětné zavedení výstupu na vstup systému. To umožňuje kompenzovat vliv poruch a odchylek výstupu v případě negativní zpětné vazby. Zpětná vazba je v praxi základním principem používaným zejména v regulační technice.
Základní strukturu systému se zpětnou vazbou tvoří dvě komponenty (části) [5]:

1. Regulovaná soustava, kterou označujeme $\boldsymbol{P}$ (*angl. Plant*). Vstupem do soustavy je řízení $\boldsymbol{u}$ (*angl. input*) a výstupem soustavy je signál $\boldsymbol{y}$ (*angl. output*). Dále u technických aplikací uvažujeme vnější signál poruchy $\boldsymbol{d}$ (*angl. External disturbance*).

2. Regulátoru (řídící člen), který označujeme $\boldsymbol{C}$ (*angl. Controller*). Vstupen je výstup ze systému $\boldsymbol{y}$ a výstupem je signál $\boldsymbol{v}$.

Výše uvedený popis základního systému se zpětnou vazbou je znázorněn na obrázku č. 1. Vstup do systému $\boldsymbol{P}$ je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{r}$ je řídící signál. Základní úlohou je zde návrh regulátoru ***C*** tak, aby byly splněny požadavky kladené na zpětnovazební systém. V případě dynamických systémů jsou to požadavky na stabilitu, nulovou odchylku $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}$ pro čas $t \to \infty$ a dynamické požadavky na chování vstup – výstup.



Obr. č. 1 – Základní systém se zpětnou vazbou

4 Formulace úlohy

Předpokládejme danou Petriho síť $N = (P, T, F)$ splňující podmínku $u_i + u_j \leq 1$, kde u_i a u_j jsou místa p_i a p_j Petriho sítě.
Cílem je:

- Odvodit metodu návrhu řídícího členu modelovaný Petriho sítí generujícím invarianty míst a přechodů v síti.
- Ilustrovat metodu příkladem.

5 Řešení úlohy

Metoda předpokládá, aby proces, který má být řízen byl modelován Petriho sítí. Řízení tohoto procesů bude navrženo pomocí Petriho sítě. Řízení je realizováno pomocí principu zpětné vazby. Omezení, která mají být procesem splněna jsou vyjádřená pomocí logických výrazů, případně rovností a nerovností.
Nyní se pokusíme tuto myšlenku (metodu) vzhledem k rozsahu příspěvku stručně popsat.

Předpokládejme, že proces je modelovaný Petriho sítí s n místy a m přechody a splňuje následující podmínku:

$$u_i + u_j \leq 1 \qquad (1)$$

kde u_i a u_j jsou označení míst p_i a p_j sítě pro všechna $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.
Tuto nerovnostní podmínku můžeme převést na rovnost s využitím přídavné (volné) proměnné u_s. Podmínka se pak změní na rovnici:

$$u_i + u_j + u_s = 1 \qquad (2)$$

Volná proměnná v tomto případě reprezentuje nové místo p_s, které na sebe váže (přijímá) přebytečnou značku. Toto místo zajistí, že suma značek na množině míst u_i a u_j je vždy menší nebo rovna jedné. Místo p_s patří do řídící sítě. Je zřejmé, že v síti bude tolik řízených míst, kolik je použito omezujících podmínek typu (1), tj. velikost kontrolní sítě (řídícího prvku) je úměrná množství omezujících podmínek typu (1).

Protože bylo do sítě přidáno nové místo, pochopitelně došlo ke změně původní stavové matice D, dále ji označujme D_p. Tímto přidáním vznikla i nová matice D_c ,která je doplněna o řádek s přídavnou proměnnou u_s.

Nyní se pokusíme popsat výpočet. Problém můžeme uvést obecně následujícím způsobem. Všechny omezení typu (1) mohou být sjednoceny a popsány následovně:

$$L \cdot u_p \leq b \qquad (3)$$

kde u_p je vektor značení Petriho sítě modelující daný proces. L je n_c x n matice a b je n_c x 1 vektor, n_c je počet omezení typu (1).
Podobně všechny invarianty míst, které splňují podmínku podle (2) a mají zapracovanou přídavnou (volnou) proměnou u_s , mohou být vyjádřené v maticové formě následujícím způsobem:

$$L \cdot u_p + u_c = b \qquad (4)$$

kde u_c je vektor n_c x 1 který reprezentuje značení řídících míst.
Invarianta míst definovaná podle (2) musí vyhovět podmínce rovnosti invarianty míst podle (2). Následující rovnost matice je rovnost invarianty míst pro všechny invarianty podle (4):

$$X^T \cdot D = (L \quad I) \cdot \begin{pmatrix} D_p \\ D_c \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$L \cdot D_p + D_c = 0 \iff$$

$$D_c = - L \cdot D_p \quad (5)$$

kde I je n_c x n_c matice koeficientů přídavných proměnných pro omezení rovné číslu 1. Matice D_c omezuje hrany které spojují řídící místa do přechodů procesní sítě (Petriho sítě). Tímto je dán model procesní Petriho sítě (D_p) a omezení, které musí proces splňovat (n_c, L a b). Řídící člen Petriho sítě je definován podle (5).

Příklad 1.
Uveďme jednoduchý příklad, na kterém prakticky demonstrujeme výše uvedenou a popsanou metodu. Uvažujme systém, který má tři místa $\{p_1, p_2, p_3\}$ a čtyři přechody $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

Stavová matice Petriho sítě z obrázku č. 2 je:

$$D_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Počáteční značení je:

$$u_{p0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice D_p je 2, tudíž je zde jedna invarianta míst která zahrnuje celou síť, tj. $D^T{}_p X = 0$, kde $X = [1\ 1\ 1]^T$.
Úkolem naší demonstrace je řídit Petriho síť tak, aby místa p_2 a p_3 neobsahovala ne více než jednu značku. To můžeme vyjádřit omezující podmínkou:

$$u_2 + u_3 \leq 1 \qquad (6)$$

Použijme maticový zápis podle rovnosti (3) dostáváme:

$$L = (0\ 1\ 1)$$

$$b = 1$$

Uvažujme řešení pro cyklickou Petriho síť.

Neřízená síť nesplňuje požadovanou omezující podmínku, protože $(0\ 1\ 1)^T$ není invariant míst Petriho sítě. Musíme tedy zavést přídavnou proměnnou u_s a nerovnost podle (6) převedeme na rovnost:

$$u_2 + u_3 + u_s = 1 \qquad (7)$$

Přídavná proměnná u_s ukazuje na značení místa p_s, ‚které patří do řízené sítě. Rovnost (7) reprezentuje požadovanou invariantu $X = (0\ 1\ 1\ 1)^T$, která bude vynucena na řízené Petriho síti. Stavová matice řízené sítě bude vypočtena podle rovnosti (5):

$$D_c = -L \cdot D_p = [-1\ 0\ 0\ 1]$$

Počáteční značení řízeného místa u_{s0} je:

$$u_{s0} = 1 - L \cdot u_{p0} = 1$$

Struktura řízené Petriho sítě je popsána složenou stavovou maticí D:

$$D = \begin{pmatrix} D_p \\ D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde počáteční značení je:

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{p0} \\ u_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Závěr

Příspěvek prezentuje metodu návrhu zpětnovazebního řízení pro Petriho sítě. Metoda je založena na myšlence, že zadání reprezentující požadované chování řízeného systému (*Plant*), může být vynuceno vytvořením invariant řízením sítě. Výsledný řídící člen sestává pouze z míst a hran Petriho sítě. Složitost řídícího členu je dána množstvím omezujících podmínek daných ve tvaru lineárních algebraických rovností a nerovností a logických výrazů.

Reference

[1] Češka M., Petriho sítě. Nakladatelství CERM. Brno 1994. ISBN 80-85867-35-4.
[2] Girauld C., Valk R., Petri nets for system engineering. Springer 2003. ISBN 3-540-41217-4
[3] Peterson J., Petri Net theory and the modeling of systems. Prentice-Hall 1981. ISBN 0-13-661983-5
[4] Vaníček J. a kol., Teoretické základy informatiky. Alfa Publishing 2007. ISBN 978-80-903962-4-1
[5] Doyle J., Francis B., Tannenbuam A., Feedback control theory, Dover Publications 2008. ISBN 978-0486469331
[6] Moody J., Antsaklis P., Supervisory Control of Discrete Event Systems Using Petri Nets. Kluwer Academic Publishers 1998. ISBN 0-7923-8199-8