



Akademie věd České republiky  
Ústav teorie informace a automatizace

Academy of Sciences of the Czech Republic  
Institute of Information Theory and Automation

## RESEARCH REPORT

Lubomír Nevařil, Ludvík Tesař

**Odhadování délky fronty vozidel na křižovatce  
na základě měření pomocí indukčních  
detektorů**

No. 2137

October 20, 2005

ÚTIA AV ČR, P.O.Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic  
Tel: (+420)266052422, Fax: (+420)286890378, Url:  
<http://www.utia.cas.cz>, E-mail: [utia@utia.cas.cz](mailto:utia@utia.cas.cz)

This report constitutes an unrefereed manuscript which is intended to be submitted for publication. Any opinions and conclusions expressed in this report are those of the author(s) and do not necessarily represent the views of the institute.

# Contents

<b>Předmluva</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>4</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	6
<b>2 Metody odhadování délky kolony</b>	<b>8</b>
2.1 Metoda odhadování délky kolony pomocí lineární regrese . . . . .	8
2.2 Metoda odhadování pozice kolony vůči detektoru . . . . .	11
2.2.1 Úvod . . . . .	11
2.2.2 Varianta 1 . . . . .	12
2.2.3 Varianta 2 . . . . .	13
2.2.4 Varianta 3 . . . . .	15
2.2.5 Varianta 4 . . . . .	17
2.2.6 Shrnutí . . . . .	25
2.3 Metoda odhadování délky kolony pomocí “plnicího času” . . . . .	26
<b>3 Závěr</b>	<b>29</b>
<b>4 Přílohy</b>	<b>31</b>
<b>5 Poděkování</b>	<b>43</b>

# Předmluva

Tato práce vznikla jako součást studia prvního z autorů na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské, ČVUT. Tato výzkumná zpráva je draft verzí rešeršní práce, a protože shrnuje část práce obou spoluautorů, rozhodli jsme se ji podat jako společnou výzkumnou zprávu. První autor je autorem rešeršní práce, jejíž finální verze bude podána na FJFI ČVUT, druhý z autorů je školitelem.

*Lubomír Nevařil  
Ludvík Tesař*

# 1 Úvod

V posledních letech u nás, ale i v jiných zemích celého světa prudce vzrůstá počet osobních i nákladních vozidel a s tím související intenzita provozu na pozemních komunikacích. Problémy dopravní zácpy se pak negativně projevují zejména v centrech velkých měst, kde hustota provozu často i mnohonásobně převyšuje kapacitu, na kterou byly tyto oblasti původně dimenzovány. Vznikají tak v některých případech i mnohasetmetrové kolony, které jsou psychologickou zátěží nejen pro řidiče, ale také místní obyvatele. Ti jsou vystavováni nadměrnému hluku a zhoršenému životnímu prostředí způsobenému škodlivými exhalacemi z vozidel.

Jedním ze způsobů snížení automobilového provozu v dané oblasti je postavení alternativního spojení, které se jí vyhýbá. Takovéto řešení je však obvykle velice nákladné a ne vždy dostatečně účinné. Navíc může být v některých případech neuskutečnitelné. Jinou možností je zavedení hromadné dopravy. I zde se však ukazuje, že navzdory jejím výhodám je stále mnoho řidičů, kteří dávají přednost osobním automobilům. Hromadná doprava na sebe nemůže převzít funkci nákladní dopravy a má některá další omezení, popsaná je detailněji například v [1] nebo [9].

Zcela jiný přístup nabízí myšlenka pokusit se zvýšit původní kapacitu pozemních komunikací v zatížených oblastech zavedením efektivnějšího způsobu řízení dopravy. Prvním krokem k tomu bylo zavedení světelných signalizačních zařízení (neboli “semaforů”) na křižovatkách. V první fázi se používaly signály s časovými intervaly neměnné délky. Později se začalo využívat možnosti měnit délku signálů v rámci několika přednastavených hodnot v závislosti na denní době, podle informací získaných dlouhodobým sledováním dopravního provozu na daném místě. V dnešní době se pak stále častěji začínají prosazovat systémy (například MOTION<sup>1</sup>, TRANSIT, SCATS a další), které upravují délky signálů semaforu podle potřeby aktuálního stavu dopravy, k jehož zjištění používají odhadů založených na datech získaných z různých dopravních detektorů.

O problémech řízení dopravy těmito, ale i jinými moderními způsoby existuje velké množství literatury, obecnější jsou [1], [9], [10], [11]. Přitom pro nás se jako důležité jeví systémy založené na soustavách mikroregionů [12], [13], [14], [15], [16], neboť se používají v řadě evropských měst, mezi nimiž figuruje také Praha. Pro tyto metody má velký význam odhad délky kolon na křižovatkách, kterým se zabývá například [6], [13], [14]. Přitom část v dnešní době používaných a poměrně dobře fungujících metod je

---

<sup>1</sup>Method for the Optimisation of Traffic signals In Online controlled Networks

založena na klasickém Kalmanově filtru [7]. Vyskytují se však také jiné přístupy, neboť v některých případech se závislost délky kolony na měřených datech ukazuje být silně nelineární.

Úkolem popsat nebo navrhnout metodu na odhadování délky kolony se zabývá také tato práce. Ve zbytku úvodní části jsou zmíněny některé pojmy důležité pro pochopení dalšího textu. Druhá část se zabývá vlastním odhadováním délek kolon, přičemž první a druhá popisovaná metoda byly navrženy tak, aby byly použitelné na systému sledování a řízení dopravy používaném v Praze. V části přílohy jsou pak uvedeny některé grafy, obrázky a tabulky, které nebylo možno kvůli jejich velikosti umístit přímo do textu.

## 1.1 Základní pojmy

V této části je uveden přehled pojmů, které se budou vyskytovat dále v textu a jejichž znalost je důležitá k pochopení popisovaných principů.

### Definice 1 (Délka kolony)

Pod pojmem *aktuální délka kolony vozidel* v daném jízdním pruhu (někdy stručněji pouze “délka kolony” nebo “kolona”) budeme rozumět vzdálenost konce posledního stojícího vozidla v tomto pruhu od hranice křižovatky, v daném libovolném časovém okamžiku. Pokud příjezdové rameno křižovatky má více než jeden jízdní pruh, předpokládáme, že délky kolon v každém z nich jsou přibližně stejné.

Pro některé účely budeme délku kolony vztahovat pouze k určitým zvoleným časovým okamžikům, tato skutečnost bude vždy na daném místě zdůrazněna.

### Definice 2 (Detektory)

Pojem *detektory* (nebude-li uvedeno jinak) bude označovat indukční smyčky umístěné v pozemní komunikaci a napojené na dopravní počítač. Tyto smyčky jsou schopné detekovat přítomnost vozidla nacházejícího se nad nimi na principu elektromagnetické indukce. Umístění těchto detektorů pro křižovatku 084 je schematicky znázorněno na obrázku 4.18. Křižovatky jsou vybaveny většinou dvěma detektory v každém jízdním pruhu. První bývá umístěn blíže k hranici křižovatky (obvykle 20 – 50 metrů) a nazývá se “prodlužovací detektor”. Druhý, vzdálenější, bývá umístěn ve vzdálenosti 100 – 200 metrů od hranice křižovatky a nazývá se “strategický detektor”.

### Definice 3 (Obsazenost)

*Obsazenost detektoru* (nebo také pouze *obsazenost*) je veličina měřená automaticky pomocí indukčních detektorů a poskytovaná dopravním počítačem v 90 sekundových intervalech. Vyjadřuje poměr času, kdy se nad detektorem vyskytovalo vozidlo, k celkové době intervalu a je udávána v procentech.

### Definice 4 (Intenzita)

*Intenzita dopravního proudu* (zkráceně *intenzita*) je veličina měřená automaticky pomocí indukčních detektorů a poskytovaná dopravním počítačem v 90 sekundových intervalech. Vyjadřuje počet vozidel, které projely nad detektorem během uplynulého intervalu. Udává se ve v jednotkách [vozidla · hodina<sup>-1</sup>].

### Definice 5 (Data)

Pro účely navržení a otestování metod na odhadování délek kolon byla provedena měření některých veličin, v této práci souhrnně označovaných pojmem *data*. Jedná se o měření na křižovatce ulic Vltavská a Hořejší nábřeží v dopravních schématech označované číslem 084 (viz obrázek 4.18), v příjezdovém rameni ležícím v ulici Hořejší nábřeží. Automaticky (tj. pomocí indukčních detektorů) byly měřeny veličiny *obsazenost* a *intenzita*, ručně délky kolon a časy zeleného a červeného signálu semaforu. Ruční měření bylo provedeno ve dnech 4. 8. 2003 až 8. 8. 2003 (tj. pondělí až pátek) v dopoledních hodinách

(přibližně od 6. do 10. hodiny dopolední). Podle dne, ve kterém byla data naměřena, na ně bude později v textu odkazováno jako na “pondělní” až “páteční” měření. Hodnoty délek kolon byly zaznamenávány v 60 sekundových intervalech.

**Definice 6** (*Kongesce*)

*Kongesce* nebo také *dopravní kongesce* je pouze jiný výraz pro dopravní zácpu. Formálně lze říci, že úsek pozemní komunikace je ve stavu kongesce, pokud čas jízdy tímto úsekem významně převyšuje čas jízdy za běžných podmínek.

**Definice 7** (*Značení*)

Mějme  $x, y$  náhodné veličiny,  $f(x, y)$  sdruženou hustotu pravděpodobnosti. Potom střední hodnotu náhodné veličiny  $y$  budeme značit  $E(y)$ , podmíněnou hustotu pravděpodobnosti  $y$  za předpokladu pevné hodnoty  $x = x_0$  označíme jako  $f(y|x_0)$  nebo  $f(y|x = x_0)$ .



## 2 Metody odhadování délky kolony

### 2.1 Metoda odhadování délky kolony pomocí lineární regrese

Analýzy závislosti délky kolony na obsazenosti a intenzitě ukazují, že tento vztah sice není lineární, ale že se v určitém omezeném rozmezí dá lineární závislostí nahradit. Proto se můžeme pokusit využít k přibližnému odhadnutí délky kolony lineární regrese.

Obecná teorie regrese se zabývá úlohou předpovědi hodnot jedné nebo více náhodných veličin  $y_1, \dots, y_m$  na základě měření hodnot jiných náhodných veličin  $x_1, \dots, x_n$ . Pro snazší pochopení významu předchozí věty ho můžeme ilustrovat následujícím příkladem.

Mějme kovovou tyč délky  $l_0$  za teploty  $t_0$  a sledujme změnu její délky při různých náhodných teplotách. Z fyziky víme, že mezi změnou délky tyče  $\Delta l$  a změnou teploty  $\Delta t$  existuje funkční závislost ve tvaru

$$\Delta l = l_0 \alpha \cdot \Delta t \quad (2.1)$$

kde  $\alpha$  je koeficient délkové teplotní roztažnosti. Na tento experiment se můžeme dívat také jako na pozorování dvojice náhodných veličin “prodloužení tyče” a “změna teploty”. Pro účely předpovědi prodloužení tyče na základě znalosti změny teploty tedy stačí nalézt funkční závislost (tj. určit  $\alpha$ )  $\Delta l$  na  $\Delta t$ , o níž jsme věděli, že existuje.

Úloha regrese je ovšem obecnější. Můžeme se totiž pokusit předpovídat hodnoty náhodné veličiny  $y$  na základě měření  $x_1, \dots, x_n$ , aniž bychom předpokládali existenci funkční závislosti<sup>2</sup>  $y = y(x_1, \dots, x_n)$ . Mějme například nakloněnou rovinu se “zvlněným” povrchem parametrizovaným veličinou  $\theta \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pouštějme vždy z jednoho místa na povrchu nakloněné roviny kuličku, která nakonec spadne do jedné z  $n + 2$  krabic umístěných v jedné řadě pod touto rovinou. Ať povrch roviny je konstruován tak, aby pro každou z možných hodnot  $\theta$  vždy kulička skončila se stejnou pravděpodobností v některé trojici sousedních krabic. Potom náhodnou veličinu “pořadí krabice, ve které skončila kulička” určitě nelze považovat za funkci parametru  $\theta$ . Přitom se ale tato závislost dá do určité míry aproximovat funkční závislostí. To je právě úkolem regrese.

Máme tedy náhodnou veličinu  $y$ , jejíž hodnoty chceme odhadovat z měření hodnot  $x_1, \dots, x_n$  pomocí odhadnutí funkce  $y = y(x_1, \dots, x_n)$ . Otázkou zůstává, jakým způsobem tuto funkci najít. Následující definice a věty jsou převzaty z literatury [4], kde lze také

---

<sup>2</sup>Takováto snaha nemusí být nutně nelogická, jak by se mohlo na první pohled zdát.

najít jejich důkazy. V praxi velmi častým způsobem je hledání odhadu s minimální střední kvadratickou chybou. Označme ještě  $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$  a  $f(\mathbf{x})$  odhadovanou funkci.

**Věta 1** *Ať  $M(\mathbf{x})$  značí podmíněnou střední hodnotu  $E(y|\mathbf{x})$ . Potom výraz  $E[y - f(\mathbf{x})]^2$  je minimální, právě když  $f(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})$ .*

**Definice 8** *Funkci  $M(\mathbf{x})$  z věty 1 nazýváme regresní funkci  $y$  na  $x_1, \dots, x_n$  a její střední kvadratická chyba je rovna právě  $E[y - f(\mathbf{x})]^2$ .*

Požadavek, aby byla střední kvadratická chyba minimální ovšem není jediné kritérium, podle kterého lze stanovit funkci  $f(\mathbf{x})$ . Označme

$$\varrho(y, f) = \frac{\text{cov}(y, f)}{\sigma_f \sigma_y} \quad (2.2)$$

korelaci náhodných veličin  $y$  a  $f$  ( $\sigma_f$  a  $\sigma_y$  značí odmocniny rozptylů příslušných veličin,  $\text{cov}(y, f)$  jejich kovarianci). Potom můžeme na hledanou funkci  $f$  položit podmínku, aby maximalizovala výraz 2.2.

**Věta 2** *Mějme funkci  $M(\mathbf{x})$  z věty 1. Potom*

$$\begin{aligned} \varrho(y, M) &\geq 0 \\ \varrho(y, M) &\geq \varrho(y, f) \quad \text{kde } f \text{ je libovolný jiný odhad} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Z důkazu předchozí věty (uvedený v [4], str. 303) plyne, že korelace  $\varrho(y, f)$  nabývá svého maxima pokud  $\varrho(M, f) = 1$ , tedy pokud je  $f$  lineární funkcí  $M$ , čili i pro samotnou funkci  $M$ . Tedy regresní funkce nejen minimalizuje střední kvadratickou chybu, ale zároveň i maximalizuje korelaci  $\varrho(y, f)$  přes všechny odhady  $f$ .

Je-li regresní funkce lineární, potom ji lze určit poměrně snadno, stačí k tomu znát střední hodnoty, rozptyly a kovariance náhodných veličin  $y, x_1, \dots, x_n$ . Lze ji zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}) &= a + b_1 \cdot x_1 + \dots + b_n \cdot x_n, \text{ aby platilo} \\ \mathbf{Cb} &= \mathbf{c} \\ a &= E(y) - \mathbf{b}^T E(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Přitom  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $\mathbf{C}$  je kovarianční matice proměnných  $x_1, \dots, x_n$  a  $\mathbf{c}$  je vektor kovariancí  $y$  s  $x_1, \dots, x_n$ . V takovém případě mluvíme (podle definice v [4], str. 304) o lineární regresi. Regresní funkce může být ovšem složitější a v takovém případě je její nalezení podstatně obtížnější. Můžeme se však spokojit s tím, že nebudeme hledat přímo regresní funkci, ale pouze její nejlepší odhad mezi lineárními funkcemi. Návod k tomu dává následující věta.

**Věta 3** *Lineární funkce definovaná v 2.4 minimalizuje výraz  $E[y - f(\mathbf{x})]^2$  mezi všemi lineárními funkcemi. Zároveň maximalizuje výraz 2.2 (opět mezi lineárními funkcemi).*

Otázkou ale nadále zůstává, jakým způsobem z naměřených dat určit koeficienty  $a$  a  $\mathbf{b}$ . Pro případ lineární regrese je tento problém detailněji popsán v [2], parametry se odhadují metodou nejmenších čtverců. My využijeme následující tvrzení.

**Věta 4** *Mějme matici čísel  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{n,k}$ ,  $n > k$ , vektor  $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^n$ . Potom výraz  $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$  nabývá svého minima přes  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^k$  právě když*

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (2.5)$$

Za určitých dalších předpokladů se dá ukázat, že vektor  $\mathbf{b}$  z výrazu 2.5 je nestranným odhadem parametru  $\mathbf{b}$  z rovnic 2.4, popřípadě další zajímavé vlastnosti. Ty pro nás ovšem nejsou tolik důležité, neboť v našem případě o regresní funkci víme, že by mohla být alespoň “částečně lineární”, a proto budou všechna tato tvrzení platit pouze přibližně.

Nyní už můžeme vyzkoušet metodu na reálných datech. Jako matici  $\mathbf{X}$  zvolíme data z detektorů, za vektor  $\mathbf{Y}$  ale dosadíme délky kolon vyhlazené pomocí exponenciálního zapomínání podle vztahu

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= Y_1 \\ \bar{Y}_{k+1} &= \alpha Y_k + (1 - \alpha) \bar{Y}_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

(kde jsme zvolili  $\alpha = 0,5$  a index  $k$  probíhá přes všechny naměřené délky kolon) neboť odhad parametrů touto metodou je značně citlivý na náhlé změny v délce kolony, které navíc mohou být způsobeny nepřesností ručního měření.

Grafy průběhů odhadnuté délky kolony a kolony vyhlazené exponenciálním zapomínáním jsou uvedeny v příloze na obrázcích 4.13, 4.14, 4.16 a 4.17. Můžeme si na nich všimnout, že pro pondělí a pátek, kdy byly kolony krátké, se odhady poměrně dobře shodují se skutečností, zatímco ve čtvrtek a středu můžeme pozorovat významnější odchylky, zejména pro dlouhé kolony. To je ovšem výsledek, který se očekával, neboť samotné hodnoty obsazenosti a intenzity na detektorech nenesou informaci o stavu kolony, která sahá daleko za tyto detektory. Tyto grafy ovšem zobrazují odhady délky kolony, které byly provedeny na stejné množině dat, na kterých byly odhadnuty také parametry pro lineární regresi. Obrázek 4.15 zobrazuje průběh délky páteční kolony a jejího odhadu pomocí parametrů “naučených” na pondělku.

V [2] je popsána konstrukce testu, který se používá k testování hypotézy  $H_0$  (proměnná  $y$  nezávisí na veličině  $x_i$ , ve smyslu značení z rovnice 2.4), oproti alternativě  $H_1$  (proměnná  $y$  závisí na veličině  $x_i$ ). Tento test je založen na testovací statistice

$$t_i = \frac{|b_i|}{\sqrt{s^2 \cdot v_{i,i}}} \quad i \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (2.7)$$

kde  $n$  je počet nezávisle proměnných ( $x_i, i \in \hat{n}$ ), ze kterých odhadujeme funkci  $y$ ,  $b_i$  jsou složky vektoru  $\mathbf{b}$  z rovnice 2.5,  $v_{i,i}$  jsou diagonální prvky matice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  a  $s^2 = \sum Y_i^2 - b_1 \sum Y_i - b_2 \sum \mathbf{X}_{i,2} Y_i - \dots - b_n \sum \mathbf{X}_{i,n} Y_i$ , všechno značení ve smyslu rovnice

2.5. Přitom z toho, jak je test konstruován se dá volně říci, že čím větší je hodnota  $t_i$ , tím větší je pravděpodobnost, že  $y$  závisí na  $x_i$  (neboť pro nižší hladinu významnosti testu se kvantil studentova rozdělení, se kterým je hodnota  $t_i$  srovnávána, posouvá po reálné ose směrem doprava).

Vzhledem k našim předpokladům o závislosti délky kolony na měřených datech bude tento test platit pouze přibližně, nemá proto smysl testovat závislost jednotlivých dat z detektorů pro různé hladiny významnosti testu. Můžeme ale využít předchozího poznatku a sledovat, pro která data bude příslušná hodnota statistiky  $t_i$  největší. Ukazuje se, že pro středu a čtvrtky, kdy kolony byly nejdelší, jsou z tohoto hlediska nejdůležitějšími daty obsazenosti strategických detektorů.

Celkově lze říci, že tato metoda splnila očekávání nenáročného způsobu odhadování délky kolony. Na obrázku 4.15 vidíme poměrně dobrou shodu odhadu se skutečným průběhem kolony, a to i v případě, že parametry použité pro tento odhad byly získány pomocí měření z jiného dne s podobným průběhem délky kolony. Lze tedy usuzovat, že předpoklad přibližně lineární závislosti délky kolony na měřených datech je oprávněný a že metodu lze použít s poměrně uspokojivými výsledky.

## 2.2 Metoda odhadování pozice kolony vůči detektoru

### 2.2.1 Úvod

Jeden z ne příliš komplikovaných způsobů je odhadovat, zda kolona aut končí ještě před daným detektorem, nebo až za ním. Protože jsou v Praze křižovatky vybaveny většinou dvěma detektory (v různé vzdálenosti od hranice křižovatky) v každém příjezdovém rameni, bude se jednat o metodu, která rozlišuje tři stupně délky kolony.

Základní myšlenka této metody je následující. Pokud kolona aut sahá až po detektor, mělo by některé auto stát přímo nad ním a detektor pak vykáže vysokou obsazenost. Skutečnost je však trochu komplikovanější a pro využití je potřeba tuto myšlenku trochu upravit.

Už ze zběžné analýzy dat z detektorů si lze povšimnout, že i v případě, kdy kolona aut sahá daleko za detektor, nemusí být obsazenost nutně 100%. Data jsou totiž poskytována detektorem pravidelně v 90 sekundových intervalech, které nejsou nijak synchronizovány se světelnými signály na křižovatce. Může pak nastat situace, kdy se auta ze zadní části kolony přemísťují přes detektor směrem ke křižovatce, aby zaplnily místo po autech, která odjela na zelenou. Situace je naznačena na obrázku 2.1. Tedy naměřená obsazenost bude odpovídat projíždějícím vozidlům a bude oproti maximální možné hodnotě o něco nižší. Dále pak může nastat situace, kdy kolona aut sice sahá až za detektor, ale kdy dvě sousední auta, která stojí nejbliže k detektoru, mají mezi sebou příliš velký rozestup a ani jedno nestojí nad detektorem. V takovém případě detektor zaznamená nízkou obsazenost zkreslující výsledek metody. Tato situace je naznačena na obrázku 2.2. Tyto a další náhodné jevy pak mohou mít vliv na data přicházející z detektorů.

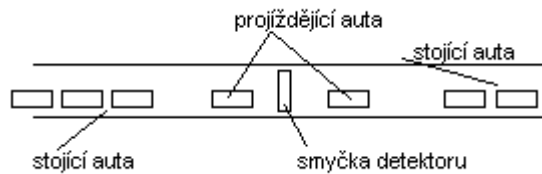


Figure 2.1: Změna obsazenosti způsobená přesunem vozidel v rámci kolony

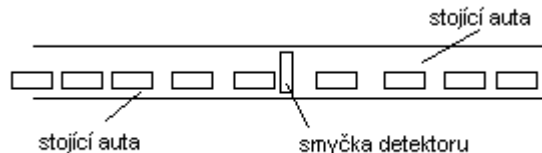


Figure 2.2: Zkreslení obsazenosti způsobené velkým odstupem dvou vozidel

Metoda se bude rozhodovat na základě obsazenosti, kterou bude porovnávat s určitou význačnou hodnotou (z předchozího odstavce lze usuzovat, že bude pravděpodobně menší než 100%). Je tedy nutné tuto význačnou hodnotu vhodným způsobem určit. Pojmenujme dále tuto hodnotu “mezní hodnotou obsazenosti” nebo také “mezní obsazenost”.

### 2.2.2 Varianta 1

První z možností, které se nabízejí, je pokusit se tuto hodnotu najít v literatuře. V [1] je zhruba nastíněna metoda detekce kongescí, která se rozhodne signalizovat dopravní zácpu, pokud hodnota obsazenosti detektoru v daném časovém intervalu překračuje 70%. Zkusme tedy tuto hodnotu převzít a otestovat metodu na skutečných datech ze střeďečního měření.

Nejprve se podíváme na údaje z prodlužovacích detektorů, vzdálených 41 metrů od hranice křižovatky. Jsou dva, pro každý jízdní pruh jeden, proto jako obsazenost uvažujeme průměr jimi udávaných hodnot. Nyní už jen stačí spočítat, v kolika případech by metoda rozhodla správně. Jsou to případy, kdy:

- obsazenost je nad a včetně 70% a zároveň kolona je delší než 41 metrů,
- obsazenost je pod 70% a zároveň délka kolony je kratší než 41 metrů.

Ostatní případy považujeme za nesprávné rozhodnutí. Učiníme-li tak, zjistíme že:

- pro obsazenost nad a včetně 70% je 40 ze 40 předpovědí správných (tj. kolona delší než 41 m), úspěšnost 100%,

- pro obsazenost pod 70% je 9 z 88 předpovědí správných (tj. kolona kratší než 41 m), úspěšnost přibližně 10%.

Celková úspěšnost metody na těchto datech z prodlužovacích detektorů pak vychází přibližně 38% (49 správných předpovědí ze 128 celkem). Nyní si vezměme strategické detektory a zopakujme pro ně celý postup. Jako výsledek pak dostaneme:

- pro obsazenost nad a včetně 70% je 1 z 1 předpovědi správná (tj. kolona delší než 146 m), úspěšnost 100%,
- pro obsazenost pod 70% je 22 ze 127 předpovědí správných (tj. kolona kratší než 146 m), úspěšnost přibližně 17%.

Celková úspěšnost metody na těchto datech ze strategických detektorů pak vychází přibližně 18% (23 správných předpovědí ze 128 celkem).

Metoda tedy sice funguje, ale již na základě zde uvedených výsledků lze usuzovat, že lze její odhady zpřesnit. Chyby mohou být způsobeny například průměrováním dat ze dvou detektorů vždy do jedné hodnoty. Dalším zdrojem chyb může být skutečnost, že v původní metodě uvedené v literatuře [1] byla křížovatka vybavena takzvanými “kongescenčními detektory” speciálně upravenými tak, aby eliminovali nedostatky běžných detektorů, projevující se v situaci znázorněné na obrázku 2.2. V neposlední řadě pak musíme uvážit, že původní metoda je určena pouze k detekci kongescence, nikoli k odhadování délky kolony. Jak si lze snadno všimnout, je hodnota 70% silně nadhodnocena. Podle tabulek 4.2 na straně 32 a 4.3 na straně 33 sahá kolona za detektor už při mnohem nižších hodnotách obsazenosti.

### 2.2.3 Varianta 2

Jak bylo naznačeno ve shrnutí předchozí metody, velká část jejích nesprávných rozhodnutí spočívala v příliš hrubém odhadu hodnoty mezní obsazenosti. Můžeme tedy využít poznatku, že hodnota obsazenosti 70% byla nadsazená a pokusit se ji určit lépe. Můžeme se například pokusit seřadit obsazenosti podle velikosti a pak z nich vybrat nejnižší možnou, pro kterou ještě podle naměřených dat sahala kolona až za detektor. Popřípadě až druhou nejnižší, abychom částečně eliminovali náhodné chyby.

Vezměme nyní tuto upravenou metodu a otestujme ji nejprve na stejných datech jako předchozí. Pro prodlužovací detektor můžeme z tabulky 4.2 vyčíst mezní hodnotu obsazenosti 42,5% (tj. nejnižší hodnota při které kolona sahá za detektor z takových hodnot, pro které existuje právě jedna vyšší hodnota obsazenosti, pro kterou kolona končí už před detektorem). Uvažujme nyní obdobně jako v první variantě. Metoda by rozhodla správně, pokud:

- obsazenost je nad a včetně 42,5% a zároveň kolona je delší než 41 metrů,
- obsazenost je pod 42,5% a zároveň délka kolony je kratší než 41 metrů.

Spočteme-li nyní jednotlivá rozhodnutí, dostaneme, že:

- pro obsazenost nad a včetně 42,5% je 115 z 116<sup>3</sup> předpovědí správných (tj. kolona delší než 41 m), úspěšnost přibližně 99%,
- pro obsazenost pod 42,5% je 8 z 12 předpovědí správných (tj. kolona kratší než 41 m), úspěšnost přibližně 67%.

Celková úspěšnost pro prodlužovací detektory je přibližně 96% (123 správných výsledků ze 128 celkem). Podobně pro strategické detektory můžeme vyčíslit mezní hodnotu obsazenosti (stejným postupem jako pro prodlužovací detektor) 42%. Spočteme opět jednotlivá rozhodnutí a dostaneme:

- pro obsazenost nad a včetně 42% je 82 z 83 předpovědí správných (tj. kolona delší než 146 m), úspěšnost přibližně 99%,
- pro obsazenost pod 42% je 21 ze 45 předpovědí správných (tj. kolona kratší než 146 m), úspěšnost přibližně 47%.

Celková úspěšnost pro strategické detektory je přibližně 80% (103 správných výsledků z 128 celkem).

Je vidět, že takto modifikovaná metoda je zatím mnohem úspěšnější než její předchozí varianta. Musíme si však uvědomit, že jsme ji testovali na stejných datech, na kterých jsme ji “naučili” (tj. že mezní hodnoty obsazeností byly stanoveny podle stejných dat na kterých jsme metodu později zkoušeli). Všimněme si ještě jednoho faktu: ačkoli byly mezní hodnoty obsazenosti stanovovány pro prodlužovací i strategické detektory zvláště, jsou výsledky podobné (42,5% v prvním případě a 42% ve druhém). To nabízí myšlenku, že existuje určitá univerzální mezní hodnota obsazenosti platná pro tuto metodu nezávisle na konkrétním detektoru, popřípadě dalších vnějších vlivech.<sup>4</sup>

Abychom tedy mohli metodu lépe zhodnotit, otestujeme ji ještě na datech z ostatních dnů. Použitím mezních hodnot určených ze střeďečních dat dostaneme pro jednotlivé dny:

- Pondělí: úspěšnost na prodlužovacích detektorech přibližně 65%, na strategických přibližně 93%,
- Úterý: úspěšnost na prodlužovacích detektorech přibližně 60%, na strategických přibližně 93%,
- Středa: úspěšnost na prodlužovacích detektorech přibližně 96%, na strategických přibližně 80%,

---

<sup>3</sup>To, že právě jedna předpověď je chybná, vyplývá přímo z volby mezní hodnoty obsazenosti. Stejný případ nastane i pro strategické detektory. Toto ovšem nemusí platit, pokud už určenou mezní hodnotu použijeme na data z jiných dnů.

<sup>4</sup>Existence takovéto univerzální hodnoty není na první pohled zřejmá. Každý detektor může být ovlivňován hned několika lokálními vlivy jako například kolísáním intenzity provozu během dne či během různých dnů v týdnu, vlastní konstrukcí křižovatky a přilehlých pozemních komunikací a podobně.

- Čtvrtek: úspěšnost na prodlužovacích detektorech přibližně 80%, na strategických přibližně 81%,
- Pátek: úspěšnost na prodlužovacích detektorech přibližně 68%, na strategických přibližně 90%.

Z takových výsledků bychom mohli usoudit, že popisovaná metoda je opravdu mnohem lepší než předchozí varianta, jednalo by se však o závěr předčasný. Totiž v určení správné mezní hodnoty stále spočívá problém. To, že metoda používá druhou nejnižší obsazenost a ne jinou, je jenom snaha aspoň částečně eliminovat náhodné vlivy, avšak bez matematického podkladu. Skutečnost, že se metoda učila na datech ze středy byla také náhodná, den byl vybrán losem. Pokud by byl vybrán čtvrtek nebo pátek, vyšla by stejným způsobem mezní hodnota rovna přibližně 60%, pokud by bylo vybráno pondělí nebo úterý, pak by se mezní hodnota pohybovala dokonce kolem 80%. To znamená, že modifikovaná metoda by dávala horší výsledky než její původní verze.

Na druhou stranu je však z těchto výsledků patrné, že položíme-li pevně mezní hodnotu na přibližně 40% (podobně jako jsme v původní variantě metody převzali z literatury hodnotu 70%), dostaneme celkem přesnou metodu na odhadování pozice kolony vůči detektoru.

## 2.2.4 Varianta 3

Opusťme nyní na chvíli snahy o určení mezní obsazenosti a podívejme se na problém jiným pohledem. Pro účely této podkapitoly bude vhodnější, jak uvidíme níže, jiná definice kolony, respektive její délky. Pod pojmem délka kolony zde budeme rozumět vzdálenost posledního auta stojícího v koloně od hranice křižovatky v okamžiku<sup>5</sup> začátku zeleného signálu, respektive konce červeného signálu<sup>6</sup>.

Zkusme situaci na příjezdovém rameni křižovatky modelovat následujícím způsobem. Předpokládejme nejprve, že intervaly zasilání dat z detektorů jsou synchronizovány se signálním cyklem semaforu, který začíná červeným a končí zeleným signálem. Přesněji, že data o obsazenosti během červené a za ní následující zelené dostáváme vždy na konci této zelené. Potom celkovou obsazenost detektoru za daný interval můžeme rozdělit na následující příspěvky:

- příspěvek od aut projíždějících volně přes detektor (během červené nebo zelené),
- příspěvek od aut, které se během červeného signálu zařadily na konec kolony a stojí nad detektorem (kolona přesahuje detektor),
- příspěvek od aut, které během zelené stále ještě stojí nad detektorem a čekají, až auta před nimi uvolní cestu.

<sup>5</sup>Tato definice se od původní liší pouze jejím časovým určením, ovšem i tato malá změna vyžaduje opatrnější přístup při navrhování a posléze ověřování funkčnosti metody.

<sup>6</sup>Mezi zeleným a červeným signálem bývá obvykle ještě oranžový signál, jeho délka je však v poměru k délce celého signálového cyklu krátká a pro naše účely ji lze zanedbat.



Tedy můžeme předpokládat obsazenost ve tvaru:

$$\text{obsazenost} = \frac{\bar{c} - k_1 + k_2 \cdot z + k_3 + k_4}{\tau} \quad (2.8)$$

Kde  $\tau$  je délka intervalu,  $\bar{c}$  je doba červené, během které stála kolona za detektor,  $k_1$  je funkce délky kolony a konstrukčních vlastností křižovatky (například vzdálenost detektoru od semaforu) související s přesunem aut v rámci kolony na začátku červené,  $k_2$  a  $k_3$  jsou opět funkce konstrukčních vlastností křižovatky související s volným průjezdem vozidel během zeleného a červeného signálu (v tomto pořadí) a funkce intenzity příjezdu vozidel do křižovatky,  $z$  značí délku zelené a  $k_4$  je opět funkce konstrukčních vlastností křižovatky související s opožděným odjezdem vozidla stojícího nad detektorem vůči počátku zeleného signálu. Určení koeficientů  $k_1$  až  $k_4$  by mohlo vést k další modifikaci metody, popřípadě ke zpřesnění výsledků metody níže popsané. Jak ovšem uvidíme dále, jsou data jež máme k dispozici pro tento účel nevhodná. Pro další úvahy tyto koeficienty zanedbáme. Pokud tedy naměřená obsazenost za interval je větší než poměr doby červené k celému intervalu, můžeme předpokládat, že po celou dobu červené stálo nad detektorem auto a tedy kolona sahá až za detektor už na konci zelené. Označme ještě  $c$  dobu červené. Potom rozhodnutí metody vypadá následovně:

$$\text{naměřená obsazenost} \geq \frac{c}{c+z} \Rightarrow \text{Kolona končí za detektorem}$$

Podobně, i když nepřesně, můžeme pro rozhodování metody použít i opačný směr implikace:

$$\text{naměřená obsazenost} < \frac{c}{c+z} \Rightarrow \text{Kolona končí před detektorem}$$

Bohužel ve skutečnosti intervaly signálního plánu semaforu a intervaly zaslání dat z detektorů jsou na sobě nezávislé a ani není možné zařídit, aby tomu bylo jinak<sup>7</sup>. Proto se musíme spokojit s tím, že si zvolíme vlastní časový interval, pokud možno dostatečně dlouhý, aby se v něm vystřídal alespoň několik červených a zelených signálů. Nerovnosti pro rozhodování metody stačí pozměnit tak, že do čitatele dáme součet všech délek červených v rámci tohoto dlouhého intervalu a do jmenovatele jeho délku. Potom můžeme předpokládat, že informace od celých párů “červená - zelená” bude mít větší váhu než od signálů, které byly na koncích našeho intervalu oříznuty. Zároveň však tento interval nesmí být příliš dlouhý, neboť metoda pak průměruje délku kolony přes všechny okamžiky počátků červeného signálu. Pokud by délka kolony během tohoto intervalu silně kolísala, metoda by nebyla schopna tyto výkyvy zachytit.

Ještě předtím, než metodu otestujeme na reálných datech si musíme uvědomit, že z měření máme k dispozici pouze délky kolon v časových odstupech 60 sekund. Už samotné toto měření je dosti nepřesné, neboť je provedeno ve smyslu naší původní definice délky kolony (tedy vzdálenost posledního stojícího auta od křižovatky v daném okamžiku bez ohledu na počet aut mezi křižovatkou a tímto autem). Abychom měli

<sup>7</sup>Takovýto zásah do funkce již nainstalovaného řídicího systému na křižovatkách představuje z hlediska správce tohoto systému většinou nepřijatelné finanční výdaje

výsledky metody s čím porovnat, musíme tyto nepřilíš přesné údaje ještě dále přepočítat do okamžiků konce zeleného signálu a dále pak zprůměrovat přes všechny takové okamžiky v rámci našeho intervalu. Abychom data úplně neznehodnotili, použijeme při přepočtu délek z minutových odstupů váženého průměru podle vzdálenosti od nejbližších známých hodnot. Tedy pro  $d_1$  délku kolony v čase  $t_1$  a  $d_2$  délku kolony v čase  $t_2 = t_1 + 60$  sekund, vypočítáme neznámou délku kolony  $d$  v čase  $t$  jako

$$d = \frac{(t_2 - t)}{60} \cdot d_1 + \frac{(t - t_1)}{60} \cdot d_2 \quad (2.9)$$

Z těchto hodnot již pak spočítáme obyčejný průměr v rámci každého intervalu. Jako data z detektorů v daném intervalu budeme brát průměr z obsazeností v okamžicích, které spadají do tohoto intervalu.

Stanovme nyní délku intervalu na 360 sekund (čtyřikrát déle než je základní interval příchodu dat z detektorů) a podívejme se na výsledky metody na datech z úterního měření a prodlužovacích detektorů. V tabulce 4.1 vidíme, že 17 z 22 předpovědí, tj. přibližně 77% bylo správných. Zároveň vidíme, že všechny chyby kterých se metoda dopustila, nastaly při koloně sahající za detektor, ačkoli právě za předpokladu kolony za detektor (kvůli zanedbáním) by měla metoda dávat přesnější výsledky, než pokud tento předpoklad splněn není. To by mohlo znamenat, že koeficient  $k_1$  v rovnici 2.8 je důležitější než ostatní zanedbané koeficienty. Není ovšem možné tuto domněnku ověřit, neboť k tomu je k dispozici málo vhodných dat.

## 2.2.5 Varianta 4

V této části se opět vrátíme k pokusům o určení mezní hodnoty obsazenosti, na základě které bychom mohli určit, zda kolona sahá až za detektor, nebo končí-li už před ním. V kapitole 2.2.3 jsme už uvedli, že hodnota 40% vyhovuje celkem dobře, zároveň však víme, že způsob nalezení této hodnoty byl příliš citlivý na výchyly v naměřených datech a v praxi velice obtížně použitelný. Zde se pokusíme navrhnout spolehlivý způsob, jakým tuto hodnotu určit, popřípadě ji ještě zpřesnit.

### Teorie

Abychom lépe pochopili, jak metoda funguje, projděme si nejprve některé základní pojmy, které budeme potřebovat. Představme si následující pokus. Mějme krabici s barevnými kuličkami z nichž některé jsou bílé. Předpokládejme že víme, že pravděpodobnost vytažení bílé koule je buď 0,2 nebo 0,8. Po vytažení 4 koulí (s vracením, tj. tahy jsou nezávislé) jsme zjistili, že jen jedna z nich byla bílá, ostatní měli jinou barvu. Náhodná veličina “vytažení  $k$  bílých koulí v  $n$  tazích” má binomické rozdělení s hustotou pravděpodobnosti  $P(k)$ :

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (2.10)$$

Dosazením do tohoto vzorce pak spočítáme, že pro  $p = 0,2$  by pravděpodobnost našeho výsledku byla přibližně 40%, zatímco pro  $p = 0,8$  pouze 3%. Rozhodnutí přiklonit se k variantě, že  $p = 0,2$  je celkem rozumné, neboť předpokládáme, že ze všech možných výsledků pokusu spíše nastane ten s největší pravděpodobností.

Pozměňme ještě předpoklad pokusu tak, že na začátku pouze víme, že  $p \in (0,1)$ . Nyní nemůžeme za  $p$  postupně dosazovat tak jako v předchozím případě, neboť možných hodnot je nespočetně mnoho. Zato však můžeme na pravděpodobnost  $P$  pohlížet jako na funkci parametru  $p$  za předpokladu, že  $k = 1$  (a dalších podmínek daných pokusem, zde  $n = 4$ ). Problém se tedy redukuje na nalezení extrému funkce  $P$  vzhledem k proměnné  $p$ . Pokud funkce  $P$  je diferencovatelná, stačí vyřešit rovnici

$$\frac{\partial P(p, n = 4, k = 1)}{\partial p} = 0 \quad (2.11)$$

Učiníme-li tak, dostaneme že  $p = \frac{1}{4}$ . To je ovšem výsledek, který jsme očekávali. Rovnici 2.11 se také často říká věrohodnostní rovnice<sup>8</sup>. Princip odhadů parametrů založený na hledání takové hodnoty parametru, která maximalizuje pravděpodobnost získaného výsledku experimentu, se nazývá metoda maximální věrohodnosti, v literatuře též často označovaná zkratkou “MLE”.

Metoda maximální věrohodnosti je jednou z nejčastějších metod užívaných při hledání odhadů, proto si uveďme alespoň některé její základní vlastnosti, tak jak jsou popsány v literatuře [2],[3],[4],[5].

**Definice 9** *Mějme  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  realizaci náhodné veličiny,  $f(\mathbf{x}, \theta)$  sdruženou hustotu pravděpodobnosti,  $\theta$  parametr,  $c \in (0,1)$  reálnou konstantu. Potom funkci definovanou jako*

$$L(\theta | \mathbf{x} = \mathbf{X}) = c \cdot f(\mathbf{X}, \theta) \quad (2.12)$$

*nazveme věrohodnostní funkcí a odhad  $\hat{\theta}$  parametru  $\theta$  definovaný jako*

$$\hat{\theta} = \arg \sup_{\theta} L(\theta | \mathbf{x} = \mathbf{X}) \quad (2.13)$$

*nazveme maximálně věrohodným odhadem parametru  $\theta$ .*

Může se stát, že supremum není dosažitelné, v takovém případě lze definovat “téměř maximálně věrohodný odhad” jako takové  $\hat{\theta}$ , pro které platí

$$L(\hat{\theta} | \mathbf{x} = \mathbf{X}) \geq c \cdot \sup_{\theta} L(\theta | \mathbf{x} = \mathbf{X}) \quad (2.14)$$

Ani existenci tohoto odhadu nelze vždy zaručit, to se však stává jen ve výjimečných případech.

---

<sup>8</sup>Pokud by odhadovaný parametr byl vícerozměrný, řešili bychom soustavu rovnic získaných derivací apriorní hustoty pravděpodobnosti podle jednotlivých složek vektoru parametru.

**Věta 5** Mějme  $f(\mathbf{x}, \theta)$  hustotu pravděpodobnosti,  $\theta$  parametr. Existuje-li eficientní<sup>9</sup> odhad parametru  $\theta$ , pak je tento odhad kořenem věrohodnostní rovnice.

To v praxi znamená, že pokud hledáme eficientní odhad, můžeme se omezit na hledání jen v množině kořenů věrohodnostní rovnice.

**Definice 10** Mějme parametr  $\theta$  z parametrického prostoru. Ať náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  má hustotu pravděpodobnosti  $f(\mathbf{x}, \theta)$ . Statistiku  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_k); k \leq n$  nazveme postačující pro parametr  $\theta$ , právě když existuje taková nezáporná měřitelná funkce  $g(\mathbf{s}, \theta)$  proměnných  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$  a taková nezáporná měřitelná funkce  $h(\mathbf{x})$ , že skoro všude vzhledem k dané míře platí

$$f(\mathbf{x}, \theta) = g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \theta) \cdot h(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

Z této definice je zřejmé, že postačující statistika existuje vždy, cenná je ale taková, která má počet složek co nejmenší.

**Věta 6** Odhad metodou maximální věrohodnosti je vždy funkcí postačující statistiky.

Volně bychom tedy mohli říct, že při maximálně věrohodných odhadech neztrácíme žádnou informaci z pozorování naměřených při provádění experimentu.

**Věta 7** Nechť je věrohodnostní funkce diferencovatelná a ať jsou splněny ještě některé další předpoklady (přesně viz [4] str. 406). Potom věrohodnostní rovnice má pro  $n \rightarrow \infty$  s pravděpodobností 1 řešení, které je konzistentním odhadem<sup>10</sup>.

Tedy maximálně věrohodné odhady by měly odhadovaný parametr aproximovat poměrně dobře, není to však zaručeno pro malá  $n$ .

**Věta 8** Ať  $\hat{\theta}$  je konzistentní řešení věrohodnostní rovnice,  $\theta_0$  je skutečná hodnota parametru, a ať jsou splněny předpoklady předchozí věty. Potom pro  $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left[ (\hat{\theta} - \theta_0) i(\theta_0) - \frac{1}{n} \frac{dl}{d\theta_0} \right] \rightarrow 0 \text{ podle pravděpodobnosti} \quad (2.16)$$

kde  $i(\theta)$  značí Fisherovu informaci o parametru  $\theta$  obsaženou v jednom pozorování.

Předchozí věta tedy říká, že maximálně věrohodné odhady jsou asymptoticky normální a asymptoticky eficientní<sup>11</sup>.

Některé další zajímavé vlastnosti maximálně věrohodných odhadů, které však přesahují rámec tohoto textu, lze rovněž najít v literatuře uvedené v předchozích odstavcích.

<sup>9</sup>Odhad parametru nazveme eficientním právě když má ze všech ostatních odhadů minimální rozptyl.

<sup>10</sup>Tj. že konverguje podle pravděpodobnosti ke skutečné hodnotě odhadovaného parametru.

<sup>11</sup>Více o eficienci a asymptotické eficienci odhadů se lze dočíst v [4] str. 388–392.

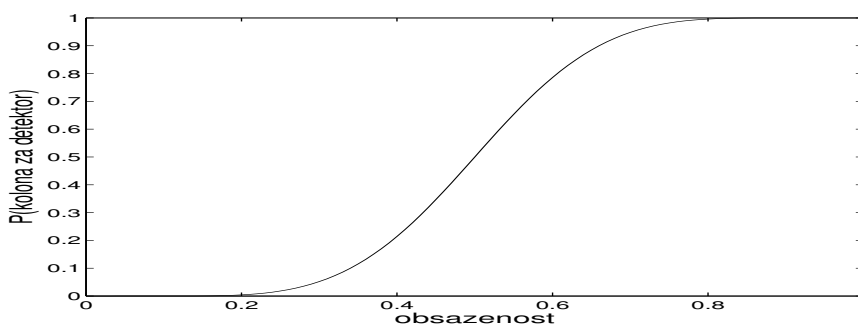


Figure 2.3: Tvar závislosti pravděpodobnosti, že kolona sahá za detektor, na obsazenosti detektoru

### Aplikace

Maximálně věrohodné odhady se tedy jeví jako dobrý způsob odhadu parametrů a mohli bychom se pokusit je využít k určení mezní hodnoty obsazenosti pro naši metodu. K tomu však musíme nejprve vytvořit model situace na příjezdovém rameni křižovatky a zavést do něj parametr, který se pak pokusíme odhadnout.

Proveďme následující úvahu. Ze zkušenosti očekáváme, že pokud detektor vykáže nízkou obsazenost, bude s velkou pravděpodobností kolona končit už před detektorem. Pro velice malé obsazenosti bychom mohli předpokládat, že kolona jistě nedosahuje detektoru. Jeví se však rozumnější nepovažovat jev, kdy kolona i při nízké obsazenosti sahá za detektor za jev nemožný, neboť tímto způsobem bychom předem vyloučili některé nepředvídané události jako například poruchu detektoru anebo prosté náhodné chyby měření. Dále pak jistě můžeme předpokládat, že s rostoucí hodnotou obsazenosti bude růst pravděpodobnost toho, že kolona sahá až za detektor, a to až do okamžiku, kdy obsazenost dosáhne hodnoty 100%. Tedy křivka, popisující závislost pravděpodobnosti jevu, kdy kolona sahá za detektor, v závislosti na obsazenosti detektoru, bude mít tvar křivky znázorněné na obrázku 2.3. Možných popisů křivky s takovýmto tvarem je více, pro naše účely jsme zvolili funkci  $P(x)$  definovanou jako

$$P(x) = 1 + \tanh\left[b + a\left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \quad \forall x \in (0, 1) \quad (2.17)$$

$$P(0) = 0, \quad P(1) = 2$$

která vznikla zkombinováním vhodného tvaru funkce hyperbolického tangens a změnou jejího definičního oboru na interval  $\langle 0, 1 \rangle$  pomocí funkce tangens. Přitom  $a \geq 0$  a  $b$  jsou reálné parametry. Jak je dále vidět z konstrukce funkce  $P$ , parametr  $a$  souvisí s její “strmostí”, zatímco parametr  $b$  ovlivňuje polohu inflexního bodu, tedy vlastně křivku “posouvá” doprava ( $b < 0$ ) nebo doleva ( $b > 0$ ). Poznamenejme ještě, že vždy, když se v následujícím textu budeme odkazovat na funkci obsahující výraz

$$\tanh\left[b + a\left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \quad (2.18)$$

budeme mít na mysli funkci dodefinovanou hodnotou 0 pro  $x = 0$  a hodnotou 2 pro  $x = 1$ .

Nyní je na řadě rozhodnout, podle jakého kritéria budeme ze znalostí funkce  $P$  (tj. znalostí hodnot parametrů  $a$  a  $b$ ) určovat hodnotu mezní obsazenosti. I zde máme více možností. Jak už bylo řečeno, hodnota funkce  $P$  při hodnotě obsazenosti  $x$  vlastně popisuje, jak moc je při dané obsazenosti pravděpodobné, že kolona sahá za detektor. Tudíž jedna z možností je stanovit určitou hodnotu pravděpodobnosti (například 90%), která bude vyjadřovat naši míru jistoty<sup>12</sup>, a k ní potom najít hodnotu obsazenosti  $x$  tak, aby

$$\frac{P(x)}{\max_{x \in (0,1)} P(x)} = 0,9 \quad (2.19)$$

Postupme dále, k samotnému hledání hodnot parametrů. K využití metody maximální věrohodnosti budeme muset funkci  $P$  definovanou vztahem 2.17 upravit tak, aby splňovala podmínky na hustotu pravděpodobnosti. Tvar funkce  $P$ , tak jak je nakreslen na obrázku 2.3, se dá chápat také jako pravděpodobnost jevu, že detektor vykáže danou obsazenost za předpokladu, že kolona sahá za detektor. To nemusí být na první pohled tak jasné, stačí si ale představit situaci, že bychom provedli dostatečně velký počet měření dvojic obsazenost - pozice kolony. Předpokládejme, že žádná hodnota obsazenosti nenastává častěji než jiná<sup>13</sup>. Nyní pro každou hodnotu obsazenosti vynesme do jednoho grafu četnosti případů, kdy kolona sahala za detektor a do druhého grafu případy, kdy kolona končila před detektorem. Protože zároveň pro každou hodnotu obsazenosti je pravděpodobnost kolony sahající za detektor úměrná funkci  $P$ , bude první graf věrně popisovat funkci  $P$ , zatímco druhý funkci  $1 - P$ . Na tyto grafy se pak (po přenásobení vhodnou konstantou) můžeme také dívat jako na pravděpodobnosti určitých hodnot obsazenosti podmíněných stavem kolony (tj. před nebo za detektorem). Jako základ pro hledanou hustotu pravděpodobnosti bychom tedy mohli vzít funkci  $f(x, y)$  s definičním oborem  $\{0, 1\} \times \langle 0, 1 \rangle$ , kde  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $y \in \{0, 1\}$ ,  $f(x, 0) = P(x)$ ,  $f(x, 1) = 1 - P(x)$ . To je však téměř zbytečné, stačí si zapamatovat, že funkce je dvourozměrná, ale pracovat pouze s jednou její složkou<sup>14</sup>. Máme tedy funkci  $P(x)$  definovanou vztahem 2.17. Abychom z ní vyrobili hustotu pravděpodobnosti, potřebujeme ji nanormovat, tedy najít konstantu  $K$  (která může být funkcí parametrů  $a$  a  $b$ ) tak aby platilo

$$\int_0^1 K(a, b) \cdot \left(1 + \tanh \left[b + a \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\right) dx \quad (2.20)$$

<sup>12</sup>Hodnota 90% znamená, že pro nalezenou mezní hodnotu a všechny vyšší obsazenosti (z monotonie funkce  $P$ ) bude pravděpodobnost špatného rozhodnutí jen 10%.

<sup>13</sup>Tento předpoklad nemusí být správný, pokud se jedná o křížovatky extrémně zatížené, nebo naopak málo používané, neboť pak se obsazenosti pohybují častěji v některých vysokých nebo nízkých hodnotách. V takovém případě bychom však mohli na základě dlouhodobých pozorování odhadnout rozdělení hodnot obsazenosti jakožto náhodné veličiny, ze kterého bychom pak už snadno určili rozdělení podmíněné stavem kolony před nebo za detektorem

<sup>14</sup>Práce s dvourozměrnou hustotou by se projevila pouze jiným normalizačním faktorem (aby hustota pravděpodobnosti po integraci dávala jedničku), v tomto případě polovičním, postup výpočtu by zůstal stejný.

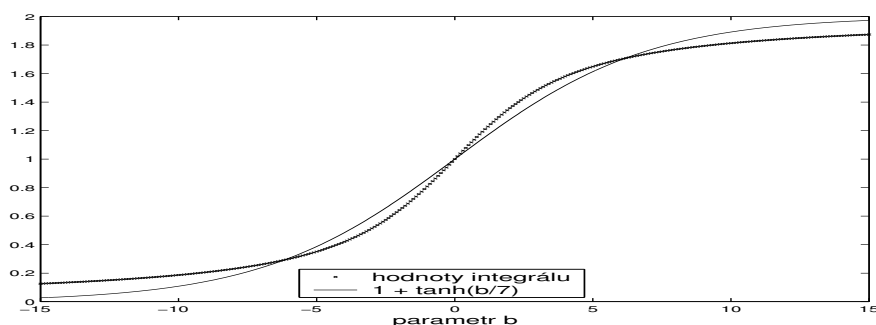


Figure 2.4: Numericky spočítané hodnoty integrálu v 2.21 a jejich aproximace

Tedy stačilo by položit konstantu  $K$  rovnou

$$K(a, b) = \frac{1}{\int_0^1 \left(1 + \tanh \left[b + a \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\right) dx} \quad (2.21)$$

Explicitní vyjádření integrálu ve vzorci 2.21 v závislosti na parametrech  $a, b$  se nám však nepovedlo nalézt. Můžeme ale zkusit napočítat tento integrál numericky pro některé hodnoty parametrů. Parametr  $a$  není pro naši metodu tak důležitý jako parametr  $b$ , můžeme se proto spokojit s tím, že si zvolíme hodnotu parametru  $a$  pevně. Hodnota  $a = 3$  se jeví z hlediska “strmosti” funkce  $P(x)$  jako vhodná. Zobrazme si hodnoty integrálu ze vzorce 2.21 pro některé hodnoty parametru  $b$  ( $a = 3$  pevně) do grafu. Mohli bychom se pokusit tyto hodnoty proložit například polynomem, ovšem jak vidíme na obrázku 2.4, závislost integrálu na parametru  $b$  připomíná funkci hyperbolický tangens. Můžeme se proto pokusit aproximovat integrál právě v tomto tvaru. Pokud pro rozmezí  $b \in \langle -15, 15 \rangle$ <sup>15</sup> použijeme jako aproximaci integrálu v 2.21 funkci

$$I(b) = 1 + \tanh\left(\frac{b}{7}\right) \quad (2.22)$$

zjistíme, že

$$\left| \int_0^1 \left(1 + \tanh \left[b + 3 \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\right) dx - I(b) \right| \leq 0,1 \quad \forall b \in \langle -15, 15 \rangle \quad (2.23)$$

To můžeme tvrdit, neboť integrál v 2.21 je spojitou a monotónní (rostoucí) funkcí parametru  $b$ . Spojitost plyne ihned z vlastnosti integrálu. Monotonie plyne z následujícího. Hyperbolický tangens je rostoucí funkcí, proto pro libovolné  $b_1 < b_2$  platí

$$1 + \tanh \left[b_1 + 3 \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] < 1 + \tanh \left[b_2 + 3 \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.24)$$

<sup>15</sup>Tento interval byl zvolen podle tvaru křivky  $P(x)$  z 2.17. Pro krajní body intervalu je “posunutí” křivky takové, že mezní hodnoty jim odpovídající by byly velmi nepravděpodobné. Nicméně pokud by parametr náhodou překročil tento interval, není to problém. Aproximace bude stále poměrně dobře fungovat, pouze s trochu menší přesností.

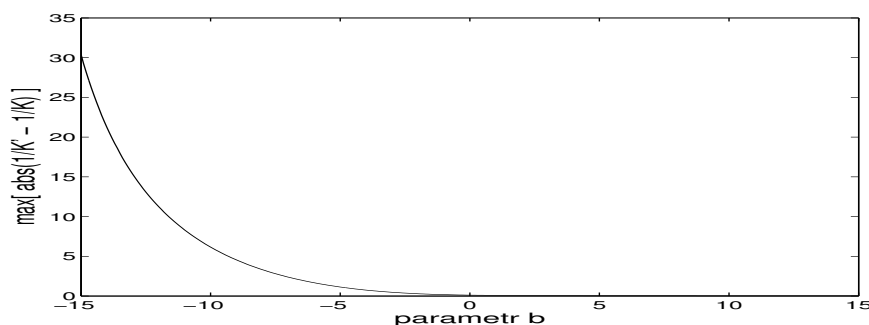


Figure 2.5: Odchylka odhadu normovací konstanty  $K'$  od skutečné hodnoty  $K$

Tedy integrand obsahující  $b_1$  je menší než integrand obsahující  $b_2$  v celém oboru integrace, z čehož už jasně plyne monotonie integrálu z 2.21.

Kdybychom místo funkce  $I(b)$  použili jako aproximaci polynom, dostali bychom sice na intervalu  $b \in \langle -15, 15 \rangle$  o něco menší odchylku (0.08 pro polynom 7. stupně), avšak už při malém překročení tohoto intervalu by odchylka naopak prudce vzrostla.

Nyní se podívejme trochu blíže, jak chyba aproximace integrálu ovlivní výpočet. Zjistili jsme už, že pro  $b \in \langle -15, 15 \rangle$  nepřesáhne rozdíl integrálu a jeho aproximace hodnotu 0,1. Zároveň však tyto funkce vystupují jako jmenovatel zlomku, proto výsledná chyba v určení konstanty  $K$  ze vzorce 2.21 bude záviset také na hodnotě integrálu z 2.21. Tento integrál nabývá hodnot blízkých nule pro malá  $b$ , pro které bude chyba největší. To je důsledek skutečnosti, že derivace  $K$  podle svého jmenovatele je pro jmenovatele blízkého nule velmi velká, a i malé změny tohoto jmenovatele se projeví jako velká změna hodnoty  $K$ . Navíc podle průběhu odchylky funkce  $I(b)$  od skutečné hodnoty integrálu, znázorněné v grafu na obrázku 4.12 vidíme, že tato odchylka je velká právě pro malé hodnoty parametru  $b$ . Z obrázku 2.5, který popisuje odchylku normovací konstanty  $K$  od skutečné hodnoty, lze vyčíst, že pro kladné hodnoty parametru  $b$  bude tato odchylka zanedbatelná. Naopak pro záporné hodnoty parametru  $b$  (přibližně pro  $b = -6$  a nižší), kde funkční hodnoty  $I(b)$  jsou nižší než skutečná hodnota integrálu, dostaneme konstantu  $K$  mnohem větší, než by ve skutečnosti měla být. Tím ale vlastně uměle “zvýšíme pravděpodobnost” všech jevů popisovaných funkcí  $P(x)$  z 2.17. Protože se ale metoda maximální věrohodnosti snaží vždy maximalizovat pravděpodobnost naměřeného výsledku experimentu, může se pro dostatečně malá  $b$  stát, že metoda bude “navyšovat pravděpodobnost” výsledku ne na základě informace měření, ale prostým snižováním hodnoty parametru  $b$  a tím pádem zvyšováním hodnoty konstanty  $K$ . Metoda má tedy tendenci pro dostatečně malá  $b$  preferovat nižší hodnoty tohoto parametru.

Vezměme tedy nyní jako hledanou hustotu pravděpodobnosti funkci

$$f(x, b) = \frac{1}{1 + \tanh(\frac{b}{7})} \cdot \left(1 + \tanh[b + 3(\tan(\pi x - \frac{\pi}{2}))]\right) \quad (2.25)$$

Potom už stačí pouze vzít jednotlivé naměřené hodnoty obsazenosti  $x_i$ , postupně je dosa-



dit do vztahu 2.25 a součinem těchto funkcí vytvořit sdruženou hustotu pravděpodobnosti. Jen si ještě musíme uvědomit, že pro případ kolony sahající před detektor má hustota pravděpodobnosti tvar  $1 - f(x, b)$ . Tedy pro sdruženou hustotu pravděpodobnosti platí  $F(b) = F_1(b) \cdot F_2(b)$ , kde

$$F_1 = \prod f(x_i, b) \quad \forall x_i \in \mathcal{M}_1 \quad (2.26)$$

$$F_2 = \prod [1 - f(x_i, b)] \quad \forall x_i \in \mathcal{M}_2 \quad (2.27)$$

kde  $\mathcal{M}_1$  je množina všech naměřených obsazeností, pro které kolona sahala za detektor, obdobně  $\mathcal{M}_2$  množina obsazeností, pro které kolona končila před detektorem. Poté musíme najít maximum funkce  $F(b)$ . Vzhledem ke složitosti jejího zápisu se přikloníme k numerickému řešení. Jakmile nalezneme hodnotu parametru  $b$ , ve kterém se toto maximum nabývá, dosadíme ho do funkce  $f(x, b)$ . Poté nalezneme (dosazením za  $x$  hodnotu 1) maximum funkce  $f$  a z něj vypočítáme 90%. Potom už pouze stačí vypočítat, opět jen numericky, ve kterém bodě funkce  $f(x, b)$  dosáhne 90% svého maxima a tuto hodnotu označit za mezní obsazenost.

My jsme tyto výpočty provedli pro úterý na prodlužovacích detektorech, ve středu a ve čtvrtek na prodlužovacích i strategických detektorech a v pondělí na prodlužovacích detektorech. Výsledky odhadů mezních obsazeností byly následující:

- Úterý, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti: 40%,
- Středa, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti (redukováná data): 56%,
- Středa, strategické detektory, odhad mezní obsazenosti (redukováná data): 33%,
- Čtvrtek, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti (redukováná data): 35%,
- Čtvrtek, strategické detektory, odhad mezní obsazenosti (redukováná data): 22%,
- Pondělí, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti: 36%.

Přitom výpočty ze střeďečnících a čtvrtěčnících dat byly provedeny zkušebně na zreduko-  
vaných datech (byla použita přibližně třetina všech naměřených dat). Pro tyto dny byly  
výpočty provedeny ještě jednou na kompletních datech s těmito výsledky:

- Středa, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti: 49%,
- Středa, strategické detektory, odhad mezní obsazenosti: 32%,
- Čtvrtek, prodlužovací detektory, odhad mezní obsazenosti: 34%,
- Čtvrtek, strategické detektory, odhad mezní obsazenosti: 38%.

Zde vidíme, že odhady z prodlužovacích detektorů v úterý a ze strategických detektorů ve středu, které se původně podstatně lišily od ostatních odhadů, se při použití více dat zlepšily. Tento jev by se dal spojovat s faktem, že většina “dobrých” vlastností maximálně věrohodných odhadů, jak jsou popisovány v první části této sekce je pouze asymptotická, tj. platí pro dostatečně velký počet měření.

Dále si můžeme povšimnout, že většina odhadů se pohybuje v rozmezí 30% až 40%, což je výsledek, který odpovídá očekáváním, které jsme zmínili už na konci sekce 2.2.3. Zároveň je vidět, že metoda odhadla téměř ve všech případech, nezávisle na použitých datech, podobné mezní obsazenosti, a to i v případech, kdy způsob navrhaný v sekci 2.2.3 selhal. Můžeme tedy tvrdit, že tato verze metody je odolnější vůči chybám měření nebo jiným náhodným vlivům.

Z výpočtů na prodlužovacích detektorech z úterý a středy a na strategických detektorech ze středy jsou v příloze zobrazeny grafy průběhů funkcí  $F(b)$  a  $f(x, b = \arg \max_{b \in \mathcal{R}}(F))$  (obrázky 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.6, 4.7). Na grafu na obrázku 4.6 z výpočtu z úterý si můžeme povšimnout následující skutečnosti. Funkce nemá žádné výrazné maximum a má poměrně “exotický” průběh. Normálně bychom očekávali jedno výrazné maximum a funkční hodnoty v ostatních bodech blízké nule. Fakt, že tomu tak není, můžeme považovat jednak za známku nepřesnosti úterních dat, ale také za varování, že se v některých dopravních situacích nedá spoléhat na mezní obsazenost jako jediné kritérium pozice kolony.

## 2.2.6 Shrnutí

Jak je vidět z principu metody, je použitelná nejen pro sadu dvou detektorů, ale pro jakoukoli křižovátku s alespoň jedním detektorem. Použití většího počtu detektorů v kratších vzájemných vzdálenostech by pomohlo zpřesnit výsledky této metody (ve smyslu počtu rozeznávaných vzdáleností konce kolony od hranice křižovátky), ovšem z praktického (zejména finančního) hlediska je tato myšlenka nerealizovatelná. Navíc přidání dalších detektorů by byl i po technologické stránce náročný zákrok do systémů na křižovatce již nainstalovaných, přitom však existují další přibližně stejně náročné zásahy (například změna frekvence nebo obsahu informací dodávaných detektory), které by pomohli metodu zpřesnit více, popřípadě by vedli na přesnější modifikaci.

Zároveň lze konstatovat, že výsledky dávané touto metodou jsou poměrně spolehlivé. Jak si můžeme povšimnout, počet správných odhadů pozice kolony ve shrnutí druhé varianty se pohyboval mezi 60% až 93%. To se může v porovnání s výsledky metody založené na Kalmanově filtru [7] a uvedenými v [13] nebo [14] zdát jako poměrně špatná shoda s reálnými daty, ovšem nahlédnutím do této literatury lze zjistit, že metoda předpokládá znalost některých dalších veličin, používá jiný předpoklad fyzické konstrukce křižovátky a je testována na jiných datech, než metoda popisovaná v této práci.

Dále se nám ve čtvrté variantě nakonec podařilo najít způsob odhadování mezní hodnoty obsazenosti pro případy, že by hodnota 40% byla pro některou křižovátku shledána jako nevyhovující. Skutečnosti, že ne při všech odhadech odpovídaly výsledky našim očekáváním nemusí být nutně způsobeny nepřesnostmi metody. Je potřeba si

uvědomit, že samotné získávání ručně měřených dat jakými jsou délka kolony nebo časy červeného signálu je poměrně náročný úkol a tudíž jsou tato data zatížena chybami.

## 2.3 Metoda odhadování délky kolony pomocí “plnicího času”

V tomto oddíle se zmíníme o dalším způsobu odhadování délek kolon, tak jak je popsán v literatuře [6]. Tato metoda se zaměřuje na problém detekce dopravní kongesce, k jehož řešení využívá právě odhady o délkách kolony. Od ostatních metod detekce dopravní zácpy se liší především tím, že se snaží odhadovat délku kolony na křižovatkách, kde detektory jsou umístěny pouze blízko k hranici křižovatky (ve vzdálenosti přibližně 10 až 50 metrů) a z jejichž dat je tudíž obtížné rekonstruovat dopravní situaci ve vzdálenostech zhruba 100 metrů od křižovatky a dále, jejíž určení je k detekci kongesce klíčové. Dále se tato metoda dá využít k určení saturačního toku nebo významných odchylek v propustnosti křižovatky způsobených náhodnými poruchami zvnějšku. Klíčovým pro tyto aplikace však zůstává způsob, kterým metoda na základě dat z detektorů odhaduje kolonu, jejíž délka několikrát převyšuje vzdálenost těchto detektorů od křižovatky.

Metoda vychází z představy, že dopravní proud v oblasti detektoru je silně ovlivněn aktuálním signálem na křižovatce. Pro popis tohoto proudu se jeví jako vhodné následující dvě veličiny:

- “Plnicí čas” (vzhledem k detektoru), definovaný jako čas, který uběhne od začátku červeného signálu do okamžiku, kdy je detektor nepřetržitě obsazen,
- Délka obsazenosti detektoru během zeleného signálu.

Způsob odhadování délky kolony je založen na předpokladu její souvislosti s plnicím časem podle následující myšlenky. Pokud kolona sahá dostatečně daleko za detektor, naplní se na začátku červeného signálu prostor mezi křižovatkou a detektorem auty mnohem rychleji, než by tomu bylo v případě náhodně přijíždějících aut. V prvním případě bude tedy plnicí čas kratší než určitá doba, která je konstantou pro danou křižovátku, závisí na její fyzické konstrukci a dá se experimentálně určit. Nechť  $dt_0$  značí tuto konstantu,  $dt$  aktuálně naměřený plnicí čas. Potom situaci, kdy plnicí čas byl kratší než  $dt_0$  lze popsat pomocí

$$\begin{aligned} \delta &= 1 \text{ pro } dt \leq dt_0 \\ \delta &= 0 \text{ pro } dt > dt_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dále lze zavést veličiny  $\bar{\delta}_n$  a  $\bar{L}_n$  pro  $n$ -tý časový okamžik jako

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n &= a_\delta \cdot \delta_n + (1 - a_\delta) \cdot \bar{\delta}_{n-1} \\ \bar{L}_n &= a_L \cdot L_n + (1 - a_L) \cdot \bar{L}_{n-1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

vyhlazením průběhů charakteristiky  $\delta$  a délek kolon  $L$  pomocí exponenciálního zapomínání přes sledované časové okamžiky  $t_1$  až  $t_n$ . Přitom  $a_\delta$  a  $a_L$  jsou vhodně zvolené konstanty z intervalu  $(0,1)$ . Ukazuje se, že existuje souvislost mezi frekvencí jevu, kdy  $\delta = 1$  a délkou kolony, neboť závislost veličiny  $\bar{L}_n$  na  $\bar{\delta}_n$  lze poměrně dobře aproximovat přímkou

$$\bar{L}_n = m \cdot \bar{\delta}_n \quad (2.30)$$

kde  $m$  je koeficient získaný lineární regresí. Experimenty ukazují, že se tento koeficient musí stanovit pro každý detektor zvlášť. Není ovšem nutné ho pro každý detektor napočítávat dopředu. Za určitých podmínek<sup>16</sup> je možné, aby metoda sama vhodně upravovala hodnotu koeficientu  $m$  podle aktuální dopravní situace.

Princip úpravy spočívá v následující myšlence. Ať  $q_n$  značí počet vozidel, které opustily křižovatku během intervalu  $(t_{n-1}, t_n)$ . Pokud pro časový okamžik  $t_n$  je  $\delta_n = 1$ , existuje velká pravděpodobnost, že auta, která naplnila prostor mezi detektorem a křižovatkou, byla součástí skupiny vozidel přesouvající se v rámci kolony. V tom případě však musela tato skupina čítat nejméně  $q_n$  vozidel. Pro  $L_{av}$  průměrný počet vozidel mezi křižovatkou a detektorem musí platit

$$L_n \geq L_{av} + q_n \quad (2.31)$$

Tato nerovnost obsahuje další informaci o délce kolony, která může ale nemusí být v souladu s rovnicí 2.30. Koeficient  $m$  se pak počítá ze vzorce

$$m_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (2.32)$$

kde se v případě neshody obou vztahů 2.30 a 2.31 klade

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} \cdot (k-1) + (L_{av} + q_n) \cdot \bar{\delta}_n}{k} \\ b_n &= \frac{b_{n-1} \cdot (k-1) + \bar{\delta}_n^2}{k} \end{aligned} \quad (2.33)$$

V případě shody se ponechává  $a_n = a_{n-1}$  a  $b_n = b_{n-1}$ , tedy koeficient  $m$  zůstává beze změny. Přitom  $k$  je vhodně zvolená konstanta, udávají se dobré výsledky pro hodnotu  $k = 100$ .

Další využití metody spočívá v možnosti odhadovat saturační tok křižovatkou, tedy maximální množství vozidel které může křižovatkou za daný čas projet. K odstranění výchylek ve vstupních datech a zahrnutí pouze těch odhadů u kterých je jisté, že kolona nestihne během jednoho zeleného signálu projet křižovatkou celá, je pak pro tento účel vhodné použít některý druh filtrace, například Kalmanův filtr<sup>17</sup>, nebo některé jeho modifikace. Výjimečné dopravní situace a poruchy plynulosti dopravy způsobené náhodnými vlivy se pak dají sledovat pomocí měření dob obsazenosti během zeleného signálu a

<sup>16</sup>Pokud jsou měřeny počty vozidel, které odjely z křižovatky během předchozího časového intervalu.

<sup>17</sup>Více o tomto filtru se lze dočíst například v [7] nebo [8].

porovnáváním, do jaké míry souhlasí s hodnotami odpovídajícími odhadnutým délkám kolon.

Způsob odhadování délky kolon používaný touto metodou je zajímavý zejména svou nenáročností na vstupní data a dále pak schopností odhadovat délku kolony několikrát převyšující vzdálenost detektoru od křižovatky. Naneštěstí jsme neměli možnost otestovat metodu na vlastních datech, neboť bylo provedeno příliš málo ručních měření plnicích časů. Myšlenka této metody nebyla dále rozvíjena také z důvodu, že ačkoli se automatické měření plnicích časů jeví jako nepříliš složitá záležitost, staví se firmy spravující techniku týkající se detektorů a jejich monitorování k možnosti přeprogramovat řadiče detektorů k poskytování nových veličin negativně.

## 3 Závěr

Tato práce pojednává o užším oboru dopravní problematiky, souvisejícím s řízením provozu na světelně řízených křižovatkách pomocí systému mikroregionů, pro který je odhad aktuální délky kolony na křižovatce nezbytným. Je v ní popsáno několik principiálně odlišných způsobů, jakými se lze k problému odhadování délky kolony stavět. Přitom u každého z nich jsou uvedeny jeho klady i zápory, kde jako kritérium k hodnocení sloužila nejen přesnost metody při testování na reálných datech, ale také náročnost na měřená data, s ohledem na systém měření veličin dopravního proudu používaný v Praze.

K účelu odhadování délky kolony pouze ze znalosti obsazenosti a intenzity v 90 sekundových intervalech<sup>18</sup> byly postupně navrženy tři metody. První z nich byla metoda založená na lineární regresi. Jak už plyne přímo z jejího principu, tato metoda nedokáže zachytit nelineární část závislosti délky kolony na měřených veličinách obsazenosti a intenzity. Může být ovšem použita sice jako poněkud hrubý, zato však velmi nenáročný způsob odhadu délky kolony. Popřípadě ji můžeme s výhodou využít v případech, kdy máme k dispozici měření také jiných veličin a snažíme se ověřit, zda tato nová měření přinášejí nějakou informaci o délce kolony.

Druhá metoda (popsaná v kapitole 2.2.4) neodhaduje přímo délku kolony, ale její pozici vůči detektoru. K tomu využívá modelu vycházejícího z představy o předpokládané době stání vozidla nacházejícího se v koloně nad detektorem, v poměru k délce zvoleného časového intervalu a v závislosti na délce červeného signálu. Jak bylo naznačeno už v 2.2.4, výsledky této metody by se mohli ještě zpřesnit, pokud by bylo k dispozici dostatečné množství měření k určení parametrů použitého modelu, které byly prozatím zanedbány. Částečnou nevýhodou této metody je ovšem potřeba znalosti délky červeného signálu, která není běžně měřená automaticky a kterou by bylo nutno v případě, že by ji nebylo možno do automatického měření zahrnout, nějakým způsobem odhadovat.

Třetí metoda (kapitola 2.2.3) opět odhaduje pozici kolony vůči detektoru, v tomto případě na základě mezní obsazenosti, již se pokouší odhadnout na základě vytvoření parametrického modelu, jehož parametr je pak odhadován metodou maximální věrohodnosti. Tato metoda je velmi nenáročná na vstupní data, neboť využívá pouze hodnoty obsazenosti. Zároveň, jak se ukazuje podle výsledků testování na reálných datech, dává velice spolehlivé výsledky.

---

<sup>18</sup>To jsou jediné automaticky měřené veličiny systémem používaným v Praze.

Dalším cílem do budoucna je zpřesnit odhady délky kolony pomocí vytvoření vhodného modelu, do něhož budou vhodným způsobem zahrnuty všechny měřené veličiny<sup>19</sup>. Dále by bylo možné pokusit se, vzhledem k nelineárním vztahům mezi používanými veličinami, nahradit často používaný lineární Kalmanův filtr některou z nelineárních metod, například Bayesovským “bootstrap” filtrem.

---

<sup>19</sup>Existují studie, které ukazují, že délka kolony je závislá na všech měřeních, jež máme k dispozici a jejich nevyužitím se připravujeme o informaci v nich obsaženou

## 4 Přílohy

Table 4.1: Vstupní hodnoty a výsledky odhadu metody založené na porovnávání obsazenosti detektorů s podílem délky červeného signálu k celkové délce intervalu

průměrná obsazenost [%]	podíl červeného signálu [%]	průměrná délka kolony [m]	správný odhad?
35,5	38,3	50,0	ne
38,6	48,9	6,0	ano
34,3	49,2	14,8	ano
26,8	53,9	26,2	ano
48,0	51,9	23,8	ano
34,6	48,3	2,3	ano
36,8	60,8	28,3	ano
73,1	60,0	83,3	ano
67,5	56,9	68,7	ano
65,5	54,2	67,5	ano
36,3	61,1	16,2	ano
51,9	55,8	47,7	ne
36,3	68,9	78,8	ne
48,4	51,1	43,1	ne
54,4	56,4	40,0	ano
33,8	51,7	34,1	ano
30,8	58,1	11,9	ano
20,9	52,8	17,7	ano
34,4	55,0	59,9	ne
65,1	49,4	60,5	ano
38,1	61,1	11,0	ano
20,1	46,4	6,3	ano



Table 4.2: Sestupně seřazené obsazenosti prodlužovacích detektorů a jim odpovídající délky kolon ze středního měření

obsazenost [%]	délka kolony [m]	obsazenost [%]	délka kolony [m]
87,5	880	63	470
84,5	460	62,5	220
84	815	62,5	655
82,5	550	62,5	555
82	330	62,5	500
82	330	62,5	505
81	140	62,5	750
79,5	825	62	475
79	560	62	55
79	655	61,5	500
78,5	140	61,5	550
78,5	660	61,5	185
78	430	61	880
78	895	61	900
78	550	61	415
77,5	185	61	430
77	85	60	470
77	430	60	825
76,5	400	60	850
76,5	490	59,5	510
76	550	59,5	540
76	530	59,5	395
76	775	58,5	420
75,5	675	58	360
75,5	815	58	465
75	380	57,5	900
74	270	57	650
74	450	56	15
73	580	55,5	330
73	400	55	80
73	850	55	690
72	430	55	400
71,5	550	54	80
71,5	230	54	430
71	350	54	390
71	635	53,5	650
70,5	200	53,5	120
70,5	550	53	560
70,5	630	53	760
70,5	670	51	870
69,5	215	49,5	585
69,5	415	49,5	950
69	400	49	530
68,5	285	48	60
68,5	200	48	375
68,5	500	48	510
68	230	47	70
67,5	415	45,5	180
67	750	45,5	520
66,5	505	45,5	305
66,5	490	43	65
66,5	650	42,5	860
66,5	405	41	50
66,5	850	41	30
66	220	39,5	150
66	605	37	0
65,5	230	36,5	0
65,5	600	36	10
65,5	780	34,5	90
65	650	34	20
65	530	29	50
63,5	550	29	40
63	600	23	26
63	830	15,5	20

Table 4.3: Sestupně seřazené obsazenosti strategických detektorů a jim odpovídající délky kolon ze středního měření

obsazenost [%]	délka kolony [m]	obsazenost [%]	délka kolony [m]
85	880	45,5	420
67,5	900	45,5	185
64,5	655	45	815
63,5	285	44,5	415
63	550	44,5	460
62	490	44	230
62	825	43,5	185
61	815	43,5	230
61	895	43,5	510
60,5	330	43,5	405
59	530	43,5	650
59	550	43	360
58,5	760	43	750
57,5	330	43	380
57,5	550	42,5	140
57,5	550	42,5	270
57	550	42,5	850
56,5	200	42	415
54	470	42	825
53,5	775	41,5	675
53	605	41,5	120
53	400	41	500
53	830	41	400
53	430	40,5	540
52,5	375	40	655
52,5	560	40	850
52,5	415	39,5	505
52	555	39	630
52	500	39	530
51,5	660	38,5	140
51,5	860	38	330
51,5	400	38	950
51,5	430	36,5	880
50,5	430	35	490
50,5	650	34,5	780
50,5	580	34	220
50,5	690	33,5	520
50	350	33,5	530
50	670	33,5	55
50	750	31,5	215
49,5	550	31	560
49,5	585	30	465
49	650	23,5	430
49	475	22,5	200
49	900	18	70
48,5	230	16,5	15
48,5	600	14	65
48,5	390	12	40
48,5	395	11,5	85
48	430	10	180
48	400	10	50
47,5	505	9,5	80
47,5	450	8,5	80
47,5	470	8,5	10
47,5	500	8,5	150
47,5	850	8,5	0
47	650	8	50
47	635	8	60
47	305	8	26
46,5	510	8	0
46	220	8	20
46	600	8	90
46	870	6	30
45,5	550	5,5	20

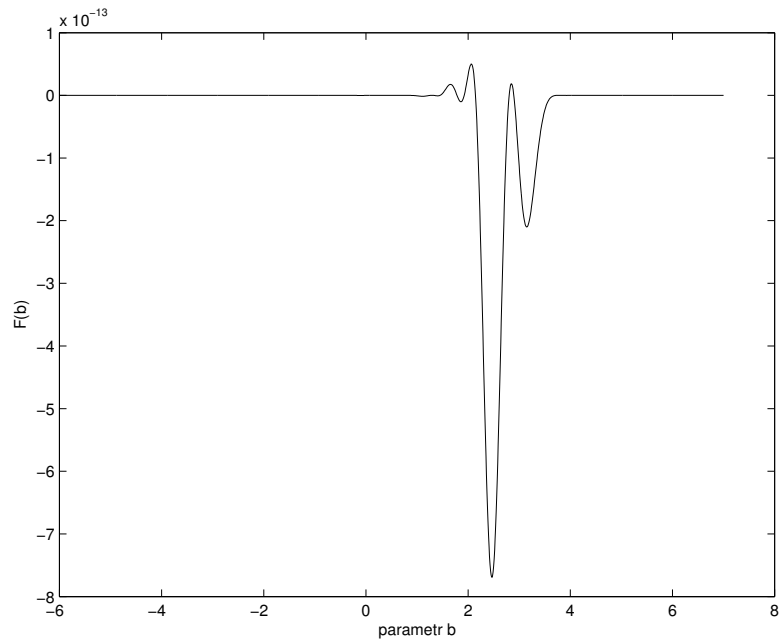


Figure 4.6: Závislost sdružené hustoty pravděpodobnosti na parametru  $b$ , data z úterý, prodlužovací detektory

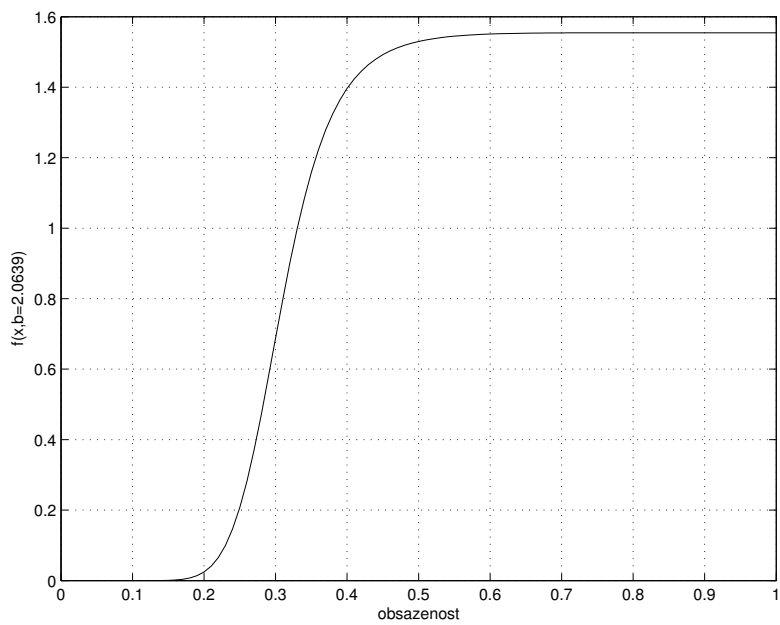


Figure 4.7: Průběh pravděpodobnosti jevu, že kolona končí při dané obsazenosti za detektorem, data z úterý, prodlužovací detektory

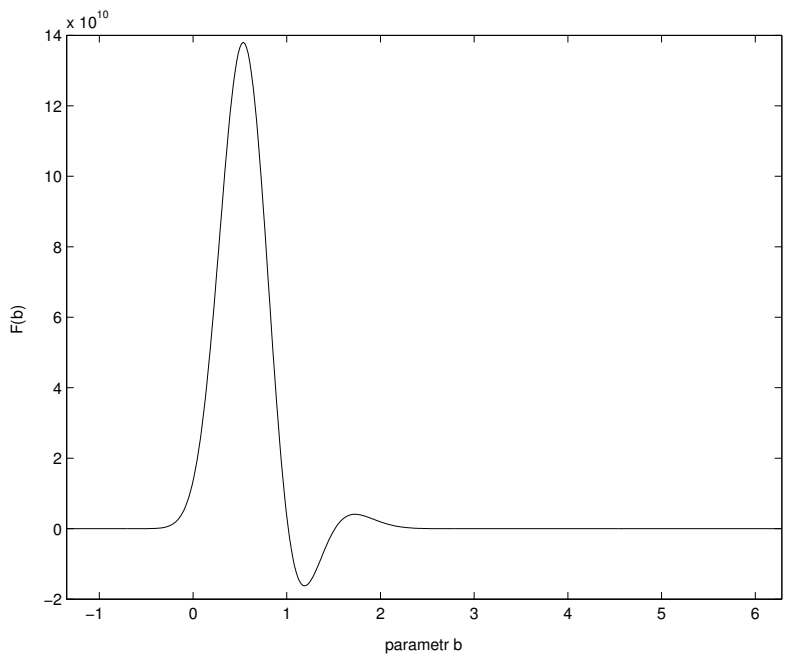


Figure 4.8: Závislost sdružené hustoty pravděpodobnosti na parametru  $b$ , data ze středy, prodlužovací detektory

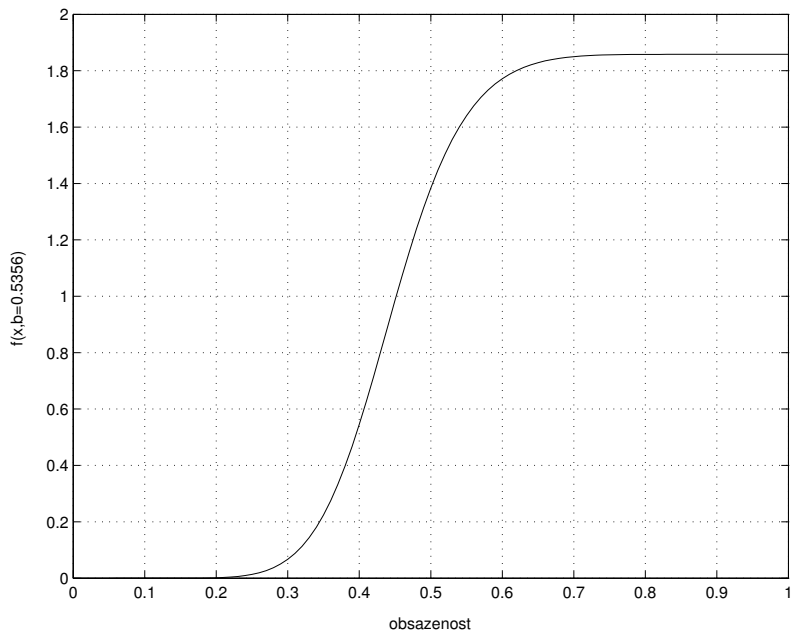


Figure 4.9: Průběh pravděpodobnosti jevu, že kolona končí při dané obsazenosti za detektorem, data ze středy, prodlužovací detektory

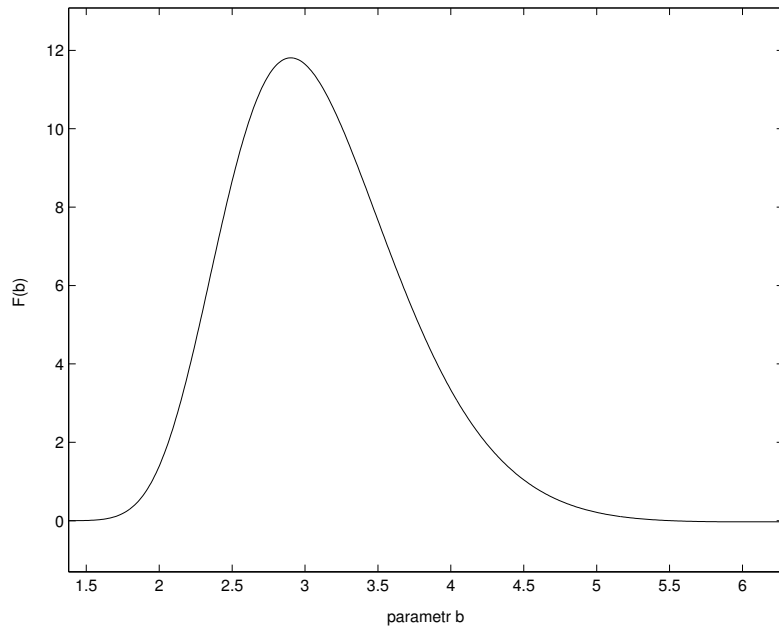


Figure 4.10: Závislost sdružené hustoty pravděpodobnosti na parametru  $b$ , data ze středy, strategické detektory

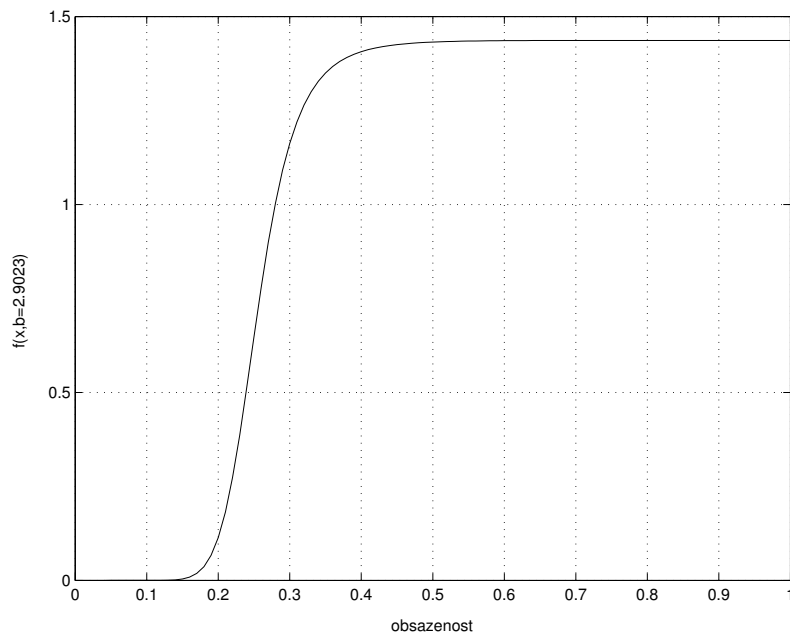


Figure 4.11: Průběh pravděpodobnosti jevu, že kolona končí při dané obsazenosti za detektorem, data ze středy, strategické detektory

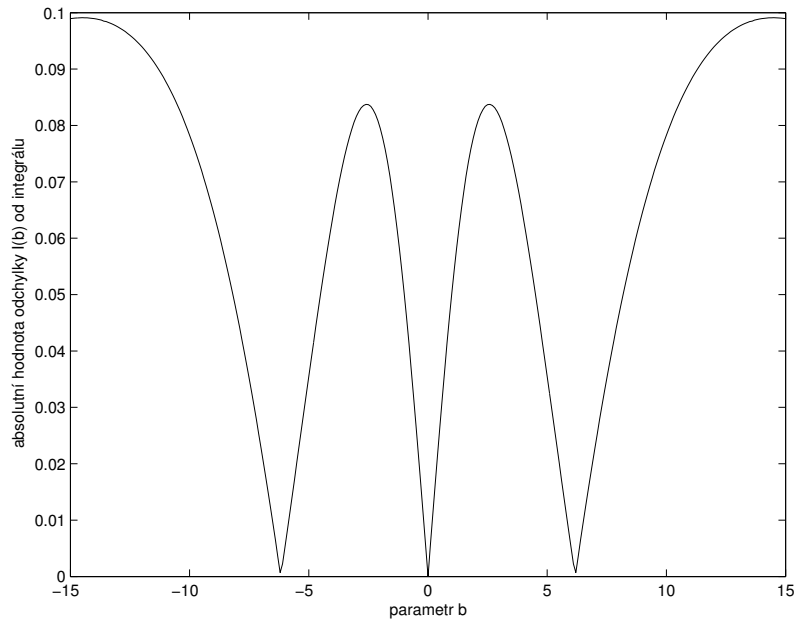


Figure 4.12: Absolutní hodnota odchylky funkce  $I(b)$  od integrálu  $\int_0^1 (1 + \tanh [b + 3(\tan(\pi x - \frac{\pi}{2}))]) dx$

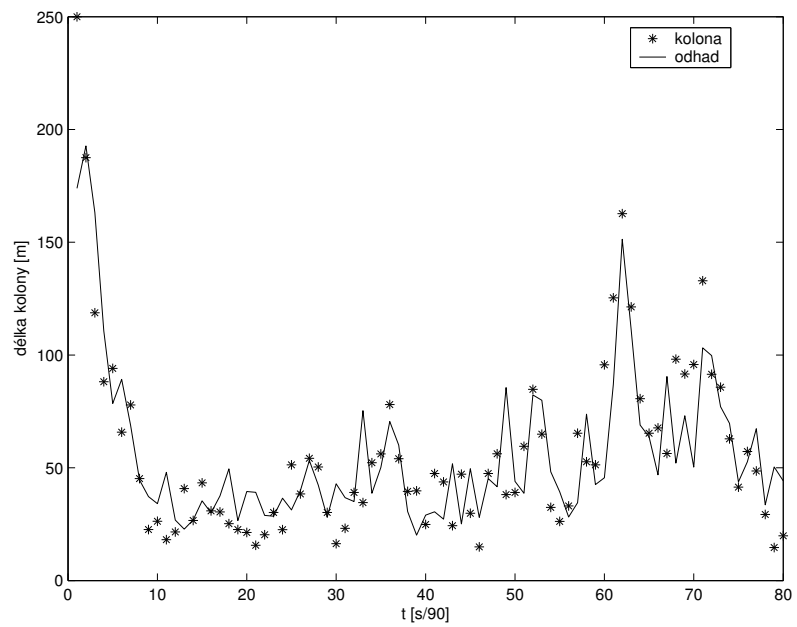


Figure 4.13: Pondělí: skutečná a odhadnutá délka kolony

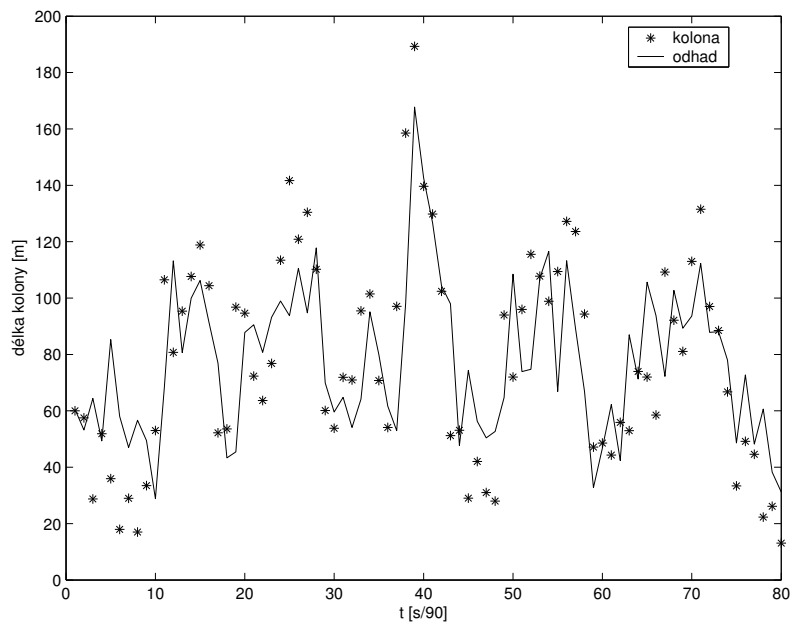


Figure 4.14: Pátek: skutečná a odhadnutá délka kolony

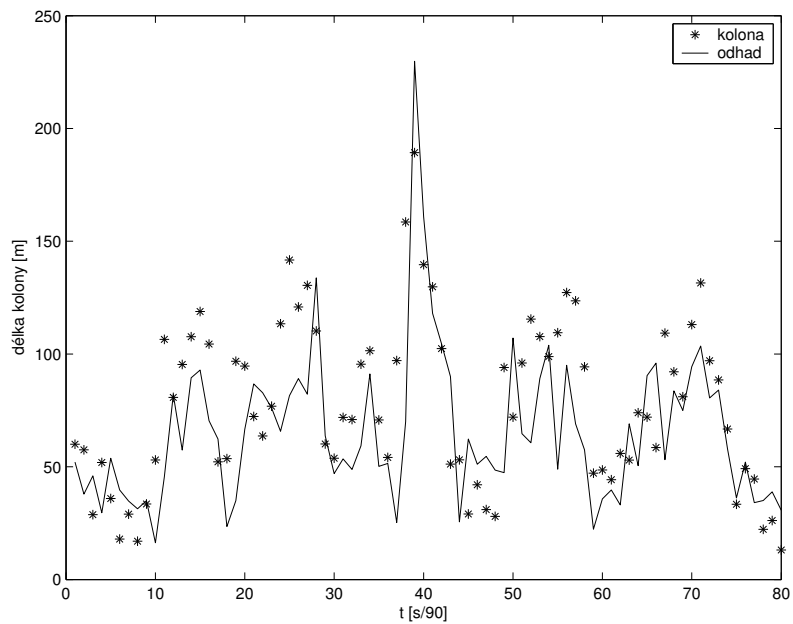


Figure 4.15: Pátek: skutečná a odhadnutá délka kolony za pomocí parametrů “naučených” na pondělku

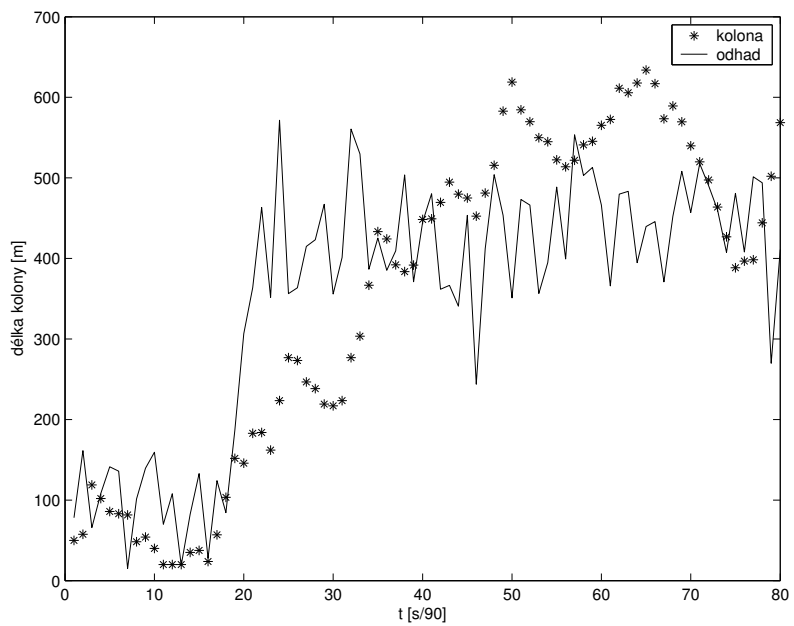


Figure 4.16: Středa: skutečná a odhadnutá délka kolony

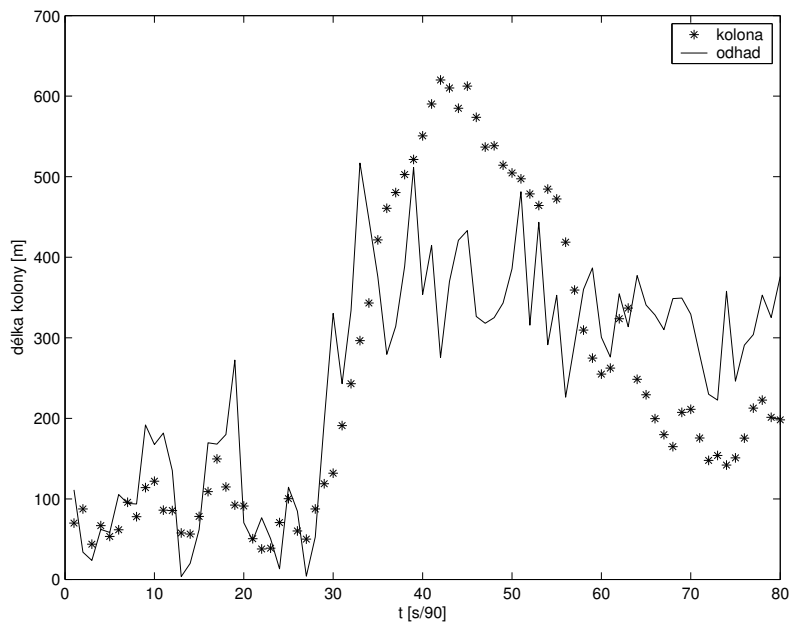


Figure 4.17: Čtvrtek: skutečná a odhadnutá délka kolony



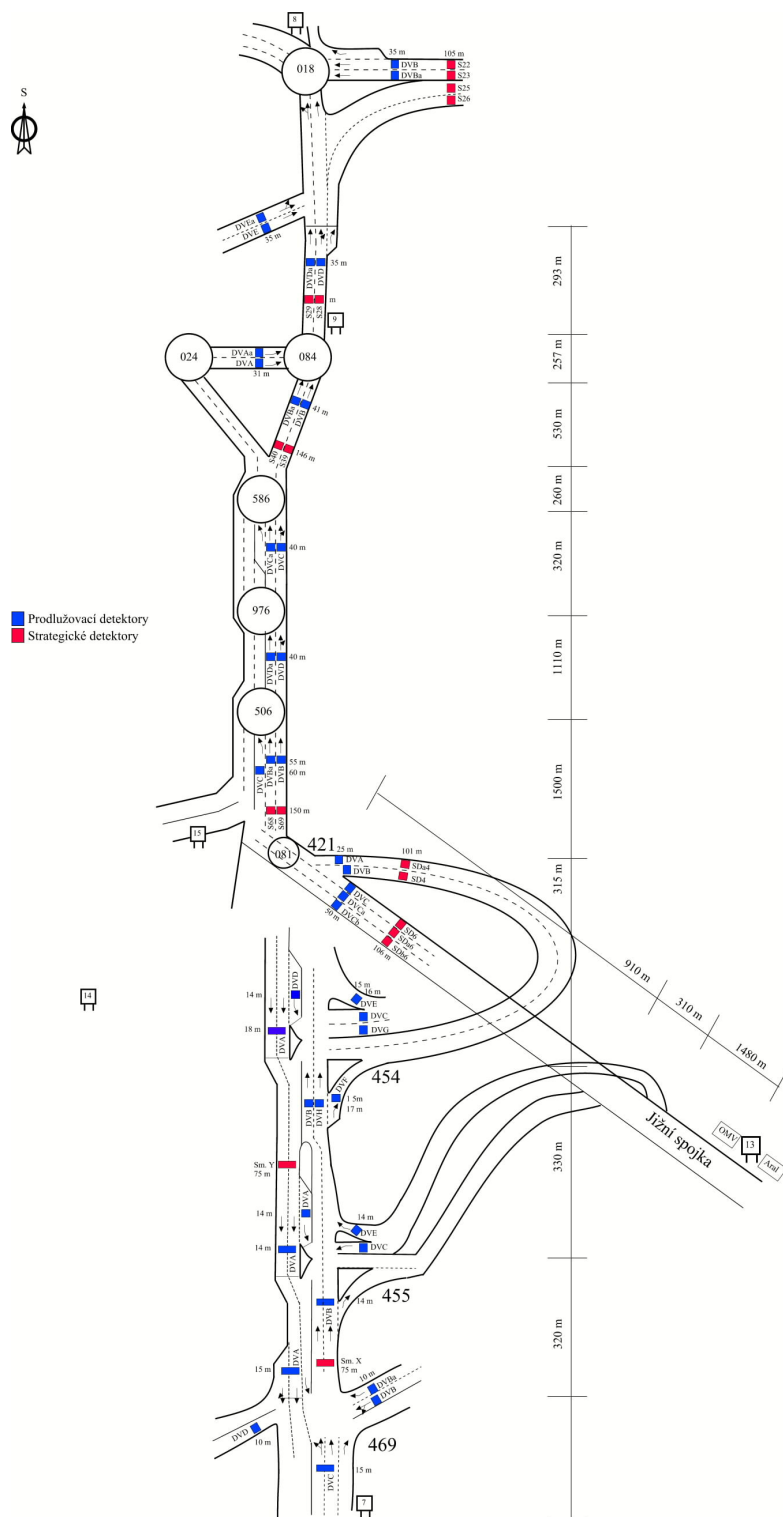


Figure 4.18: Polohopis křižovatky 084

# Bibliography

- [1] Příbyl P., Mach R.: Řídicí systémy silniční dopravy, vydavatelství ČVUT, Praha, 2003
- [2] Anděl J.: Matematická statistika, SNTL, Praha, 1978
- [3] Anděl J.: Statistické metody, MATFYZPRESS, Praha, 1998
- [4] Rao C. R.: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, Academia, Praha, 1978
- [5] Květoň K., Militký J.: Nelineární regrese, ČSVTS ČVUT, Praha, 1984
- [6] Mück J.: “Using detectors near the stop-line to estimate traffic flows”, TEC, no. December, pp. 429–434, 2002
- [7] Peterka V.: “Bayesian approach to system identification”, in Trends and progress in system identification (P. Eikhoff ed.), pp. 239–304, Pergamon Press, Oxford, 1981
- [8] Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, vydavatelství ČVUT, Praha, 1996
- [9] Příbyl P., Svítek M.: Inteligentní dopravní systémy, BEN – technická literatura, Praha, 2001
- [10] Jirava P., Slabý P.: Pozemní komunikace 10 – dopravní inženýrství, vydavatelství ČVUT, Praha, 1997
- [11] Kratochvílová J., Nagy I.: “Bibliographic search for optimization methods of signal traffic control”, Tech. Rep. 2081, UTIA AV ČR, Praha, 2003
- [12] Kratochvílová J., Nagy I.: “Traffic control of microregion”, in CMP’04: Multiple participant decision making; Theory, algorithms, software and applications, Andrýsek J., Kárný M., Kracík J., Eds., Adelaide, May 2004, pp. 161–171, Advanced knowledge international
- [13] Kratochvílová J., Nagy I.: “Model dopravní mikrooblasti”, Automatizace, vol. 47, no. 12, pp. 752 – 758, 2004

- [14] Kratochvílová J., Nagy I.: “Traffic model of a microregion”, in IFAC world congress, Preprints, IFAC, Ed. IFAC, Praha, 2005
- [15] Kratochvílová J., Nagy I.: “Lokální řízení městské dopravy”, Tech. Rep 2101, UTIA AV ČR, Praha, 2004
- [16] Kratochvílová J., Nagy I.: “Sestavení obecné metodologie pro zadávání lineárního modelu dopravní mikrooblasti”, Tech. Rep. 2105, UTIA AV ČR 2004

## 5 Poděkování

Práce byla podporována projektem ministerstva dopravy 1F43A/003/120 a grantem MŠMT 1M0572.