Akademie věd České republiky
Ústav teorie informace a automatizace

Academy of Sciences of the Czech Republic
Institute of Information Theory and Automation

RESEARCH REPORT

JAN SEIDLER:

Vybrané kapitoly ze stochastické analysy

No. 2270 December 2009

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic
Fax: (+420) 286 890 378 E-mail: utia@utia.cas.cz

Předmluva

Předkládaný text pokrývá látku zařazenou do přednášky "Stochastické diferenciální rovnice", kterou jsem v uplynulých patnácti letech opakovaně konal. Částečně se dotýká i poznatků vykládaných v přednáškách "Markovské procesy" a "Vybrané partie ze stochastické analýzy".

Text je určen posluchačům, kteří již úvodní kurs stochastické analysy absolvovali; charakter výkladu je dán vazbou na přednášku. Nejde o systematickou, o úplnost usilující učebnici stochastické analysy. Cílem přednášky o stochastických diferenciálních rovnicích je poskytnout posluchačkám a posluchačům základní poučení o vybraných pokročilejších technikách a výsledcích stochastické analysy, přičemž otázky existence a jednoznačnosti řešení stochastických diferenciálních rovnic tvoří kostru výkladu. Důkladně je probrána Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost, existence řešení rovnic s lokálně lipschitzovskými koeficienty a markovská vlastnost těchto řešení, formule variace konstant pro lineární rovnice a její elementární důsledky. Dosti zevrubně jsou představeny i exponenciální martingaly a různé typy representace spojitých lokálních martingalů pomocí Wienerova procesu. Vše je tedy připraveno pro theorii slabých řešení, již však z důvodů rozsahu nebylo možno do textu zařadit. Jádrem výkladu jsou kapitoly 0–3, látka z ostatních kapitol byla pro přednášku vybírána s ohledem na předběžné znalosti posluchaček a posluchačů a též podle obsahu úvodního kursu v příslušném roce. Kapitoly 4–7 jsou proto pojaty jako v podstatě na sobě nezávislé, i za cenu jisté redundance informací. Do apendixů byla odsunuta látka, která s vlastním obsahem přednášky nesouvisí, je však pro pochopení důkazů podstatná a přitom se nelze spoléhat, že ji studenti spolehlivě zvládli.

Bylo by výhodou, kdyby toto skriptum bezprostředně navazovalo na učební text k úvodní přednášce, který chystá pan kolega Hlubinka; bohužel tento text zatím existuje jen v rovině intencí.

Koncepce mé přednášky o stochastických diferenciálních rovnicích se formovala pod vlivem následujících znamenitých knih:

A. Friedman: *Stochastic differential equations and applications, Vol. 1*, Academic Press, New York 1975,

I. Karatzas, S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988,*

N. V. Krylov: *Introduction to the theory of diffusion processes*, American Mathematical Society, Providence 1995.

S prospěchem jsem nahlížel i do učebnice

M. Meyer: *Continuous stochastic calculus with applications to finance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2001,

*Druhé vydání, se změnami jen minimálními, vyšlo v témže nakladatelství v roce 1991.

jež ovšem stochastickým diferenciálním rovnicím *sensu stricto* není věnována. V uvedených knihách lze načerpat hlubší a soustavnější poučení o většině problémů ve skriptu probíraných, jakož i nalézti odkazy na relevantní učebnicovou a monografickou literaturu i časopisecké publikace. V textu literární reference většinou neuvádím, odkaz je poskytnut jen tam, kde užívám či uvádím nedokázaný výsledek, anebo v těch nečetných případech, kdy je těsně sledován cizí výklad.

Česky psaná literatura o stochastické analyse je nehojná a tomu odpovídá i rozkolísanost české terminologie. Pro "optional sampling" pak – pokud vím – vůbec český ekvivalent neexistuje a žádný vhodný mne nenapadl, s nechutí jsem tedy následoval usus a užívám anglický termín v českém textu.

Předběžné znalosti nutné k četbě textu zahrnují základní poznatky o Wienerově procesu a o spojitých martingalech (včetně Doob-Meyerova rozkladu) a theorii stochastické integrace se spojitým martingalem jako integrátorem. Znalost Itôvy formule není formálně nutná, ale je velmi užitečná. V ilustračních příkladech se objeví Girsanovova věta, ale v základních partiích textu není užívána.**

Poděkování. Kolegům Danielu Hlubinkovi, Tomáši Hoskovcovi a Martinu Ondrejátovi jsem zavázán za četné konsultace. Martina Hofmanová a Jan Kaluža pečlivě přečetli starší verse textu a jejich připomínky mi pomohly uvarovat se mnohých nedopatření.

Při práci na skriptu jsem byl podporován grantem GA ČR 201/07/0237.

**Čtenářka nebo čtenář neznalí Girsanovovy věty ovšem postrádají motivaci ke studiu kapitoly 7 věnované exponenciálním martingalům.

Obsah

0. Průpravné výsledky

<u>A. Názvosloví.</u> Dohodněme se nejprve na terminologii vztahující se k náhodným procesům.

Buď $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ pravděpodobnostní prostor, $(E, \mathscr{E})$ měřitelný proces. E-hodnotový náhodný proces je soubor $X = (X_t)_{t \geq 0} = (X_t;\ t \geq 0)$ $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-měřitelných funkcí $X_t : \Omega \longrightarrow E$. Je-li to vhodné, nahlížíme na náhodný proces X též jako na funkci $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow E$ či jako na soubor trajektorií $X_{.}(\omega) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$, $\omega \in \Omega$. Není-li E specifikováno, rozumíme $E = \mathbb{R}$. Místo o $\mathbb{R}^n$-hodnotovém procesu hovoříme zpravidla o n-dimensionálním náhodném procesu. Proces Y se nazývá modifikace náhodného procesu X, jestliže $\mathsf{P}\{X_t \neq Y_t\} = 0$ pro každé $t \geq 0$. Řekneme, že procesy X a Y jsou nerozlišitelné, pokud $\mathsf{P}\{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ pro všechna } t \geq 0\} = 1$. Pravíme, že proces X s hodnotami v metrickém prostoru E je spojitý (zprava spojitý), pokud jsou P-skoro všechny jeho trajektorie spojité (respektive zprava spojité) funkce z $\mathbb{R}_+$ do E. Jsou-li X a Y zprava spojité procesy a Y je modifikace X, pak jsou X a Y nerozlišitelné.

Filtrací v $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ se nazývá neklesající systém $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ sub-σ-algeber $\mathscr{F}$; klademe $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathscr{F}_t$. O čtveřici $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ budeme hovořit jako o stochastické basi nebo filtrovaném pravděpodobnostním prostoru. Řekneme, že filtrace $(\mathscr{F}_t)$ splňuje předpoklad (UC) (z anglického "usual conditions"), jestliže

$$\mathscr{F}_0 \supseteq \{N \in \mathscr{F}_\infty;\ \mathsf{P}(N) = 0\}$$

a $(\mathscr{F}_t)$ je zprava spojitá, to jest

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} \equiv \bigcap_{v > t} \mathscr{F}_v \quad \text{pro každé } t \geq 0.$$

K libovolné filtraci $(\mathscr{F}_t)$ lze vytvořit *obohacenou*[1] filtraci $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$, definovanou

$$\tilde{\mathscr{F}}_t = \bigcap_{v > t} \sigma(\mathscr{F}_v \cup \mathbf{N}) \quad \text{pro } t \geq 0,$$

kde $\mathbf{N} = \{N \in \mathscr{F}_\infty;\ \mathsf{P}(N) = 0\}$, jež předpoklad (UC) jistě splňuje.

Náhodný proces X s hodnotami v měřitelném prostoru $(E, \mathscr{E})$ se nazývá

(i) $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný, jestliže X_t je $\mathscr{F}_t$-měřitelná funkce pro každé $t \geq 0$,

(ii) měřitelný, pokud je funkce

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow E,\ (s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}$-měřitelná,

(iii) $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný, pokud je pro každé $t \geq 0$ funkce

$$[0, t] \times \Omega \longrightarrow E,\ (s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

$\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$-měřitelná.

[1] Anglicky "augmented", český název není příliš ustálen.

Je-li filtrace jasná z kontextu, hovoříme prostě o progresivní měřitelnosti. Položme

$$\mathscr{M} = \big\{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty;\ \mathbf{1}_A \text{ je progresivně měřitelný proces}\big\}.$$

Potom je $\mathscr{M}$ σ-algebra (zvaná σ-algebra progresivně měřitelných množin) a $\mathbb{R}^d$-hodnotový proces X je progresivně měřitelný, právě když je zobrazení $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$ $\mathscr{M}$-měřitelné. Připomeňme, že d-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný proces, jehož všechny trajektorie jsou zprava spojité, je progresivně měřitelný.

V dalším budeme pracovat takřka výhradně s filtracemi splňujícími (UC).[2] Příjemným důsledkem předpokladu (UC) je například $(\mathscr{F}_t)$-adaptovanost libovolné modifikace $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaného procesu a možnost bez újmy na obecnosti předpokládat, že všechny trajektorie spojitého (respektive zprava spojitého) procesu jsou spojité (zprava spojité).

Umluvme se, že d-dimensionální proces $M = (M^i)_{i=1}^d$ budeme nazývat martingal (lokální martingal, L^2-martingal), je-li každý z procesů M^i, $1 \le i \le d$, martingal (respektive lokální martingal, L^2-martingal).

Náhodný proces W nazýváme Wienerův proces (Brownův pohyb), jestliže

(i) $W(0) = 0$ P-skoro jistě,
(ii) W má spojité trajektorie P-skoro jistě,
(iii) W má nezávislé přírůstky, tj. $W(t_n) - W(t_{n-1}), \dots, W(t_2) - W(t_1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny, kdykoliv $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,
(iv) pro všechna $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t > s$, má náhodná veličina $W(t) - W(s)$ rozdělení $\mathscr{N}(0, t-s)$.

n-dimensionálním Wienerovým procesem rozumíme n-tici $W = (W^i)_{i=1}^n$ nezávislých Wienerových procesů. Je-li $(\mathscr{F}_t)$ filtrace, nazveme Wienerův proces W $(\mathscr{F}_t)$-Wienerovým procesem, pokud je $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný a $W_t - W_s$, $\mathscr{F}_s$ jsou nezávislé pro všechna $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t > s$. Každý Wienerův proces je zřejmě $(\mathscr{F}_t^W)$-Wienerův, kde $\mathscr{F}_t^W$ je obohacená kanonická filtrace procesu W. (Kanonická filtrace je minimální filtrace, vůči níž je proces adaptovaný, tedy pro proces W je to filtrace $\big(\sigma(W_r,\ r \le t)\big)_{t \ge 0}$.)

Všechny zavedené pojmy lze s očividnými modifikacemi používat i pro procesy indexované jen vhodnými podmnožinami $\mathbb{R}_+$.

Na d-dimensionální procesy můžeme snadno rozšířit pojem střední hodnoty, či obecněji Lebesgueova integrálu. Je-li $(\Xi, \mathscr{G}, \mu)$ prostor s mírou a $f = (f_1, \dots, f_n)^* \in L^1(\mu; \mathbb{R}^d)$ (označení je zavedeno v apendixu A), pak

$$\int_\Xi f \,\mathrm{d}\mu = \left(\int_\Xi f_i \,\mathrm{d}\mu\right)_{i=1}^d,$$

tedy (Lebesgueův) integrál $\mathbb{R}^d$-hodnotové funkce je definován "po složkách".

[2] Ve zdrcující většině případů nebude předpoklad (UC) podstatný pro platnost výsledků, ale značně zjednoduší důkazy.

B. Kvadratická variace vícedimensionálních martingalů. Umluvme se, že všechny vyšetřované procesy budou definovány na libovolné pevně zvolené stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ splňující (UC); speciálně, hovoříce o martingalech budeme mínit martingaly vzhledem k $(\mathscr{F}_t)$. σ-algebru $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelných množin budeme značit $\mathscr{M}$.

Nechť je $M = (M^i)_{i=1}^d$ spojitý d-dimensionální lokální martingal, $M_0 = 0$. Položme[3]

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle = \big(\langle M^i, M^j \rangle\big)_{1 \le i,j \le d}.$$

$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ je zřejmě spojitý adaptovaný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces s trajektoriemi lokálně konečné variace P-skoro jistě, $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_0 = 0$. Pro proces $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ se často užívá název *tensorová kvadratická variace*, někteří autoři ho značí $\langle M, M \rangle$. Přímo z definice plyne, že $MM^* - \langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ je $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový spojitý lokální martingal. Je-li nadto M L^2-martingal, pak je $MM^* - \langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ martingal v $\mathbb{M}_{d\times d}$ a

$$\mathsf{E} M_t M_t^* = \mathsf{E} \langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t, \quad t \ge 0.$$

Ukažme, že P-skoro jistě platí: $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M \rangle\!\rangle_s$ je symetrická positivně semidefinitní matice, kdykoliv $t \ge s \ge 0$. Symetrie je zřejmá, positivní semidefinitnost plyne z následující úvahy: pro každé $z \in \mathbb{R}^d$ je proces $M^{(z)} = \langle z, M \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^d z_i M^i$ reálný spojitý lokální martingal, trajektorie jeho kvadratické variace $\langle M^{(z)} \rangle$ jsou P-skoro jistě neklesající, což implikuje

$$\begin{aligned} 0 \le \langle M^{(z)} \rangle_t - \langle M^{(z)} \rangle_s &= \Big\langle \sum_{i=1}^d z_i M^i \Big\rangle_t - \Big\langle \sum_{i=1}^d z_i M^i \Big\rangle_s \\ &= \sum_{i,j=1}^d \big(\langle M^i, M^j \rangle_t - \langle M^i, M^j \rangle_s\big) z_i z_j \\ &= \big\langle \big(\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M \rangle\!\rangle_s\big) z, z \big\rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

pro všechna $t \ge s \ge 0$. Buď $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ spočetná hustá podmnožina, pak

$$\mathsf{P}\big\{\omega \in \Omega;\ \big\langle \big[\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M \rangle\!\rangle_s\big](\omega) z, z \big\rangle_{\mathbb{R}^d} \ge 0 \ \ \forall t \ge s \ge 0,\ \forall z \in Z\big\} = 1,$$

odtud naše tvrzení již plyne. Speciálně, $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t$ je symetrická positivně semidefinitní matice pro všechna $t \ge 0$ P-skoro jistě.

Položme

$$\langle M \rangle = \operatorname{Tr} \langle\!\langle M \rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^d \langle M^i \rangle.$$

[3] Výsledky vztahující se ke kvadratické variaci reálných martingalů jou připomenuty v apendixu C.

Proces $\langle M\rangle$ je spojitý a adaptovaný, P-skoro jistě má neklesající trajektorie a $\langle M\rangle_0 = 0$; nazývá se *kvadratická variace* lokálního martingalu M. Proces $\|M\|^2 - \langle M\rangle$ je lokální martingal, protože

$$\|M\|^2 - \langle M\rangle = \sum_{i=1}^{d}\big(|M^i|^2 - \langle M^i\rangle\big)$$

a $|M^i|^2 - \langle M^i\rangle$ jsou lokální martingaly podle definice $\langle M^i\rangle$. Pro L^2-martingal M je $\|M\|^2 - \langle M\rangle$ dokonce martingal a $\mathsf{E}\|M_t\|^2 = \mathsf{E}\langle M\rangle_t$, $t \geq 0$. Speciálně je tomu tak, pokud $\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty < \infty$; v takovém případě jsou navíc M a $\|M\|^2 - \langle M\rangle$ stejnoměrně integrovatelné martingaly, jak ukazuje lemma C.2.

Povšimněme si, že $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{M}_{d\times d})$ P-skoro jistě, právě když $\langle M\rangle \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě. Jedna implikace je zřejmá, předpokládejme tedy, že $\langle M\rangle$ má lokálně absolutně spojité trajektorie. Podle Kunita-Watanabeho nerovnosti (viz formule (C.10)) a definice $\langle M\rangle$ pro libovolná $1 \leq i, j \leq d$ platí

$$\begin{aligned}\big|\langle M^i, M^j\rangle_t - \langle M^i, M^j\rangle_s\big| &\leq \Big(\langle M^i\rangle_t - \langle M^i\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\langle M^j\rangle_t - \langle M^j\rangle_s\Big)^{1/2}\\ &\leq \langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s, \quad t \geq s \geq 0,\end{aligned}$$

P-skoro jistě, tedy lokální absolutní spojitost trajektorií $\langle M^i, M^j\rangle$ plyne přímo z definice absolutní spojitosti.

Příležitostně budeme užívat vzájemnou variaci dvou spojitých lokálních martingalů M a N v $\mathbb{R}^d$, zavedenou předpisem

$$\langle\!\langle M, N\rangle\!\rangle = \big(\langle M^i, N^j\rangle\big)_{1\leq i,j\leq d}.$$

S reálným procesem $\langle M\rangle$ se pracuje pohodlněji než s maticovým procesem $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$, proto si nyní odvodíme užitečnou representaci tensorové kvadratické variace.

Připomeňme, že funkce $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálně konečné variace je, pro libovolné pevné $T > 0$, distribuční funkcí znaménkové míry μ_f na σ-algebře $\mathscr{B}([0,T])$. Je-li f dokonce neklesající, lze μ_f uvažovat jako (obecně σ-konečnou) nezápornou míru na $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Není-li nebezpečí nejasnosti, budeme psát $\mathrm{d}f$ místo $\mathrm{d}\mu_f$. Opakovaně využijeme následující jednoduchý poznatek o znaménkových mírách.

Pozorování 0.1. *Buď $J \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní interval a ν (konečná) znaménková míra na $\mathscr{B}(J)$ taková, že $\nu(I) \geq 0$ pro každý interval $I \subseteq J$ otevřený v J. Potom je ν nezáporná míra.*

Speciálně: $\nu = 0$, jestliže $\nu(I) = 0$ pro každý interval $I \subseteq J$ otevřený v J.

Důkaz. Nechť je $\nu = \nu^+ - \nu^-$ Jordanův rozklad znaménkové míry ν. Z předpokladu pozorování ihned plyne, že $\nu(G) \geq 0$ pro každou otevřenou množinu G v J, to jest, $\nu^+(G) \geq \nu^-(G)$ pro každou otevřenou G. Konečné míry ν^+ a ν^- jsou jistě regulární,

$$\nu^+(B) = \inf\bigl\{\nu^+(G),\, G \supseteq B \text{ otevřená}\bigr\}, \quad \nu^-(B) = \inf\bigl\{\nu^-(G),\, G \supseteq B \text{ otevřená}\bigr\}$$

pro každou $B \in \mathscr{B}(J)$. Odtud $\nu^+(B) \geq \nu^-(B)$, $B \in \mathscr{B}(J)$, takže ν je nezáporná míra. Q.E.D.

Buď nejprve M spojitý d-dimensionální L^2-martingal, $M_0 = 0$. Zvolme $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $i \leq j$, a pro $T > 0$ zatím pevné definujme množinové funkce $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ a $\boldsymbol{\mu}$ na $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}_T$ předpisem

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{ij}(A) &= \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \mathbf{1}_A(s,\omega)\, \mathrm{d}\mu_{\langle M^i, M^j\rangle(\omega)}(s)\biggr], \\ \boldsymbol{\mu}(A) &= \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \mathbf{1}_A(s,\omega)\, \mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle(\omega)}(s)\biggr]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(Proměnnou ω nebudeme v dalším zpravidla vyznačovat explicitně.) Definice je korektní: Předně, pro libovolné $A \in \mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}_T$ podle Kunita-Watanabeho nerovnosti

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu_{\langle M^i, M^j\rangle}\right| &\leq \left(\int_0^T \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu_{\langle M^i\rangle}\right)^{1/2} \left(\int_0^T \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu_{\langle M^j\rangle}\right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^T \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle} \leq \langle M\rangle_T \end{aligned} \tag{2}$$

P-skoro jistě. Dále, funkce

$$\omega \longmapsto \int_0^T \mathbf{1}_A(s,\omega)\, \mathrm{d}\langle M^i, M^j\rangle_s(\omega), \quad \omega \longmapsto \int_0^T \mathbf{1}_A(s,\omega)\, \mathrm{d}\langle M\rangle_s(\omega) \tag{3}$$

jsou $\mathscr{F}_T$-měřitelné. To je očividné pro množiny A tvaru $A = [a,b[\times C$, $0 \leq a < b$, $C \in \mathscr{F}_T$, ježto pro ně

$$\int_0^T \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\langle M^i, M^j\rangle = \mathbf{1}_C \bigl\{\langle M^i, M^j\rangle_b - \langle M^i, M^j\rangle_a\bigr\}$$

a analogicky pro druhou z funkcí (3); důkaz proto snadno završíme užitím Dynkinova lemmatu.[4] Odhad (2) nyní zajišťuje, že funkce (3) jsou integrovatelné a platí

$$\bigl|\boldsymbol{\mu}_{ij}(A)\bigr| \leq \boldsymbol{\mu}(A) \leq \mathsf{E}\langle M\rangle_T < \infty, \quad A \in \mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}_T. \tag{4}$$

[4] Viz J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, Tvrzení I.1.5.

(Poslední z nerovností (4) plyne z L^2-integrovatelnosti náhodné veličiny M_T.) Užívajíce (4) přesvědčíme se snadno, že $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ je znaménková míra a $\boldsymbol{\mu}$ je konečná míra na $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}_T$ a že $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ je absolutně spojitá vzhledem k $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu}_{ij} \ll \boldsymbol{\mu}$.

Označme $\mathscr{M}_T$ restrikci σ-algebry $\mathscr{M}$ na $[0,T] \times \Omega$. Pochopitelně $\mathscr{M}_T \subseteq \mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}_T$ a $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ jako znaménková míra na $\mathscr{M}_T$ je absolutně spojitá vůči zúžení míry $\boldsymbol{\mu}$ na $\mathscr{M}_T$. Podle Radon-Nikodymovy věty existuje $\mathscr{M}_T$-měřitelná funkce $\varrho_{ij,T} \in L^1(\boldsymbol{\mu})$ tak, že

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}(A) = \int_A \varrho_{ij,T} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \tag{5}$$

pro každé $A \in \mathscr{M}_T$. Integrabilita $\varrho_{ij,T}$ podle definice míry $\boldsymbol{\mu}$ znamená

$$\infty > \int_{[0,T]\times\Omega} |\varrho_{ij,T}| \,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = \mathsf{E}\Big[\int_0^T |\varrho_{ij,T}(s)| \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\Big],$$

což implikuje, že $\varrho_{ij,T}(\cdot,\omega) \in L^1([0,T], \mu_{\langle M\rangle(\omega)})$ pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$.

Uvažme nyní, že proces $M^i M^j - \langle M^i, M^j\rangle$ je martingal, podle definice tudíž pro libovolná $0 \le s < t \le T$ a každou množinu $C \in \mathscr{F}_s$ platí

$$\int_C \big(M_t^i M_t^j - \langle M^i, M^j\rangle_t\big) \,\mathrm{d}\mathsf{P} = \int_C \big(M_s^i M_s^j - \langle M^i, M^j\rangle_s\big) \,\mathrm{d}\mathsf{P}$$

neboli

$$\int_C \big(M_t^i M_t^j - M_s^i M_s^j\big) \,\mathrm{d}\mathsf{P} = \int_C \big(\langle M^i, M^j\rangle_t - \langle M^i, M^j\rangle_s\big) \,\mathrm{d}\mathsf{P}. \tag{6}$$

Uživše (5) na množinu A tvaru $A = [s,t[\times C$, $C \in \mathscr{F}_s$ (jež jistě náleží $\mathscr{M}_T$, jelikož $\mathbf{1}_A$ je adaptovaný zprava spojitý proces), dostaneme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\Big[\mathbf{1}_C\big(\langle M^i, M^j\rangle_t - \langle M^i, M^j\rangle_s\big)\Big] &= \boldsymbol{\mu}_{ij}\big([s,t[\times C\big) \\ &= \int_{[s,t[\times C} \varrho_{ij,T} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\ &= \mathsf{E}\Big\{\mathbf{1}_C \int_s^t \varrho_{ij,T}(r) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_r\Big\}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (6), vidíme, že proces

$$M_t^i M_t^j - \int_0^t \varrho_{ij,T} \,\mathrm{d}\langle M\rangle, \quad 0 \le t \le T,$$

je martingal. Podle tvrzení o jednoznačnosti vzájemné variace musí platit

$$\langle M^i, M^j\rangle = \int_0^{\cdot} \varrho_{ij,T} \,\mathrm{d}\langle M\rangle \quad \text{na } [0,T] \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Z jednoznačnosti vzájemné variace také plyne, že

$$\int_0^{\cdot} \varrho_{ij,T}\,\mathrm{d}\langle M\rangle = \int_0^{\cdot} \varrho_{ij,U}\,\mathrm{d}\langle M\rangle \quad \text{na } [0,T] \text{ P-skoro jistě,}$$

kdykoliv $U > T$. Znaménková míra $\big(\varrho_{ij,T}(\cdot,\omega) - \varrho_{ij,U}(\cdot,\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle(\omega)}$ na $\mathscr{B}([0,T])$ je nulová podle pozorování 0.1 pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$, pročež $\varrho_{ij,T} = \varrho_{ij,U}$ $\mu_{\langle M\rangle}$-skoro všude na $[0,T]$ P-skoro jistě. Je tedy zřejmé, že lze definovat progresivně měřitelný proces ϱ_{ij} tak, aby

$$\mathsf{P}\Big\{\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t \varrho_{ij}(r)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_r \quad \forall t \geq 0\Big\} = 1.$$

Předvedenou úvahu můžeme provésti pro libovolné indexy $i \leq j$. Pro $i > j$ je díky symetrii $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ možno položit $\varrho_{ij} = \varrho_{ji}$, získáme progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces $\varrho = (\varrho_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ P-skoro jistě splňující $\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mu_{\langle M\rangle}; \mathbb{M}_{d\times d})$ a

$$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \varrho(r)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_r \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{7}$$

Hodnotami procesu ϱ jsou, vzhledem k jeho konstrukci, symetrické matice, ověříme, že P-skoro jistě platí

$$\varrho \text{ je positivně semidefinitní a } \operatorname{Tr}\varrho = 1 \ \mu_{\langle M\rangle}\text{-skoro všude na } \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Již jsme ukázali, že

$$\mathsf{P}\Big\{\big\langle\big[\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_s\big]z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^d} \geq 0 \ \ \forall t \geq s \geq 0\ \forall z \in \mathbb{R}^d\Big\} = 1,$$

což v kombinaci se (7) dává $\mathsf{P}(\Omega_1) = 1$, kde

$$\Omega_1 = \Big\{\omega \in \Omega;\ \int_s^t \big\langle\varrho(r,\omega)z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle(\omega)}(r) \geq 0 \ \ \forall t \geq s \geq 0\ \forall z \in \mathbb{R}^d\Big\}.$$

Zvolme $\omega \in \Omega_1$ a $T > 0$. Pro $z \in \mathbb{R}^d$ definujme znaménkovou míru ν na $\mathscr{B}([0,T])$ předpisem

$$\mathrm{d}\nu = \big\langle\varrho(\cdot,\omega)z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle(\omega)}.$$

Z definice Ω_1 plyne, že $\nu(I) \geq 0$ pro každý interval $I \subseteq [0,T]$, podle pozorování 0.1 je proto ν nezáporná míra. Poněvadž $T > 0$ bylo libovolné, ukázali jsme vlastně, že

$$\int_B \big\langle\varrho(r)z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle}(r) \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}^d,\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+),$$

platí, kdykoliv $\omega \in \Omega_1$. Pro každé z je tedy funkce $\langle \varrho(\cdot)z, z\rangle$ $\mu_{\langle M\rangle}$-skoro všude nezáporná. Jistě stačí uvažovat jen $z \in Z$, kde $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ je spočetná hustá podmožina, takže tvrzení o positivní semidefinitnosti ϱ plyne zřejmým způsobem. Rovnost $\operatorname{Tr}\varrho = 1$ se dokáže zcela analogicky, uvědomíme-li si, že

$$\langle M\rangle_t = \operatorname{Tr}\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \operatorname{Tr}\varrho(r)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_r$$

pro všechna $t \geq 0$ P-skoro jistě.

Přejděme k obecnému případu spojitého d-dimensionálního lokálního martingalu M s $M_0 = 0$. Položme

$$R_n = \inf\{t \geq 0;\ \|M_t\| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Speciálně tedy $R_0 = 0$ a $R_n \nearrow \infty$ P-skoro jistě.) Definujme $M^{(n)} = M(\cdot \wedge R_n)$, $n \geq 1$. Procesy $M^{(n)}$ jsou spojité omezené lokální martingaly, tudíž L^2-martingaly, pro něž, jak jsme ukázali, existují $\mathscr{M}$-měřitelné $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotové procesy $\varrho^{(n)}$ splňující

$$\langle\!\langle M^{(n)}\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \varrho_s^{(n)}\,\mathrm{d}\langle M^{(n)}\rangle_s \quad \text{pro každé } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Kladouce

$$\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^{(n)} \mathbf{1}_{\{(t,\omega);\, R_{n-1}(\omega) \leq t < R_n(\omega)\}} \tag{9}$$

získáme progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces takový, že (7) platí P-skoro jistě, neboť

$$M_\cdot^{(n)}(\omega) = M_\cdot(\omega),\ \langle\!\langle M^{(n)}\rangle\!\rangle(\omega) = \langle\!\langle M\rangle\!\rangle(\omega) \quad \text{na } [0, R_n(\omega)[$$

pro každé $n \geq 1$ pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$ a indikátory vystupující ve formuli (9) jsou adaptované zprava spojité procesy, tedy $\mathscr{M}$-měřitelné.

Není obtížné nahlédnout, že i (8) zůstává v platnosti. Shrnuto:

Tvrzení 0.2. *Buď M spojitý d-dimensionální lokální martingal, $M_0 = 0$. Potom existuje progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces ϱ tak, že P-skoro jistě platí: $\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu_{\langle M\rangle}; \mathbb{M}_{d\times d})$, ϱ je symetrická positivně semidefinitní matice s $\operatorname{Tr}\varrho = 1$ $\mu_{\langle M\rangle}$-skoro všude na $\mathbb{R}_+$ a*

$$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \varrho(r)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_r \quad \textit{pro každé } t \geq 0.$$

Připouštějíce jistou volnost řeči budeme nazývat ϱ hustota $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ vzhledem k $\langle M\rangle$.

Poznámka 0.1. Čtenářka znalá (nebo čtenář znalý) hlubších vět o derivování měr může zkonstruovati proces ϱ daleko rychleji a pohodlněji, užije-li následující tvrzení:[5]

Buď ν spojitá Radonova míra na $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ a nechť $f \in L^1(\nu)$. Potom

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{\nu([x-h,x])} \int\limits_{[x-h,x]} f \,\mathrm{d}\nu = f(x)$$

pro ν-skoro všechna $x \in]0,\infty[$.

(Spojitostí ν míníme: $\nu(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}_+$, zlomek $0/0$ interpretujeme jako 0.)

Uvažujme (pro každé $\omega \in \Omega$ zvlášť) míry $\mu_{\langle M^i, M^j\rangle}$ a $\mu_{\langle M\rangle}$ na $\mathscr{B}([0,T])$, $T > 0$. Pomocí Kunita-Watanabeho nerovnosti se přesvědčíme, že $\mu_{\langle M^i,M^j\rangle} \ll \mu_{\langle M\rangle}$ pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$, buď $\tilde{\varrho}_{ij,T}(\cdot,\omega)$ odpovídající Radon-Nikodymova derivace. Ježto očividně $\tilde{\varrho}_{ij,\tau}(\cdot,\omega) = \tilde{\varrho}_{ij,T}(\cdot,\omega)$ $\mu_{\langle M\rangle(\omega)}$-skoro všude na $[0,T]$, kdykoliv $\tau > T$, získáme $\mu_{\langle M\rangle(\omega)}$-lokálně integrovatelnou (speciálně, skoro všude konečnou) funkci $\tilde{\varrho}_{ij}(\cdot,\omega)$ na $\mathbb{R}_+$ tak, že

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t \tilde{\varrho}_{ij}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \quad \text{pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Ovšem $\tilde{\varrho}_{ij}$ uvažována jako funkce na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ nemusí být $\mathscr{M}$-měřitelná. Pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$ však limita

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M^i, M^j\rangle_t(\omega) - \langle M^i, M^j\rangle_{t-\frac{1}{n}}(\omega)}{\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_{t-\frac{1}{n}}(\omega)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\langle M^i,M^j\rangle(\omega)}([t-\frac{1}{n},t])}{\mu_{\langle M\rangle(\omega)}([t-\frac{1}{n},t])} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_{\langle M\rangle(\omega)}([t-\frac{1}{n},t])} \int\limits_{[t-\frac{1}{n},t]} \tilde{\varrho}_{ij}(s)\,\mathrm{d}\mu_{\langle M\rangle(\omega)}(s)\end{aligned}$$

existuje a rovná se $\tilde{\varrho}_{ij}(t,\omega)$ pro $\mu_{\langle M\rangle(\omega)}$-skoro všechna $t \in]0,\infty[$. (Zlomky mají dobrý smysl, neboť čitatel je 0, je-li jmenovatel nulový.) Definujme proto

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}_{ij}(t,\omega) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\langle M^i, M^j\rangle_t(\omega) - \langle M^i, M^j\rangle_{t-\frac{1}{n}}(\omega)}{\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_{t-\frac{1}{n}}(\omega)}, \quad t > 0,\ \omega \in \Omega, \\ \varrho_{ij}(t,\omega) &= \hat{\varrho}_{ij}(t,\omega)\mathbf{1}_{\{\hat{\varrho}<\infty\}}(t,\omega) \ \text{ pro } t > 0,\ \varrho(0,\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega.\end{aligned}$$

Potom je ϱ_{ij} progresivně měřitelný proces a nutně $\varrho_{ij}(\cdot,\omega) = \tilde{\varrho}_{ij}(\cdot,\omega)$ $\mu_{\langle M\rangle(\omega)}$-skoro všude na $\mathbb{R}_+$ pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$, proto

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t \varrho_{ij}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \text{ pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě, } 1 \leq i,j \leq d.$$

Opět položíme $\varrho = (\varrho_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$. Positivní semidefinitnost matice ϱ plyne z positivní semidefinitnosti $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_{t-\frac{1}{k}}$ pro každé $k \geq 1$ a z rovnosti

$$\big\langle \varrho(t)z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t-\frac{1}{k}}} \Big\langle \Big[\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_{t-\frac{1}{k}}\Big]z, z\Big\rangle_{\mathbb{R}^d} \geq 0,$$

jež platí, kdykoliv konečná limita existuje. Analogicky se ověří,že $\operatorname{Tr}\varrho = 1$.

[5] Jde o speciální případ věty (8.7) z kapitoly VI knihy S. Saks: *Theory of the integral*, Hafner, New York 1937.

C. Stochastický integrál. Nadále pracujeme na pevně zvoleném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC); σ-algebru $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelných množin značíme $\mathscr{M}$.

Naším cílem je zavésti stochastický integrál vzhledem k vícedimensionálním spojitým lokálním martingalům. Nejprve shrňme poznatky o případu jednodimensionálním, které budeme užívat. Buď N (reálný) spojitý lokální martingal a Ψ $\mathscr{M}$-měřitelný proces splňující

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\Psi_s|^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

(Méně formálně budeme předpoklad (10) opisovat slovy, že Ψ je stochasticky integrovatelný vzhledem k N.) Potom je stochastický integrál

$$I_N(\Psi) = \int_0^{\cdot} \Psi_s \,\mathrm{d}N_s = \int_0^{\cdot} \Psi \,\mathrm{d}N$$

dobře definován a lze ho charakterisovat jako jediný spojitý lokální martingal $I_N(\Psi)$ takový, že

1° $I_N(\Psi)_0 = 0$,

2° pro každý spojitý lokální martingal X P-skoro jistě platí

$$\big\langle X, I_N(\Psi)\big\rangle_t = \int_0^t \Psi(s) \,\mathrm{d}\langle X, N\rangle_s \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{11}$$

Je-li R spojitý lokální martingal a Θ $\mathscr{M}$-měřitelný proces integrovatelný vzhledem k R, to jest

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\Theta_s|^2 \,\mathrm{d}\langle R\rangle_s < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0,$$

pak rovnost (11) přechází na

$$\big\langle I_N(\Psi), I_R(\Theta)\big\rangle_t = \int_0^t \Psi_s \Theta_s \,\mathrm{d}\langle N, R\rangle_s, \quad t \geq 0.$$

Odtud dostaneme

$$\langle I_N(\Psi)\rangle = \int_0^{\cdot} |\Psi_s|^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s.$$

Podle lemmatu C.2 z

$$\mathsf{E}\int_0^t |\Psi_s|^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s < \infty \quad \text{pro všechna } t \geq 0$$

plyne, že $I_N(\Psi)$ je L^2-martingal, tedy $\mathsf{E} I_N(\Psi)_t = \mathsf{E} I_N(\Psi)_0 = 0$ a

$$\mathsf{E}\left|\int_0^t \Psi_s \,\mathrm{d}N_s\right|^2 = \mathsf{E}\int_0^t |\Psi_s|^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s, \quad t \geq 0.$$

Připomeňme ještě vlastnost známou jako asociativita stochastického integrálu:

Nechť je R spojitý lokální martingal a Ψ, Θ jsou progresivně měřitelné procesy. Předpokládejme, že Θ je stochasticky integrovatelný vzhledem k R, a položme

$$N = \int_0^\cdot \Theta_s \,\mathrm{d}R_s.$$

Je-li Ψ stochasticky integrovatelný vzhledem k N, pak je $\Psi\Theta$ stochasticky integrovatelný vzhledem k R a

$$\int_0^\cdot \Psi_s \,\mathrm{d}N_s = \int_0^\cdot \Psi_s \Theta_s \,\mathrm{d}R_s \quad \mathsf{P}\text{-}\textit{skoro jistě.}$$

Uvažujme nejdůležitější speciální případ spojitého lokálního martingalu, $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W. Vzhledem k rovnosti $\langle W\rangle_t = t$ je stochastický integrál $I_W(\Phi)$ definován pro $\mathscr{M}$-měřitelné procesy Φ splňující $\Phi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě, to jest (není-li specifikováno jinak, předpokládáme, že $\mathbb{R}_+$ je opatřeno Lebesgueovou mírou)

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\Phi_s|^2 \,\mathrm{d}s < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0.$$

Platí

$$\langle I_W(\Phi)\rangle = \int_0^\cdot |\Phi_s|^2 \,\mathrm{d}s,$$

nadto

$$\mathsf{E}\left|\int_0^t \Phi_s \,\mathrm{d}W_s\right|^2 = \mathsf{E}\int_0^t |\Phi_s|^2 \,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

pokud je pravá strana konečná. Jinými slovy, pro každé $T > 0$ je

$$\begin{aligned} I_W : L^2([0,T] \times \Omega, \mathscr{M}, \lambda \otimes \mathsf{P}) &\longrightarrow L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}), \\ \Phi &\longmapsto \int_0^T \Phi \,\mathrm{d}W \end{aligned}$$

lineární isometrické zobrazení. (To je s triviální modifikací pravda i pro $T = \infty$: I_W je isometrie z $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathscr{M}, \lambda \otimes \mathsf{P})$ do $L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \mathsf{P})$.)

Buď nyní $M = (M^i)_{i=1}^n$ spojitý n-dimensionální lokální martingal a $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ $\mathscr{M}$-měřitelný proces takový, že

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\Psi_{ij}(s)|^2 \,\mathrm{d}\langle M^j\rangle_s < \infty\right\} = 1, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ t \ge 0.$$

Stochastický integrál $I_M(\Psi)$ definujeme “po složkách” jako m-dimensionální proces

$$I_M(\Psi) = \int_0^\cdot \Psi \,\mathrm{d}M = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^\cdot \Psi_{ij} \,\mathrm{d}M^j\right)_{i=1}^m.$$

Zřejmě je $I_M(\Psi)$ spojitý lokální martingal a $I_M(\Psi)_0 = 0$. Označíme-li $I_M(\Psi) = (I_M^1(\Psi), \dots, I_M^m(\Psi))^*$, pak

$$\begin{aligned}
\left\langle I_M^i(\Psi), I_M^r(\Psi)\right\rangle_t &= \sum_{j,k=1}^n \int_0^t \Psi_{ij}(s)\Psi_{rk}(s) \,\mathrm{d}\langle M^j, M^k\rangle_s \\
&= \sum_{j,k=1}^n \int_0^t \Psi_{ij}(s)\varrho_{jk}(s)\Psi_{rk}(s) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \\
&= \int_0^t \big(\Psi(s)\varrho(s)\Psi(s)^*\big)_{ir} \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s,
\end{aligned}$$

kde ϱ značí hustotu $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ vůči $\langle M\rangle$. Odtud

$$\langle\!\langle I_M(\Psi)\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \Psi(s)\varrho(s)\Psi(s)^* \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

a

$$\left\langle I_M(\Psi)\right\rangle_t = \int_0^t \mathrm{Tr}\big(\Psi(s)\varrho(s)\Psi(s)^*\big) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

Zcela analogicky lze odvodit, že

$$\langle\!\langle I_M(\Psi), I_M(\Theta)\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \Psi(s)\varrho(s)\Theta(s)^* \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s,$$

kdykoliv jsou Ψ a Θ $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotové $\mathscr{M}$-měřitelné procesy stochasticky integrovatelné vzhledem k M.

Jestliže

$$\mathsf{E}\left\langle I_M(\Psi)\right\rangle_T = \mathsf{E}\int_0^T \mathrm{Tr}\big(\Psi_s\varrho_s\Psi_s^*\big) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty,$$

pro nějaké $T \in [0, \infty]$, je $\big(I_M(\Psi),\, 0 \le t \le T\big)$ L^2-martingal a

$$\mathsf{E}\Big(\int_0^t \Psi_s \,\mathrm{d}M_s\Big)\Big(\int_0^t \Psi_s \,\mathrm{d}M_s\Big)^* = \mathsf{E}\int_0^t \Psi_s \varrho_s \Psi_s^* \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s,$$
$$\mathsf{E}\Big\|\int_0^t \Psi_s \,\mathrm{d}M_s\Big\|^2 = \mathsf{E}\int_0^t \mathrm{Tr}\big(\Psi_s \varrho_s \Psi_s^*\big) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$

pro libovolné $t \in [0, T]$, jak jsme vyjasnili v části B této kapitoly..

Integrujeme-li podle n-dimensionálního $(\mathscr{F}_t)$-Wienerova procesu W, výrazy se zjednoduší. Díky nezávislosti $\langle W^i, W^j\rangle = 0$ pro $i \ne j$, tudíž $\langle\!\langle W\rangle\!\rangle_t = tI$. Zřejmě $\langle W\rangle_t = nt$ a hustotou $\langle\!\langle W\rangle\!\rangle$ vzhledem k $\langle W\rangle$ je konstantní matice $\frac{1}{n}I$. Stochastický integrál $I_W(\Phi)$ je definován pro $\mathscr{M}$-měřitelné $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotové procesy Φ splňující

$$\mathsf{P}\Big\{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^t |\Phi_{ij}(s)|^2 \,\mathrm{d}s < \infty\Big\} = 1, \quad t \ge 0. \tag{12}$$

Proces $I_W(\Phi)$ má tensorovou kvadratickou variaci

$$\langle\!\langle I_W(\Phi)\rangle\!\rangle = \int_0^\cdot \Phi(s)\Phi(s)^* \,\mathrm{d}s$$

a kvadratickou variaci

$$\langle I_W(\Phi)\rangle = \int_0^\cdot \mathrm{Tr}\big(\Phi(s)\Phi(s)^*\big) \,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^\cdot |\Phi_{ij}(s)|^2 \,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

V prostoru matic $\mathbb{M}_{m\times n}$ zaveďme tzv. Hilbert-Schmidtovu normu vztahem

$$\|A\| = \Big(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\Big)^{1/2} \quad \text{pro } A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}. \tag{14}$$

Snadno se nahlédne, že

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^*)} = \Big(\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|^2\Big)^{1/2},$$

kde $\{e_j,\, j = 1, \dots, n\}$ je libovolná orthonormální base v $\mathbb{R}^n$, a že prostor $\mathbb{M}_{m\times n}$ opatřený normou (14) je Hilbertův. Nebude-li explicitně řečeno jinak, v $\mathbb{M}_{m\times n}$ bude vždy uvažována norma (14). V novém označení (13) přechází v

$$\langle I_W(\Phi)\rangle = \int_0^\cdot \|\Phi_s\|^2 \,\mathrm{d}s$$

a podmínku stochastické integrovatelnosti (12) lze zapsati jako $\|\Phi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě. Tak jako v jednodimensionálním případě, pro libovolné $T > 0$ definuje stochastický integrál isometrický operátor

$$I_W : L^2([0,T] \times \Omega, \mathscr{M}, \lambda \otimes \mathsf{P}; \mathbb{M}_{m\times n}) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}; \mathbb{R}^m),$$
$$\Phi \longmapsto \int_0^T \Phi_s \,\mathrm{d}W_s$$

(a podobně pro $T = \infty$).

Poznámka 0.2. Stochastický integrál podle n-dimensionálního spojitého lokálního martingalu M jsme definovali redukcí k jednodimensionálnímu případu. Touto procedurou jsme schopni zavésti stochastický integrál pro $\mathscr{M}$-měřitelné $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotové procesy takové, že

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^t |\Psi_{ij}(s)|^2 \,\langle M^j\rangle_s < \infty \quad \text{pro každé } t \geq 0 \ \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{15}$$

Mohli bychom postupovat přímo: pro jednoduchý proces

$$\Theta_t = \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad t \geq 0,$$

kde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ a θ_i jsou $\mathscr{F}_{t_i}$-měřitelné náhodné veličiny z $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{m\times n})$, položíme přirozeně

$$\int_0^t \Theta_s \,\mathrm{d}M_s = \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i \big(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}\big), \quad t \geq 0,$$

a na širší třídu integrandů stochastický integrál rozšíříme imitujíce methodu užitou pro reálné procesy. Přitom se ukáže, že stochastický integrál $I_M(\Psi)$ existuje pro $\mathscr{M}$-měřitelné $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotové procesy splňující

$$\int_0^t \mathrm{Tr}\big(\Psi_s \varrho_s \Psi_s^*\big) \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty \quad \text{pro každé } t \geq 0 \ \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{16}$$

Všechny vlastnosti stochastického integrálu, které jsme odvodili za podmínky (15), zůstávají v platnosti i za předpokladu (16). (Vzpomeneme-li na vzorec pro kvadratickou variaci stochastického integrálu, vidíme, že (16) je velmi přirozený předpoklad, chceme-li, aby stochastický integrál byl lokální martingal.) Z Kunita-Watanabeho nerovnosti snadno plyne, že (16) je důsledkem (15), obrácená implikace neplatí. Buď h spojitý reálný martingal a k progresivně měřitelný proces takový, že $k \notin L^2_{\mathrm{loc}}(\mu_{\langle h\rangle})$, takže stochastický integrál k vzhledem k h neexistuje. Položme $K = (k, -k)$, $M = (h,h)^*$, pak je ϱ 2×2-matice se všemi prvky rovnými $\frac{1}{2}$, proto $K\varrho K^* = 0$, avšak podmínka (15) splněna není.

Možnost integrovati procesy splňující pouze (16) je mnohdy důležitá, pro nás však bude zpravidla postačující slabší theorie založená na (15), už proto, že pro Wienerův proces jsou (15) a (16) zjevně ekvivalentní.

D. Itôova formule. Nadále pracujeme na pevně zvolené stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC). V této sekci vyslovíme Itôovu formuli pro vícedimensionální procesy. K tomu je výhodné zavésti následující pojem. Pravíme, že adaptovaný m-dimensionální proces $X = (X^i)_{i=1}^m$ je *spojitý semimartingal*, připouští-li representaci

$$X_t = X_0 + M_t + V_t \quad \text{pro každé } t \geq 0 \text{ P-skoro jistě}, \tag{17}$$

kde $M = (M^i)$ je spojitý m-dimensionální lokální martingal, $V = (V^i)$ je spojitý adaptovaný $\mathbb{R}^m$-hodnotový proces s trajektoriemi lokálně konečné variace a $M_0 = V_0 = 0$.

Uvědomme si, že procesy v rozkladu (17) jsou určeny jednoznačně. Máme-li totiž dvě takové representace

$$X = X_0 + M + V = X_0 + \tilde{M} + \tilde{V},$$

pak je $M - \tilde{M} = \tilde{V} - V$ spojitý lokální martingal s trajektoriemi lokálně konečné variace, tedy konstantní. Lze proto snadno definovat stochastický integrál $\mathbb{M}_{1\times m}$-hodnotového náhodného procesu $H = (H^1, \ldots, H^m)$ vzhledem k X vzorcem

$$\int_0^\cdot H_s \,\mathrm{d}X_s = \int_0^\cdot H_s \,\mathrm{d}M_s + \sum_{i=1}^m \int_0^\cdot H_s^i \,\mathrm{d}V_s^i,$$

pokud mají všechny integrály vpravo smysl, prvý z nich jako stochastický integrál, ostatní pro skoro všechny trajektorie jako Lebesgueovy integrály (vzhledem k mírám μ_{V^i}, $1 \leq i \leq m$). Vzájemnou variaci komponent semimartingalu X zaveďme rovností

$$\langle X^i, X^j \rangle = \langle M^i, M^j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

(Snadno se nahlédne, že k tomuto předpisu bychom dospěli, pokud bychom chtěli definovat $\langle X^i, X^j \rangle_t$ jako limitu sum

$$\sum_{k=0}^N (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j)$$

pro zjemňující se posloupnost dělení intervalu $[0, t]$.)

Spojité m-dimensionální semimartingaly tvoří vektorový prostor uzavřený na $\mathscr{C}^2$-zobrazení: Je-li $X = (X^1, \ldots, X^m)^*$ m-dimensionální spojitý semimartingal a $\varphi \in \mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m) \equiv \{\vartheta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m);\ \vartheta(t, \cdot) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m) \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}_+\}$, pak je proces $\varphi(t, X_t)$ opět semimartingal. Následující rovnost, známá jako Itôova formule (nebo Itôovo lemma), poskytuje explicitně rozklad $\varphi(t, X_t)$ na lokální martingal a na proces lokálně omezené variace:[6]

$$\varphi(t,X_t)=\varphi(0,X_0)+\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^m\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s^i$$
$$+\frac12\sum_{i,j=1}^m\int_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(s,X_s)\,\mathrm{d}\langle X^i,X^j\rangle_s. \tag{18}$$

Formuli (18) lze zapsat v přehlednějším tvaru. Označme $D_x\varphi(t,\cdot)$ a $D_x^2\varphi(t,\cdot)$ první a druhou Fréchetovu derivaci funkce $\varphi(t,\cdot)$, representované

$$D_x\varphi(t,\cdot)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t,\cdot)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}(t,\cdot)\end{pmatrix},\quad D_x^2\varphi(t,\cdot)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(t,\cdot) & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}(t,\cdot) & \cdots\\ & \ddots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_m^2}(t,\cdot)\end{pmatrix}.$$

Buď M lokální martingal z rozkladu (17) a nechť ϱ opět značí hustotu $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ vzhledem k $\langle M\rangle$. Potom

$$\sum_{i,j=1}^m\int_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(s,X_s)\,\mathrm{d}\langle X^i,X^j\rangle_s=\sum_{i,j=1}^m\int_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(s,X_s)\,\mathrm{d}\langle M^i,M^j\rangle_s$$
$$=\int_0^t\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(s,X_s)\varrho_{ij}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s,$$

proto

$$\varphi(t,X_t)-\varphi(0,X_0)=\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\frac12\int_0^t\operatorname{Tr}\bigl(D_x^2\varphi(s,X_s)\varrho(s)\bigr)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$
$$+\int_0^t D_x\varphi(s,X_s)^*\,\mathrm{d}X_s.$$

Povětšinou budeme Itôovu formuli potřebovat jen pro semimartingaly speciálního typu. Buď $W=(W^1,\dots,W^n)^*$ n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces. Pravíme, že adaptovaný m-dimensionální náhodný proces X má *stochastický diferenciál* (nebo že X je *Itôův proces*), pokud existují $\mathscr{M}$-měřitelné náhodné procesy $a:\mathbb{R}_+\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $b:\mathbb{R}_+\times\Omega\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times n}$ tak, že

$$\mathsf{P}\Bigl\{\int_0^t\bigl(\|a(s)\|+\|b(s)\|^2\bigr)\,\mathrm{d}s<\infty\Bigr\}=1,\quad t\ge0,$$

[6] Její důkaz je založen na obdobné myšlence, jako důkaz odpovídajícího výsledku jednodimensionálního, je však pracnější. Relativně detailně je důkaz proveden v knize M. Meyer: *Continuous stochastic calculus with applications to finance*, CRC, Boca Raton 2001, Theorem III.3.a.1.

a

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t b(r)\,\mathrm{d}W(r) \tag{19}$$

P-skoro jistě pro každé $t \geq 0$. Semimartingal X s representací (17) má tedy stochastický diferenciál, pokud jsou trajektorie V navíc lokálně absolutně spojité a M je stochastický integrál vzhledem k Wienerovu procesu (což, jak uvidíme v kapitole čtvrté, je v podstatě ekvivalentní s lokální absolutní spojitostí trajektorií $\langle M \rangle$). Rovnost (19) symbolicky zapisujeme

$$\mathrm{d}X(t) = a(t)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}W(t) \quad \text{či} \quad \mathrm{d}X = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}W.$$

Je-li $\varphi \in \mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$, pak kombinujíce (18) a (19) nahlédneme, že proces $(\varphi(t, X(t)))_{t \geq 0}$ má opět stochastický diferenciál, ježto platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi(t, X(t)) &= \Big\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t)) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, X(t)) a_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t, X(t)) b_{ir}(t) b_{jr}(t) \Big\}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, X(t)) b_{ir}(t)\,\mathrm{d}W^r(t) \\
&= \Big\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t)) + \big\langle D_x\varphi(t, X(t)), a(t) \big\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\big(b(t)^* D_x^2 \varphi(t, X(t)) b(t) \big) \Big\}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + D_x\varphi(t, X(t))^* b(t)\,\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}$$

Tvar stochastického diferenciálu je zvláště jednoduchý v případě $m = n = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi(t, X(t)) = \Big\{ &\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X(t)) a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X(t)) b^2(t) \Big\}\,\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X(t)) b(t)\,\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}$$

Buď nakonec $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ funkce, jejíž reálná i imaginární část náleží systému $\mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$. Uživše Itôovu formuli na reálnou a imaginární část φ zvlášť, dospějeme k formuli pro $\varphi(t, X_t)$ takřka identické s (18):

$$\begin{aligned}
\varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) = &\int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Tr}\big(D_x^2 \varphi(s, X_s) \varrho(s) \big)\,\mathrm{d}\langle M \rangle_s \\
&+ \int_0^t D_x\varphi(s, X_s)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}X_s;
\end{aligned}$$

je toliko třeba mít na paměti, že $D_x\varphi$, $D_x^2\varphi$ a $\partial\varphi/\partial s$ jsou nyní komplexní funkce a ve stochastickém integrálu vystupuje transponovaná, nikoli konjugovaná (to jest, transponovaná a komplexně sdružená) matice.

Komplexní forma Itôovy formule nyní poslouží k důkazu užitečné charakterisace Wienerova procesu.

Věta 0.3. (P. Lévy, 1948) *Buď Z spojitý $\mathbb{R}^m$-hodnotový náhodný proces, $Z_0 = 0$. Jest ekvivalentní:*

(i) Z je $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces,

(ii) Z je lokální martingal s tensorovou kvadratickou variací $\langle\!\langle Z\rangle\!\rangle_t = tI$, $t \geq 0$.

Poznámka 0.3. Tradiční formulace Lévyho věty v jednodimensionálním případě zní: je-li Z spojitý proces s $Z_0 = 0$ takový, že (Z_t) i $(Z_t^2 - t)$ jsou (lokální) martingaly, pak je Z Brownův pohyb. Předpoklad spojitosti trajektorií je podstatný, jak ukazuje případ kompensovaného Poissonova procesu.

Podáme důkaz věty 0.3 založený na stochastické analyse, jehož myšlenka náleží H. Kunitovi a S. Watanabemu (1967); Itôova formule je užita k výpočtu charakteristické funkce náhodné veličiny $Z_t - Z_s$.

Důkaz. Wienerův proces je očividně martingal požadovaných vlastností, stačí tedy dokázat jen opačnou implikaci. Předpokládejme, že Z je m-dimensionální spojitý lokální martingal a $Z_0 = 0$, $\langle\!\langle Z\rangle\!\rangle_t = tI$; zřejmě $\langle Z\rangle_t = mt$ a pro hustotu ϱ tensorové kvadratické variace platí $\varrho(t) = \frac{1}{m}I$. Uvažujme funkci

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C},\ (t,x) \longmapsto \exp\Big(\mathrm{i}\langle u,x\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\Big),$$

kde $u \in \mathbb{R}^m$ je libovolné pevně zvolené. Potom $V \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m;\mathbb{C})$,

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\|u\|^2 V(t,x),\ D_x V(t,x) = \mathrm{i}uV(t,x),\ D_x^2 V(t,x) = -uu^* V(t,x),$$

tudíž

$$\operatorname{Tr} D_x^2 V(t,x) = -\|u\|^2 V(t,x).$$

Pro $0 \leq s \leq t$ dostaneme z Itôovy formule

$$\begin{aligned} V(t,Z_t) - V(s,Z_s) &= \int_s^t \frac{\partial V}{\partial r}(r,Z_r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t D_x V(r,Z_r)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}Z_r \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_s^t \operatorname{Tr}\big(D_x^2 V(r,Z_r)\varrho(r)\big)\,\mathrm{d}\langle Z\rangle_r \\ &= \int_s^t \frac{1}{2}\|u\|^2 V(r,Z_r)\,\mathrm{d}r + \mathrm{i}\int_s^t V(r,Z_r)u^*\,\mathrm{d}Z_r \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_s^t \|u\|^2 V(r,Z_r)\,\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{i}\int_s^t V(r,Z_r)u^*\,\mathrm{d}Z_r. \end{aligned}$$

Přitom integrand stochastického integrálu vpravo splňuje

$$\left|V(r, Z_r)u^*\right| \leq \|u\| \exp\Big(\frac{1}{2}\|u\|^2 r\Big) \leq \|u\| \exp\big(\|u\|^2 \tau\big),$$

kdykoliv $0 \leq r \leq \tau$, je tedy omezený na omezených intervalech. To implikuje, že proces

$$\mathrm{i} \int_0^{\cdot} V(r, Z_r)u^* \, \mathrm{d}Z_r$$

je martingal, pročež

$$\mathsf{E}\big[V(t, Z_t) - V(s, Z_s) \,\big|\, \mathscr{F}_s\big] = \mathsf{E}\big[V(t, Z_t) \,\big|\, \mathscr{F}_s\big] - V(s, Z_s) = 0.$$

Dosadivše za V z definice získáme vztah

$$\mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}\langle u, Z_t\rangle} e^{\|u\|^2 t/2} \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big] = e^{\mathrm{i}\langle u, Z_s\rangle} e^{\|u\|^2 s/2}. \tag{20}$$

Vynásobme rovnost (20) výrazem $\exp\big(-\mathrm{i}\langle u, Z_s\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 t\big)$, dostaneme

$$\mathsf{E}\Big[\exp\big(\mathrm{i}\langle u, Z_t - Z_s\rangle\big) \,\big|\, \mathscr{F}_s\Big] = \exp\Big(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\Big). \tag{21}$$

Ježto $u \in \mathbb{R}^m$ bylo libovolné, vidíme, že charakteristická funkce náhodné veličiny $Z_t - Z_s$ (to jest, Fourierova transformace jejího rozdělení) je

$$u \longmapsto \exp\Big(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\Big),$$

což právě znamená, že $Z_t - Z_s$ má rozdělení $\mathscr{N}(0, (t-s)I)$.

Zbývá ukázat, že $Z_t - Z_s$ a $\mathscr{F}_s$ jsou nezávislé. Buď H libovolná $\mathscr{F}_s$-měřitelná náhodná veličina, užívajíce (21) odvodíme, že pro všechna $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\exp\left(\mathrm{i}\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z_t - Z_s \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}\right) &= \mathsf{E}\exp\big(\mathrm{i}\langle u, Z_t - Z_s\rangle + \mathrm{i}vH\big) \\
&= \mathsf{E}\mathsf{E}\Big[\exp\big(\mathrm{i}\langle u, Z_t - Z_s\rangle\big)e^{\mathrm{i}vH} \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}vH}\mathsf{E}\Big[\exp\big(\mathrm{i}\langle u, Z_t - Z_s\rangle\big) \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big]\Big] \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\Big)\mathsf{E}e^{\mathrm{i}vH} \\
&= \mathsf{E}\exp\big(\mathrm{i}\langle u, Z_t - Z_s\rangle\big)\mathsf{E}e^{\mathrm{i}vH}.
\end{aligned}$$

Charakteristická funkce náhodného vektoru $(Z_t - Z_s, H)^*$ je tedy součinem charakteristických funkcí náhodných veličin $Z_t - Z_s$ a H, a to je ekvivalentní dokazované nezávislosti. Q.E.D.

E. Poznámka o Wienerově procesu. Mnohdy je potřebné znát vlastnosti (náhodného) času, v němž Wienerův proces, startující z nuly, poprvé dosáhne zadanou hladinu; v této sekci elementární vlastnosti takovýchto časů odvodíme.[7]

Buď B reálný Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Pro $b \neq 0$ položme

$$\tau_b = \inf\{t \geq 0;\ B_t = b\}.$$

Spojitost procesu B a uzavřenost množiny $\{b\}$ implikují, že τ_b je $(\mathscr{F}_t^B)$-markovský čas (to jest, markovský čas vzhledem k obohacené kanonické filtraci procesu B).

Tvrzení 0.4. *Pro každé $b \neq 0$ je $\tau_b < \infty$ P-skoro všude, ale $\mathsf{E}\tau_b = \infty$.*

Důkaz.[8] Konečnost τ_b je okamžitým důsledkem zákona iterovaného logarithmu, dokažme neintegrovatelnost. Nechť nejprve $b > 0$. Pro $a < 0$ položme

$$\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b = \inf\{t \geq 0;\ B_t \notin\ ]a, b[\,\}.$$

B je martingal a markovský čas $\tau_{a,b} \wedge n$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ omezený, z věty o "optional sampling" proto plyne

$$0 = \mathsf{E}B_0 = \mathsf{E}B(\tau_{a,b} \wedge n).$$

Z definice $\tau_{a,b}$ je zřejmé, že $\{B(\tau_{a,b} \wedge n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost; lze užíti spojitost trajektorií procesu B spolu s větou o majorisované konvergenci k odvození

$$\mathsf{E}B(\tau_{a,b}) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{E}B(\tau_{a,b} \wedge n) = 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} 0 &= a\mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = a\} + b\mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = b\} \\ &= a\mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = a\} + b\big(1 - \mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = a\}\big), \end{aligned}$$

což dává

$$\mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = a\} = \frac{b}{b-a}, \quad \mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = b\} = -\frac{a}{b-a}.$$

[7] V angličtině jsou známy jako "passage times", v němčině jako "Niveauzeiten", vhodný český název, pokud vím, neexistuje.

[8] Důkaz je převzat z knihy D. Sondermann: *Introduction to stochastic calculus for finance*, Springer 2006, § 2.6.

Jelikož $(B_t^2 - t)$ je také martingal, dostaneme

$$0 = \mathsf{E}B_0^2 = \mathsf{E}\big(B^2(\tau_{a,b} \wedge n) - \tau_{a,b} \wedge n\big),$$

to jest

$$\mathsf{E}(\tau_{a,b} \wedge n) = \mathsf{E}B^2(\tau_{a,b} \wedge n).$$

Postupujíce jako výše můžeme ukázat, že $\mathsf{E}B^2(\tau_{a,b} \wedge n) \longrightarrow \mathsf{E}B^2(\tau_{a,b})$ při $n \to \infty$; konvergence $\mathsf{E}(\tau_{a,b} \wedge n) \nearrow \mathsf{E}\tau_{a,b}$ plyne z Leviho věty. Tudíž

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\tau_{a,b} = \mathsf{E}B^2(\tau_{a,b}) &= a^2 \mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = a\} + b^2 \mathsf{P}\{B(\tau_{a,b}) = b\} \\
&= \frac{a^2 b}{b-a} - \frac{ab^2}{b-a} = ab\,\frac{a-b}{b-a} \\
&= |a|b.
\end{aligned}$$

Jelikož $\tau_b \geq \tau_{a,b}$ pro každé $a < 0$, jest také $\mathsf{E}\tau_b \geq |a|b$ pro každé $a < 0$, z čehož dokazované tvrzení již plyne. V případě $b < 0$ lze buď postupovat zcela analogicky, anebo stačí uvážit, že $-B$ je opět Wienerův proces. Q.E.D.

Poznámka 0.4. Rozdělení náhodné veličiny τ_b lze nalézti explicitně: pro $b \neq 0$ platí

$$\mathsf{P}\big\{\tau_b \in A\big\} = \int_A \frac{|b|}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{t^{3/2}} \exp\Big(\frac{-b^2}{2t}\Big)\,\mathrm{d}t, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+). \tag{22}$$

Tvrzení 0.4 je přímým důsledkem (22). Odvodit formuli (22) je snadné, je-li znám netriviální fakt,[9] že pro libovolné $T > 0$ platí

náhodné veličiny $\max\limits_{0\leq t\leq T} B_t$ *a* $|B_T|$ *mají stejné rozdělení.*

Buď pro určitost $b > 0$, pak

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\tau_b > t\} = \mathsf{P}\big\{\max_{0\leq u\leq t} B_u < b\big\} = \mathsf{P}\big\{|B_t| < b\big\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-b}^{b} e^{-x^2/2t}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^b e^{-x^2/2t}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{b/\sqrt{t}} e^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

a hustotu náhodné veličiny τ_b získáme derivováním podle t.

[9] V knize I. Karatzas, S. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988, je dokázán v odstavci 2.8.

1. Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost

Buď $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ libovolná stochastická base splňující (UC). Umluvme se, že všechny náhodné procesy vyšetřované v této kapitole budou vztaženy k této pevně zvolené stochastické basi.

Naším cílem je dokázat následující důležitý výsledek.

Věta 1.1. *Pro každé $p \in]0,\infty[$ existují konstanty $c_p, C_p \in]0,\infty[$ takové, že pro každý m-dimensionální spojitý lokální martingal M s $M_0 = 0$ a pro každý markovský čas τ platí*

$$c_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\tau^{p/2} \le \mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_{t\wedge\tau}\|^p \le C_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\tau^{p/2}. \tag{1}$$

Zdůrazněme explicitně, že konstanty c_p a C_p nezávisí na dimensi m. Věta 1.1 je známa jako Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost. Původní důkaz byl založen na nerovnostech pro martingaly s diskrétním časem; v této přednášce větu 1.1 dokážeme užívajíce stochastické analysy. (První takový důkaz předložili R. K. Getoor & M. J. Sharpe v roce 1972.)

Příklad 1.1. Okamžitým důsledkem nerovnosti (1) je odhad p-tého momentu stochastického integrálu vzhledem k n-dimensionálnímu $(\mathscr{F}_t)$-Wienerovu procesu W. Pro každý progresivně měřitelný proces $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ s $\|\Phi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě a pro každý markovský čas τ podle (1) platí

$$c_p \mathsf{E}\left(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}} \le \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\left\|\int_0^{t\wedge\tau} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)\right\|^p \le C_p \mathsf{E}\left(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2}$$

Je-li speciálně $p \ge 2$ a $\tau \equiv T \in [0,\infty[$ nenáhodný čas, pak lze na pravou stranu (2) užíti Hölderovu nerovnost a odvodit

$$\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)\right\|^p \le C_p T^{\frac{p}{2}-1} \mathsf{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^p\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Nerovnost (3) budeme v dalším často potřebovati; jiný užitečný speciální případ věty 1.1 získáme volbou $p = 1$:

$$\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)\right\| \le 3\mathsf{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

(možnost klást $C_1 = 3$ vyplyne z důsledku 1.4).

Začněme odvozením nerovnosti, která má i samostatný význam.

Věta 1.2 (E. Lenglart, 1977). *Buďte A, C adaptované procesy se spojitými trajektoriemi, $A, C \geq 0$ na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Nechť $\delta_0 \equiv \sup_{\omega \in \Omega} C_0(\omega) < \infty$. Předpokládejme, že*

$$\mathsf{E} A_\varrho \leq \mathsf{E} C_\varrho \quad \text{pro každý omezený markovský čas } \varrho. \tag{4}$$

Potom pro všechna $\varepsilon > 0$, $\delta \geq \delta_0$ a každý markovský čas γ platí

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\Big\{\sup_{t \geq 0} A_{t \wedge \gamma} \geq \varepsilon\Big\} &\leq \mathsf{P}\Big\{\sup_{t \geq 0} C_{t \wedge \gamma} \geq \delta\Big\} + \frac{1}{\varepsilon} \mathsf{E}\Big(\delta \wedge \sup_{t \geq 0} C_{t \wedge \gamma}\Big) \\ &\leq \mathsf{P}\Big\{\sup_{t \geq 0} C_{t \wedge \gamma} \geq \delta\Big\} + \frac{\delta}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

Předpoklad (4) se někdy opisuje slovy: proces C dominuje proces A. Věta 1.2 (a její zobecnění na nespojité procesy) je často citována jako Lenglartova nebo Lenglart-Rebolledova nerovnost.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že proces C má neklesající trajektorie. Pokud tomu tak není, definujme $\tilde{C}_t = \sup_{s \leq t} C_s$, $t \geq 0$. Dvojice $(A, \tilde{C})$ vyhovuje předpokladům věty 1.2, proces $\tilde{C}$ má neklesající trajektorie a přitom

$$\sup_{t \geq 0} C_{t \wedge \gamma} = \sup_{t \geq 0} \tilde{C}_{t \wedge \gamma},$$

proto pravá strana nerovnosti (5) není ovlivněna záměnou C za $\tilde{C}$.

Má-li C neklesající trajektorie (speciálně tedy je limita C_∞ dobře definována) a dodefinujeme-li $A_\infty = 0$, platí (4) pro libovolný markovský čas ϱ. Markovské časy $\varrho \wedge n$ jsou totiž omezené, tudíž

$$\mathsf{E} A_{\varrho \wedge n} \leq \mathsf{E} C_{\varrho \wedge n} \leq \mathsf{E} C_\varrho, \tag{6}$$

přičemž druhá nerovnost plyne z monotonie trajektorií C. Jelikož $\varrho \wedge n \nearrow \varrho$, spojitost trajektorií implikuje $A_{\varrho \wedge n} \longrightarrow A_\varrho$ při $n \to \infty$ na množině $\{\varrho < \infty\}$. Užitím (6) a Fatouova lemmatu dostaneme

$$\mathsf{E} A_\varrho \leq \mathsf{E} \liminf_{n \to \infty} A_{\varrho \wedge n} \leq \liminf_{n \to \infty} \mathsf{E} A_{\varrho \wedge n} \leq \mathsf{E} C_\varrho.$$

Zvolme nyní $\varepsilon > 0$, $\delta \geq \delta_0$ a markovský čas γ libovolně pevně. Pro $\varkappa \in \,]0, \varepsilon[$ definujme markovské časy

$$\tau = \inf\{t \geq 0;\ A_t \geq \varkappa\}, \quad \sigma = \inf\{t \geq 0;\ C_t \geq \delta\}.$$

Jelikož $C_0 \le \delta_0 \le \delta$, je nutně $C_\sigma = \delta$ na množině $\{\sigma < \infty\}$. Neklesající trajektorie C pak implikují, že $C_{\tau\wedge\gamma\wedge\sigma} \le C_{\gamma\wedge\sigma} = C_\gamma \wedge C_\sigma \le \delta \wedge C_\gamma$. Odtud

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\bigl\{\sup_{t\ge 0} A_{t\wedge\gamma} \ge \varepsilon\bigr\} &\le \mathsf{P}\{A_0 \ge \varkappa\} + \mathsf{P}\{0 < \tau < \gamma\} \\
&= \mathsf{P}\{A_0 \ge \varkappa\} + \mathsf{P}\{0 < \tau < \gamma,\, \sigma < \gamma\} + \mathsf{P}\{0 < \tau < \gamma \le \sigma\} \\
&\le \mathsf{P}\{\sigma < \gamma\} + \mathsf{P}\{A_{\tau\wedge\gamma\wedge\sigma} \ge \varkappa\} \\
&\le \mathsf{P}\{C_\gamma \ge \delta\} + \frac{1}{\varkappa}\mathsf{E}A_{\tau\wedge\gamma\wedge\sigma} \\
&\le \mathsf{P}\{C_\gamma \ge \delta\} + \frac{1}{\varkappa}\mathsf{E}C_{\tau\wedge\gamma\wedge\sigma} \\
&\le \mathsf{P}\{C_\gamma \ge \delta\} + \frac{1}{\varkappa}\mathsf{E}\bigl(\delta \wedge C_\gamma\bigr),
\end{aligned}$$

při čtvrtém odhadu jsme užili Čebyševovu nerovnost, při pátém předpoklad (4) (v zesílené formě). Zbývá uvážit, že $C_\gamma = \sup_{t\ge 0} C_{t\wedge\gamma}$ díky monotonii trajektorií, a provésti limitní přechod $\varkappa \nearrow \varepsilon$. Q.E.D.

Vcelku standardním postupem nyní z odhadu (5) odvodíme nerovnost pro střední hodnoty.

Důsledek 1.3. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.2, nechť navíc $C_0 = 0$. Potom pro každé $\alpha \in \,]0,1[$ a každý markovský čas γ platí*

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} A^\alpha_{t\wedge\gamma} \le \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\,\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} C^\alpha_{t\wedge\gamma}.$$

Důkaz. Zvolme $\alpha \in \,]0,1[$ pevně. Proces A je nezáporný, tedy podle Fubiniho věty

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} A^\alpha_{t\wedge\gamma} = \int_0^\infty \mathsf{P}\bigl\{\bigl(\sup_{t\ge 0} A_{t\wedge\gamma}\bigr)^\alpha \ge \varepsilon\bigr\}\,\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^\infty \mathsf{P}\bigl\{\sup_{t\ge 0} A_{t\wedge\gamma} \ge \varepsilon^{1/\alpha}\bigr\}\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

Podle věty 1.2

$$\mathsf{P}\bigl\{\sup_{t\ge 0} A_{t\wedge\gamma} \ge \varepsilon^{1/\alpha}\bigr\} \le \mathsf{P}\bigl\{\sup_{t\ge 0} C_{t\wedge\gamma} \ge \varepsilon^{1/\alpha}\bigr\} + \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\mathsf{E}\Bigl(\varepsilon^{1/\alpha} \wedge \sup_{t\ge 0} C_{t\wedge\gamma}\Bigr).$$

Proces C je též nezáporný, tudíž

$$\int_0^\infty \mathsf{P}\bigl\{\sup_{t\ge 0} C_{t\wedge\gamma} \ge \varepsilon^{1/\alpha}\bigr\}\,\mathrm{d}\varepsilon = \mathsf{E}\sup_{t\ge 0} C^\alpha_{t\wedge\gamma}.$$

Označme $\xi = \sup_{t\geq 0} C_{t\wedge\gamma}$, užitím Fubiniho věty spočteme

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varepsilon^{-1/\alpha} \mathsf{E}\big(\varepsilon^{1/\alpha} \wedge \xi\big)\,\mathrm{d}\varepsilon &= \mathsf{E}\bigg\{\int_0^{\xi^\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha}\big(\varepsilon^{1/\alpha} \wedge \xi\big)\,\mathrm{d}\varepsilon + \int_{\xi^\alpha}^\infty \varepsilon^{-1/\alpha}\big(\varepsilon^{1/\alpha} \wedge \xi\big)\,\mathrm{d}\varepsilon\bigg\} \\
&= \mathsf{E}\int_0^{\xi^\alpha} 1\,\mathrm{d}\varepsilon + \mathsf{E}\int_{\xi^\alpha}^\infty \varepsilon^{-1/\alpha}\xi\,\mathrm{d}\varepsilon \\
&= \mathsf{E}\xi^\alpha + \mathsf{E}\bigg\{\xi \int_{\xi^\alpha}^\infty \varepsilon^{-1/\alpha}\,\mathrm{d}\varepsilon\bigg\} \\
&= \mathsf{E}\xi^\alpha + \mathsf{E}\bigg\{\xi \left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]_{\xi^\alpha}^\infty\bigg\} \\
&= \mathsf{E}\xi^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathsf{E}\Big\{\xi(\xi^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha}}\Big\} = \mathsf{E}\xi^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathsf{E}\,\xi^\alpha \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\,\mathsf{E}\xi^\alpha,
\end{aligned}$$

neboť podle předpokladu $1/\alpha > 1$. Úhrnem dostaneme

$$\mathsf{E}\sup_{t\geq 0} A^\alpha_{t\wedge\gamma} \leq \mathsf{E}\xi^\alpha + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathsf{E}\xi^\alpha = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\,\mathsf{E}\sup_{t\geq 0} C^\alpha_{t\wedge\gamma}.$$

Q.E.D.

Důsledek 1.4. *Buď M m-dimensionální lokální martingal se spojitými trajektoriemi, $M_0 = 0$. Potom pro všechna $\varepsilon > 0$, $\delta \geq 0$, $p \in \,]0,2[$ a libovolný markovský čas γ platí*

$$\mathsf{P}\big\{\sup_{t\geq 0} \|M_{t\wedge\gamma}\| \geq \varepsilon\big\} \leq \mathsf{P}\big\{\langle M\rangle_\gamma \geq \delta\big\} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathsf{E}\big(\delta \wedge \langle M\rangle_\gamma\big)$$

a

$$\frac{2-p}{4-p}\,\mathsf{E}\langle M\rangle_\gamma^{p/2} \leq \mathsf{E}\sup_{t\geq 0} \|M_{t\wedge\gamma}\|^p \leq \frac{4-p}{2-p}\,\mathsf{E}\langle M\rangle_\gamma^{p/2}.$$

Povšimněme si, že důsledek 1.4 implikuje odhady (1) pro $p < 2$.

Důkaz. Položme nejprve $A_t = \|M_t\|^2$, $C_t = \langle M\rangle_t$. Potom jsou A, C nezáporné adaptované procesy se spojitými trajektoriemi, $A_0 = C_0 = 0$, a je splněn předpoklad (4) věty 1.2. Je-li totiž $\mathsf{E}C_\varrho < \infty$ pro omezený markovský čas ϱ, pak je $(\|M_{t\wedge\varrho}\|^2 - \langle M\rangle_{t\wedge\varrho})$ stejnoměrně integrovatelný martingal podle lemmatu C.2; je-li $\mathsf{E}C_\varrho = \infty$, je (4) splněno triviálně. Proto první dokazovaná nerovnost plyne přímo z věty 1.2. Aplikujíce důsledek 1.3 s $\alpha = p/2 \in \,]0,1[$ odvodíme:

$$\mathsf{E}\sup_{t\geq 0} \|M_{t\wedge\gamma}\|^p = \mathsf{E}\sup_{t\geq 0} A^\alpha_{t\wedge\gamma} \leq \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\,\mathsf{E}\sup_{t\geq 0} C^\alpha_{t\wedge\gamma} = \frac{4-p}{2-p}\,\mathsf{E}\langle M\rangle_\gamma^{p/2}.$$

Pro důkaz zbývající nerovnosti položme $A_t = \langle M\rangle_t$, $C_t = \sup_{s\le t}\|M_s\|^2$. Snadno se ověří, že proces C dominuje proces A. Je-li totiž $\mathsf{E}C_\varrho < \infty$, pak je $(M_{\cdot\wedge\varrho})$ L^2-martingal vzhledem k lemmatu C.2 a

$$\mathsf{E}A_{t\wedge\varrho} = \mathsf{E}\langle M\rangle_{t\wedge\varrho} = \mathsf{E}\|M_{t\wedge\varrho}\|^2 \le E\sup_{s\ge 0}\|M_{s\wedge\varrho}\|^2 = \mathsf{E}C_\varrho < \infty,$$

takže i $\mathsf{E}A_\varrho \le \mathsf{E}C_\varrho$ a lze opět užíti důsledek 1.3. Q.E.D.

Příklad 1.2. Důsledek 1.4 je užitečným nástrojem pro vyšetřování konvergence posloupnosti martingalů. Naznačme si to ve speciálním případě. Buď W n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces, $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ progresivně měřitelný proces, $\|\Psi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ skoro jistě. Potom

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\ge 0}\left\|\int_0^{t\wedge\gamma}\Psi(s)\,\mathrm{d}W(s)\right\| \ge \varepsilon\right\} \le \mathsf{P}\left\{\int_0^\gamma \|\Psi(s)\|^2\,\mathrm{d}s \ge \delta\right\} + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \tag{7}$$

pro všechna $\varepsilon > 0$, $\delta \ge 0$ a libovolný markovský čas γ. Máme-li posloupnost $\Phi_k : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$, $k \in \mathbb{N}$, progresivně měřitelných procesů, $\|\Phi_k\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě, pak použivše (7) na proces $\Psi = \Phi_k - \Phi_0$, $k \ge 1$, nahlédneme snadno, že

$$\int_0^\gamma \left\|\Phi_k(s) - \Phi_0(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{P}} 0$$

implikuje

$$\sup_{t\ge 0}\left\|\int_0^{t\wedge\gamma}\Phi_k(s)\,\mathrm{d}W(s) - \int_0^{t\wedge\gamma}\Phi_0(s)\,\mathrm{d}W(s)\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{P}} 0.$$

(Lenglartova nerovnost ve tvaru (7) byla odvozena již K. Itôem, jenž ji použil ve své původní konstrukci stochastického integrálu.)

Důkaz věty 1.1. Krok 1. Nerovnosti (1) stačí dokázat pro $\tau = \infty$. Předpokládejme totiž, že existují konstanty $C_p, c_p \in]0,\infty[$ tak, že pro libovolný proces M splňující předpoklady věty platí

$$c_p\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2} \le \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\|M_t\|^p \le C_p\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}. \tag{8}$$

Buď τ libovolný markovský čas, potom je proces N, $N_t = M_{t\wedge\tau}$, lokální martingal se spojitými trajektoriemi, $N_0 = 0$, proto podle (8)

$$c_p\mathsf{E}\langle M\rangle_\tau^{p/2} = c_p\mathsf{E}\langle N\rangle_\infty^{p/2} \le \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\|N_t\|^p = \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\|M_{t\wedge\tau}\|^p,$$

podobně pro pravou nerovnost v (1).

KROK 2. Nerovnost (8) stačí ověřit pro omezené lokální martingaly. Přesněji: předpokládejme existenci konstant $C_p, c_p \in\,]0,\infty[$ takových, že pro každý lokální martingal M vyhovující předpokladům věty a splňující

$$\sup_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \bigl\{\|M\| + \langle M\rangle\bigr\} < \infty \tag{9}$$

platí (8). Tvrdíme, že potom (8) platí i pro M, které (9) nesplňují. Vskutku, buď M libovolný lokální martingal splňující předpoklady věty 1.1, vzhledem ke spojitosti trajektorií M a $\langle M\rangle$ existují markovské časy $\tau(k) \nearrow \infty$ tak, že procesy N^k, $\langle N^k\rangle$, kde $N^k_t = M_{t\wedge\tau(k)}$, jsou omezené na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Proto podle učiněného předpokladu dostaneme

$$c_p \mathsf{E}\langle M\rangle^{p/2}_{\tau(k)} \le \mathsf{E} \sup_{t\ge 0} \|M_{t\wedge\tau(k)}\|^p \le C_p \mathsf{E}\langle M\rangle^{p/2}_{\tau(k)}, \tag{10}$$

kde jsem užili rovnost $\langle N^k\rangle_\infty = \langle M\rangle_{\tau(k)}$. Přitom zřejmě

$$\langle M\rangle_{\tau(k)} \nearrow \langle M\rangle_\infty, \quad \sup_{t\ge 0} \|M_{t\wedge\tau(k)}\| \nearrow \sup_{t\ge 0} \|M_t\| \quad \text{při } k \to \infty,$$

lze tudíž (8) užitím Leviho věty odvodit z (10).

KROK 3. Zvolme libovolně pevně $p \in [2,\infty[$, chceme nalézti konstantu $C_p < \infty$ tak, aby nerovnost

$$\mathsf{E} \sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p \le C_p \mathsf{E}\langle M\rangle^{p/2}_\infty \tag{11}$$

platila pro každý spojitý m-dimensionální lokální martingal $M = (M^1, \dots, M^m)^*$ takový, že $M_0 = 0$ a je splněno (9). Víme, že existuje $\mathbb{M}_{m\times m}$-hodnotový progresivně měřitelný proces ϱ tak, že

$$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \varrho(r)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_r, \quad t \ge 0,$$

přičemž $\varrho(s)$ je symetrická positivně semidefinitní matice a $\operatorname{Tr}\varrho(s) = 1$ pro $\mu_{\langle M\rangle}$-skoro všechna[10] $s \ge 0$ P-skoro jistě. Proto[11]

$$\begin{aligned}
\|\varrho(s)\|_{\mathrm{op}} \equiv \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ \|x\|=1}} \|\varrho(s)x\| &= \text{největší vlastní číslo matice } \varrho(s) \\
&\le \text{součet všech vlastních čísel matice } \varrho(s) \\
&= \operatorname{Tr}\varrho(s) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

[10]Připomeňme, že μ_f značíme míru na $\mathbb{R}_+$ s distribuční funkcí f.

[11]Potřebné výsledky z lineární algebry lze nalézti např. v knize M. Fiedler: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha 1981, cf. zvláště větu 9.2. Prvá rovnost je dokázána i v apendixu F, viz věta F.3.

tudíž

$$\big\langle \varrho(s)z, z\big\rangle_{\mathbb{R}^m} \leq \|\varrho(s)\|_{\mathrm{op}}\|z\|^2 \leq \|z\|^2 \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{R}^m \tag{12}$$

platí pro $\mu_{\langle M\rangle}$-skoro všechna $s \geq 0$ P-skoro jistě.

Jelikož $p \geq 2$, funkce definovaná předpisem $V : x \longmapsto \|x\|^p$ splňuje $V \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m)$ a

$$DV(x) = p\|x\|^{p-2}x, \quad D^2V(x) = p\|x\|^{p-2}I + p(p-2)\|x\|^{p-4}xx^*.$$

Je-li $R = (R_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times m}$ matice s $\operatorname{Tr} R = 1$, spočteme snadno

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\big(D^2V(x)R\big) &= p\|x\|^{p-2}\operatorname{Tr} R + p(p-2)\|x\|^{p-4}\operatorname{Tr}(xx^*R)\\ &= p\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}\sum_{i,j=1}^m x_i x_j R_{ji}\\ &= p\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}\langle Rx, x\rangle_{\mathbb{R}^m}.\end{aligned}$$

Podle Itôova lemmatu pro libovolné $T \geq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}\|M_T\|^p &= p\int_0^T \|M_t\|^{p-2}M_t^*\,\mathrm{d}M_t + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{Tr}\big(D^2V(M_t)\varrho(t)\big)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t\\ &= p\int_0^T \|M_t\|^{p-2}M_t^*\,\mathrm{d}M_t\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \Big[p\|M_t\|^{p-2} + p(p-2)\|M_t\|^{p-4}\big\langle \varrho(t)M_t, M_t\big\rangle_{\mathbb{R}^m}\Big]\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t.\end{aligned}$$

Uživše postupně (9), (12) a Hölderovu nerovnost odvodíme

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\|M_T\|^p &= \frac{1}{2}\mathsf{E}\int_0^T \Big[p\|M_t\|^{p-2} + p(p-2)\|M_t\|^{p-4}\big\langle \varrho(t)M_t, M_t\big\rangle_{\mathbb{R}^m}\Big]\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t\\ &\leq \frac{1}{2}p(p-1)\mathsf{E}\int_0^T \|M_t\|^{p-2}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t\\ &\leq \frac{1}{2}p(p-1)\mathsf{E}\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|^{p-2}\int_0^T \mathrm{d}\langle M\rangle_t\Big\}\\ &= \frac{1}{2}p(p-1)\mathsf{E}\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|^{p-2}\langle M\rangle_T\Big\}\\ &\leq \frac{1}{2}p(p-1)\Big(\mathsf{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|^p\Big)^{1-2/p}\Big(\mathsf{E}\langle M\rangle_T^{p/2}\Big)^{2/p}.\end{aligned}$$

Podle Doobovy maximální nerovnosti

$$\mathsf{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\mathsf{E}\|M_T\|^p$$

pro každé $T \in \mathbb{R}_+$, tudíž

$$\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\|M_t\|^p \le \frac{p(p-1)}{2}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\Big(\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\|M_t\|^p\Big)^{1-2/p}\Big(\mathsf{E}\langle M\rangle_T^{p/2}\Big)^{2/p}. \tag{13}$$

Je-li $\mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\|M_t\|^p = 0$, je dokazované tvrzení (11) triviálně splněno, v opačném případě lze v nerovnosti (13) pro dostatečně velká $T > 0$ vykrátit a získáme odhad

$$\Big(\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\|M_t\|^p\Big)^{2/p} \le \frac{p(p-1)}{2}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\Big(\mathsf{E}\langle M\rangle_T^{p/2}\Big)^{2/p},$$

z něhož nerovnost (11) odvodíme umocněním na $\frac{p}{2}$ a limitním přechodem $T \nearrow \infty$, který lze provésti díky Leviho větě.

Krok 4. Platnost nerovnosti (11) pro $p \in \,]0,2[$ vyplývá z důsledku 1.4.

Krok 5. Zvolme opět $p \in \,]0,\infty[$ libovolné, nalezneme $c_p > 0$ tak, aby nerovnost

$$c_p\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2} \le \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\|M_t\|^p \tag{14}$$

platila pro každý spojitý lokální martingal $M = (M^1, \dots, M^m)^*$ s $M_0 = 0$, splňující předpoklad (9). Jak jsme již ověřili v kroku 3, plyne z Itôovy formule

$$\|M_t\|^2 = 2\int_0^t M_s^*\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}\big(2I\varrho(s)\big)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = 2\int_0^t M_s^*\,\mathrm{d}M_s + \langle M\rangle_t.$$

Proces $\zeta = \|M\|^2 - \langle M\rangle$ je martingal se spojitými trajektoriemi, $\zeta_0 = 0$. Právě odvozená rovnost umožňuje spočíst jeho kvadratickou variaci:

$$\begin{aligned}\langle\zeta\rangle_t &= \Big\langle 2\sum_{i=1}^m\int_0^\cdot M_s^i\,\mathrm{d}M_s^i\Big\rangle_t = 4\sum_{i,j=1}^m\int_0^t M_s^iM_s^j\,\mathrm{d}\langle M^i,M^j\rangle_s\\ &= 4\sum_{i,j=1}^m\int_0^t M_s^iM_s^j\varrho_{ij}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\\ &= 4\int_0^t\big\langle\varrho(s)M_s,M_s\big\rangle_{\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s.\end{aligned}$$

Zřejmě ζ splňuje (9); užitím již dokázané nerovnosti (11) s exponentem $p/2$ dostaneme

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge 0}\Big|\|M_t\|^2 - \langle M\rangle_t\Big|^{p/2} = \mathsf{E}\sup_{t\ge 0}|\zeta_t|^{p/2} \le C_{p/2}\mathsf{E}\langle\zeta\rangle_\infty^{p/4}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 4^{p/4} C_{p/2} \mathsf{E}\biggl(\int_0^\infty \bigl\langle \varrho(s) M_s, M_s \bigr\rangle \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\biggr)^{p/4} \\
&\le D_1 \mathsf{E}\biggl(\int_0^\infty \|M_s\|^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\biggr)^{p/4} \\
&\le D_1 \mathsf{E}\biggl(\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^2 \int_0^\infty \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\biggr)^{p/4} \\
&= D_1 \mathsf{E}\Bigl\{\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^{p/2} \langle M\rangle_\infty^{p/4}\Bigr\} \\
&\le D_1 \Bigl(\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p\Bigr)^{1/2} \Bigl(\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}\Bigr)^{1/2},
\end{aligned}
$$

třetí nerovnost plyne z (12), poslední je zřejmým důsledkem Hölderovy nerovnosti a konstanta D_1 závisí jen na p.

Protože pro všechna $u, v \ge 0$ triviálně platí (jak je dokázáno v apendixu B)

$$
|v|^{p/2} \le \bigl(|u-v| + |u|\bigr)^{p/2} \le \max(2^{\frac{p}{2}-1}, 1)\bigl(|u-v|^{p/2} + |u|^{p/2}\bigr),
$$

dostáváme

$$
\langle M\rangle_t^{p/2} \le 2^{p/2} \Bigl| \|M_t\|^2 - \langle M\rangle_t \Bigr|^{p/2} + 2^{p/2} \|M_t\|^p,
$$

tudíž

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2} &\le 2^{p/2} \mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \Bigl| \|M_t\|^2 - \langle M\rangle_t \Bigr|^{p/2} + 2^{p/2} \mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p \\
&\le 2^{p/2} D_1 \Bigl(\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p\Bigr)^{1/2} \Bigl(\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}\Bigr)^{1/2} + 2^{p/2} \mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p.
\end{aligned}
$$

Označíme-li

$$
\mu = \Bigl(\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}\Bigr)^{1/2}, \quad \nu = \Bigl(\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \|M_t\|^p\Bigr)^{1/2},
$$

nabývá poslední nerovnost tvaru

$$
\mu^2 \le D_2\bigl(\mu\nu + \nu^2\bigr) \tag{15}
$$

s vhodnou konstantou $D_2 \in [1, \infty[$ závisící jen na p. Tvrdíme, že z (15) plyne

$$
\mu \le 2 D_2 \nu. \tag{16}
$$

Uvažme, že $\mu, \nu < \infty$ vzhledem k (9). Je-li $\mu = 0$ nebo $\nu = 0$, pak (16) platí triviálně; v opačném případě pro spor předpokládejme, že $\mu > 2D_2\nu$, tedy též $\nu/\mu \le (2D_2)^{-1} \le \frac{1}{2}$. Užitím (15) získáme $2D_2\mu\nu < D_2(\mu\nu + \nu^2)$, odtud

$$2 < 1 + \frac{\nu}{\mu} \le 1 + \frac{1}{2D_2} \le \frac{3}{2},$$

tento spor dokazuje (16) a tím i nerovnost (14) (s konstantou $c_p = (2D_2)^{-2}$). Q.E.D.

Poznámka 1.1. Vyšetřujeme-li pouze reálné martingaly, důkaz se mírně zpřehlední, speciálně, není třeba uvažovat hustotu ϱ tensorové kvadratické variace a znát její vlastnosti. Odhadnuvše každou komponentu zvlášť pak můžeme odvodit Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost pro vícedimensionální lokální martingaly z případu jednodimensionálního, arci s konstantami c_p, C_p závislými na dimensi.

Poznámka 1.2. Předvedený důkaz věty 1.1 neposkytuje optimální hodnoty konstant c_p a C_p. Pro $p \ge 2$ jsme získali

$$C_p = \left[\frac{p(p-1)}{2}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\right]^{p/2}.$$

Jelikož

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p = e,$$

vidíme, že existuje konstanta $A \in \,]0,\infty[$ tak, že $C_p \le A^p p^p$ pro všechna $p \ge 2$. Jemnějšími úvahami lze ukázat,[12] že (1) platí s konstantou C_p vyhovující odhadu

$$C_p \le A^p p^{p/2} \tag{17}$$

pro nějaké $A \in \,]0,\infty[$ a všechna $p \ge 2$. Nerovnost (17) má následující zajímavý důsledek.

Existují konstanty $\beta > 0$ a $K < \infty$ tak, že pro všechna $\kappa > 0$, každý markovský čas τ a každý spojitý lokální martingal M splňující $M_0 = 0$ a

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\langle M\rangle_\tau = \big\|\langle M\rangle_\tau\big\|_{L^\infty(\Omega)} \le \kappa \tag{18}$$

platí

$$\mathsf{E}\exp\Big(\frac{\beta}{\kappa}\sup_{t\ge 0}\big\|M_{t\wedge\tau}\big\|^2\Big) \le K. \tag{19}$$

To jest, M je exponenciálně L^2-integrovatelný. Přímý výpočet pro jednodimensionální Wienerův proces B ukazuje, že pro libovolné $t > 0$ pevné lze nalézti $\lambda_0 > 0$ takové, že $\mathsf{E}\exp(\lambda B_t^2) < \infty$ pro $\lambda < \lambda_0$, zatímco pro $\lambda \ge \lambda_0$ integrál diverguje. Odhad (19) tedy obecně nelze zlepšit. Díky Čebyševově nerovnosti je okamžitým důsledkem (19) exponenciální odhad chvostů:[13]

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\ge 0}\|M_{t\wedge\tau}\| \ge \varepsilon\Big\} \le K\exp\Big(-\frac{\beta\varepsilon^2}{\kappa}\Big)$$

[12] Cf. B. Davis, *Duke Math. J. 43* (1976), 697–704. Jiné důkazy lze nalézti ve statích M. T. Barlow, M. Yor, *J. Funct. Anal. 49* (1982), 198–229; Y.-F. Ren, H.-Y. Liang, *Statist. Probab. Lett. 53* (2001), 227–233. Ani jeden z těchto důkazů není snadný, vztahují se přitom jen k případu jednodimensionálnímu. Přechod k vícerozměrným martingalům je spjat s dodatečnými komplikacemi, jež lze překonat třeba pomocí věty 4.4 z práce O. Kallenberg, R. Sztencel, *Probab. Theory Related Fields 88* (1991), 215–247.

[13] Anglicky: *exponential tail estimate*, český ekvivalent není – pokud vím – ustálen.

pro všechna $\varepsilon > 0$, pokud M splňuje (18).

Odvoďme (19): označme $J(M) = \sup_{t\geq 0} \|M_{t\wedge\tau}\|$. Podle věty 1.1 a (17) pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, platí

$$\mathsf{E} J(M)^{2k} \leq A^{2k} (2k)^k \, \mathsf{E} \langle M\rangle_\tau^k \leq (2A^2)^k k^k \kappa^k,$$

tedy též

$$\mathsf{E}\Big\{ \frac{1}{k!} \Big(\frac{J(M)^2}{\kappa} \Big)^k \Big\} \leq \big(2A^2\big)^k \, \frac{k^k}{k!} \leq \big(2A^2 e\big)^k, \tag{20}$$

jelikož očividně $k^k/k! \leq e^k$. Zvolme $\beta > 0$ tak, aby $q \equiv 2A^2 e\beta < 1$, a nerovnost (20) vynásobme β^k, získáme

$$\mathsf{E}\Big\{ \frac{1}{k!} \Big(\frac{\beta J(M)^2}{\kappa} \Big)^k \Big\} \leq q^k.$$

Sečtením přes $k \geq 1$ obdržíme

$$\mathsf{E} \exp\Big(\frac{\beta J(M)^2}{\kappa} \Big) - 1 \leq \frac{q}{1-q},$$

což je právě dokazovaná nerovnost (19).[14] Poznamenejme, že pro n-dimensionální Wienerův proces W a progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotový proces Φ splňující $\|\Phi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ skoro jistě přechází (19) v

$$\mathsf{E} \exp \left(\frac{\beta \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \Phi(s) \, \mathrm{d}W(s) \right|^2}{\operatorname{ess\,sup}_\Omega \int_0^T \|\Phi(s)\|^2 \, \mathrm{d}s} \right) \leq K.$$

Předvedený důkaz (19) je elegantní, ale jednoduchý je jen zdánlivě, neboť užívá netriviální nerovnost (17). Ovšem ani alternativní důkazy odhadu (19), založené na jiných myšlenkách, nejsou zcela přímočaré.

[14] Dokázali jsme vlastně velmi speciální případ tzv. Zygmundovy extrapolační věty, jejíž obecnou formulaci lze nalézti např. v knize A. Zygmund: *Trigonometric series*, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge 1959, Theorem XII.4.41.

Zvolme libovolně pevně stochastickou basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC), na níž je definován n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W. Symbolem $\mathscr{M}$ budeme značit σ-algebru $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelných množin.

Nechť jsou dány $T > 0$, $t_0 \in [0, T[$, borelovské funkce $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}$ a náhodná veličina $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Definice 2.1. $\mathscr{M}$-měřitelný $\mathbb{R}^m$-hodnotový náhodný proces X se nazývá *řešení* stochastické diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}X = b(t, X)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X)\,\mathrm{d}W \tag{1}$$

(na intervalu $[t_0, T]$) s počáteční podmínkou

$$X(t_0) = \varphi, \tag{2}$$

pokud

(i) $$\int_{t_0}^{T} \left\{ \|b(t, X(t))\| + \|\sigma(t, X(t))\|^2 \right\} \mathrm{d}t < \infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

a

(ii) $$X(t) = \varphi + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s)$$

pro každé $t \in [t_0, T]$ P-skoro jistě.

Pravíme, že řešení úlohy (1), (2) je určeno jednoznačně, jestliže pro libovolná dvě její řešení X, $\widetilde{X}$ platí

$$\mathsf{P}\{\, X_t = \widetilde{X}_t \quad \forall t \in [t_0, T] \,\} = 1.$$

Jinými slovy, progresivně měřitelný proces X je řešením, má-li stochastický diferenciál (1) a platí-li $X(t_0) = \varphi$ P-skoro jistě. Charakteristickou vlastností řešení je rovnost (ii), předpoklad (i) pouze zajišťuje, že integrály v (ii) jsou dobře definovány.

Není-li počáteční podmínka specifikována, pravíme, že $\mathscr{M}$-měřitelný $\mathbb{R}^m$-hodnotový proces X je řešení rovnice (1) (na intervalu $[t_0, T]$), pokud je splněno (i) z definice 2.1 a

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s) \tag{3}$$

pro každé $t \in [t_0, T]$ P-skoro všude. Každé řešení rovnice (1) je zřejmě proces se spojitými trajektoriemi.

Jsou-li funkce b a σ definovány na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, lze přirozeným způsobem zavésti pojem řešení rovnice (1) na neomezeném intervalu $[t_0, \infty[$ – požadujeme, aby X splňovalo (i) z definice 2.1 pro libovolné $T \geq t_0$ a (3) pro každé $t \geq t_0$.

O funkcích b a σ hovoříme jako o *koeficientech* rovnice (1); koeficient b se obvykle nazývá *drift* (nebo lokální posunutí), koeficient σ pak *matice difuse* či *difusní matice*.[15] (Varování: týž název matice difuse se používá i pro matici $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$.)

Poznamenejme, že v případě $\sigma \equiv 0$ a $\varphi = y \in \mathbb{R}^m$ je X řešením rovnice (1), (2) podle definice 2.1 právě tehdy, je-li X absolutně spojité (neboli Carathéodoryho) řešení[16] obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{x} = b(t, x), \quad x(t_0) = y.$$

Cílem této kapitoly je dokázat následující větu, jež udává postačující podmínky na koeficienty rovnice (1) zajišťující existenci (právě jednoho) řešení úlohy (1), (2). Věta sama o sobě není příliš silná, ale jak uvidíme, je zcela základním nástrojem při důkazu výsledků silnějších (a užitečnějších v aplikacích).

Věta 2.1. *Buďte* $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}$ *borelovské funkce vyhovující následujícím předpokladům:*

(I) $\exists K_* < \infty \; \forall t \in [0, T] \; \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t, x)\| \vee \|\sigma(t, x)\| \leq K_*(1 + \|x\|),$$

(II) $\exists K < \infty \; \forall t \in [0, T] \; \forall x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| \vee \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Potom:

1° Pro každé $t_0 \in [0, T[$ *a libovolnou* $\mathscr{F}_{t_0}$*-měřitelnou funkci* $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *splňující* $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$ *existuje jediné řešení* X *rovnice* (1), (2).

2° Pro každé $p \in [2, \infty[$ *existuje konstanta* $C^* < \infty$, *závisící jen na* p, T *a* K_*, *taková, že*

$$\mathsf{E} \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|X(t)\|^p \leq C^* \big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big). \tag{4}$$

Poznámka 2.1. a) O funkcích vyhovujících předpokladu (I) hovoříme jako o funkcích s (nejvýše) lineárním růstem; omezené funkce (I) jistě splňují.

b) Připomeňme pojem lipschitzovské funkce: jsou-li $(\mathit{\Gamma}, \varrho_{\mathit{\Gamma}})$, $(\mathit{\Pi}, \varrho_{\mathit{\Pi}})$ metrické prostory, pak se zobrazení $f : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathit{\Pi}$ nazývá lipschitzovské, pokud existuje konstanta $\kappa < \infty$ (lipschitzovská konstanta) tak, že $\varrho_{\mathit{\Pi}}(f(x), f(y)) \leq \kappa \varrho_{\mathit{\Gamma}}(x, y)$ pro

[15] Užívá se – nyní však již řídce – i název *dispersní matice.*

[16] O theorii absolutně spojitých řešení se lze poučit třeba v osmnácté kapitole knihy J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978.

všechna $x, y \in \Gamma$. V předpokladu (II) požadujeme, aby funkce $b(t,\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma(t,\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ byly lipschitzovské s lipschitzovskou konstantou na $t \in [0,T]$ nezávislou. Vzhledem k nejběžnější interpretaci ve fysikálních modelech nazývá se obvykle v dvojici $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ proměnná t čas a x prostorová proměnná. Předpoklad (II) je proto znám jako lipschitzovskost v prostorové proměnné (stejnoměrná v t).

c) Jestliže b, σ nezávisí na čase, redukuje se (II) na požadavek lipschitzovskosti funkcí $b : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$. V takovém případě je (I) zřejmým důsledkem (II).

d) Obecně platí, že koeficienty vyhovující (II) jsou lineárního růstu, pokud jsou $b(\cdot,0)$, $\sigma(\cdot,0)$ omezené funkce na $[0,T]$. Uvidíme ovšem v dalším výkladu, že je užitečné vědět, které odhady závisí pouze na předpokladu (I) a nikoliv na (II).

e) Pokud je počáteční čas t_0 zvolen pevně, lze uvažovat koeficienty definované jen na $[t_0,T] \times \mathbb{R}^m$. Zpravidla nás však zajímá řešitelnost úlohy (1), (2) pro libovolnou volbu počátečního času a počáteční podmínky.

Poznámka 2.2. Nechť jsou b a σ borelovské funkce definované na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, jejichž restrikce na $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ pro každé $T > 0$ splňují (I), (II) (s konstantami, které mohou na T záviseti). Podle věty 2.1 pro každé $T > t_0$ existuje řešení $X^{(T)}$ úlohy (1), (2) na intervalu $[t_0,T]$. Z tvrzení o jednoznačnosti vyplývá, že $X_t^{(S)} = X_t^{(T)}$ pro všechna $t_0 \le t \le S$ P-skoro jistě, kdykoliv $t_0 < S < T$. Definujeme-li tedy

$$X_t = X_t^{(t_0+N+1)} \quad \text{pro } t \in [t_0+N, t_0+N+1[,\ N \in \mathbb{N},$$

ověří se snadno, že X je (jediné) řešení (1), (2) na intervalu $[t_0,\infty[$.

Poznámka 2.3. Podle definice je řešení X progresivně měřitelný proces (jak to i vyžaduje Itôova theorie stochastické integrace, kterou užíváme). $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelnost počáteční podmínky φ je proto nutný předpoklad. Třída přípustných počátečních podmínek ovšem značně závisí na volbě filtrace $(\mathscr{F}_t)$.

a) Nechť je $(\mathscr{F}_t)$ obohacená kanonická filtrace Wienerova procesu,

$$\mathscr{F}_t = \sigma(\mathbf{N}, W(r),\ r \le t), \quad \mathbf{N} = \{N \in \mathscr{F};\ \mathsf{P}(N) = 0\};$$

je známo, že tato filtrace splňuje (UC).[17] Protože $W(0) = 0$ P-skoro všude na Ω, je $\mathscr{F}_0 = \sigma(\mathbf{N},\Omega)$, tudíž $\mathscr{F}_0$-měřitelné funkce jsou P-skoro všude konstantní. V čase $t_0 = 0$ lze zadávat jen deterministické počáteční podmínky, $\varphi(\cdot) = x \in \mathbb{R}^m$ P-skoro jistě.

b) Buď W $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces pro nějakou filtraci $(\mathscr{F}_t)$ a φ náhodná veličina nezávislá s $\mathscr{F}_\infty$. Položme $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t \vee \sigma(\varphi)$, $t \ge 0$. Je jasné, že funkce φ je $\mathscr{G}_{t_0}$-měřitelná a proces W je $(\mathscr{G}_t)$-adaptovaný. Zvolme $t > s$, tvrdíme, že $W(t) - W(s)$

[17] Cf. I. Karatzas, S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer–Verlag, New York 1988, Proposition 2.7.7.

a $\mathscr{G}_s$ jsou nezávislé. Podle předpokladu je totiž přírůstek $W(t) - W(s)$ nezávislý se σ-algebrami $\mathscr{F}_s$ i $\sigma(\varphi)$, je tedy nezávislý i s σ-algebrou generovanou jejich sjednocením.[18] W je proto $(\mathscr{G}_t)$-Wienerův proces. To znamená, že úlohu (1), (2) s počáteční podmínkou nezávislou s Wienerovým procesem můžeme vždy řešit pracujíce na stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{G}_t), \mathsf{P})$.

Poznámka 2.4. Jak uvidíme v důsledku 2.3, předpoklad $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$ je pro existenci řešení redundantní; methoda, kterou užijeme k důkazu věty 2.1, ho však vyžaduje. Kvadratická integrovatelnost počáteční podmínky je naopak podstatná, chceme-li získat řešení s konečným druhým momentem. Tvrzení 2° věty to dokonce ukazuje pro libovolné $p \geq 2$: řešení X_t leží v prostoru $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ pro všechna t, pokud v něm leží počáteční podmínka φ. Speciálně si povšimněme, že je-li počáteční podmínka $\varphi = x \in \mathbb{R}^m$ deterministická, pak $\sup_{t \leq T} \|X_t\| \in L^q(\mathsf{P})$ pro všechna $q < \infty$.

Nejprve dokážeme, že existuje nejvýše jedno řešení. K tomu stačí, aby koeficienty splňovaly předpoklady věty 2.1 pouze lokálně.

Věta 2.2. *Buďte* $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *a* $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}$ *borelovské funkce vyhovující předpokladu*

(III) $\quad \forall N \in \mathbb{N}\ \exists K_N < \infty \quad \forall t \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| \vee \|y\| \leq N$

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \vee \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_N \|x - y\|.$$

Nechť $t_0 \in [0, T[$ *a* X, Y *jsou dvě řešení rovnice* (1) *taková, že* $X(t_0) = Y(t_0)$ P-*skoro jistě. Potom* $X = Y$ *na* $[t_0, T]$, *to jest*

$$\mathsf{P}\big\{X(t) = Y(t) \ \ \forall t \in [t_0, T]\big\} = 1.$$

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu předpokládejme – bez újmy na obecnosti – že $t_0 = 0$. Pro $N \in \mathbb{N}$ položme

$$\tau_N = \inf\big\{t \geq 0;\ \|X_t\| \geq N\big\} \wedge \inf\big\{t \geq 0;\ \|Y_t\| \geq N\big\}$$

s konvencí $\inf \emptyset = T$; τ_N jsou zřejmě markovské časy. Procesy X a Y řeší (1) a $X_0 = Y_0$, z čehož plyne

$$X_t - Y_t = \int_0^t \big\{b(s, X_s) - b(s, Y_s)\big\}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \big\{\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\big\}\,\mathrm{d}W_s$$

pro všechna $t \in [0, T]$, speciálně, oba integrály jsou dobře definovány. Na množině $\{\tau_N = 0\}$ platí $X(t \wedge \tau_N) - Y(t \wedge \tau_N) = X(0) - Y(0) = 0$, $0 \leq t \leq T$, podle

[18] Viz např. J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, Důsledek II.5.2.

předpokladu, na množině $\{\tau_N > 0\}$ pak dostaneme $\|X(t\wedge\tau_N)\| \vee \|Y(t\wedge\tau_N)\| \le N$ pro všechna $t \in [0,T]$ vzhledem k definici τ_N. Proto zřejmě $\|X(t\wedge\tau_N) - Y(t\wedge\tau_N)\| \in L^2(\mathsf{P})$ a funkce $t \longmapsto \mathsf{E}\|X(t\wedge\tau_N) - Y(t\wedge\tau_N)\|^2$ je spojitá díky spojitosti trajektorií a větě o majorisované konvergenci. Dále, užitím (III) můžeme odvodit

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\int_0^T \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\big\|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\le K_N^2\mathsf{E}\int_0^T \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\big\|X_s - Y_s\big\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\le 2K_N^2\mathsf{E}\int_0^T \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\big\{\|X_s\|^2 + \|Y_s\|^2\big\}\,\mathrm{d}s \\
&\le 4K_N^2 T N^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

To spolu s předpokladem (III) umožňuje následující odhady: Ježto

$$
\begin{aligned}
X(t\wedge\tau_N) - Y(t\wedge\tau_N) = \int_0^{t\wedge\tau_N} \big\{b(s,X_s) - b(s,Y_s)\big\}\,\mathrm{d}s \\
+ \int_0^{t\wedge\tau_N} \big\{\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\big\}\,\mathrm{d}W_s,
\end{aligned}
$$

dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big\|X(t\wedge\tau_N) - Y(t\wedge\tau_N)\big\|^2 &\le 2\mathsf{E}\bigg\|\int_0^{t\wedge\tau_N} \big\{b(s,X_s) - b(s,Y_s)\big\}\,\mathrm{d}s\bigg\|^2 \\
&\quad + 2\mathsf{E}\bigg\|\int_0^{t\wedge\tau_N} \big\{\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\big\}\,\mathrm{d}W_s\bigg\|^2 \\
&\le 2\mathsf{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_N} \big\|b(s,X_s) - b(s,Y_s)\big\|\,\mathrm{d}s\bigg)^2 \\
&\quad + 2\mathsf{E}\bigg\|\int_0^{t} \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\big\{\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\big\}\,\mathrm{d}W_s\bigg\|^2 \\
&\le 2\mathsf{E}\bigg\{\big(t\wedge\tau_N\big)\int_0^{t\wedge\tau_N} \big\|b(s,X_s) - b(s,Y_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\bigg\} \\
&\quad + 2\mathsf{E}\int_0^{t} \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\big\|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\le 2K_N^2(T+1)\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_N} \|X_s - Y_s\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\le 2K_N^2(T+1)\mathsf{E}\int_0^{t} \big\|X(s\wedge\tau_N) - Y(s\wedge\tau_N)\big\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Podle Gronwallova lemmatu (viz věta D.1)

$$\mathsf{E}\big\|X(t\wedge\tau_N)-Y(t\wedge\tau_N)\big\|^2=0$$

pro každé $t\in[0,T]$, to jest, $X(t\wedge\tau_N)=Y(t\wedge\tau_N)$ P-skoro jistě pro libovolné $t\in[0,T]$. Ze spojitosti trajektorií ihned plyne

$$\mathsf{P}\big\{\omega\in\Omega;\ X(t,\omega)=Y(t,\omega)\ \ \forall t\in[0,\tau_N(\omega)]\big\}=1.$$

Zbývá si uvědomit, že pro každé ω, pro něž jsou trajektorie $X(\cdot,\omega)$, $Y(\cdot,\omega)$ spojité, existuje $N_0(\omega)\in\mathbb{N}$ tak, že $\tau_N(\omega)=T$ pro $N\geq N_0(\omega)$. Q.E.D.

Myšlenka důkazu věty 2.1. Je-li Y m-dimensionální $\mathscr{M}$-měřitelný proces, definujme proces $\mathfrak{K}Y$ předpisem

$$\mathfrak{K}Y(t)=\varphi+\int_{t_0}^t b(s,Y(s))\,\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t\sigma(s,Y(s))\,\mathrm{d}W(s),\quad t_0\leq t\leq T.$$

Proces X je zřejmě řešením (1), (2), právě když $X=\mathfrak{K}X$, to jest, pokud je pevným bodem zobrazení $\mathfrak{K}$. Je možno nalézti úplný metrický prostor progresivně měřitelných procesů, v němž je $\mathfrak{K}$ kontraktivní zobrazení. Existence řešení potom plyne z Banachovy věty o pevném bodu, navíc k (jedinému) řešení konverguje každá posloupnost $\{X_n\}$ tvaru $X_{n+1}=\mathfrak{K}X_n$, $n\in\mathbb{N}$, X_0 libovolný počáteční proces. Chtějíce se vyhnout technickým komplikacím při konstrukci tohoto úplného prostoru neužijeme větu o pevném bodu, ale dokážeme přímo konvergenci posloupnosti iterací $\{X_n\}$ při vhodné volbě X_0.

Důkaz věty 2.1. Opět pro jednoduchost položíme $t_0=0$. Buď $p\in[2,\infty[$ takové, že $\mathsf{E}\|\varphi\|^p<\infty$. Definujme pro $k\in\mathbb{N}$ náhodné procesy X_k předpisem:

$$\begin{aligned}X_0(t)&=\varphi,\quad 0\leq t\leq T,\\ X_{k+1}(t)&=\varphi+\int_0^t b(s,X_k(s))\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s,X_k(s))\,\mathrm{d}W(s),\quad 0\leq t\leq T.\end{aligned}\tag{5}$$

a) Nejprve vyjasníme, že definice (5) je korektní, to jest, procesy X_k jsou $\mathscr{M}$-měřitelné a integrály v (5) konvergují. K tomu dokážeme indukcí, že existuje konstanta D, závisící jen na K_*, T, p, taková, že pro všechna $k\in\mathbb{N}$ platí

$$1+\mathsf{E}\|X_k(t)\|^p\leq D\big(1+\mathsf{E}\|\varphi\|^p\big)\sum_{i=0}^k\frac{(Dt)^i}{i!},\quad 0\leq t\leq T.\tag{6}$$

Položme

$$D=\max\big(3^{p-1},6^{p-1}T^{\frac{p}{2}-1}K_*^p(C_p+T^{\frac{p}{2}})\big),$$

kde C_p je konstanta z věty 1.1. Pro $k=0$ je X_0 $\mathscr{M}$-měřitelný proces a odhad (6) je triviálně splněn. Nechť tedy pro nějaké $k\geq 0$ už víme, že X_k je dobře definovaný $\mathscr{M}$-měřitelný náhodný proces vyhovující odhadu (6). Potom jsou integrandy ve formuli (5) progresivně měřitelné: podle předpokladu je $X_k : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathscr{M}$-měřitelné zobrazení, tedy i

$$h : [0,T] \times \Omega \longrightarrow [0,T] \times \mathbb{R}^m, \quad (s,\omega) \longmapsto (s, X_k(s,\omega))$$

je $\mathscr{M}$-měřitelná funkce. Protože b a σ jsou borelovské, jsou superposice $b \circ h$ a $\sigma \circ h$ $\mathscr{M}$-měřitelné. Dále, podle předpokladu lineárního růstu (I) a vzhledem k indukčnímu předpokladu jest

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\int_0^T \|b(s,X_k(s))\|\,\mathrm{d}s &\le K_* \int_0^T \bigl(1+\mathsf{E}\|X_k(s)\|\bigr)\,\mathrm{d}s \\ &\le K_* T\bigl(1+\sup_{0\le s\le T}(\mathsf{E}\|X_k(s)\|^p)^{1/p}\bigr) < \infty, \\ \mathsf{E}\int_0^T \|\sigma(s,X_k(s))\|^2\,\mathrm{d}s &\le K_*^2 \mathsf{E}\int_0^T \bigl(1+\|X_k(s)\|\bigr)^2\,\mathrm{d}s \\ &\le 2K_*^2 \int_0^T \bigl(1+\mathsf{E}\|X_k(s)\|^2\bigr)\,\mathrm{d}s < \infty, \end{aligned}$$

tedy integrály ve formuli (5) jsou dobře definovány. Ověřme, že (6) platí i pro $k+1$. Odhadujme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\|X_{k+1}(t)\|^p &= \mathsf{E}\left\|\varphi + \int_0^t b(s,X_k(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_k(s))\,\mathrm{d}W(s)\right\|^p \\ &\le 3^{p-1}\biggl(\mathsf{E}\|\varphi\|^p + \mathsf{E}\left\|\int_0^t b(s,X_k(s))\,\mathrm{d}s\right\|^p \\ &\qquad + \mathsf{E}\left\|\int_0^t \sigma(s,X_k(s))\,\mathrm{d}W(s)\right\|^p\biggr) \\ &\equiv 3^{p-1}\bigl(\mathsf{E}\|\varphi\|^p + I_1 + I_2\bigr). \end{aligned}$$

Přitom užitím Hölderovy nerovnosti a (I) dostaneme

$$\begin{aligned} I_1 &\le \mathsf{E}\biggl(\int_0^t \|b(s,X_k(s))\|\,\mathrm{d}s\biggr)^p \\ &\le t^{p-1}\mathsf{E}\int_0^t \|b(s,X_k(s))\|^p\,\mathrm{d}s \le T^{p-1}K_*^p \int_0^t \mathsf{E}\bigl(1+\|X_k(s)\|\bigr)^p\,\mathrm{d}s \\ &\le (2T)^{p-1}K_*^p \int_0^t \bigl(1+\mathsf{E}\|X_k(s)\|^p\bigr)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Podobně vzhledem k odhadu pro p-tý moment stochastického integrálu (viz příklad 1.1)

$$\begin{aligned} I_2 &\le C_p T^{\frac{p}{2}-1}\mathsf{E}\int_0^t \|\sigma(s,X_k(s))\|^p\,\mathrm{d}s \\ &\le 2^{p-1}K_*^p C_p T^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \bigl(1+\mathsf{E}\|X_k(s)\|^p\bigr)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

což dává

$$\mathsf{E}\|X_{k+1}(t)\|^p \leq 3^{p-1}\mathsf{E}\|\varphi\|^p + 6^{p-1}T^{\frac{p}{2}-1}K_*^p(C_p + T^{\frac{p}{2}})\int_0^t \big(1 + \mathsf{E}\|X_k(s)\|^p\big)\,\mathrm{d}s,$$

tudíž

$$1 + \mathsf{E}\|X_{k+1}(t)\|^p \leq D\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big) + D\int_0^t \big(1 + \mathsf{E}\|X_k(s)\|^p\big)\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

Pravou stranu (7) odhadneme podle indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned}1 + \mathsf{E}\|X_{k+1}(t)\|^p &\leq D\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big) + D\int_0^t D\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big)\Big(\sum_{i=0}^{k}\frac{(Ds)^i}{i!}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &= D\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big)\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(Dt)^i}{i!},\end{aligned}$$

čímž je (6) ověřeno.

b) Položme

$$L = 2^{p-1}T^{\frac{p}{2}-1}K^p(C_p + T^{\frac{p}{2}}).$$

Užívajíce opět indukci dokážeme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\|X_{k+1}(s) - X_k(s)\|^p \leq \frac{(Lt)^k}{k!}\,\mathsf{E}\sup_{0\leq r\leq T}\|X_1(r) - X_0(r)\|^p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{8}$$

Pro $k = 0$ je odhad (8) jistě pravdivý, je také zřejmé, že jeho pravá strana je konečná. Nechť tedy je (8) již ověřeno pro nějaké $k \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\|X_{k+2}(s) - X_{k+1}(s)\|^p\\ &\qquad\leq 2^{p-1}\mathsf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\Big\|\int_0^s \big\{b(r, X_{k+1}(r)) - b(r, X_k(r))\big\}\,\mathrm{d}r\Big\|^p\\ &\qquad\quad + 2^{p-1}\mathsf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\Big\|\int_0^s \big\{\sigma(r, X_{k+1}(r)) - \sigma(r, X_k(r))\big\}\,\mathrm{d}W(r)\Big\|^p\\ &\qquad\equiv 2^{p-1}\big\{J_1 + J_2\big\}.\end{aligned}$$

Aplikace Hölderovy nerovnosti a předpokladu (II) dává

$$\begin{aligned}J_1 &\leq \mathsf{E}\sup_{0\leq s\leq t} s^{p-1}\int_0^s \|b(r, X_{k+1}(r)) - b(r, X_k(r))\|^p\,\mathrm{d}r\\ &\leq T^{p-1}\mathsf{E}\int_0^t \|b(r, X_{k+1}(r)) - b(r, X_k(r))\|^p\,\mathrm{d}r\\ &\leq T^{p-1}K^p\int_0^t \mathsf{E}\|X_{k+1}(r) - X_k(r)\|^p\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Analogicky,

$$\begin{aligned} J_2 &\le C_p T^{\frac{p}{2}-1} \mathsf{E} \int_0^t \|\sigma(r, X_{k+1}(r)) - \sigma(r, X_k(r))\|^p \, \mathrm{d}r \\ &\le C_p T^{\frac{p}{2}-1} K^p \int_0^t \mathsf{E}\|X_{k+1}(r) - X_k(r)\|^p \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

To spolu s indukčním předpokladem implikuje

$$\begin{aligned} \mathsf{E} \sup_{0\le s\le t} \|X_{k+2}(s) - X_{k+1}(s)\|^p &\le L \int_0^t \mathsf{E}\|X_{k+1}(r) - X_k(r)\|^p \, \mathrm{d}r \\ &\le L \int_0^t \frac{L^k r^k}{k!} \, \mathrm{d}r \; \mathsf{E} \sup_{0\le v\le T} \|X_1(v) - X_0(v)\|^p \\ &= \frac{L^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} \, \mathsf{E} \sup_{0\le v\le T} \|X_1(v) - X_0(v)\|^p, \end{aligned}$$

tím je (8) dokázáno.

c) Posloupnost $\{X_k\}_{k=0}^\infty$ je cauchyovská v $L^p([0,T] \times \Omega, \mathscr{M}, \lambda \otimes \mathsf{P}; \mathbb{R}^m)$, neboť pro $l > j$ podle Minkowského nerovnosti a odhadu (8)

$$\begin{aligned} &\left(\mathsf{E} \int_0^T \|X_l(s) - X_j(s)\|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} \\ &\qquad = \left(\mathsf{E} \int_0^T \Big\| \sum_{k=j}^{l-1} [X_{k+1}(s) - X_k(s)] \Big\|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} \\ &\qquad \le \sum_{k=j}^{l-1} \left(\mathsf{E} \int_0^T \|X_{k+1}(s) - X_k(s)\|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} \\ &\qquad \le T^{1/p} \sum_{k=j}^{l-1} \left(\mathsf{E} \sup_{0\le t\le T} \|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|^p \right)^{1/p} \\ &\qquad \le T^{1/p} \left(\mathsf{E} \sup_{0\le t\le T} \|X_1(t) - X_0(t)\|^p \right)^{1/p} \sum_{k=j}^{l-1} \left(\frac{L^k T^k}{k!} \right)^{1/p} \\ &\qquad \xrightarrow[l,j\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

přičemž poslední krok plyne z konvergence řady $\sum_{i=0}^\infty (i!)^{-1/p} (LT)^{i/p}$. Existuje tedy progresivně měřitelná funkce $\tilde{X} : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E} \int_0^T \|X_k(s) - \tilde{X}(s)\|^p \, \mathrm{d}s = 0. \tag{9}$$

Položme

$$X(t) = \varphi + \int_0^t b(s, \tilde{X}(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}(s))\,\mathrm{d}W(s). \tag{10}$$

Neboť funkce b a σ splňují (I) a $\tilde{X} \in L^2(\lambda \otimes \mathsf{P}; \mathbb{R}^m)$, ověří se snadno postupem z bodu a), že integrály ve formuli (10) jsou dobře definovány a X je $\mathscr{M}$-měřitelný náhodný proces se spojitými trajektoriemi.

d) Tvrdíme, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E} \sup_{0\le t\le T} \|X_{k+1}(t) - X(t)\|^p = 0. \tag{11}$$

Podle definice jest totiž

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) - X(t) = \int_0^t &\big\{ b(s, X_k(s)) - b(s, \tilde{X}(s)) \big\}\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \big\{ \sigma(s, X_k(s)) - \sigma(s, \tilde{X}(s)) \big\}\,\mathrm{d}W(s), \end{aligned}$$

pročež postupujíce jako v bodu b) ukážeme

$$\mathsf{E} \sup_{0\le t\le T} \|X_{k+1}(t) - X(t)\|^p \le L\mathsf{E} \int_0^T \|X_k(s) - \tilde{X}(s)\|^p\,\mathrm{d}s$$

a užijeme (9). Porovnáním (9) a (11) nahlédneme, že $X = \tilde{X}$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude, takže z (10) dostaneme

$$X(t) = \varphi + \int_0^t b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t \le T,$$

P-skoro jistě a X je proto řešení úlohy (1), (2).

e) Věta 2.2 implikuje, že X je jediné řešení úlohy (1), (2).

f) Podle nerovnosti (6) platí

$$\sup_{0\le t\le T} \big(1 + \mathsf{E}\|X_k(t)\|^p\big) \le De^{DT}\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k (11) ovšem $\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\|X_k(t) - X(t)\|^p = 0$ pro všechna $t \in [0, T]$, tudíž též $\mathsf{E}\|X_k(t)\|^p \longrightarrow \mathsf{E}\|X(t)\|^p$ a

$$\sup_{0\le t\le T} \big(1 + \mathsf{E}\|X(t)\|^p\big) \le De^{DT}\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big). \tag{12}$$

Nyní už snadno odvodíme odhad (4). Jest

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|^p &\le 3^{p-1}\biggl(\mathsf{E}\|\varphi\|^p + \mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\biggl\|\int_0^t b(s,X(s))\,\mathrm{d}s\biggr\|^p \\
&\qquad + \mathsf{E}\sup_{0\le t\le T}\biggl\|\int_0^t \sigma(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s)\biggr\|^p\biggr) \\
&\le 3^{p-1}\biggl(\mathsf{E}\|\varphi\|^p + T^{p-1}\mathsf{E}\int_0^T \|b(s,X(s))\|^p\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + C_p T^{\frac{p}{2}-1}\mathsf{E}\int_0^T \|\sigma(s,X(s))\|^p\,\mathrm{d}s\biggr) \\
&\le 3^{p-1}\biggl(\mathsf{E}\|\varphi\|^p + 2^{p-1}K_*^p T^{\frac{p}{2}-1}(C_p + T^{\frac{p}{2}})\int_0^T \bigl(1+\mathsf{E}\|X(s)\|^p\bigr)\,\mathrm{d}s\biggr)
\end{aligned}
$$

a do pravé strany právě odvozené nerovnosti dosadíme z (12). Q.E.D.

Poznámka 2.5. Mírnou modifikací method užitých v důkazu věty 2.1 lze ukázat: za předpokladů této věty pro každé $p \in [2,\infty[$ existuje konstanta $C^+ = C^+(p,T,K) < \infty$ taková, že

$$
\mathsf{E}\sup_{t_0\le t\le T}\|X(t)-\widetilde{X}(t)\|^p \le C^+\mathsf{E}\|X(t_0)-\widetilde{X}(t_0)\|^p \tag{13}
$$

pro libovolná řešení X, $\widetilde{X}$ rovnice (1) s $X(t_0), \widetilde{X}(t_0) \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Nerovnost (13) lze přirozeným způsobem interpretovat jako spojitou závislost řešení na počáteční podmínce.

Naznačme důkaz (13). Z tvrzení 2° věty 2.1 vyplývá, že

$$
\mathsf{E}\sup_{t_0\le t\le T}\bigl\{\|X(t)\|^p + \|\widetilde{X}(t)\|^p\bigr\} < \infty. \tag{14}
$$

Postupujíce jako v bodu b) důkazu můžeme ověřit, že

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sup_{t_0\le s\le \tau}\|X(s)-\widetilde{X}(s)\|^p \\
&\qquad\le 2^{p-1}\mathsf{E}\|X(t_0)-\widetilde{X}(t_0)\|^p + 2^{p-1}L\int_{t_0}^{\tau}\mathsf{E}\|X(r)-\widetilde{X}(r)\|^p\,\mathrm{d}r
\end{aligned} \tag{15}
$$

pro každé $\tau \in [t_0,T]$. Speciálně,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\|X(t)-\widetilde{X}(t)\|^p \\
&\qquad\le 2^{p-1}\mathsf{E}\|X(t_0)-\widetilde{X}(t_0)\|^p + 2^{p-1}L\int_{t_0}^{t}\mathsf{E}\|X(r)-\widetilde{X}(r)\|^p\,\mathrm{d}r, \quad t_0\le t\le T,
\end{aligned}
$$

a vzhledem k (14) lze užíti Gronwallovo lemma k odvození odhadu

$$\mathsf{E}\|X(t)-\widetilde{X}(t)\|^p \le 2^{p-1}e^{2^{p-1}TL}\mathsf{E}\|X(t_0)-\widetilde{X}(t_0)\|^p, \quad t_0 \le t \le T. \tag{16}$$

Nerovnost (13) dostaneme, dosadíme-li do (15) $\tau = T$ a získaný odhad zkombinujeme s (16).

Poznámka 2.6. Jsou-li $\zeta_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ měřitelné funkce takové, že $\sum_{k=0}^{\infty}\|\zeta_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ pro nějaké $p \ge 1$, potom řada $\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_k(\omega)$ konverguje absolutně pro P-skoro všechna ω, ježto

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty}\left|\zeta_k(\omega)\right| \,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_\Omega \left|\zeta_k(\omega)\right| \,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega) \le \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\zeta_k\right\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Položme nyní $\xi_k = \sup_{0\le t\le T}\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|$, v kroku c) důkazu věty 2.1 jsme implicitně ukázali, že z $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ (pro $p \ge 2$) plyne $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\xi_k\right\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, což implikuje

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sup_{0\le t\le T}\|X_{k+1}(t,\omega) - X_k(t,\omega)\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{17}$$

pro P-skoro všechna ω. Jelikož očividně

$$X_N(t) = X_0(t) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[X_{k+1}(t) - X_k(t)\right],$$

pro $M > N$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|X_M(t) - X_N(t)\| &= \sup_{0\le t\le T}\left\|\sum_{k=N}^{M-1}\left[X_{k+1}(t) - X_k(t)\right]\right\| \\ &\le \sum_{k=N}^{\infty}\sup_{0\le t\le T}\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\|\end{aligned}$$

a vzhledem k (17) je proto posloupnost $\{X_N(\cdot,\omega)\}$ stejnoměrně cauchyovská na $[0,T]$ pro P-skoro všechna ω. Podle (11) jest její limita nutně $X(\cdot,\omega)$, aproximující posloupnost zkonstruovaná v důkazu věty 2.1 tedy konverguje k řešení v dosti silném smyslu:

$$X_k(\cdot,\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} X(\cdot,\omega) \quad \text{stejnoměrně na } [0,T] \text{ pro } \mathsf{P}\text{-skoro všechna } \omega.$$

Ukažme si dále standardní postup, jehož pomocí lze odstranit předpoklad integrovatelnosti počáteční podmínky ve větě 2.1.

Důsledek 2.3. *Nechť koeficienty b a σ splňují předpoklady věty 2.1. Potom pro každé $t_0 \in [0,T[$ a libovolnou $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelnou funkci $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existuje jediné řešení X úlohy* (1), (2).

Důkaz. Opět pro jednoduchost položme $t_0 = 0$.

Krok 1. Buďte $\xi, \psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathscr{F}_0$-měřitelná zobrazení splňující $\mathsf{E}\|\xi\|^2 < \infty$, $\mathsf{E}\|\psi\|^2 < \infty$. Nechť jsou Y, Z řešení rovnice (1) s počátečními podmínkami $Y(0) = \xi$, $Z(0) = \psi$, zkonstruovaná podle věty 2.1. Označme

$$\Sigma = \bigl\{\omega \in \Omega;\ \xi(\omega) = \psi(\omega)\bigr\},$$

dokážeme, že

$$\mathsf{P}\Bigl\{\omega \in \Sigma;\ \sup_{0\le t\le T} \|Y(t,\omega) - Z(t,\omega)\| \neq 0\Bigr\} = 0. \tag{18}$$

Zřejmě jest $\mathbf{1}_\Sigma(\xi - \psi) = 0$ a $\mathbf{1}_\Sigma$ je $\mathscr{F}_0$-měřitelná funkce, tedy

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_\Sigma\bigl(Y(t) - Z(t)\bigr) &= \int_0^t \mathbf{1}_\Sigma\bigl\{b(s,Y(s)) - b(s,Z(s))\bigr\}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{1}_\Sigma\bigl\{\sigma(s,Y(s)) - \sigma(s,Z(s))\bigr\}\,\mathrm{d}W(s).\end{aligned}$$

Užitím lipschitzovskosti koeficientů dostaneme

$$\mathsf{E}\bigl\|\mathbf{1}_\Sigma\bigl(Y(t) - Z(t)\bigr)\bigr\|^2 \le 2K^2(T+1)\int_0^t \mathsf{E}\bigl\|\mathbf{1}_\Sigma\bigl(Y(s) - Z(s)\bigr)\bigr\|^2\,\mathrm{d}s,$$

takže (18) plyne ze spojitosti trajektorií a Gronwallova lemmatu.

Krok 2. Buď nyní $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ libovolná $\mathscr{F}_0$-měřitelná funkce, pro $N \in \mathbb{N}$ položme

$$\Omega_N = \{\omega \in \Omega;\ \|\varphi(\omega)\| \le N\}, \qquad \varphi_N = \mathbf{1}_{\Omega_N}\varphi = \begin{cases} \varphi & \text{na } \Omega_N, \\ 0 & \text{jinde.}\end{cases}$$

Potom $\varphi_N \in L^\infty(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^m)$ a užitím věty 2.1 nalezneme řešení X_N rovnice (1), splňující $X_N(0) = \varphi_N$. Podle kroku 1 jest $X_M = X_N$ P-skoro jistě na Ω_N, kdykoliv $M \ge N$. Limita

$$X(\cdot,\omega) \equiv \lim_{M\to\infty} X_M(\cdot,\omega)$$

je tedy dobře definována P-skoro všude na $\bigcup_{M\ge1}\Omega_M$, přitom $\mathsf{P}\bigl(\bigcup_{M\ge1}\Omega_M\bigr) = 1$. Filtrace $(\mathscr{F}_t)$ splňuje (UC), proto je snadné dodefinovat X jako $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný proces se spojitými trajektoriemi (nutně tedy progresivně měřitelný). Podle konstrukce jest $X = X_N$ skoro jistě na Ω_N, odtud plyne

$$\int_0^t \sigma(s, X_N(s))\,\mathrm{d}W(s) = \int_0^t \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t \le T,$$

P-skoro všude na Ω_N. Ježto očividně

$$\int_0^t b(s, X_N(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^t b(s, X(s))\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T,$$

P-skoro všude na Ω_N, nahlédneme už snadno, že proces X řeší rovnici (1), (2); jednoznačnost je opět důsledkem věty 2.2. Q.E.D.

Poznámka 2.7. Odhlédneme-li od rovnic lineárních, jimž bude věnována příští kapitola, jsme jen výjimečně schopni zapsat řešení stochastické diferenciální rovnice v uzavřeném tvaru. Jeden případ, kdy to lze, pro zajímavost uveďme. Uvažujme jednodimensionální rovnici

$$\mathrm{d}X = b(t, X)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X)\,\mathrm{d}W, \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

se spojitými koeficienty $b, \sigma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Nechť existuje derivace $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ a je spojitá všude na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Přímočará aplikace Itôovy formule ukazuje, že pokud je $u \in \mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ funkce taková, že

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = b(t, u(t, y)) - \frac{1}{2}\Big(\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x}\Big)(t, u(t, y)), \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = \sigma(t, u(t, y)), \quad u(0, 0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

pro všechna $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, pak proces $X_t = u(t, W_t)$ řeší rovnici (19). Nalézti funkci u vyhovující vztahům (20) ovšem obecně není o nic snažší, než explicitně řešit přímo úlohu (19), nicméně, někdy tvar funkce u uhádnout lze.[19]

Kupříkladu, při $a > 0$ je process

$$X_t = (1+t)^2 \big[x_0 + a(W_t - t)\big]$$

řešením rovnice

$$\mathrm{d}X = \Big(\frac{2X}{1+t} - a(1+t)^2\Big)\,\mathrm{d}t + a(1+t)^2\,\mathrm{d}W, \quad X(0) = x_0.$$

Je-li $x_0 \in\,]-\pi, \pi[$, pak proces

$$X_t = 2 \operatorname{arctg}\Big[\operatorname{tg}\Big(\frac{x_0}{2}\Big) e^{W_t}\Big]$$

řeší rovnici

$$\mathrm{d}X = \frac{1}{4} \sin 2X\,\mathrm{d}t + \sin X\,\mathrm{d}W, \quad X(0) = x_0.$$

Ověřit vztahy (20) je v prvém případě snadné, jde ovšem o rovnici lineární, kterou lze jinými postupy vyřešit pohodlněji. V druhém případě užijeme následující formule z elementární trigonometrie:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}, \quad \cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

[19] Trochu podrobnější informace o této methodě, včetně nutných podmínek na koeficienty, aby řešení vůbec mohlo být tvaru $u(t, W)$, lze nalézti v učebních textech P. Mandl: *Elements of stochastic analysis*, Example 5.2, a P. Mandl, V. Lánská, I. Vrkoč: *Exercises in stochastic analysis*, Exercises 21–28, které vyšly jako příloha časopisu *Kybernetika*, ročník *14* (1978).

3. Lineární stochastické diferenciální rovnice

Tato kapitola je věnována lineárním stochastickým diferenciálním rovnicím. Jednak jsou důležité v aplikacích, jednak je (alespoň v principu) možno nalézti jejich řešení v uzavřeném tvaru, což usnadňuje hlubší zkoumání jejich vlastností.

V celé kapitole předpokládáme, že jsou pevně zvoleny stochastická base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$, n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W a koeficienty A, b a σ splňující

$$\text{(P)} \qquad A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{M}_{m\times m}), \ b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m) \ \text{ a } \ \sigma \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{M}_{m\times n}).$$

Jinými slovy, A, b a σ jsou měřitelné funkce takové, že

$$\int_0^T \Big\{ \|A(t)\| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2 \Big\} \,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{pro všechna } T > 0.$$

Nechť je dále dáno $t_0 \geq 0$ a $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelná náhodná veličina $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Budeme vyšetřovat úlohu

$$\mathrm{d}X = \big[A(t)X + b(t)\big] \,\mathrm{d}t + \sigma(t) \,\mathrm{d}W(t), \quad X(t_0) = \psi. \tag{1}$$

Očividně jdě o speciální případ rovnice $\mathrm{d}X = \bar{b}(t, X) \,\mathrm{d}t + \bar{\sigma}(t, X) \,\mathrm{d}W$, uvažované v kapitole 2, při volbě

$$\bar{b}(t, x) = A(t)x + b(t), \ \bar{\sigma}(t, x) = \sigma(t), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Rovnicím tvaru (1) říkáme lineární (při pevném t je jejich difuse konstantní a drift afinní funkce).

Je známo,[20] že za předpokladu (P) existuje fundamentální matice $\Phi = \Phi(\cdot, t_0)$ (odpovídající počátečnímu času $t_0 \geq 0$) homogenní lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} = A(t)x;$$

to jest, funkce $\Phi \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{M}_{m\times m})$ vyhovující vztahu

$$\Phi(t) = I + \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s) \,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Řešení (deterministické) nehomogenní differenciální rovnice

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = z$$

je dáno formulí variace konstant

$$x(t) = \Phi(t)z + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) \,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

Ukážeme, že vzorec (4) lze rozšířit i na lineární rovnice stochastické.

[20] Stručné odvození potřebných výsledků je podáno v apendixu E, kde je i zavedeno užívané označení.

Tvrzení 3.1. *Náhodný proces*

$$X(t) = \Phi(t)\psi + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) \, \mathrm{d}s + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s) \, \mathrm{d}W(s), \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

je jediným řešením úlohy (1).

Poznámka 3.1. Předpoklad (P) zajišťuje, že integrály ve vzorci (5) jsou dobře definovány. Povšimněme si, že funkce $\bar{b}$ a $\bar{\sigma}$ zavedené v (2) splňují předpoklady věty 2.2; předpoklady věty 2.1 jsou splněny, jsou-li A, b a σ navíc lokálně omezené. Význam tvrzení 3.1 nespočívá v existenčním výsledku poněkud obecnějším, ale v explicitní representaci řešení.

Heuristicky lze formuli (5) odvodit z vzorce (4) následující úvahou: kdyby byly trajektorie Wienerova procesu absolutně spojité, pak by byla úloha (1) ekvivalentní s rovnicí $\dot{X} = A(t)X + \{b(t) + \sigma(t)\dot{W}(t)\}$, jejíž řešení můžeme representovat pomocí (4), což vede na rovnost (5). (Pro absolutně spojitou funkci W totiž platí $\dot{W} \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}W$.)

Podotkněme dále, že formule (5) poskytuje proces se stochastickým diferenciálem (1) pro libovolnou náhodnou veličinu ψ, ne nutně adaptovanou. Proces X ovšem v takovém případě nemusí být progresivně měřitelný; lze ho pokládat za řešení (1), je však nutno s ním pracovat dostatečně opatrně.

Připomeňme, že Itôova formule, použita na funkci $(x, y) \longmapsto xy$, poskytuje jednoduchý výraz pro stochastický diferenciál součinu: pro spojité reálné semimartingaly Y^1, Y^2 platí

$$Y_t^1 Y_t^2 = Y_0^1 Y_0^2 + \int_0^t Y_s^1 \, \mathrm{d}Y_s^2 + \int_0^t Y_s^2 \, \mathrm{d}Y_s^1 + \langle Y^1, Y^2 \rangle_t.$$

Mají-li Y^1, Y^2 stochastický diferenciál, $\mathrm{d}Y_t^i = \alpha_t^i \, \mathrm{d}t + \beta_t^i \, \mathrm{d}B_t$, kde B je reálný Wienerův proces, pak

$$\mathrm{d}\big(Y^1 Y^2\big) = \big\{\alpha^1 Y^2 + \alpha^2 Y^1 + \beta^1 \beta^2\big\} \, \mathrm{d}t + \big\{\beta^1 Y^2 + \beta^2 Y^1\big\} \, \mathrm{d}B.$$

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu formule variace konstant (5).

Důkaz. Jednoznačnost plyne z věty 2.2, přímý důkaz je však snadný: jsou-li X_1, X_2 dvě řešení problému (1), pak podle definice řešení

$$X_1(t) - X_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s) \big\{X_1(s) - X_2(s)\big\} \, \mathrm{d}s, \quad t \geq t_0,$$

P-skoro jistě, tudíž také

$$\|X_1(t, \omega) - X_2(t, \omega)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|X_1(s, \omega) - X_2(s, \omega)\| \, \mathrm{d}s, \quad t \geq t_0,$$

pro P-skoro všechna $\omega \in \Omega$, lze proto užíti Gronwallovo lemma. (Uvědomme si, že funkce $\|A\|$ je lokálně integrovatelná a trajektorie procesu $X_1 - X_2$ jsou spojité skoro jistě.)

Ověříme, že proces X definovaný vztahem (5) je řešení. Zřejmě je X progresivně měřitelný a $X(t_0) = \psi$. Označme

$$\psi = (\psi_i)_{i=1}^m, \quad X(t) = \big(X_i(t)\big)_{i=1}^m, \quad \Phi(t) = \big(\Phi_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^m, \quad \Phi^{-1}(t) = \big(\Gamma_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^m.$$

Položme

$$Z_j(t) = \psi_j + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \Gamma_{jk}(s) b_k(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \Gamma_{jk}(s)\sigma_{kl}(s)\,\mathrm{d}W_l(s),$$

$1 \le j \le m$. Tedy

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^m \Phi_{ij}(t) Z_j(t), \quad 1 \le i \le m.$$

Ježto

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_j(t) &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}(t) b_k(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}(t)\sigma_{kl}(t)\,\mathrm{d}W_l(t),\\
\mathrm{d}\Phi_{ij}(t) &= \sum_{q=1}^m A_{iq}(t)\Phi_{qj}(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

(prvá z těchto rovností je přímým důsledkem definice Z, druhá je přepisem (3) v symbolice stochastického diferenciálu), platí podle věty o stochastickém diferenciálu součinu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\Phi_{ij}(t) Z_j(t)) = &\sum_{k=1}^m \Phi_{ij}(t)\Gamma_{jk}(t) b_k(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{q=1}^m A_{iq}(t)\Phi_{qj}(t) Z_j(t)\,\mathrm{d}t\\
&+ \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \Phi_{ij}(t)\Gamma_{jk}(t)\sigma_{kl}(t)\,\mathrm{d}W_l(t).
\end{aligned}$$

Berouce do úvahy, že

$$\sum_{j=1}^m \Phi_{ij}(t)\Gamma_{jk}(t) = \delta_{ik},$$

dostaneme

$$\mathrm{d}X_i(t) = \sum_{j=1}^m \mathrm{d}\Big(\Phi_{ij}(t) Z_j(t)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \Phi_{ij}(t)\Gamma_{jk}(t)b_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{q=1}^{m} A_{iq}(t)\biggl(\sum_{j=1}^{m}\Phi_{qj}(t)Z_j(t)\biggr)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Phi_{ij}(t)\Gamma_{jk}(t)\sigma_{kl}(t)\,\mathrm{d}W_l(t) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}b_k(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{q=1}^{m}A_{iq}(t)X_q(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}\sigma_{kl}(t)\,\mathrm{d}W_l(t).
\end{aligned}
$$

Odvodili jsme rovnost

$$
\mathrm{d}X_i(t) = \left[\sum_{q=1}^{m}A_{iq}(t)X_q(t) + b_i(t)\right]\,\mathrm{d}t + \sum_{l=1}^{n}\sigma_{il}(t)\,\mathrm{d}W_l(t),
$$

$1 \le i \le m$, $X(t)$ je tudíž řešením rovnice (1). Q.E.D.

Tvrzení 3.2. *Buď $X(t)$ řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou splňující $\mathsf{E}\|\psi\|^2 < \infty$. Definujme funkce $\mu : [t_0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\varrho : [t_0,\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times m}$ předpisem*

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= \mathsf{E}X(t), \\
\varrho(s,t) &= \mathsf{E}\Bigl(\bigl(X(s)-m(s)\bigr)\bigl(X(t)-m(t)\bigr)^*\Bigr).
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= \Phi(t)\biggl[\mu(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(r)b(r)\,\mathrm{d}r\biggr], \\
\varrho(s,t) &= \Phi(s)\biggl[\varrho(t_0,t_0) + \int_{t_0}^{s\wedge t}\Phi^{-1}(u)\sigma(u)\sigma(u)^*\Phi^{-1}(u)^*\,\mathrm{d}u\biggr]\Phi(t)^* \qquad (6)
\end{aligned}
$$

pro libovolná $s,t \in [t_0,\infty[$.

Z formule (5) lze snadno nahlédnout, že $X(t) \in L^2$, pokud $\psi \in L^2$, takže μ a ϱ jsou korektně definovány; μ se nazývá *vektor středních hodnot*, ϱ *kovarianční matice* procesu X. Pro názornost ještě definici μ a ϱ přepišme po složkách:

$$
\begin{aligned}
\mu_i(t) &= \mathsf{E}X_i(t), \quad 1 \le i \le m, \\
\varrho_{ij}(s,t) &= \mathsf{E}\Bigl\{\bigl(X_i(s)-\mathsf{E}X_i(s)\bigr)\bigl(X_j(t)-\mathsf{E}X_j(t)\bigr)\Bigr\}, \quad 1 \le i,j \le m;
\end{aligned}
$$

a uvědomme si, že

$$\mu(t_0) = \mathsf{E}\psi, \quad \varrho(t_0, t_0) = \mathsf{E}\big((\psi - \mathsf{E}\psi)(\psi - \mathsf{E}\psi)^*\big),$$

takže $\varrho(t_0, t_0) = 0$, právě když je počáteční podmínka deterministická, $\varphi = x \in \mathbb{R}^m$ P-skoro jistě.

Důkaz. Prvé tvrzení je zřejmé, odvodíme druhé. Předpokládejme nejprve, že $\psi = 0$. Pro určitost buď $s \leq t$. Uvažme, že

$$H_v = \int_{t_0}^{v} \Phi^{-1}(r)\sigma(r)\,\mathrm{d}W(r), \quad v \geq t_0,$$

je spojitý m-dimensionální L^2-martingal; z výsledků uvedených v kapitole 0 plyne rovnost

$$\langle\!\langle H \rangle\!\rangle_v = \int_{t_0}^{v} \Phi^{-1}(u)\sigma(u)\sigma(u)^*\Phi^{-1}(u)^*\,\mathrm{d}u.$$

Povšimněme si, že $\langle\!\langle H \rangle\!\rangle$ je deterministická funkce, tedy $\mathsf{E}\big[H_v H_v^*\big] = \langle\!\langle H \rangle\!\rangle_v$. Užitím formule (5) a definice ϱ dostaneme:

$$\begin{aligned}
\varrho(s,t) &= \mathsf{E}\left[\left(\Phi(s)\int_{t_0}^{s} \Phi^{-1}(u)\sigma(u)\,\mathrm{d}W(u)\right)\left(\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(u)\sigma(u)\,\mathrm{d}W(u)\right)^*\right] \\
&= \Phi(s)\mathsf{E}\left[H_s H_t^*\right]\Phi(t)^* = \Phi(s)\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[H_s H_t^* \bigm| \mathscr{F}_s\big]\Big]\Phi(t)^* \\
&= \Phi(s)\mathsf{E}\Big[H_s\mathsf{E}\big[H_t^* \bigm| \mathscr{F}_s\big]\Big]\Phi(t)^* = \Phi(s)\mathsf{E}\left[H_s H_s^*\right]\Phi(t)^* \\
&= \Phi(s)\langle\!\langle H \rangle\!\rangle_s \Phi(t)^* \\
&= \Phi(s)\left(\int_{t_0}^{s} \Phi^{-1}(u)\sigma(u)\sigma(u)^*\Phi^{-1}(u)^*\,\mathrm{d}u\right)\Phi(t)^*.
\end{aligned}$$

Je-li $\psi \neq 0$, můžeme postupovati zcela analogicky uvědomivše si, že H_t a ψ jsou nezávislé.[21] Q.E.D.

Poznámka 3.2. Položme $V(t) = \varrho(t,t)$. Z tvrzení 3.2 vyplývá, že funkce μ a V vyhovují diferenciálním rovnicím

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= A(t)\mu + b(t), \\
\dot{V} &= A(t)V + VA(t)^* + \sigma(t)\sigma(t)^*.
\end{aligned}$$

V případě funkce μ je to ihned zřejmé z formule variace konstant. Vzorec (6) ukazuje, že $V \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{M}_{m\times m})$, funkce V má tedy pro skoro všechna $t \geq 0$ derivaci, jíž lze z (6) snadno spočísti.

Úmluva. Budeme-li v dalším předpokládat, že počáteční podmínka $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je gaussovská, vždy připouštíme i degenerovaný případ $\psi = x \in \mathbb{R}^m$.

[21] Nezávislost snadno plyne z nezávislosti přírůstků Wienerova procesu, viz analogické úvahy v důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.3. *Buď X řešení úlohy* (1) *s gaussovskou počáteční podmínkou ψ. Potom je náhodný proces X gaussovský, to jest: pro libovolná $t_0 \le t_1 < \ldots < t_j$ je $(X(t_1)^*, \ldots, X(t_j)^*)^* : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{mj}$ gaussovská náhodná veličina.*

Důkaz. Zvolme libovolně $t_0 \le t_1 < \cdots < t_j$, položme

$$Z(t) = \psi + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\,\mathrm{d}W(s), \quad t \ge t_0,$$

a označme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z(t_1) \\ \vdots \\ Z(t_j) \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Phi(t_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \Phi(t_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_j} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi(t_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \Phi(t_j) \end{pmatrix} \mathbf{Z}.$$

Prvý člen vpravo je deterministický, proto je vektor $\mathbf{X}$ afinním obrazem $\mathbf{Z}$ a stačí dokázat, že $\mathbf{Z}$ je gaussovský. Jest ovšem

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & \ldots & 0 \\ I_m & I_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & I_m & \ldots & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z(t_1) \\ Z(t_2) - Z(t_1) \\ \vdots \\ Z(t_j) - Z(t_{j-1}) \end{pmatrix},$$

kde $I_m \in \mathbb{M}_{m\times m}$ je identická matice typu $m \times m$. Důkaz bude hotov, ověříme-li, že $Z(t_1), Z(t_2) - Z(t_1), \ldots, Z(t_j) - Z(t_{j-1})$ jsou nezávislé gaussovské (pak je i jejich sdružené rozdělení gaussovské). Buďte Q_r (deterministické) $\mathbb{M}_{m\times n}$-hodnotové jednoduché funkce takové, že

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{t_j} \left\| Q_r(s) - \Phi^{-1}(s)\sigma(s) \right\|^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Potom se snadno – užitím definice stochastického integrálu a nezávislosti přírůstků Wienerova procesu – ověří, že $\int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_r(s)\,\mathrm{d}W(s)$ je $\mathscr{F}_{t_{i+1}}$-měřitelný gaussovský vektor nezávislý s $\mathscr{F}_{t_i}$, $i = 0, \ldots, j-1$. Počáteční podmínka ψ je $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelná gaussovská, takže i $\psi + \int_{t_0}^{t_1} Q_r(s)\,\mathrm{d}W(s)$ je $\mathscr{F}_{t_1}$-měřitelný gaussovský vektor. Přitom

$$\lim_{r\to\infty} \mathsf{E}\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q_r(s)\,\mathrm{d}W(s) - \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\,\mathrm{d}W(s)}_{=Z(t_{i+1})-Z(t_i)} \right\|^2 = 0,$$

takže si stačí uvědomit, že L^2-limita gaussovských náhodných veličin je gaussovská a též nezávislost se limitním přechodem zachová. Q.E.D.

Z právě dokázaného tvrzení lze vyvodit poněkud překvapující důsledek. Víme, že řešení X rovnice (1) s počáteční podmínkou ψ gaussovskou má v čase $t > t_0$ rozdělení $\mathscr{N}(\mu(t), \varrho(t,t))$. Je-li matice $\varrho(t,t)$ regulární, má gaussovská míra $\mathscr{N}(\mu(t), \varrho(t,t))$ hustotu f, $f > 0$ na $\mathbb{R}^m$. Uvědomivše si, že neprázdné otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^m$ mají kladnou Lebesgueovu míru, dostaneme následující tvrzení:

Důsledek 3.4. *Buď X řešení (1) s gaussovskou počáteční podmínkou ψ. Nechť je $t > t_0$ takové, že $\varrho(t,t)$ je regulární matice. Potom*

$$\mathsf{P}\big\{X(t) \in U\big\} > 0 \tag{7}$$

pro každou $U \neq \emptyset$ otevřenou v $\mathbb{R}^m$.

Náhodný proces, splňující (7) pro každé $t > t_0$ a každou otevřenou množinu $U \neq \emptyset$, se nazývá *irreducibilní*. Irreducibilita hraje důležitou roli při vyšetřování limitního chování náhodných procesů, odvodíme proto nyní postačující podmínku pro regularitu matice $\varrho(t,t)$ jako jednoduchou ukázku hlubokých vztahů, které existují mezi stochastickou analysou a theorií řízení. Položme

$$M_t = \int_{t_0}^{t} \varPhi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^* \varPhi^{-1}(s)^* \,\mathrm{d}s, \quad t > t_0.$$

Připomeňme, že

$$\varrho(t,t) = \varPhi(t)\big[\varrho(t_0,t_0) + M_t\big]\varPhi(t)^*$$

a $\varPhi(t)$ je regulární matice; $\varrho(t,t)$ je tedy regulární, právě když je $\varrho(t_0,t_0) + M_t$ regulární matice. Přitom zřejmě

$$\begin{aligned}
\langle M_t x, x\rangle &= \int_{t_0}^{t} \big\langle \varPhi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^*\varPhi^{-1}(s)^* x, x\big\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_{t_0}^{t} \big\langle \sigma(s)^*\varPhi^{-1}(s)^* x, \sigma(s)^*\varPhi^{-1}(s)^* x\big\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_{t_0}^{t} \big\|\sigma(s)^*\varPhi^{-1}(s)^* x\big\|^2 \,\mathrm{d}s \\
&\geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Obdobný výpočet ukáže, že

$$\langle \varrho(t_0,t_0)x, x\rangle \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Matice $\varrho(t_0,t_0)$ a M_t jsou tudíž positivně semidefinitní, jejich součet je proto také positivně semidefinitní. Positivně semidefinitní matice je regulární, právě když je positivně definitní. Postačující (a v případě $\varrho(t_0, t_0) = 0$ i nutnou) podmínkou k regularitě $\varrho(t, t)$ je tedy positivní definitnost (ekvivalentně, regularita) matice M_t.

Uvažme rovnici s řízením

$$\dot{y} = A(t)y + \sigma(t)v(t), \quad y(t_0) = x, \tag{8}$$

kde, jako dříve, A, σ vyhovují předpokladu (P) a $v \in L^2_{\mathrm{loc}}([t_0, \infty[\,; \mathbb{R}^n)$ je daná funkce. Vzhledem k (P) je $\sigma(\cdot)v(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}([t_0, \infty[\,; \mathbb{R}^m)$ a na úlohu (8) je možno aplikovat větu E.1.

Definice 3.1. Dvojice (A, σ) se nazývá *regulovatelná na* $[t_0, t]$, jestliže pro všechna $x, z \in \mathbb{R}^m$ existuje $v \in L^2([t_0, t]; \mathbb{R}^n)$ tak, že řešení y rovnice (8) splňuje $y(t) = z$. (To jest, pro každý počáteční stav x a koncový stav z existuje funkce v, která řídí systém (8) z x do z.)

Tvrzení 3.5. *(A, σ) je regulovatelná na $[t_0, t]$, právě když je M_t regulární.*

Důkaz. Je-li y řešení rovnice (8), pak podle vzorce pro variaci konstant

$$y(t) = \Phi(t)\left[x + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)v(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Zaveďme zobrazení

$$\mathfrak{G}_t : L^2([t_0, t]; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \longmapsto \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Podle definice regulovatelnost dvojice (A, σ) na $[t_0, t]$ znamená, že pro libovolná $x, z \in \mathbb{R}^m$ existuje funkce $v \in L^2([t_0, t]; \mathbb{R}^n)$ tak, že $z = \Phi(t)x + \Phi(t)\mathfrak{G}_t v$, to jest $\mathfrak{G}_t v = \Phi^{-1}(t)z - x$. Zobrazení $\Phi^{-1}(t)$ a $h \mapsto h - x$ jsou bijekce $\mathbb{R}^m$ na sebe; regulovatelnost (A, σ) na $[t_0, t]$ je tedy ekvivalentní s rovností $\operatorname{Rng}(\mathfrak{G}_t) = \mathbb{R}^m$.

Je-li M_t regulární, pak pro libovolné pevně zvolené $z \in \mathbb{R}^m$ položme

$$v(s) = \sigma(s)^* \Phi^{-1}(s)^* M_t^{-1} z,$$

díky (P) platí $v \in L^2([t_0, t]; \mathbb{R}^n)$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_t v &= \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)v(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*\,\mathrm{d}s\, M_t^{-1} z \\
&= M_t M_t^{-1} z = z.
\end{aligned}$$

Naopak, buď M_t singulární. Pak lze nalézti $z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$, tak, že $M_t z = 0$, proto též

$$\begin{aligned}
0 = \langle M_t z, z \rangle &= \int_{t_0}^{t} \left\langle \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^* z, z \right\rangle \mathrm{d}s \\
&= \int_{t_0}^{t} \left\| \sigma(s)^* \Phi^{-1}(s)^* z \right\|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

odtud $\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*z = 0$ pro λ-skoro všechna $s \in [t_0, t]$. Tudíž pro každou $v \in L^2$ platí

$$\langle \mathfrak{G}_t v, z\rangle = \int_{t_0}^{t} \big\langle \Phi^{-1}(s)\sigma(s)v(s), z\big\rangle \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \big\langle v(s), \sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*z\big\rangle \,\mathrm{d}s = 0,$$

což implikuje $\mathrm{Rng}(\mathfrak{G}_t) \subseteq \big[\mathrm{Lin}(z)\big]^{\perp} \subsetneqq \mathbb{R}^m$, tedy (A, σ) není regulovatelná na $[t_0, t]$. Q.E.D.

Příklad 3.1. Matice M_t jsou regulární, pokud funkce $\sigma\sigma^*$ nabývá hodnot v regulárních maticích. Přesněji: nechť lze nalézti $\delta > t_0$ tak, aby matice $\sigma(t)\sigma(t)^*$ byla positivně definitní pro $t \in\,]t_0, \delta[$ (to jest, aby $\langle \sigma(t)\sigma(t)^*z, z\rangle > 0$ pro každé $z \neq 0$ a všechna $t \in\,]t_0, \delta[$). (Speciálně je tento předpoklad splněn, je-li $m = n$ a $\sigma(t)$ je regulární pro $t_0 < t < \delta$.) Pak je M_T regulární pro libovolné $T > t_0$.

Skutečně, nechť pro spor platí $M_T z = 0$ pro nějaká $T > t_0$ a $z \neq 0$. Potom:

$$\begin{aligned} 0 = \langle M_T z, z\rangle &= \int_{t_0}^{T} \big\langle \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*z, z\big\rangle \,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^{T} \big\langle \sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*z, \Phi^{-1}(s)^*z\big\rangle \,\mathrm{d}s \\ &\geq \int_{t_0}^{T\wedge\delta} \big\langle \sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*z, \Phi^{-1}(s)^*z\big\rangle \,\mathrm{d}s > 0, \end{aligned}$$

ježto $\Phi^{-1}(s)^*z \neq 0$ z regularity $\Phi(s)$, a tedy integrand je striktně positivní na $]t_0, T \wedge \delta[$ podle předpokladu positivní definitnosti.

Příklad 3.2. Lze ukázat,[22] že pro konstantní matice $A \in \mathbb{M}_{m\times m}$, $\sigma \in \mathbb{M}_{m\times n}$ je dvojice (A, σ) je regulovatelná na $[t_0, t]$ pro všechna $t > t_0$, právě když má matice

$$\big[\sigma, A\sigma, A^2\sigma, \ldots, A^{m-1}\sigma\big] \in \mathbb{M}_{m\times mn}$$

hodnost m (tedy maximální možnou).

V následujících příkladech detailněji rozebereme několik jednoduchých lineárních rovnic.

Příklad 3.3. Ornstein-Uhlenbeckovým procesem se nazývá řešení jednodimensionální rovnice

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t, \tag{9}$$

s konstantními koeficienty $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. Toto řešení je dáno vzorcem

$$X_t = X_0 e^{\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \,\mathrm{d}W(s), \qquad 0 \leq t < \infty.$$

[22] Viz např. J. Zabczyk: *Mathematical control theory: An introduction*, Birkhäuser, Boston 1995, Theorem 1.2.

Je-li $\mathsf{E}X_0^2 < \infty$, $\alpha \neq 0$, pak podle tvrzení 3.2 dostaneme

$$\mu(t) = \mathsf{E}X_t = \mu(0)e^{\alpha t},$$
$$\varrho(t,t) = \operatorname{Var}(X_t) = -\frac{\sigma^2}{2\alpha} + \left(\varrho(0,0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)e^{2\alpha t}.$$

Zkoumejme nejprve případ $\alpha < 0$. Položme

$$\varrho_\infty = -\frac{\sigma^2}{2\alpha} > 0$$

a uvažujme řešení $\widetilde{X}$ rovnice (9) s gaussovskou počáteční podmínkou $\widetilde{X}_0$ mající rozdělení $\mathscr{N}(0,\varrho_\infty)$. Potom má $\widetilde{X}_t$ rozdělení $\mathscr{N}(0,\varrho_\infty)$ pro všechna $t \geq 0$; lze dokonce ukázat, že řešení $\widetilde{X}$ je striktně stacionární. Nechť je X libovolné řešení (9) s gaussovskou počáteční podmínkou X_0 (stále připouštíme i $X_0 = x \in \mathbb{R}$), pak má X_t rozdělení $\mathscr{N}(\mu(t),\varrho(t,t))$ podle tvrzení 3.3. Zřejmě

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \varrho(t,t) = \varrho_\infty,$$

odtud

$$\mathsf{E}f(X_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varrho(t,t)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-\mu(t))^2}{2\varrho(t,t)}\right) \mathrm{d}y$$
$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varrho_\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\varrho_\infty}\right) \mathrm{d}y = \mathsf{E}f(\widetilde{X}_0)$$

pro každou omezenou borelovskou funkci $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podle věty o majorisované konvergenci. (Speciálně tento výsledek platí pro funkce tvaru $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, a pro omezené spojité funkce na $\mathbb{R}$, což znamená, že X_t konverguje k $\widetilde{X}_0$ v distribuci.)

Naopak, při $\alpha > 0$ jest

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(t,t) = +\infty,$$

proto pro gaussovská řešení X dostáváme

$$\mathsf{P}\big\{X_t \in [-c,c]\big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varrho(t,t)}} \int_{-c}^{c} \exp\left(-\frac{(y-\mu(t))^2}{2\varrho(t,t)}\right) \mathrm{d}y$$
$$\leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi\varrho(t,t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

pro všechna $c \geq 0$.

Shrnuto: libovolné gaussovské řešení X rovnice (9) je irreducibilní a platí:

$$\begin{aligned}
\alpha < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \quad \mathsf{P}\big\{X_t \in A\big\} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathscr{N}(0, \varrho_\infty)(A), \\
\alpha > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ omezenou} \quad \mathsf{P}\big\{X_t \in A\big\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Methodami méně elementárními lze dokázat daleko více: Buď X libovolné (nikoliv nutně gaussovské) řešení rovnice (9), potom

$$\sup_{A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})} \big|\mathsf{P}\big\{X_t \in A\big\} - \mathscr{N}(0, \varrho_\infty)(A)\big| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

při $\alpha < 0$ a

$$\lim_{t\to\infty} |X_t| = +\infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

při $\alpha > 0$.

Poznamenejme, že termín Ornstein-Uhlenbeckův proces se mnohdy používá i pro řešení soustavy

$$\mathrm{d}X = AX\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$

lineárních stochastických diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty $A \in \mathbb{M}_{m\times m}$, $\sigma \in \mathbb{M}_{m\times n}$; to jest pro proces

$$X_t = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\sigma\,\mathrm{d}W(s).$$

Příklad 3.3 – pokračování. Náhodný proces popsaný rovnicí (9) byl ve fysikální literatuře (P. Langevin, 1908; G. E. Uhlenbeck & L. S. Ornstein, 1930) uvažován ještě před vznikem moderní theorie náhodných procesů jako model pro rychlost brownovské částice v prostředí s třením. Představa je zhruba následující: buď X_t poloha částice v čase t, pak první derivace $\dot{X}_t$ je rychlost částice a druhá derivace $\ddot{X}_t$ její zrychlení v čase t. Podle druhého Newtonova zákona $m\ddot{X} = F$, kde m je hmotnost částice a F působící síla. Představujeme si, že síla je tvaru

$$\frac{F}{m} = \alpha\dot{X} + \sigma\dot{W}$$

s $\sigma \neq 0$, $\alpha < 0$, přičemž první člen vpravo representuje tření (jež je závislé na rychlosti), druhý náhodné fluktuace. Při rigorosní interpretaci dostaneme systém rovnic

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= V(t)\,\mathrm{d}t, & \mathrm{d}V(t) &= \alpha V(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W, \\
X(0) &= x_0, & V(0) &= v_0,
\end{aligned}$$

kde $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ jsou zadané (deterministické) počáteční podmínky a W jednodimensionální Wienerův proces. Rovnici pro V umíme vyřešit, poloha častice je pak dána vztahem

$$X(t) = x_0 + \int_0^t V(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Pro aplikace je důležité znát nejen vlastnosti procesu V (které jsme uvedli v první části příkladu), ale i procesu X. Rozdělení X spočteme vycházejíce z toho, že dvojice $(X,V)^*$ řeší stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}\mathrm{d}W \equiv \Lambda\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}\mathrm{d}W,$$
$$\begin{pmatrix} X(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix};$$

není přitom podstatné, zda $\alpha < 0$, předpokládejme tedy pouze $\alpha \neq 0$. $\mathbb{R}^2$-hodnotový proces $(X,V)^*$ je gaussovský podle tvrzení 3.3, proto i proces X je gaussovský. Matice Λ má vlastní čísla 0, α; celkem snadno se ověří, že

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Dosazením z (11) do formule variace konstant dostaneme ihned

$$X(t) = x_0 + \frac{v_0}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right) + \frac{\sigma}{\alpha}\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}W(s) - W(t)\right\}, \tag{12}$$
$$V(t) = e^{\alpha t}v_0 + \sigma\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}W(s);$$

druhá z těchto rovností je nám ovšem známa. (Lze se přesvědčit, že (12) je vskutku ve shodě se vztahem (10), a to buď za pomoci Fubiniho věty pro stochastické integrály, nebo užitím identity

$$\int_0^t e(s)\,\mathrm{d}W(s) = e(t)W(t) - \int_0^t \dot{e}(s)W(s)\,\mathrm{d}s,$$

platné pro $e \in \mathscr{C}^1([0,t])$.) Označme m vektor středních hodnot a ϱ kovarianční matici procesu $(X,V)^*$, potom

$$m(t) = e^{\Lambda t}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{v_0}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) \\ e^{\alpha t}v_0 \end{pmatrix}$$

a, jelikož $\varrho(0,0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\varrho(t,t) &= \int_0^t e^{\Lambda(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}(0\ \sigma)\left(e^{\Lambda(t-s)}\right)^*\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t e^{\Lambda r}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\left(e^{\Lambda r}\right)^*\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left(e^{\alpha r}-1\right)^2 & \frac{\sigma^2}{\alpha}\left(e^{\alpha r}-1\right)e^{\alpha r} \\ \frac{\sigma^2}{\alpha}\left(e^{\alpha r}-1\right)e^{\alpha r} & \sigma^2 e^{2\alpha r} \end{pmatrix}\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Rozptyl náhodné veličiny X_t odpovídá levému hornímu rohu matice $\varrho(t,t)$, tudíž

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_t) &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_0^t \left(e^{\alpha s}-1\right)^2\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_0^t \left\{e^{2\alpha s} - 2e^{\alpha s} + 1\right\}\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^3}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2\alpha t}-1\right) - 2\left(e^{\alpha t}-1\right) + \alpha t\right\}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že X je gaussovský proces s rozdělením

$$X_t(\mathsf{P}) = \mathscr{N}\left(x_0 + \frac{v_0}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right), \frac{\sigma^2}{\alpha^3}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2\alpha t}-1\right) - 2\left(e^{\alpha t}-1\right) + \alpha t\right\}\right), \ t \geq 0.$$

Příklad 3.4. Je-li $\alpha = 0$, lze postup z předchozího příkladu snadno modifikovat a spočítat rozdělení integrovaného Brownova pohybu. Nechť je B reálný $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces a

$$I_t = \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Dvoudimensionální proces $(I, B)^*$ řeší rovnici

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\Gamma} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}B, \quad \begin{pmatrix} X(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

je tudíž gaussovský. Matice Γ je v Jordanově kanonickém tvaru, takže

$$e^{\Gamma t} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro libovolné $t \geq 0$ má $(I_t, B_t)^*$ rozdělení $\mathscr{N}(0, \varrho(t,t))$, kde

$$\begin{aligned} \varrho(t,t) &= \int_0^t e^{\Gamma(t-r)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1) \left(e^{\Gamma(t-r)}\right)^* \mathrm{d}r \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}r \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} r^2 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}r = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 & t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odvodili jsme, že náhodná veličina I_t má rozdělení $\mathscr{N}\left(0, \frac{1}{3}t^3\right)$.

Příklad 3.5. Uvažujme stochastický harmonický oscilátor

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sigma \dot{W}, \quad x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = v_0,$$

kde $\sigma \neq 0$, $\omega > 0$, W je jednodimensionální Wienerův proces a x_0, v_0 jsou $\mathscr{F}_0$-měřitelné náhodné veličiny, to jest – rigorosně – uvažujme systém

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \mathrm{d}W, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Uživše znalost fundamentální matice (viz příklad E.3) a formuli variace konstant dospějeme k rovnosti

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\sigma}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-r) \,\mathrm{d}W(r).$$

Pro x_0, v_0 deterministická proto platí

$$\begin{aligned} \mathsf{E}x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \\ \operatorname{Var}(x(t)) &= \frac{\sigma^2}{\omega^2} \int_0^t \sin^2 \omega r \, \mathrm{d}r = \frac{\sigma^2}{4\omega^3} \big[2\omega t - \sin 2\omega t\big]. \end{aligned}$$

Označíme-li A matici v driftu rovnice (13) a Σ difusní matici, pak

$$[\Sigma, A\Sigma] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\mathbb{R}^2$-hodnotový proces $(x, v)^*$ je irreducibilní podle příkladu 3.2. (Povšimněme si, že matice $\Sigma\Sigma^*$ je singulární, tvrzení z příkladu 3.1 proto nelze užíti.)

Podobně pro stochastický oscilátor se slabým tlumením $(0 < \gamma < \omega)$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = \sigma \dot{W}, \quad x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = v_0,$$

dostaneme

$$x(t) = e^{-\gamma t} \Big\{ x_0 \cos \varpi t + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\varpi} \sin \varpi t \Big\} + \frac{\sigma}{\varpi} \int_0^t e^{-\gamma(t-r)} \sin \varpi (t-r) \, \mathrm{d}W(r)$$

kladouce $\varpi = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Poznámka 3.3. Při pevném t je drift lineární stochastické diferenciální rovnice afinní funkce prostorových proměnných, zatímco difusní koeficient je konstatní. V některých případech lze nalézt v uzavřeném tvaru i řešení bilineární rovnice, v níž jak drift, tak difuse jsou afinní funkce.

Nadále předpokládejme, že $W = (W_1, \dots, W_n)^*$ je n-dimensionální Wienerův proces. Uvažujme nejprve případ jedné rovnice $(m = 1)$. Nechť jsou

$$A, a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S, \sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_{1\times n}$$

lokálně omezené měřitelné funkce a ζ je $\mathscr{F}_0$-měřitelná náhodná veličina. Položme

$$Z(t) = \exp\bigg(\int_0^t \Big\{ A(u) - \frac{1}{2} \|S(u)\|^2 \Big\} \, \mathrm{d}u + \int_0^t S(u) \, \mathrm{d}W(u) \bigg), \quad t \geq 0.$$

Potom je náhodný proces $X(t) = Z(t)\zeta$ (jediným) řešením rovnice

$$\mathrm{d}X = A(t) X \, \mathrm{d}t + X S(t) \, \mathrm{d}W(t), \quad X(0) = \zeta. \tag{14}$$

Řešení nehomogenní rovnice

$$\mathrm{d}X = \big[A(t)X + a(t)\big]\,\mathrm{d}t + \big[XS(t) + \sigma(t)\big]\,\mathrm{d}W(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{15}$$

je dáno vztahem

$$X(t) = Z(t)\bigg[\zeta + \int_0^t \frac{1}{Z(u)}\{a(u) - S(u)\sigma(u)^*\}\,\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\sigma(u)}{Z(u)}\,\mathrm{d}W(u)\bigg], \tag{16}$$

náhodný proces Z tedy hraje úlohu obdobnou fundamentálnímu řešení. (Podle své definice je Z proces se striktně positivními spojitými trajektoriemi, takže integrály v (16) mají smysl, jak se snadno ověří.)

Explicitně lze řešit i autonomní systém bilineárních rovnic, pokud koeficienty komutují. Přesněji: buďte $A, S_1, \dots, S_n \in \mathbb{M}_{m\times m}$ komutující matice, $AS_i = S_iA$, $S_iS_j = S_jS_i$ pro $1 \le i, j \le n$. Buď $\zeta : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathscr{F}_0$-měřitelná. Potom má rovnice

$$\mathrm{d}X(t) = AX(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n S_kX(t)\,\mathrm{d}W_k(t), \quad X(0) = \zeta \tag{17}$$

řešení $X(t) = \bar{Z}(t)\zeta$, kde

$$\bar{Z}(t) = \exp\bigg(\Big(A - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n S_k^2\Big)t + \sum_{k=1}^n S_kW_k(t)\bigg).$$

(Povšimněme si, že $\bar{Z} = Z$, pokud $m = 1$.) Na první pohled nemusí být zřejmé, že difusní koeficient rovnice (17) je lineární funkce. Položíme-li však

$$\varSigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}, \quad x \longmapsto \big[S_1x, \dots, S_nx\big],$$

je $\varSigma$ lineární zobrazení a rovnici (17) lze přepsat jako

$$\mathrm{d}X = AX\,\mathrm{d}t + \varSigma(X)\,\mathrm{d}W, \quad X_0 = \zeta.$$

Předpokládejme nyní, že $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ jsou lokálně omezené měřitelné funkce a označme σ_k k-tý sloupec matice σ, $1 \le k \le n$. Proces

$$X(t) = \bar{Z}(t)\bigg[\zeta + \int_0^t \bar{Z}^{-1}(s)\Big\{a(s) - \sum_{k=1}^n S_k\sigma_k(s)\Big\}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \bar{Z}^{-1}(s)\sigma(s)\,\mathrm{d}W(s)\bigg]$$

je řešením nehomogenní rovnice

$$\mathrm{d}X = \big\{AX + a(t)\big\}\,\mathrm{d}t + \big\{\varSigma(X) + \sigma(t)\big\}\,\mathrm{d}W(t), \quad X(0) = \zeta. \tag{18}$$

Všechny uvedené výsledky se ověří přímočarou, byť únavnou aplikací Itôovy formule. Existence a jednoznačnost řešení rovnic (14), (15), (17) a (18) je ovšem důsledkem věty 2.1, novou informací je formule pro řešení.

Speciálním případem úlohy (14) (či (17)) je jednodimensionální homogenní rovnice

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t \,\mathrm{d}t + \sigma Y_t \,\mathrm{d}W_t \tag{19}$$

s konstantními koeficienty a 1-dimensionálním Wienerovým procesem, jejíž řešení, dané vzorcem

$$Y_t = Y_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}, \tag{20}$$

je pro $Y_0 \equiv 1$ známo jako *geometrický Brownův pohyb.*

Vzorec (20) lze odvodit následující nerigorosní, ale názornou úvahou: je-li Y_t řešení rovnice (19), pak podle Itôovy formule proces $V_t = \log Y_t$ splňuje vztah

$$\mathrm{d}V_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t,$$

takže $Y_t = \exp(V_t)$ je vskutku dáno výrazem (20).

Je užitečné porovnat chování tohoto procesu s vlastnostmi Ornstein-Uhlenbeckova procesu, jenž řeší zdánlivě podobný problém (9). (Ve fysikální terminologii je rozdíl mezi (9) a (19) vyjádřen slovy, že šum v (9) je aditivní, zatímco v (19) multiplikativní.) Předně, $\mathsf{P}\{Y_t \geq 0\} = 1$ pro všechna $t \geq 0$, kdykoliv $Y_0 \geq 0$ skoro jistě. Předpokládejme, že $Y_0 \in\,]0, +\infty[$ a $\sigma \neq 0$, potom lze aplikací zákona iterovaného logarithmu pro Wienerův proces zjistit, že P-skoro jistě platí

$$\begin{aligned}
\alpha < \frac{\sigma^2}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} Y_t = 0,\\
\alpha > \frac{\sigma^2}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} Y_t = +\infty,\\
\alpha = \frac{\sigma^2}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \liminf_{t\to\infty} Y_t = 0,\ \limsup_{t\to\infty} Y_t = +\infty.
\end{aligned}$$

Poznámka 3.4. Lze se velmi snadno přesvědčit, že všechny výsledky dokázané v této kapitole zůstávají – s triviálními modifikacemi – v platnosti pro rovnice, jejichž koeficienty jsou definovány (a splňují příslušné předpoklady) nikoliv na celém $\mathbb{R}_+$, ale jen na nějakém intervalu $[a, b[\, \subseteq \mathbb{R}_+$.

4. Representace martingalů

Tato kapitola je věnována třem důležitým a užitečným větám, umožňujícím representovat spojité lokální martingaly pomocí Wienerova procesu:

a) každý reálný spojitý lokální martingal lze získat změnou časové škály Wienerova procesu,

b) každý spojitý lokální martingal s absolutně spojitou kvadratickou variací je stochastickým integrálem vzhledem k nějakému Wienerovu procesu,

c) je-li B pevně zvolený Wienerův proces a $(\mathscr{F}_t^B)$ jeho obohacená kanonická filtrace, pak každý zprava spojitý $(\mathscr{F}_t^B)$-martingal je stochastickým integrálem vzhledem k B.

A. Representace martingalů změnou časové škály Wienerova procesu. Začněme připomenutím Skorochodovy representace náhodné procházky.[23] Podle Skorochodovy věty pro libovolnou posloupnost $X_i \in L^2$, $i = 1, 2, \dots$, nezávislých stejně rozdělených centrovaných náhodných veličin a daný Wienerův proces W existují nezáporné stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny $\tau_1, \tau_2, \dots$ tak, že $\mathsf{E}\tau_1 = \mathsf{E}X_1^2$ a

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i \overset{\mathscr{D}}{\sim} W\left(\sum_{i=1}^n \tau_i\right), \qquad n \geq 1,$$

kde $\overset{\mathscr{D}}{\sim}$ značí rovnost rozdělení. Podobný výsledek lze odvodit pro martingal $\{S_n\}$ s diskrétním časem, oslabíme-li požadavky na náhodné časy τ_i.[24] Naším cílem je nalézti analogickou representaci pro martingaly se spojitým časem; vhodnou konstrukcí Wienerova procesu získáme nejen rovnost rozdělení, ale i skoro jistě.

Umluvme se, že – pokud nebude řečeno jinak – všechny vyšetřované procesy budou uvažovány na (libovolném) pevně zvoleném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ splňujícím (UC).

Věta 4.1. (K. E. Dambis, L. E. Dubins & G. Schwarz, 1965). *Buď M spojitý reálný lokální martingal, $M_0 = 0$. Nechť*

$$\langle M \rangle_\infty = +\infty \quad \mathsf{P}\text{-}\textit{skoro jistě.} \tag{1}$$

Pro každé $s \in [0, \infty[$ definujme markovský čas

$$T(s) = \inf\{t \geq 0;\ \langle M \rangle_t > s\}.$$

Položme

$$B_s = M_{T(s)}, \quad \mathscr{G}_s = \mathscr{F}_{T(s)}, \quad s \geq 0.$$

[23] Viz např. J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, věta VII.3.1.

[24] Přesnou formulaci je možno nalézti v knize P. Hall, C. C. Heyde: *Martingale limit theory and its application*, Academic Press, New York 1980, Theorem A.1.

Potom je B standardní jednodimensionální $(\mathscr{G}_s)$-Wienerův proces a P-skoro jistě platí

$$M_t = B_{\langle M\rangle_t}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Poznámka 4.1. a) Předpoklad $M_0 = 0$ je nepodstatný. Není-li splněn, stačí uvažovat spojitý lokální martingal $M - M_0$.

b) Podle jmen původců je věta 4.1 často citována jako DDS-věta, o procesu B v ní zkonstruovaném někteří autoři hovoří jako o DDS-Brownově pohybu martingalu M.

Funkce $\langle M\rangle_.(\omega)$ nemusí být prostá, její monotonie a spojitost však umožňují definovat vhodnou zobecněnou inversní funkci. O tom pojednává následující lemma.

Lemma 4.2. *Buď $A : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ spojitá neklesající funkce, $A(0) = 0$. Položme*

$$A(\infty) = \lim_{t\to\infty} A(t)$$

a definujme

$$H(s) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0;\ A(t) > s\}, & 0 \leq s < A(\infty), \\ \infty, & s \geq A(\infty). \end{cases}$$

Potom

a) $H : [0, A(\infty)[\longrightarrow [0,\infty[$ je zprava spojitá neklesající funkce. Jestliže $A(t) < A(\infty)$ pro všechna $t \geq 0$, pak $H(s) \longrightarrow \infty$ při $s \nearrow A(\infty)$.

b) $A(H(s)) = s \wedge A(\infty)$ pro všechna $s \in [0,\infty[$.

c) $H(A(t)) = \sup\{\tau \geq t;\ A(\tau) = A(t)\}$ pro všechna $t \in [0,\infty[$.

d) Buď $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce splňující: je-li $A(r) = A(t)$ pro nějaká $0 \leq r < t$, pak $\varphi(r) = \varphi(t)$. Potom je $\varphi \circ H$ spojitá funkce na $[0, A(\infty)[$ a

$$\varphi(H(A(t))) = \varphi(t), \qquad 0 \leq t < \infty.$$

e) Pro všechna $0 \leq s, t < \infty$ platí: $s < A(t)$, právě když $H(s) < t$. Je-li $H(s) \leq t$, pak $s \leq A(t)$.

Je-li $H(A(t)) = +\infty$, je $A(\infty) < \infty$ a $A(t) = A(\infty)$. Funkce φ je tedy podle předpokladu konstantní na $[t,\infty[$ a lze ji v tomto případě dodefinovat vztahem $\varphi(\infty) = \lim_{s\to\infty} \varphi(s)$, takže výraz $\varphi(H(A(t)))$ v tvrzení d) má vždy smysl. Dále, snadno se lze přesvědčit, že druhou implikaci v e) nelze obrátit.

Jestliže je funkce A navíc prostá, je H na $[0, A(\infty)[$ funkce k A inversní. Hovoří se proto o H jako o (zprava spojité) zobecněné inversní funkci.

Důkaz. a) H je zřejmě neklesající. Buď $s \in [0, A(\infty)[$, potom

$$\lim_{r\to s+} H(r) \geq H(s)$$

z monotonie; dokážeme opačnou nerovnost. Podle definice $A(H(s)+\varepsilon) > s$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Pro $r \in]s, A(H(s)+\varepsilon)[$ dostáváme $H(r) \le H(s)+\varepsilon$, z libovolnosti ε tedy

$$\lim_{r \to s+} H(r) \le H(s).$$

Dále, H je neklesající, proto pro $s \nearrow A(\infty)$ existuje její limita b. Předpokládejme, že $b < \infty$. Buď $s < A(\infty)$ libovolné, podle definice funkce H pro všechna $\varepsilon > 0$ platí $A(H(s)+\varepsilon) > s$, tedy vzhledem k spojitosti A limitním přechodem $\varepsilon \searrow 0$ odvodíme $A(H(s)) \ge s$. Z monotonie A pak plyne $A(b) \ge A(H(s)) \ge s$ a limitní přechod $s \nearrow A(\infty)$ implikuje $A(b) = A(\infty)$.

b) Je-li $s \ge A(\infty)$, pak $A(H(s)) = A(\infty)$ triviálně podle definice H. Buď tedy $s < A(\infty)$, již víme, že $A(H(s)) \ge s$. Pokud $H(s) = 0$, pak jsme hotovi. Nechť tudíž $H(s) > 0$, pro libovolné $\varepsilon \in]0, H(s)[$ platí podle definice $A(H(s)-\varepsilon) \le s$. Limita $\varepsilon \searrow 0$ dává žádanou nerovnost $A(H(s)) \le s$.

c) Podle definice

$$H(A(t)) = \inf\{r \ge 0, A(r) > A(t)\},$$

z monotonie a spojitosti A dokazované tvrzení ihned plyne.

d) Jestliže $H(A(t)) = \tau$, pak $A(t) = A(\tau)$ vzhledem k (c) a spojitosti A, podle předpokladu proto $\varphi(t) = \varphi(\tau)$. Dále, funkce $\varphi \circ H$ je zřejmě spojitá zprava. Zvolme $s \in]0, A(\infty)[$ libovolné, označme

$$b = \lim_{r \to s-} H(r) \le H(s).$$

Pro libovolné $\varepsilon \in]0, s[$ pak z vlastnosti (b) a z monotonie A platí

$$s - \varepsilon = A(H(s-\varepsilon)) \le A(b) \le A(H(s)) = s,$$

tudíž $A(b) = A(H(s))$. Předpoklad o funkci φ dává

$$\varphi\left(\lim_{r \to s-} H(r)\right) = \varphi(H(s)),$$

což zřejmě znamená spojitost $\varphi \circ H$ v bodě s zleva.

e) Tento bod plyne přímo z definice T a spojitosti A. Q.E.D.

Důkaz věty 4.1. Funkce $T(\cdot)(\omega)$ je inversní k $\langle M \rangle_\cdot(\omega)$ ve smyslu lemmatu 4.2, proto podle bodu (e) tohoto lemmatu pro každé $s \ge 0$ platí

$$\{T(s) < t\} = \{\langle M \rangle_t > s\} \in \mathscr{F}_t, \qquad t \ge 0.$$

Filtrace $(\mathscr{F}_t)$ je zprava spojitá, $T(s)$ je tudíž markovský čas, jenž je navíc podle předpokladu (1) skoro jistě konečný. Dále, pro každé $t \ge 0$ je $\langle M \rangle_t$ markovský čas vzhledem k $(\mathscr{G}_s)$, neboť opět podle lemmatu 4.2(e) dostáváme

$$\{\langle M \rangle_t \le s\} = \{T(s) \ge t\} \in \mathscr{F}_{T(s)} = \mathscr{G}_s, \quad 0 \le s < \infty.$$

Zvolme pevně $0 \le s_1 < s_2$ a definujme lokální $(\mathscr{F}_t)$-martingal $\widetilde{M}$ vztahem

$$\widetilde{M}_t = M_{t \wedge T(s_2)}, \qquad t \ge 0.$$

Potom

$$\langle \widetilde{M} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge T(s_2)} \le \langle M \rangle_{T(s_2)} = s_2, \qquad 0 \le t < \infty,$$

poslední rovnost plyne z lemmatu 4.2(b). Vzhledem k monotonii $\langle \widetilde{M} \rangle_\infty \le s_2$, proto i $\mathsf{E}\langle \widetilde{M} \rangle_\infty < \infty$ a podle lemmatu C.2 jsou $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^2 - \langle \widetilde{M} \rangle$ stejnoměrně integrovatelné martingaly. Užívajíce větu o "optional sampling" dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big(B_{s_2} - B_{s_1} \mid \mathscr{G}_{s_1}\big) &= \mathsf{E}\big(M_{T(s_2)} - M_{T(s_1)} \mid \mathscr{F}_{T(s_1)}\big) \\
&= \mathsf{E}\big(\widetilde{M}_{T(s_2)} - \widetilde{M}_{T(s_1)} \mid \mathscr{F}_{T(s_1)}\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

a též

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big(B_{s_2}^2 - s_2 \mid \mathscr{G}_{s_1}\big) &= \mathsf{E}\big(M_{T(s_2)}^2 - \langle M \rangle_{T(s_2)} \mid \mathscr{F}_{T(s_1)}\big) \\
&= \mathsf{E}\big(\widetilde{M}_{T(s_2)}^2 - \langle \widetilde{M} \rangle_{T(s_2)} \mid \mathscr{F}_{T(s_1)}\big) \\
&= \widetilde{M}_{T(s_1)}^2 - \langle \widetilde{M} \rangle_{T(s_1)} \\
&= M_{T(s_1)}^2 - \langle M \rangle_{T(s_1)} \\
&= B_{s_1}^2 - s_1;
\end{aligned}$$

prvá a poslední rovnost jsou opět důsledkem lemmatu 4.2(b). Nakonec, $\langle \widetilde{M} \rangle_{T(0)} = \langle M \rangle_{T(0)} = 0$, proto $B_0 = M_{T(0)} = \widetilde{M}_{T(0)} = 0$ podle lemmatu C.1. Neboť s_1, s_2 byly libovolné, plyne odtud, že B je L^2-martingal (vzhledem k filtraci $(\mathscr{G}_s)$) takový, že $B_0 = 0$ a $(B_s^2 - s)$ je také $(\mathscr{G}_s)$-martingal. Ukážeme, že B má skoro jistě spojité trajektorie. Již dokázané vlastnosti pak budou implikovat, že B má kvadratickou variaci $\langle B \rangle_s = s$ a podle Lévyho věty je proto B standardní Wienerův proces. Spojitost trajektorií získáme jako důsledek lemmatu 4.2(d), pokud nalezneme $\Omega^* \in \mathscr{F}$, $\mathsf{P}(\Omega^*) = 1$, tak, aby pro každé $\omega \in \Omega^*$ platilo

$$\langle M \rangle_r(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega) \text{ pro nějaká } r, t \in \mathbb{R}_+,\ t > r \implies M_r(\omega) = M_t(\omega). \tag{3}$$

Vzhledem ke spojitosti trajektorií procesů M, $\langle M \rangle$ stačí (3) dokázat za dodatečného předpokladu $r \in \mathbb{Q}$. Zvolme tedy libovolné pevné racionální $r \ge 0$ a definujme

$$\begin{aligned}
\sigma &= \inf\{v \ge r;\ \langle M \rangle_v > \langle M \rangle_r\}, \\
N_s &= M_{(r+s)\wedge\sigma} - M_r, \quad s \in [0, \infty[\,.
\end{aligned}$$

Zřejmě je σ markovský čas a (N_s) je lokální $(\mathscr{F}_{r+s})$-martingal se spojitými trajektoriemi, $N_0 = 0$. Přitom

$$\langle N\rangle_s = \langle M\rangle_{(r+s)\wedge\sigma} - \langle M\rangle_r = 0 \qquad \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

a lemma C.1 poskytuje množinu $\Omega_r \in \mathscr{F}$, $\mathsf{P}(\Omega_r) = 1$, s vlastností, že

$$N_s(\widetilde{\omega}) = M_{(r+s)\wedge\sigma}(\widetilde{\omega}) - M_r(\widetilde{\omega}) = 0, \quad 0 \le s < \infty, \tag{4}$$

platí pro všechna $\widetilde{\omega} \in \Omega_r$. Existuje-li $t > r$ tak, že $\langle M\rangle_t(\widetilde{\omega}) = \langle M\rangle_r(\widetilde{\omega})$, pak $t \le \sigma(\widetilde{\omega})$ a podle (4) dostaneme $M_t(\widetilde{\omega}) = M_r(\widetilde{\omega})$. Při volbě

$$\Omega^* = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}_+} \Omega_r$$

tedy (3) platí, což znamená, že $s \longmapsto B_s(\omega) = M_{T(s)}(\omega)$ je spojitá funkce pro všechna $\omega \in \Omega^*$. Podle lemmatu 4.2(d) dále dostáváme

$$M_t = M_{T(\langle M\rangle_t)} = B_{\langle M\rangle_t}, \qquad 0 \le t < \infty,$$

na Ω^*, tím je důkaz dokončen. Q.E.D.

Poznámka 4.2. Filtrace $(\mathscr{G}_s)$ splňuje (UC): Zřejmě $\mathscr{G}_0 = \mathscr{F}_{T(0)} \supseteq \mathscr{F}_0$, takže $\mathscr{G}_0$ obsahuje všechny P-nulové množiny. Dále ověříme, že $(\mathscr{G}_s)$ je spojitá zprava. Buď $s \ge 0$ libovolné a nechť $A \in \bigcap_{v>s} \mathscr{F}_{T(v)}$, ukážeme, že $A \in \mathscr{F}_{T(s)}$. Vzhledem ke spojitosti filtrace $(\mathscr{F}_t)$ zprava stačí dokázat, že $A \cap \{T(s) < t\} \in \mathscr{F}_t$ pro libovolné $t \ge 0$. Zvolme $v_n \searrow s$, pokud ověříme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T(v_n) < t\} = \{T(s) < t\}$, budeme hotovi. Ale, jak víme z lemmatu 4.2, $T(s) < t$, právě když $\langle M\rangle_t > s$, tedy nutně i $\langle M\rangle_t > v_n$ pro n dosti velká.

Kazem věty 4.1 je předpoklad (1), který nemusí být splněn právě pro martingaly s regulárním chováním (srovnej např. lemma C.2). Ukážeme si však, že hlavní výsledek, representace (2), zůstává v platnosti i bez tohoto předpokladu; Wienerův proces B však někdy musíme definovat na modifikovaném pravděpodobnostním prostoru, ve smyslu, který nyní vysvětlíme.

Konstrukce a terminologie. Mějme dán $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný proces X, hledáme d-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W, nezávislý s X. Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ obecně nemusí být dosti bohatý, aby umožňoval konstrukci W. V takovém případě vezměme d-dimensionální $(\mathscr{H}_t)$-Wienerův proces W, definovaný na nějakém filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Xi, \mathscr{H}, (\mathscr{H}_t), \mathsf{Q})$, a položme

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Xi, \quad \tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{H}, \quad \hat{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{H}_t, \quad \tilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \otimes \mathsf{Q}.$$

Filtrace $(\hat{\mathscr{F}}_t)$ nemusí splňovat (UC), proto obvyklým způsobem definujeme

$$\tilde{\mathscr{F}}_t = \bigcap_{s>t} \sigma\big(\hat{\mathscr{F}}_s \cup \mathbf{N}\big),$$

kde $\mathbf{N}$ je systém všech $\tilde{\mathsf{P}}$-nulových množin v $\tilde{\mathscr{F}}$. Definujme dále

$$\tilde{X}_t(\omega,\xi) = X_t(\omega), \quad \tilde{W}_t(\omega,\xi) = W_t(\xi), \qquad 0 \le t < \infty, \quad (\omega,\xi) \in \tilde{\Omega}.$$

Je zřejmé, že $\tilde{X}$ a $\tilde{W}$ jsou $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-adaptované procesy a $\tilde{W}$ je $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-Wienerův proces nezávislý s $\tilde{X}$. Stochastickou basi $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{\mathsf{P}})$ nazýváme *rozšíření* stochastické base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ a obvykle ztotožňujeme $\tilde{X}$ s X a $\tilde{W}$ s W. (Je-li filtrace nepodstatná nebo jasná z kontextu, hovoří se obvykle prostě o rozšíření pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.) Očividně, je-li $(E, \mathscr{E})$ měřitelný prostor, lze každou $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-měřitelnou funkci $Z : \Omega \longrightarrow E$ předpisem $\tilde{Z}(\omega,\xi) = Z(\omega)$, $(\omega,\xi) \in \tilde{\Omega}$, rozšířit na $(\tilde{\mathscr{F}}, \mathscr{E})$-měřitelnou funkci $\tilde{Z} : \tilde{\Omega} \longrightarrow E$; opět zpravidla Z a $\tilde{Z}$ ztotožňujeme.

Důsledek 4.3. *Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$. Potom existuje rozšíření pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ a na něm definovaný standardní jednodimensionální Wienerův proces B tak, že skoro jistě platí*

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t}, \qquad 0 \le t < \infty.$$

Nástin důkazu. Zaveďme $T(s)$, $\mathscr{G}_s$ stejně jako ve větě 4.1, opět platí, že $\langle M \rangle_t$ jsou $(\mathscr{G}_s)$-markovské časy, tedy i $\langle M \rangle_\infty = \lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t$ je markovský čas vzhledem k $(\mathscr{G}_s)$. Uvědomme si nejprve, že $M \circ T = \big(M_{T(s)},\ s \ge 0\big)$ je korektně definovaný proces: je-li $\langle M \rangle_\infty < \infty$, pak sice $T(s) = \infty$ pro $s \ge \langle M \rangle_\infty$, avšak skoro všude na množině $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ existuje limita $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$. Položme totiž

$$\zeta_n = \inf\big\{t \ge 0;\ \langle M \rangle_t \ge n\big\}, \quad M_n(s) = M_{s\wedge\zeta_n},\ s \ge 0.$$

Potom zřejmě $\mathsf{E}\langle M_n \rangle_\infty < \infty$, tudíž M_n je stejnoměrně integrovatelný martingal vzhledem k lemmatu C.2. Podle martingalové limitní věty existuje (konečná) limita $\lim_{t\to\infty} M_n(t)$ P-skoro jistě. Při $\langle M \rangle_\infty(\omega) < \infty$ ovšem existuje $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tak, že $\zeta_n(\omega) = \infty$ pro každé $n \ge n_0(\omega)$, tedy také $M_t(\omega) = M_n(t,\omega)$ pro $n \ge n_0(\omega)$. Odtud už naše tvrzení plyne.

Fixujme nyní $0 \le s_1 < s_2$ a definujme opět lokální martingal $\widetilde{M}$ jako v důkazu věty 4.1. Užitím lemmatu 4.2(b) ihned ověříme

$$\langle \widetilde{M} \rangle_t = \langle M \rangle_{t\wedge T(s_2)} \le \langle M \rangle_{T(s_2)} = s_2 \wedge \langle M \rangle_\infty \le s_2 < \infty,$$

takže $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^2 - \langle \widetilde{M} \rangle$ jsou stejnoměrně integrovatelné martingaly. Užijme proto "optional sampling" známým nám již způsobem, tím ověříme, že $M \circ T$ jest $(\mathscr{G}_s)$-martingal se spojitými trajektoriemi, startující z nuly a s kvadratickou variací $\langle M \circ T \rangle_s = \langle M \rangle_{T(s)} = s \wedge \langle M \rangle_\infty$. Buď nyní W $(\mathscr{G}_s)$-Wienerův proces, nezávislý s $M \circ T$; takový jistě existuje, pokud přejdeme na rozšíření prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Položme

$$B_s = W_s - W_{s\wedge\langle M \rangle_\infty} + M_{T(s)},$$

potom je B $(\mathscr{G}_s)$-martingal se spojitými trajektoriemi, $B_0 = 0$. Zřejmě

$$H_s \equiv W_s - W_{s\wedge\langle M\rangle_\infty} = \int_0^s \mathbf{1}_{[\langle M\rangle_\infty,\infty[}(r)\,\mathrm{d}W_r,$$

takže

$$\langle H\rangle_s = \int_0^s \mathbf{1}_{[\langle M\rangle_\infty,\infty[}(r)\,\mathrm{d}r = s - (s\wedge\langle M\rangle_\infty)$$

a z nezávislosti plyne (viz lemma C.5), že

$$\langle B\rangle_s = s - (s\wedge\langle M\rangle_\infty) + \langle M\circ T\rangle_s = s, \quad 0\le s<\infty,$$

tudíž B je Wienerův proces. Nakonec,

$$B_{\langle M\rangle_t} = W_{\langle M\rangle_t} - W_{\langle M\rangle_t\wedge\langle M\rangle_\infty} + M_{T(\langle M\rangle_t)} = M_{T(\langle M\rangle_t)}$$

a tvrzení věty plyne z lemmatu 4.2(d). Q.E.D.

Poznámka 4.3. Během důkazu jsme ukázali, že M má limitu při $t\to\infty$ skoro všude na množině $\{\langle M\rangle_\infty<\infty\}$. Stojí za povšimnutí, že z důsledku 4.3 dokonce plyne rovnost

$$\{\langle M\rangle_\infty<\infty\} = \{\exists \lim_{t\to\infty} M_t\} \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Ilustrujme nejprve typický způsob užití věty 4.1 (respektive důsledku 4.3) na čtyřech nesložitých příkladech.

Příklad 4.1. Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$. Nechť je kvadratická variace procesu M deterministická, to jest, existuje $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tak, že $\langle M\rangle_.(\omega) = \phi$ na $\mathbb{R}_+$ pro P-skoro všechna $\omega\in\Omega$. Potom je M gaussovský proces s nezávislými přírůstky, jak ihned plyne z representace (2).

Příklad 4.2. Reálný spojitý lokální martingal M splňuje zákon iterovaného logarithmu v následující podobě:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M_t}{(2\langle M\rangle_t \log\log\langle M\rangle_t)^{1/2}} = 1 \quad \text{skoro jistě na množině } \{\langle M\rangle_\infty=\infty\}.$$

Abychom to dokázali, nalezněme podle důsledku 4.3 Wienerův proces B takový, že

$$M_t = M_0 + B_{\langle M\rangle_t} \quad \text{skoro jistě.}$$

Podle zákona iterované logarithmu pro Brownův pohyb[25]

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{(2t\log\log t)^{1/2}} = 1 \quad \text{skoro jistě,}$$

[25] Viz např. J. Štěpán: *op. cit.*, Academia, Praha 1987, věta VII.1.8.

tedy též

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(\langle M\rangle_t)}{(2\langle M\rangle_t \log\log\langle M\rangle_t)^{1/2}} = 1 \quad \text{skoro jistě na množině } \{\langle M\rangle_\infty = \infty\},$$

z čehož naše tvrzení ihned plyne. Speciálně pro libovolné $\alpha > \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M\rangle_t^\alpha} = 0 \quad \text{skoro všude na množině } \{\langle M\rangle_\infty = \infty\}.$$

Předpokládejme navíc, že

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\langle M\rangle_t}{t} < \infty \quad \text{skoro jistě.} \tag{5}$$

(To je, ku příkladu, pravda pro martingaly tvaru

$$M_t = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$$

s reálným Wienerovým procesem W a progresivně měřitelným náhodným procesem f, pokud $|f| \le K$ na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ pro nějakou konstantu $K < \infty$.) Potom dokonce

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t^\alpha} = 0 \quad \text{skoro jistě na } \Omega$$

pro každé $\alpha > \frac{1}{2}$. Podle (5) je totiž $t^{-\alpha}\langle M\rangle_t^\alpha$ omezené pro $t \ge 1$, pročež

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle M\rangle_t^\alpha}{t^\alpha} \frac{M_t}{\langle M\rangle_t^\alpha} = 0 \quad \text{skoro jistě na množině } \{\langle M\rangle_\infty = \infty\}.$$

Zbývá si uvědomit, že očividně

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_0 + B_{\langle M\rangle_t}}{t^\alpha} = 0 \quad \text{skoro jistě na množině } \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}.$$

Příklad 4.3. Uvažujme 1-dimensionální Wienerův proces W. Stochastický integrál $\int_0^1 X\,\mathrm{d}W$ jsme definovali pro progresivně měřitelné procesy X splňující

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 |X(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty\right\} = 1. \tag{6}$$

Nyní se přesvědčíme, že (6) je rozumný minimální předpoklad. Buď X progresivně měřitelný proces takový, že

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |X(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty \quad \forall t \in [0,1[\right\} = 1.$$

Položme
$$D = \left\{\omega;\ \int_0^1 |X(s,\omega)|^2 \,\mathrm{d}s = \infty\right\}.$$
Ukážeme, že
$$\left.\begin{aligned} &\limsup_{t\to 1-} \int_0^t X(s)\,\mathrm{d}W(s) = +\infty \\ &\liminf_{t\to 1-} \int_0^t X(s)\,\mathrm{d}W(s) = -\infty \end{aligned}\right\} \qquad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } D. \tag{7}$$
Vskutku, buď $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow [0,1[$ (deterministická) striktně rostoucí surjektivní funkce. (Speciálně, φ je spojitá a existuje spojitá inverse φ^{-1}.) Definujme spojitý lokální martingal M vztahem
$$M_t = \int_0^{\varphi(t)} X(s)\,\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t < \infty.$$
Potom
$$\langle M\rangle_t = \int_0^{\varphi(t)} |X(s)|^2\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t < \infty,$$
a podle předpokladu
$$\lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t = \infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } D.$$
Podle důsledku 4.3 můžeme nalézti Wienerův proces B tak, aby $M = B(\langle M\rangle)$, tedy
$$\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}W(s) = M_{\varphi^{-1}(t)} = B_{\langle M\rangle_{\varphi^{-1}(t)}}, \quad 0 \le t < 1.$$
Položme $p = \langle M\rangle \circ \varphi^{-1}$. Protože zřejmě
$$p(t) = \langle M\rangle_{\varphi^{-1}(t)} = \int_0^t |X(s)|^2\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to 1-]{} \infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } D,$$
plyne tvrzení (7) ze zákona iterovaného logarithmu, podle nějž
$$\limsup_{t\to 1-} B_{p(t)} = +\infty, \quad \liminf_{t\to 1-} B_{p(t)} = -\infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } D.$$

Příklad 4.4. V kapitole 1 jsme dokázali důležitou Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost pro spojité lokální martingaly. Díky důsledku 4.3 bychom se při důkazu této nerovnosti (v jednodimensionálním případě) mohli omezit jen na Brownův pohyb. Buď totiž M spojitý reálný lokální martingal, $M_0 = 0$. Víme, že existuje Wienerův proces B (vzhledem ke vhodné filtraci $(\mathscr{G}_s)$) takový, že $\langle M\rangle_t$ jsou $(\mathscr{G}_t)$-markovské časy pro všechna $t \in [0, +\infty]$ a

$$M_t = B_{\langle M\rangle_t}, \quad t \geq 0.$$

Předpokládejme, že pro každé $p \in]0, \infty[$ existují konstanty $C_p, c_p \in]0, \infty[$ tak, že pro libovolný $(\mathscr{G}_s)$-markovský čas τ platí

$$c_p \mathsf{E}\tau^{p/2} \leq \mathsf{E}\sup_{t\geq 0}\bigl|B_{t\wedge\tau}\bigr|^p \leq C_p \mathsf{E}\tau^{p/2}.$$

Volbou $\tau = \langle M\rangle_\infty$ dostaneme

$$c_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2} \leq \mathsf{E}\sup_{t\geq 0}\bigl|B_{t\wedge\langle M\rangle_\infty}\bigr|^p \leq C_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}.$$

Neboť $\langle M\rangle_0 = 0$ a $\langle M\rangle$ má spojité neklesající trajektorie, jest

$$\sup_{t\geq 0}\bigl|B_{t\wedge\langle M\rangle_\infty}\bigr| = \sup_{t\geq 0}\bigl|B_{\langle M\rangle_t}\bigr| = \sup_{t\geq 0}|M_t|$$

P-skoro jistě a proto

$$c_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2} \leq \mathsf{E}\sup_{t\geq 0}|M_t|^p \leq C_p \mathsf{E}\langle M\rangle_\infty^{p/2}.$$

Z kapitoly 1 víme, že z tohoto odhadu již Burkholder-Davis-Gundyho nerovnost plyne.[26]

V následujícím příkladu užijeme tvrzení o lineárních stochastických diferenciálních rovnicích v kombinaci s větou 4.1 ke konstrukci velmi důležitého procesu.

Příklad 4.5. Nechť jsou dány body $a, b \in \mathbb{R}$, uvažujme lineární stochastickou diferenciální rovnici

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= \frac{b - X(t)}{T - t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \quad 0 \leq t < T, \\ X(0) &= a \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

s jednodimensionálním Wienerovým procesem W. Při volbě

$$A(t) = -\frac{1}{T-t}, \quad \alpha(t) = \frac{b}{T-t}, \quad 0 \leq t < T,$$

[26] Žádný z běžných důkazů věty 1.1 se příliš nezjednoduší, uvažujeme-li Brownův pohyb místo obecného spojitého martingalu. Postup z příkladu 4.4 je však velmi užitečný, chceme-li nalézti optimální konstanty v Burkholder-Davis-Gundyho nerovnosti (viz poznámka 1.2).

lze rovnici (8) zapsat jako

$$\mathrm{d}X = \Big\{A(t)X + \alpha(t)\Big\}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t).$$

Zřejmě $A, \alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T[)$ a je možno užíti výsledky z kapitoly 3. Spočtěme fundamentální řešení příslušné deterministické homogenní rovnice (viz příklad E.1):

$$\Phi(t,0) = \exp\Big(\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \exp\Big(\log(T-t) - \log T\Big) = 1 - \frac{t}{T}.$$

Podle tvrzení 3.1 má řešení rovnice (8) tvar

$$\begin{aligned} X(t) &= a\big(1 - \frac{t}{T}\big) + \frac{T-t}{T}\int_0^t \frac{Tb}{(T-s)^2}\,\mathrm{d}s + \frac{T-t}{T}\int_0^t \frac{T}{T-s}\,\mathrm{d}W(s) \\ &= a\big(1-\frac{t}{T}\big) + b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}W(s)}{T-s} \end{aligned}$$

pro $t \in [0,T[$, vyšetřujme stochastický integrál vpravo. Tvrdíme, že

$$Y_t = \begin{cases} (T-t)\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}W(s)}{T-s}, & 0 \le t < T, \\ 0, & t = T, \end{cases}$$

je spojitý gaussovský proces s nulovou střední hodnotou a s kovarianční funkcí

$$\varrho(s,t) \equiv \mathsf{E}\big(Y_s Y_t\big) = s \wedge t - \frac{st}{T}, \quad 0 \le s,t \le T.$$

Většina tvrzení je zřejmých; je třeba dokázat spojitost trajektorií v čase T. Uvažme, že

$$M_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}W(s)}{T-s}, \quad 0 \le t < T,$$

je L^2-martingal se spojitými trajektoriemi a s kvadratickou variací

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(T-s)^2} = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T};$$

očividně $\langle M\rangle_t \nearrow \infty$ při $t \nearrow T$. Užijeme větu 4.1 jako v příkladu 4.3 k nalezení 1-dimensionálního Wienerova procesu B takového, že

$$M_t = B\left(\langle M\rangle_t\right), \quad 0 \le t < T.$$

Ze silného zákona velkých čísel pro Wienerův proces plyne

$$Y_t = (T-t)M_t = \frac{B_{\langle M\rangle_t}}{\langle M\rangle_t + \frac{1}{T}} \xrightarrow[t \nearrow T]{} 0 \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Ověřme ještě výraz pro kovarianční funkci:

$$\mathsf{E}(Y_t Y_s) = (T-t)(T-s)\int_0^{t\wedge s} \frac{\mathrm{d}u}{(T-u)^2} = s\wedge t - \frac{st}{T}$$

pro $s, t \in [0, T[$ podle tvrzení 3.2; je–li $s \vee t = T$, pak zřejmě $\mathsf{E}(Y_t Y_s) = 0$.

Odtud dostáváme:

$$X(t) = \begin{cases} a\big(1-\frac{t}{T}\big) + b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}W(s)}{T-s}, & 0 \le t < T, \\ b, & t = T, \end{cases}$$

je gaussovský proces se skoro jistě spojitými trajektoriemi, se střední hodnotou

$$\mathsf{E}X(t) = a\big(1-\frac{t}{T}\big) + b\frac{t}{T}, \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

a s kovarianční funkcí

$$\varrho(s,t) = s\wedge t - \frac{st}{T}, \quad 0 \le s,t \le T. \tag{10}$$

Tento proces je jediným řešením rovnice (8) *na* $[0, T[$.

Spojitý gaussovský stochastický proces se střední hodnotou (9) a kovarianční funkcí (10) nazýváme *Brownův most z a do b na* $[0,T]$. Touto definicí je určeno jednoznačně rozdělení Brownova mostu, nikoliv jeho trajektorie. Konstrukce pomocí rovnice (8) je proto jenom jednou z mnoha možných, ku příkladu lze snadno ověřit, že Brownovým mostem z a do b je také proces definovaný vztahem

$$B_t^{a\to b} = a\big(1-\frac{t}{T}\big) + b\frac{t}{T} + W_t - \frac{t}{T}W_T, \quad 0 \le t \le T,$$

kde W je Wienerův proces. Řešení X rovnice (8) je však progresivně měřitelný Brownův most (dokonce se snadno nahlédne, že obohacené kanonické filtrace X a W splývají pro $0 \le t < T$), což je často výhodné.

Povšimněme si, že je-li X Brownův most z a do b na $[0,T]$, pak je $(X(T-\cdot), 0 \le t \le T)$ Brownův most z b do a, jak plyne přímo výpočtem střední hodnoty a kovarianční funkce.

Brownův most z a do b lze interpretovat jako Wienerův proces startující z a a podmíněný tak, aby v čase T nabýval hodnoty b. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ označme $W^a = a + W$ Wienerův proces startující z a a $X^{a,b}$ Brownův most z a do b na $[0, T]$. Chtěli bychom tvrdit, že

$$\mathsf{P}\big\{(W^a(t_1), \dots, W^a(t_n)) \in A \,\big|\, W^a(T) = b\big\} = \mathsf{P}\big\{(X^{a,b}(t_1), \dots, X^{a,b}(t_n)) \in A\big\},$$

kdykoliv $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Jelikož $\mathsf{P}\{W^a(T) = b\} = 0$, musíme své tvrzení precisovati. Poněvadž[27]

$$\mathsf{P}\big\{(W^a(t_1), \dots, W^a(t_n)) \in A \,\big|\, W^a(T)\big\} = g\big(W^a(T)\big)$$

pro vhodnou borelovskou funkci $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, je jednou z možností dokázat, že

$$g(b) = \mathsf{P}\big\{(X^{a,b}(t_1), \dots, X^{a,b}(t_n)) \in A\big\} \quad \text{pro } \lambda\text{-skoro všechna } b \in \mathbb{R}.$$

Užívajíce regulární versi podmíněné pravděpodobnosti dokážeme ještě více: Označme $\mathscr{C} = \mathscr{C}([0, T])$, $\mathfrak{w}_a$ pravděpodobnostní míru na $\mathscr{B}(\mathscr{C})$, která je rozdělením procesu $(W^a_t,\ 0 \le t \le T)$, $\mathfrak{p}_{a,y}$ rozdělení Brownova mostu na $[0, T]$ z a do y a

$$\pi_t : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \omega(t), \quad 0 \le t \le T,$$

kanonické projekce. (To jest,

$$\mathfrak{w}_a(F) = \mathsf{P}\big\{W^a_{|[0,T]}(\cdot) \in F\big\},\ \mathfrak{p}_{a,y}(F) = \mathsf{P}\big\{X^{a,y}(\cdot) \in F\big\}, \quad F \in \mathscr{B}(\mathscr{C});$$

uvědomme si, že (π_t) na $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}), \mathfrak{w}_a)$ je opět Wienerův proces startující z a.) Dokážeme, že

$$(\mathfrak{p}_{a,y},\ y \in \mathbb{R}) \textit{ je regulární verse podmíněné pravděpodobnosti } \mathfrak{w}_a(\cdot \mid \pi_T). \tag{12}$$

Podle definice (12) znamená, že

$$\int\limits_{\{\pi_T \in B\}} \mathfrak{w}_a(F|\pi_T)\,\mathrm{d}\mathfrak{w}_a = \mathfrak{w}_a\big(F \cap \{\pi_T \in B\}\big) = \int_B \mathfrak{p}_{a,y}(F)\,\mathrm{d}\mathfrak{w}_a \circ \pi_T^{-1}(y) \tag{13}$$

pro každé $F \in \mathscr{B}(\mathscr{C})$ a $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.[28] Není složité ukázat pomocí Dynkinova lemmatu, že rovnost (13) stačí ověřit pro množiny tvaru $F = (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n})^{-1}(A)$ s

[27] Viz J. Štěpán: *op. cit.*, Tvrzení I.4.10.

[28] Měřitelnost funkce $y \mapsto \mathfrak{p}_{a,y}(F)$ je součástí definice, z výpočtů, které následují, bude celkem zřejmé, že tato podmínka je v našem případě splněna.

$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ a $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$. Uváživše, že $\mathfrak{w}_a \circ \pi_T^{-1} = \mathscr{N}(a, T)$, nahlédneme, že máme dokázat

$$\mathfrak{w}_a\big(\{(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n}) \in A\} \cap \{\pi_T \in B\}\big) = \int_B \mathfrak{p}_{a,y}\{(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n}) \in A\} \,\mathrm{d}\mathscr{N}(a, T)(y),$$

neboli, podle definice měr $\mathfrak{w}_a$ a $\mathfrak{p}_{a,y}$,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\big\{(W^a_{t_1}, \dots, W^a_{t_n}) \in A,\ W^a_T \in B\big\} \\ &\qquad = \int_B \mathsf{P}\big\{(X^{a,y}_{t_1}, \dots, X^{a,y}_{t_n}) \in A\big\} \,\mathrm{d}\mathscr{N}(a, T)(y). \end{aligned} \tag{14}$$

Položme pro stručnost $\Theta = (W^a(t_1), \dots, W^a(t_n))$, $\Xi = W^a(T)$. Náhodný vektor $(\Theta, \Xi)^*$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ má rozdělení $\mathscr{N}(\boldsymbol{a}_{n+1}, \Gamma)$, kde

$$\boldsymbol{a}_k = (\underbrace{a, \dots, a}_{k\text{-krát}})^* \in \mathbb{R}^k, \qquad \Gamma = \big(t_i \wedge t_j\big)_{i,j=1}^{n+1} \in \mathbb{M}_{(n+1)\times(n+1)},$$

přičemž klademe $t_{n+1} = T$. Matice Γ je regulární, takže $\mathscr{N}(\boldsymbol{a}_{n+1}, \Gamma)$ má hustotu vůči Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^{n+1}$. Označme $f_{\Theta|\Xi}$ podmíněnou hustotu Θ za podmínky Ξ, podle definice[29]

$$\mathsf{P}\big\{(\Theta, \Xi)^* \in A \times B\big\} = \int_B \left[\int_A f_{\Theta|\Xi}(\theta, \xi) \,\mathrm{d}\theta\right] f_\Xi(\xi) \,\mathrm{d}\xi;$$

f_Ξ zde označuje marginální hustotu Ξ. Náhodná veličina Ξ má rozdělení $\mathscr{N}(a, T)$, pročež

$$\mathsf{P}\big\{(\Theta, \Xi)^* \in A \times B\big\} = \int_B \left[\int_A f_{\Theta|\Xi}(\theta, y) \,\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\mathscr{N}(a, T)(y). \tag{15}$$

Podmíněná hustota $f_{\Theta|\Xi}$ je ovšem známa:[30] Označíme-li

$$\begin{aligned} &\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{11} = \big(t_i \wedge t_j\big)_{i,j=1}^n,\ \Gamma_{12} = \Gamma_{21}^* = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},\ \Gamma_{22} = (T), \\ &h(y) = \boldsymbol{a}_n + \frac{1}{T}\Gamma_{12}(y - a) = \Big(a + \frac{1}{T} t_i (y - a)\Big)_{i=1}^n, \\ &H = \Gamma_{11} - \frac{1}{T}\Gamma_{12}\Gamma_{21} = \Big(t_i \wedge t_j - \frac{1}{T} t_i t_j\Big)_{i=1}^n, \end{aligned}$$

---

[29] Viz třeba J. Anděl: *Matematická statistika*, SNTL, Praha 1978, § III.5.
[30] *Ibid.*, Věta V.9.

pak $f_{\Theta|\Xi}(\cdot, y)$ je hustota míry $\mathcal{N}(h(y), H)$. Na druhé straně, $X^{a,y}$ je gaussovský proces se střední hodnotou (9) a kovarianční funkcí (10), tudíž náhodný vektor $(X^{a,y}(t_1), \dots, X^{a,y}(t_n))^*$ má rozdělení $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\varrho})$ s

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}X^{a,y}(t_1) \\ \vdots \\ \mathsf{E}X^{a,y}(t_n) \end{pmatrix} = \Big(a\big(1 - \frac{t_i}{T}\big) + y\frac{t_i}{T}\Big)_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{\varrho} = \big(\varrho(t_i, t_j)\big)_{i,j=1}^n.$$

Ježto očividně $\boldsymbol{m} = h(y)$ a $\boldsymbol{\varrho} = H$, přechází (15) v

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big\{(\Theta, \Xi)^* \in A \times B\big\} &= \int_B \mathcal{N}(h(y), H)(A)\, \mathrm{d}\mathcal{N}(a, T)(y) \\ &= \int_B \mathsf{P}\big\{(X_{t_1}^{a,y}, \dots, X_{t_n}^{a,y}) \in A\big\}\, \mathrm{d}\mathcal{N}(a, T)(y), \end{aligned}$$

čímž je (14), potažmo (12), ověřeno.

Popišme ještě přesněji konečně-rozměrná rozdělení Brownova mostu. Ta jsou gaussovská a jejich střední hodnoty a kovarianční matice známe, přímý výpočet jejich hustoty však vyžaduje nalézti inversi kovarianční matice, a to není snadné. Proto budeme postupovat jinak.

Jako motivaci našeho postupu připomeňme analogický výpočet pro konečně-rozměrná rozdělení Brownova pohybu. Pro libovolné časy $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ má náhodná veličina $(W(t_1), \dots, W(t_m))$ hustotu w danou

$$w(x) = \prod_{i=1}^m p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}), \quad x = (x_1, \dots, x_m)^* \in \mathbb{R}^m, \tag{16}$$

přičemž klademe $x_0 = 0$ a značíme

$$p(t, x) \equiv p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2t}\Big), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

hustotu míry $\mathcal{N}(0, t)$. Vskutku,

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_m) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{Z}},$$

vzhledem k nezávislosti přírůstků Wienerova procesu má $\mathbf{Z}$ rozdělení s hustotou

$$z(x) = \prod_{i=1}^m p(t_i - t_{i-1}, x_i)$$

a z věty o substituci plyne rovnost

$$w(x) = (\det \mathbf{A})^{-1} z(\mathbf{A}^{-1} x).$$

Snadno se však nahlédne, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

z toho formule (16) ihned plyne. Označme opět $W^a(t) = a + W(t)$ Wienerův proces startující z bodu a. Předchozí úvahy lze zopakovat s jedinou úpravou, náhodná veličina $W^a(t_1)$ má rozdělení $\mathcal{N}(a, t_1)$, takže hustota náhodného vektoru $(W^a(t_1), \dots, W^a(t_m))$ je opět dána vztahem (16), v němž nyní klademe $x_0 = a$.

Pro Brownův most budeme postupovat obdobně, ale postup je pracnější. Buď X Brownův most z a do b, definovaný rovnicí (8); zvolme libovolně body $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < T$. Ukážeme, že $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ má hustotu $\beta_{a,b}$, kde

$$\beta_{a,b}(x) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \frac{p(T - t_n, b - x_n)}{p(T, b - a)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

přičemž klademe $x_0 = a$.

Pro zjednodušení zápisu v následujících výpočtech bez újmy na obecnosti položme $T = 1$. Nejprve vyšetříme případ $a = b = 0$. Z rovnice (8) ihned vidíme, že náhodné veličiny

$$\frac{X(t_i)}{1 - t_i} - \frac{X(t_{i-1})}{1 - t_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

jsou nezávislé a mají rozdělení $\mathcal{N}(0, (1 - t_i)^{-1} - (1 - t_{i-1})^{-1})$. Přitom

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - t_2 & 1 - t_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 - t_n & 1 - t_n & 1 - t_n & \dots & 1 - t_n \end{pmatrix}}_{=\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{X(t_1)}{1-t_1} \\ \frac{X(t_2)}{1-t_2} - \frac{X(t_1)}{1-t_1} \\ \vdots \\ \frac{X(t_n)}{1-t_n} - \frac{X(t_{n-1})}{1-t_{n-1}} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{Y}};$$

náhodný vektor $\mathbf{Y}$ má hustotu

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} p\Big(\frac{t_i - t_{i-1}}{(1 - t_i)(1 - t_{i-1})}, x_i\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Matice $\mathbf{B}$ je trojúhelníková speciálního tvaru, takže lze bez obtíží nalézti její inversní matici

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1-t_1} & \frac{1}{1-t_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{1-t_{n-1}} & \frac{1}{1-t_n} \end{pmatrix}.$$

Z věty o substituci víme, že

$$\beta_{0,0}(x) = (\det \mathbf{B})^{-1} h(\mathbf{B}^{-1} x),$$

výraz vpravo musíme nyní upravit. Buďte $0 < s < t < u < 1$, pak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-u)(1-t)(1-s)} p\Big(\frac{u-t}{(1-u)(1-t)}, \frac{z}{1-u} - \frac{y}{1-t}\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \times p\Big(\frac{t-s}{(1-t)(1-s)}, \frac{y}{1-t} - \frac{x}{1-s}\Big) \\
&= \frac{1}{(1-u)(1-t)(1-s)} \sqrt{\frac{(1-u)(1-t)}{2\pi(u-t)}} \exp\Big(-\frac{((1-t)z-(1-u)y)^2}{2(u-t)(1-u)(1-t)}\Big) \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(1-t)(1-s)}{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{((1-s)y-(1-t)x)^2}{2(t-s)(1-t)(1-s)}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(u-t)}} \exp\Big(-\frac{(1-t)z^2}{2(u-t)(1-u)} + \frac{2yz}{2(u-t)} - \frac{(1-u)y^2}{2(u-t)(1-t)}\Big) \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big(-\frac{(1-s)y^2}{2(t-s)(1-t)} + \frac{2xy}{2(t-s)} - \frac{(1-t)x^2}{2(t-s)(1-s)}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1-s)}} p_{u-t}(z-y) \exp\Big(-\frac{z^2}{2(u-t)}\Big[\frac{1-t}{1-u} - 1\Big]\Big) \exp\Big(-\frac{y^2}{2(u-t)}\Big[\frac{1-u}{1-t} - 1\Big]\Big) \\
&\quad \times p_{t-s}(y-x) \exp\Big(-\frac{y^2}{2(t-s)}\Big[\frac{1-s}{1-t} - 1\Big]\Big) \exp\Big(-\frac{x^2}{2(t-s)}\Big[\frac{1-t}{1-s} - 1\Big]\Big) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{1-u}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2(1-u)}\Big) p_{u-t}(z-y) p_{t-s}(y-x) \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\Big(\frac{x^2}{2(1-s)}\Big).
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\beta_{0,0}(x) &= \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \frac{1}{\sqrt{1-t_n}} \exp\Big(-\frac{x_n^2}{2(1-t_n)}\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{2\pi}\, p(1-t_n, x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \frac{p(1-t_n, x_n)}{p(1,0)},
\end{aligned}$$

čímž je rovnost (17) pro $a = b = 0$ ověřena. Dále,

$$\beta_{a,b}(x) = \beta_{0,0}(x - \mathbf{t}), \quad \mathbf{t} = \big(a(1-t_1) + bt_1, \dots, a(1-t_n) + bt_n\big)^*$$

a přímočarý, byť pracný výpočet vede na formuli (17) v obecném případě.[31]

Věta 4.1 platí pro martingaly s reálnými hodnotami. Analogické tvrzení lze vyslovit i pro martingaly s hodnotami v $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, předpoklady vícedimensionálního

[31] Při výpočtu jsme užili rovnici (8), ale výsledek na konkrétní realisaci Brownova mostu samozřejmě nezávisí, ježto konečně-rozměrná rozdělení gaussovského procesu jsou jednoznačně určena střední hodnotou a kovarianční funkcí. Stojí též za povšimnutí, že formule (16) a (17) implikují rovnost (14), která z nich plyne prostým výpočtem, bez nutnosti užívat podmíněné hustoty.

výsledku jsou však citelně restriktivnější. Též důkaz je obtížnější, proto jej nepodáme.[32]

Věta 4.4. (F. B. Knight, 1971) *Buď $M = (M^1, \dots, M^d)^*$ spojitý lokální martingal v $\mathbb{R}^d$, $M_0 = 0$. Nechť*

$$\langle M^i\rangle_\infty = \infty \quad \mathsf{P}\text{-}\mathit{skoro\ jist\check{e}},\ 1 \le i \le d,$$

a je splněna podmínka orthogonality

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = 0 \quad \text{pro všechna } t \ge 0\ \mathsf{P}\text{-skoro jistě},\ 1 \le i \ne j \le d.$$

Definujme markovské časy

$$T_i(s) = \inf\{t \ge 0;\ \langle M^i\rangle_t > s\}, \quad 0 \le s < \infty, \quad 1 \le i \le d,$$

a položme

$$B_s^i = M_{T_i(s)}^i, \quad 0 \le s < \infty, \quad 1 \le i \le d.$$

Potom je $B = (B^1, \dots, B^d)^*$ d-dimensionální Wienerův proces, to jest, $B^1, \dots, B^d$ jsou nezávislé jednodimensionální Wienerovy procesy.

Předpoklad $\langle M^i\rangle_\infty = \infty$ lze opět eliminovat postupem známým z důkazu důsledku 4.3: Je-li W d-dimensionální Wienerův proces nezávislý s M (definovaný případně na rozšíření filtrovaného pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$), pak jsou

$$B_s^i = W_s^i - W_{s\wedge\langle M^i\rangle_\infty}^i + M_{T_i(s)}^i, \quad s \ge 0,\ 1 \le i \le d,$$

nezávislé Wienerovy procesy. Povšimněme si, že podmínku orthogonality lze vyjádřit požadavkem, aby $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t$ byla diagonální matice pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$ P-skoro jistě.

Jediné tvrzení věty 4.4, které neplyne okamžitě z věty 4.1, je nezávislost procesů $B^1, \dots, B^d$, právě její důkaz je komplikovaný, neboť orthogonalita neimplikuje nezávislost martingalů $M^1, \dots, M^d$, jak ukazuje následující příklad. (Podotkněme, že B je Wienerův proces vzhledem ke své kanonické filtraci. Kdybychom podle vzoru věty 4.1 definovali σ-algebry $\mathscr{G}_s^i = \mathscr{F}_{T_i(s)}$, tak pro $i \ne j$ nemusíme dostat nezávislé filtrace.)

Příklad 4.6. Buď W jednodimensionální Wienerův proces, definujme martingaly M, N vztahem

$$M_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{W\ge 0\}}(s)\,\mathrm{d}W_s, \quad N_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{W<0\}}(s)\,\mathrm{d}W_s, \quad t \ge 0.$$

[32]Lze ho nalézti např. v I. Karatzas, S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988, v kapitolách 3.4C a 3.4E.

Potom

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{W\geq 0\}}(s)\mathbf{1}_{\{W<0\}}(s)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad t\geq 0,$$

ale procesy M, N nejsou nezávislé. Kdyby totiž byly, pak by i procesy $\langle M\rangle, \langle N\rangle$ byly nezávislé (jak plyne například ze vztahu (C.1)), avšak

$$\langle M\rangle_t + \langle N\rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{W\geq 0\}}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{W<0\}}(s)\,\mathrm{d}s = t.$$

B. Representace martingalů stochastickými integrály. Cílem této části je vyjasnit, které spojité lokální martingaly mohou být vyjádřeny jako stochastický integrál vzhledem k nějakému Wienerovu procesu.

Základní motivací pro zkoumání tohoto problému je následující úloha: Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}X = b(X)\,\mathrm{d}t + \sigma(X)\,\mathrm{d}W,\ X(0) = x,$$

jejíž koeficienty nejsou lokálně lipschitzovské, ale pouze spojité (a pro jednoduchost omezené). Methodu, již jsme dokázali existenční větu 2.1, nyní nelze použít. Zkusme tedy aproximovat koeficienty b, σ lipschitzovskými omezenými funkcemi b_k, σ_k tak, aby $b_k\to b$, $\sigma_k\to\sigma$, a provésti limitní přechod. Víme, že existují procesy X_k, $k\geq 1$, řešící rovnici

$$\mathrm{d}X_k = b_k(X_k)\,\mathrm{d}t + \sigma_k(X_k)\,\mathrm{d}W,\ X_k(0) = x,$$

lze ukázat, že jejich rozdělení tvoří těsnou množinu pravděpodobnostních měr na prostoru trajektorií. Existuje tedy vybraná podposloupnost $\{X_{k_n}\}$ konvergující v distribuci, avšak provést limitní přechod ve stochastickém integrálu

$$\int_0^t \sigma_{k_n}(X_{k_n}(s))\,\mathrm{d}W(s)$$

není snadné. Postupujeme proto následujícím způsobem: Proces

$$M_n(t) = X_{k_n}(t) - x - \int_0^t b_{k_n}(X_{k_n}(s))\,\mathrm{d}s$$

je spojitý lokální martingal s kvadratickou variací

$$\langle\!\langle M_n\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \sigma_{k_n}(X_{k_n}(s))\sigma^*_{k_n}(X_{k_n}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Nyní již pracujeme pouze s Lebesgueovými integrály, k limitě přejíti lze a získáme proces X takový, že

$$M(t) = X(t) - x - \int_0^t b(X(s))\,\mathrm{d}s$$

je spojitý lokální martingal a

$$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \sigma(X(s))\sigma^*(X(s))\,\mathrm{d}s.$$

Z výsledků, které dokážeme, plyne, že nutně

$$M(t) = \int_0^t \sigma(X(s))\,\mathrm{d}B(s)$$

pro vhodný Wienerův proces B, jinými slovy, X je hledané řešení.

Nadále budeme pracovat na pevně zvoleném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ splňujícím (UC). Následující výsledek v hlavních rysech náleží J. L. Doobovi (1953).

Věta 4.5. *Buď M spojitý d-dimensionální lokální $(\mathscr{F}_t)$-martingal, $M_0 = 0$. Nechť ψ je $\mathbb{M}_{d\times m}$-hodnotový $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný proces takový, že $\|\psi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě a*

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t = \int_0^t \psi_s \psi_s^*\,\mathrm{d}s \quad \textit{pro všechna } t \geq 0 \ \mathsf{P}\textit{-skoro jistě.} \tag{18}$$

Potom existuje rozšíření $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{\mathsf{P}})$ stochastické base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ a m-dimensionální $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-Wienerův proces W na $\tilde{\Omega}$ tak, že

$$M_t = \int_0^t \psi_s\,\mathrm{d}W_s \quad \textit{pro všechna } t \geq 0 \ \tilde{\mathsf{P}}\textit{-skoro jistě.} \tag{19}$$

Je-li zobrazení $\psi(t,\omega) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ injektivní pro $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všechna $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, pak lze W definovat na původní stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$.

Ve formuli (19) předpokládáme, jak jsme se umluvili, že M a ψ jsou kanonickým způsobem rozšířeny na $\tilde{\Omega}$.

Věta 4.5 charakterisuje lokální martingaly, které mají tvar $\int_0^\cdot \psi\,\mathrm{d}W$ pro *zadaný* proces ψ a nějaký Wienerův proces W. Jejím důsledkem je rovněž popis všech lokálních martingalů tvaru $\int_0^\cdot \psi\,\mathrm{d}W$, když ψ probíhá třídu *všech* integrovatelných procesů:

Důsledek 4.6. *Buď M spojitý d-dimensionální lokální $(\mathscr{F}_t)$-martingal takový, že $M_0 = 0$. Potom existují:*

a) $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces ψ s $\|\psi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě,

b) rozšíření $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{\mathsf{P}})$ stochastické base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ a na něm definovaný d-dimensionální $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-Wienerův proces W

takové, že platí (19), *právě když $\langle M \rangle \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě.*

Důkaz důsledku 4.6. Má-li M representaci (19), pak

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle = \int_0^\cdot \psi_s \psi_s^*\,\mathrm{d}s$$

a trajektorie $\langle\langle M\rangle\rangle$ náleží $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{M}_{d\times d})$ skoro jistě, tedy i trajektorie $\langle M\rangle$ jsou skoro jistě lokálně absolutně spojité. Vidíme, že podmínka $\langle M\rangle \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ je nutná pro platnost rovnosti (19).

Naopak předpokládejme, že jsou trajektorie $\langle M\rangle.(\omega)$ pro P-skoro všechna ω neklesající lokálně absolutně spojité funkce, jsou tedy integrálem své derivace, jež existuje, je konečná a nezáporná λ-skoro všude na $\mathbb{R}_+$. Položme

$$\tilde{z}(s) = \limsup_{n\to\infty} n\big(\langle M\rangle_s - \langle M\rangle_{s-\frac{1}{n}}\big),\ s > 0,$$

a

$$z(s) = \tilde{z}(s)\mathbf{1}_{\{\tilde{z}<\infty\}}(s),\ s > 0,\quad z(0) = 0.$$

Proces z je zjevně progresivně měřitelný,

$$\mathsf{P}\big\{z(s) \geq 0 \text{ pro všechna } s \geq 0\big\} = 1$$

a

$$z(\cdot) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle M\rangle$$

v každém bodě $]0,\infty[$, v němž konečná derivace existuje, tudíž

$$\mathsf{P}\Big\{\int_0^t z(s)\mathrm{d}s = \langle M\rangle_t \ \text{ pro každé } t \geq 0\Big\} = 1. \tag{20}$$

Je-li $d = 1$, stačí položit $\psi = \sqrt{z}$ a snadno se ověří, že jsou splněny předpoklady věty 4.5. Nechť tedy $d > 1$. Připomeňme, že existuje progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{d\times d}$-hodnotový proces ϱ takový, že $\varrho(s,\omega)$ jsou symetrické positivně semidefinitní matice a

$$\langle\langle M\rangle\rangle_t = \int_0^t \varrho(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s. \tag{21}$$

Položme $Z(t) = \varrho(t)z(t)$, $t \geq 0$; proces Z je $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný s hodnotami v symetrických positivně semidefinitních maticích a splňuje $\|Z\| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, neboť z konstrukce matice ϱ plyne, že $\|\varrho\| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu_{\langle M\rangle})$. Kombinujíce (20) a (21) nahlédneme, že

$$\langle\langle M\rangle\rangle_t = \int_0^t Z(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Příklad F.1 a věta F.10 ukazují, že lze definovat progresivně měřitelný proces $Z^{1/2}$ s hodnotami v symetrických positivně semidefinitních maticích tak, aby

$$\langle\langle M\rangle\rangle_t = \int_0^t Z^{1/2}(s)Z^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Při volbě $\psi = Z^{1/2}$ jsou proto předpoklady věty 4.5 opět splněny. Q.E.D.

Poznámka 4.4. Jak známo, $\langle M \rangle \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě, právě když je míra $\mu_{\langle M \rangle}$ P-skoro jistě absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře λ. Jsou-li míry $\mu_{\langle M \rangle}$ a λ dokonce skoro jistě ekvivalentní, pak lze – v jednodimensionálním případě – nalézti v situaci důsledku 4.6 representaci martingalu M na původním (nerozšířeném) pravděpodobnostním prostoru. Z ekvivalence totiž plyne, že $z > 0$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude, tedy i $\psi > 0$ skoro všude a můžeme užíti příslušné tvrzení z věty 4.5.

Důkaz věty 4.5 je založen na velmi pěkném obratu, který je však v případě $d > 1$ poněkud zatemněn technickými komplikacemi. Proto nejprve zvlášť podáme důkaz pro jednodimensionální martingaly, aby se základní myšlenka stala zřejmou.

Důkaz věty 4.5 pro $\boldsymbol{d = m = 1}$. V jednodimensionálním případě předpoklad (18) přechází na

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \psi^2(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Buď B Wienerův proces nezávislý s M, jenž jistě existuje na nějakém rozšíření $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{\mathsf{P}})$ původní stochastické base. Rozšířivše kanonickým způsobem proces ψ na $\tilde{\Omega}$ položme

$$W(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\frac{1}{\psi(s)}\,\mathrm{d}M(s) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\,\mathrm{d}B(s), \quad t \geq 0.$$

Prvý integrál vpravo je dobře definován, jelikož

$$\begin{aligned}\int_0^t \left|\mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\frac{1}{\psi(s)}\right|^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_s &= \int_0^t \left|\mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\frac{1}{\psi(s)}\right|^2 \psi^2(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\,\mathrm{d}s < \infty. \end{aligned} \tag{22}$$

Proces W je lokální martingal se spojitými trajektoriemi a $W(0) = 0$; vzhledem k nezávislosti procesů B a M a rovnosti (22) platí

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\,\mathrm{d}s = t, \quad t \geq 0.$$

Podle Lévyho věty je W Wienerův proces a

$$\begin{aligned}\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}W(s) &= \int_0^t \psi(s)\mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\frac{1}{\psi(s)}\,\mathrm{d}M(s) + \int_0^t \psi(s)\mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\,\mathrm{d}B(s) \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s)\,\mathrm{d}M(s);\end{aligned}$$

integrál vlevo je korektně definován, ježto $\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ skoro jistě. Martingal

$$N = \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\,\mathrm{d}M(s)$$

maje kvadratickou variaci

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\psi^2(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

je nulový podle lemmatu C.1, tudíž

$$\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}W(s) = \int_0^t \Big\{\mathbf{1}_{\{\psi^2>0\}}(s) + \mathbf{1}_{\{\psi^2=0\}}(s)\Big\}\,\mathrm{d}M(s) = M(t)$$

$\tilde{\mathsf{P}}$-skoro jistě pro všechna $t \geq 0$.

Nakonec si uvědomme, že $\psi(s,\omega)$ definuje injektivní lineární zobrazení v $\mathbb{R}$, právě když $\psi(s,\omega) \neq 0$. Je-li tedy $\mathbf{1}_{\{\psi=0\}}(s,\omega) = 0$ pro $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všechna $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, není nutno uvažovat pomocný Wienerův proces B. Q.E.D.

Nyní přistupme k důkazu věty 4.5 v obecném případě.[33] Nejprve připomeňme několik výsledků z nulté kapitoly v té podobě, v níž je budeme dále potřebovat. Nechť je $M = (M^i)_{i=1}^d$ spojitý d-dimensionální lokální martingal a φ progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{k\times d}$-hodnotový náhodný proces. Stochastický integrál $\int_0^{\cdot} \varphi\,\mathrm{d}M$ jsme zavedli pomocí redukce k jednodimensionálnímu případu, což vede na podmínku

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d \int_0^t |\varphi_{ij}(s)|^2\,\mathrm{d}\langle M^j\rangle_s < \infty \text{ pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{23}$$

Uvedli jsme také – byť nedokázali – že stochastický integrál je dobře definován již za slabšího předpokladu

$$\int_0^t \mathrm{Tr}\big(\varphi_s \varrho_s \varphi_s^*\big)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty \text{ pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě,} \tag{24}$$

kde ϱ je hustota tensorové kvadratické variace $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ vůči $\langle M\rangle$.

Předpokládejme navíc, že M má lokálně absolutně spojitou kvadratickou variaci a platí

$$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \psi_s\psi_s^*\,\mathrm{d}s \quad \text{pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

[33] Důkaz, který uvedeme, je založen na myšlence M. Ondrejáta. Viz jeho článek v *Czechoslovak Math. J. 55*(2005), 1003–1039.

s progresivně měřitelným $\mathbb{M}_{d\times r}$-hodnotovým procesem ψ splňujícím $\|\psi\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě. Odtud

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \operatorname{Tr}\bigl(\psi_s\psi_s^*\bigr)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \varrho_s\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \int_0^t \varrho_s \operatorname{Tr}\bigl(\psi_s\psi_s^*\bigr)\,\mathrm{d}s,$$

takže $\psi\psi^* = \varrho\operatorname{Tr}(\psi\psi^*)$ platí λ-skoro všude na $\mathbb{R}_+$ P-skoro jistě. Neboť

$$\begin{aligned}\int_0^t \operatorname{Tr}\bigl(\varphi_s\varrho_s\varphi_s^*\bigr)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s &= \int_0^t \operatorname{Tr}\bigl(\varphi_s\varrho_s\varphi_s^*\bigr)\operatorname{Tr}(\psi_s\psi_s^*)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t \operatorname{Tr}\bigl(\varphi_s\varrho_s\operatorname{Tr}(\psi_s\psi_s^*)\varphi_s^*\bigr)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

přechází podmínka (24) na tvar

$$\int_0^t \operatorname{Tr}\bigl(\varphi_s\psi_s\psi_s^*\varphi_s^*\bigr)\,\mathrm{d}s < \infty \text{ pro všechna } t \geq 0 \text{ } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{25}$$

Podobně pro tensorovou kvadratickou variaci stochastického integrálu dostaneme

$$\left\langle\!\!\left\langle \int_0^{\cdot} \varphi\,\mathrm{d}M \right\rangle\!\!\right\rangle = \int_0^{\cdot} \varphi_s\psi_s\psi_s^*\varphi_s^*\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

P-skoro jistě; analogicky

$$\left\langle\!\!\left\langle \int_0^{\cdot} \varphi\,\mathrm{d}M, \int_0^{\cdot} \zeta\,\mathrm{d}M \right\rangle\!\!\right\rangle = \int_0^{\cdot} \varphi_s\psi_s\psi_s^*\zeta_s^*\,\mathrm{d}s$$

P-skoro jistě, kdykoliv jsou φ a ζ $\mathbb{M}_{k\times d}$-hodnotové progresivně měřitelné náhodné procesy splňující podmínku integrovatelnosti (24).

Důkaz věty 4.5. Položme

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ t \longmapsto \frac{1}{t}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(t).$$

Podle předpokladu je $\psi^*\psi$ $\mathbb{M}_{m\times m}$-hodnotový progresivně měřitelný proces, jehož hodnotami jsou symetrické positivně semidefinitní matice. Podle výsledků z apendixu F je také $g(\psi^*\psi)$ progresivně měřitelný proces s hodnotami v symetrických a (neboť $g \geq 0$) positivně semidefinitních $m\times m$-maticích. Analogicky, $\mathbf{1}_{\{0\}}(\psi^*\psi)$ je progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{m\times m}$-hodnotový proces. Buď B m-dimensionální Wienerův proces, nezávislý s M, který lze jistě nalézti na vhodném rozšíření $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathscr{F}}_t), \tilde{\mathsf{P}})$ stochastické base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$. Položme

$$W_t = \int_0^t g(\psi_s^*\psi_s)\psi_s^*\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{0\}}(\psi_s^*\psi_s)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \geq 0.$$

Nejprve musíme ověřit, že první integrál vpravo je korektně definován, k čemuž užijeme podmínku (25).[34] Označme $p_1 : t \longmapsto t$ identické zobrazení a položme $q(s) = g(\psi_s^*\psi_s)\psi_s^*\psi_s$. Potom $q(s) = g(\psi_s^*\psi_s)p_1(\psi_s^*\psi_s) = (gp_1)(\psi_s^*\psi_s) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s) = \psi_s^*\psi_s g(\psi_s^*\psi_s)$ pro každé (s,ω) podle lemmatu F.7. Odtud, s přihlédnutím k lemmatům F.7 a F.9,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \operatorname{Tr}\Big(g(\psi_s^*\psi_s)\psi_s^*\psi_s\psi_s^*\psi_s g(\psi_s^*\psi_s)\Big)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \operatorname{Tr}\big(q_s q_s^*\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \operatorname{Tr}\big(\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \operatorname{Tr}\big(\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)\big)\,\mathrm{d}s \\
&\le m\int_0^t \big\|\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)\big\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}s \\
&\le mt < \infty.
\end{aligned}
$$

Je tedy W m-dimensionální spojitý lokální martingal, $W_0 = 0$, a vzhledem k nezávislosti M a B a formuli (26) platí

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle W\rangle\!\rangle_t &= \int_0^t \mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{0\}}(\psi_s^*\psi_s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \underbrace{\mathbf{1}_{[0,\infty[}(\psi_s^*\psi_s)}_{=I_m}\,\mathrm{d}s = tI_m,\ t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Podle Lévyho věty je W Wienerův proces, chceme ukázat, že

$$
M_t = \int_0^t \psi_s\,\mathrm{d}W_s \quad \text{pro každé } t \ge 0 \ \tilde{\mathsf{P}}\text{-skoro jistě.} \tag{27}
$$

Pro $h \in \mathbb{R}^d$ a $t \ge 0$ položme

$$
\begin{aligned}
M_t^{(h)} &= \Big\langle h, M_t\Big\rangle_{\mathbb{R}^d} = \int_0^t h^*\,\mathrm{d}M_s, \\
J_t^{(h)} &= \Big\langle h, \int_0^t \psi_s\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\mathbb{R}^d} = \int_0^t h^*\psi_s\,\mathrm{d}W_s.
\end{aligned}
$$

Rovnost (27) jistě platí, pokud

$$
M^{(h)} = J^{(h)} \quad \text{pro libovolné } h \in \mathbb{R}^d. \tag{28}
$$

[34] Čtenářka nebo čtenář, kterým vadí použití nedokázané postačující podmínky (24), se mohou snadno přesvědčit, že – za cenu ztráty elegance – lze užíti i (23).

Oba procesy vystupující ve formuli (28) jsou spojité lokální martingaly, nulové při $t = 0$, stačí tedy ověřiti, že

$$\left\langle M^{(h)} - J^{(h)} \right\rangle_t = 0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0 \ \tilde{\mathsf{P}}\text{-skoro jistě.}$$

Přímý výpočet (s užitím formule (26)) ukazuje, že

$$\begin{aligned}
\left\langle M^{(h)} - J^{(h)} \right\rangle_t &= \left\langle M^{(h)} \right\rangle_t - 2\left\langle M^{(h)}, J^{(h)} \right\rangle_t + \left\langle J^{(h)} \right\rangle_t \\
&= \int_0^t h^* \psi_s \psi_s^* h \, \mathrm{d}s - 2\left\langle M^{(h)}, J^{(h)} \right\rangle_t + \int_0^t \|h^* \psi_s\|^2 \, \mathrm{d}s \\
&= 2 \int_0^t \|h^* \psi_s\|^2 \, \mathrm{d}s - 2\left\langle M^{(h)}, J^{(h)} \right\rangle_t.
\end{aligned}$$

Proto je (28) důsledkem rovnosti

$$\left\langle M^{(h)}, J^{(h)} \right\rangle = \int_0^{\cdot} \|h^* \psi\|^2 \, \mathrm{d}s,$$

kterou nyní dokážeme. Podle definice procesu W totiž platí, že

$$\begin{aligned}
&\left\langle \int_0^{\cdot} h^* \, \mathrm{d}M_s, \int_0^{\cdot} h^* \psi_s \, \mathrm{d}W_s \right\rangle_t \\
&\qquad = \left\langle \int_0^{\cdot} h^* \, \mathrm{d}M_s, \int_0^{\cdot} h^* \psi_s g(\psi_s^* \psi_s) \psi_s^* \, \mathrm{d}M_s \right\rangle_t \\
&\qquad\qquad + \left\langle \int_0^{\cdot} h^* \, \mathrm{d}M_s, \int_0^{\cdot} h^* \psi_s \mathbf{1}_{\{0\}}(\psi_s^* \psi_s) \, \mathrm{d}B_s \right\rangle_t \\
&\qquad = \left\langle \int_0^{\cdot} h^* \, \mathrm{d}M_s, \int_0^{\cdot} h^* \psi_s g(\psi_s^* \psi_s) \psi_s^* \, \mathrm{d}M_s \right\rangle_t \\
&\qquad = \int_0^t h^* \psi_s \psi_s^* \psi_s g(\psi_s^* \psi_s) \psi_s^* h \, \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_0^t h^* \psi_s q(s) \psi_s^* h \, \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_0^t h^* \psi_s \mathbf{1}_{]0,\infty[}(\psi_s^* \psi_s) \psi_s^* h \, \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_0^t h^* \psi_s \underbrace{\mathbf{1}_{[0,\infty[}(\psi_s^* \psi_s)}_{=I_m} \psi_s^* h \, \mathrm{d}s - \int_0^t h^* \underbrace{\psi_s \mathbf{1}_{\{0\}}(\psi_s^* \psi_s)}_{=0} \psi_s^* h \, \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_0^t h^* \psi_s \psi_s^* h \, \mathrm{d}s = \int_0^t \|h^* \psi_s\|^2 \, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

v předposlední rovnosti byl užit příklad F.4.

Jestliže je $\psi(s, \omega)$ injektivní, pak $\mathbf{1}_{\{0\}}(\psi_s^*(\omega)\psi_s(\omega)) = 0$, opět podle příkladu F.4. Pro ψ injektivní $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude tedy pomocný Wienerův proces B nemusíme uvažovat. Q.E.D.

C. Representace brownovských martingalů. Nechť je $W = (W^1, \dots, W^n)^*$ standardní n-dimensionální Wienerův proces definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, označme $(\mathscr{F}_t^W)$ jeho obohacenou kanonickou filtraci. (To jest, $\mathscr{F}_t^W = \sigma\big(\sigma(W_r,\ 0 \le r \le t) \cup \mathbf{N}\big)$ pro $t \ge 0$, kde $\mathbf{N}$ je systém všech P-nulových množin; $(\mathscr{F}_t^W)$ splňuje (UC).) Martingaly vzhledem k filtraci $(\mathscr{F}_t^W)$ jsou často nazývány *brownovské martingaly.* Naším cílem je dokázat, že každý zprava spojitý brownovský lokální martingal je stochastickým integrálem vzhledem k danému Wienerovu procesu W, speciálně, má spojité trajektorie a lokálně absolutně spojitou kvadratickou variaci.

Vyslovme větu o integrální representaci přesně:[35]

Věta 4.7. *a) Buď M L^2-martingal vzhledem k $(\mathscr{F}_t^W)$, jehož trajektorie jsou zprava spojité P-skoro jistě, $M_0 = 0$. Potom existuje $(\mathscr{F}_t^W)$-progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{1\times n}$-hodnotový proces K takový, že*

$$\mathsf{E} \int_0^t \|K(s)\|^2 \,\mathrm{d}s < \infty, \quad 0 \le t < \infty, \tag{29}$$

a P-skoro jistě platí

$$M(t) = \int_0^t K(s) \,\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t < \infty. \tag{30}$$

Proces K je určen jednoznačně: je-li $\tilde{K}$ jiný progresivně měřitelný proces splňující (29) *a* (30)*, pak $K = \tilde{K}$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.*

b) Jsou-li trajektorie lokálního $(\mathscr{F}_t^W)$-martingalu P-skoro jistě zprava spojité, pak jsou nutně P-skoro jistě spojité.

c) Je-li M lokální $(\mathscr{F}_t^W)$-martingal s P-skoro jistě zprava spojitými trajektoriemi, $M_0 = 0$, pak existuje progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{1\times n}$-hodnotový proces K takový, že $\|K\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě a platí (30)*. Proces K je opět určen jednoznačně.*

Připomeňme (viz věta C.8 v apendixu C), že každý martingal vzhledem k filtraci splňující (UC) má modifikaci, jejíž skoro všechny trajektorie jsou zprava spojité a mají v každém bodě limitu zleva, lze tedy tvrdit, že libovolný brownovský lokální martingal má modifikaci se spojitými trajektoriemi, jež je dána stochastickým integrálem vzhledem k W.

Může se zdát, že bod (b) ve větě 4.7 je zbytečný jsa okamžitým důsledkem bodu (c). Formulace věty však odpovídá struktuře důkazu: tvrzení (c) by plynulo z tvrzení

[35] Poprvé klíčovou část (a) následující věty dokázal K. Itô (1951) zcela odlišným postupem, založeným na násobných stochastických integrálech. V celkem přístupné formě se lze s důkazem, užívajícím tuto důležitou techniku, seznámit v § 9.8 učebnice H.-H. Kuo: *Introduction to stochastic integration*, Springer 2006.

(a) zcela snadno standardní lokalisační procedurou, pokud bychom dokázali nalézti lokalisující posloupnost (τ_n) markovských časů tak, aby $M_n = M(\cdot \wedge \tau_n)$ byly L^2-martingaly. To jistě lze, je-li M spojitý lokální martingal, neboť pak existují (τ_n) dokonce tak, že M_n jsou omezené martingaly. Pro zprava spojité martingaly to však obecně docílit nelze. Proto odvození bodu (c) musí být předřazen důkaz, že (a) implikuje (b).

Uvažujme filtraci $(\mathscr{G}_t^\circ)$ definovanou $\mathscr{G}_t^\circ = \{\emptyset, \Omega\}$ pro $t < 1$, $\mathscr{G}_t^\circ = \mathscr{F}$ pro $t \geq 1$. Buď $(\mathscr{G}_t)$ obohacení filtace $(\mathscr{G}_t^\circ)$, pak $(\mathscr{G}_t)$ splňuje (UC). Nechť $X \in L^1(\mathsf{P}) \setminus L^2(\mathsf{P})$, $\mathsf{E}X = 0$, definujme martingal M jako zprava spojitou modifikaci martingalu $\big(\mathsf{E}(X|\mathscr{G}_t), t \geq 0\big)$, zřejmě $M_0 = 0$. Libovolný $(\mathscr{G}_t)$-markovký čas τ je buď skoro jistě konstantní, anebo $\tau \geq 1$. V druhém případě však $M(t \wedge \tau) = X$ pro všechna $t \geq 1$, takže M není lokální L^2-martingal.

S větou 4.7(a) se lze často setkat v následující ekvivalentní formulaci:

Věta 4.8. *Buď $T \in]0, \infty]$. Nechť $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}_T^W$-měřitelná funkce, $\mathsf{E}|\xi|^2 < \infty$. Potom existuje $(\mathscr{F}_t^W)$-progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{1\times n}$-hodnotový proces K tak, že*

$$\mathsf{E}\int_0^T \|K(s)\|^2 \,\mathrm{d}s < \infty \tag{31}$$

a

$$\xi = \mathsf{E}(\xi) + \int_0^T K(s)\,\mathrm{d}W(s) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } \Omega. \tag{32}$$

Proces K je určen jednoznačně: je-li $\tilde{K}$ jiný progresivně měřitelný proces splňující (31) a (32), potom $K = \tilde{K}$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude.

O $\mathscr{F}_T^W$-měřitelných funkcích se někdy hovoří jako o *wienerovských* nebo *brownovských funkcionálech.*

Důkaz ekvivalence vět 4.7(a) a 4.8. Předpokládejme, že věta 4.7(a) již byla dokázána. Tvrzení věty 4.8 pro určitost odvodíme v případě $T = \infty$. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $\mathsf{E}(\xi) = 0$; v opačném případě bychom totiž uvažovali funkci $\xi - \mathsf{E}\xi$. Buď M zprava spojitá modifikace martingalu $\big(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_t^W), t \geq 0\big)$. Podle Jensenovy nerovnosti pro podmíněné střední hodnoty

$$M_t^2 \leq \mathsf{E}(\xi^2 \,|\, \mathscr{F}_t^W), \quad t \geq 0.$$

Vidíme, že M je L^2-martingal, jenž jsa $(\mathscr{F}_t^W)$-adaptovaný splňuje předpoklady věty 4.7(a). Má tudíž trajektorie skoro jistě spojité a existuje progresivně měřitelný proces K splňující (29) a (30). Dále,

$$\mathsf{E}\int_0^t \|K(s)\|^2 \,\mathrm{d}s = \mathsf{E}\langle M\rangle_t = \mathsf{E}M_t^2 \leq \mathsf{E}\|\xi\|^2 < \infty, \quad t \geq 0.$$

Odtud ihned plyne (31), náhodná veličina $\int_0^\infty K\,\mathrm{d}W$ je dobře definována a splývá s ξ skoro jistě podle martingalové konvergenční věty, která implikuje

$$M_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathsf{E}\big(\xi \,\big|\, \mathscr{F}_\infty^W\big) = \xi \quad \text{v } L^2(\mathsf{P}).$$

Tvrzení o jednoznačnosti je zřejmé. Pokud by bylo $T < \infty$, postupovali bychom zcela stejně uváživše, že filtrace $(\mathscr{F}_t^W)$ je spojitá zleva.[36]

Analogicky snadno lze z věty 4.8 odvodit větu 4.7(a), proto jen naznačíme hlavní kroky. Buď M L^2-martingal vzhledem k $(\mathscr{F}_t^W)$, $M_0 = 0$, pak $M_n \in L^2(\mathscr{F}_n^W)$ pro každé $n \geq 1$, tudíž

$$M_n = \int_0^n H^{(n)} \, \mathrm{d}W$$

pro vhodný progresivně měřitelný proces $H^{(n)}$ s $\|H^{(n)}\| \in L^2([0,n] \times \Omega)$. To implikuje

$$M_t = \mathsf{E}\big(M_n \mid \mathscr{F}_t^W\big) = \int_0^t H_s^{(n)} \, \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq n,$$

zřejmě přitom platí $H^{(n)} = H^{(m)}$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude na $[0,n] \times \Omega$ pro všechna $m \geq n$. Důkaz věty 4.7(a) lze nyní již snadno dokončit. Q.E.D.

Věta 4.8 má čistě existenční charakter. Nalézti pro proces K explicitní vyjádření je zpravidla obtížné. Novější charakterisace procesu K mnohdy užívají tzv. Malliavinův kalkul a zcela se vymykají rámci tohoto textu.[37] Ve dvou následujících příkladech proto pouze ocitujeme klasický výsledek, jenž poskytuje popis procesu K pro speciální třídu "dostatečně hladkých" wienerovských funkcionálů, a uvedeme, jak vypadá integrální representace maxima Brownova pohybu.

Příklad 4.7. Nechť pro jednoduchost $n = 1$. Buď $L : \mathscr{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ fréchetovsky diferencovatelná funkce, to jest, pro každé $f \in \mathscr{C} \equiv \mathscr{C}([0,1])$ existuje spojitý lineární funkcionál $L'(f) \in \mathscr{C}^*$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|L(f+h) - L(f) - L'(f)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Náhodná veličina

$$\xi(\omega) = L\big(W_{|[0,1]}(\cdot, \omega)\big), \quad \omega \in \Omega, \tag{33}$$

kde $W_{|[0,1]}$ značí restrikci Wienerova procesu na interval $[0,1]$, je zřejmě $\mathscr{F}_1^W$-měřitelná. Pro brownovské funkcionály typu (33) ukázal J. M. C. Clark (1970), že integrand v representaci (32) lze nalézti v uzavřeném tvaru.[38]

---

[36] Tento výsledek lze nalézti např. v již citované knize I. Karatzase a S. Shrevea (Corollary 2.7.8).

[37] Úvodní informaci o užití Malliavinova kalkulu na integrální representace lze načerpat třeba ve čtvrté kapitole knihy M. Sanz-Solé: *Malliavin calculus with applications to stochastic partial differential equations*, EPFL Press, Lausanne 2005.

[38] U. G. Haussmann v roce 1978 zobecnil Clarkovo tvrzení na wienerovské funkcionály tvaru $L(X(\cdot, \omega))$, kde X je řešení stochastické diferenciální rovnice. Verse Clarkovy formule, kterou uvedeme, náleží M. H. A. Davisovi, viz jeho článek v *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* *87*(1980), 157–166. V téže stati lze nalézti i formulaci a důkaz Haussmannova výsledku.

Připomeňme, že podle Rieszovy věty o representaci lze funkcionál $L'(f)$ ztotožnit s borelovskou (znaménkovou) mírou na $[0,1]$. Předpokládejme, že L je polynomiálního růstu: existují konstanty K, $q \geq 0$ tak, že

$$|L(f)| + \|L'(f)\| \leq K(1 + \|f\|^q)$$

pro každou $f \in \mathscr{C}$. (Vlevo značí $\|L'(f)\|$ normu lineárního funkcionálu $L'(f)$, to jest totální variaci representující míry, na pravé straně je $\|f\|$ norma funkce f v prostoru $\mathscr{C}$ spojitých funkcí.) Dále předpokládejme, že funkce $f \longmapsto L'(f)$ je spojitá (vzhledem ke slabé konvergenci měr na $[0,1]$). Vzhledem k polynomiálnímu růstu L je funkce $\xi = L(W)$ zřejmě kvadraticky integrovatelná, $\mathsf{E}|\xi|^2 < \infty$. Buď

$$\xi = \mathsf{E}(\xi) + \int_0^1 \mathfrak{e}(s)\,\mathrm{d}W(s)$$

její integrální representace, jež existuje podle věty 4.8. Jako Clarkova formule je známo (dosti netriviální) tvrzení, že proces $\mathfrak{e}$ je tvaru

$$\mathfrak{e}(s) = \mathsf{E}\big(L'(W(\cdot))(]s,1]) \,\big|\, \mathscr{F}_s^W\big).$$

Příklad 4.8. Buď W standardní jednodimensionální Wienerův proces, položme

$$S_t = \max_{0 \leq u \leq t} W_u, \quad t \geq 0.$$

Potom[39]

$$S_T = \mathsf{E}S_T + 2\int_0^T \Big[1 - \Phi\Big(\frac{S_t - W_t}{\sqrt{T-t}}\Big)\Big]\,\mathrm{d}W_t$$

pro každé $T \in]0,\infty[$, kde Φ je distribuční funkce míry $\mathscr{N}(0,1)$ na $\mathbb{R}$. Pokud víme, že náhodné veličiny S_T a $|W_T|$ mají identická rozdělení,[40] není složité spočítat, že

$$\mathsf{E}S_T = \sqrt{\frac{2T}{\pi}}.$$

Věta 4.8 se týká kvadraticky integrovatelných wienerovských funkcionálů. Resignujeme-li na jednoznačnost representace, můžeme analogické tvrzení vyslovit pro libovolné skoro jistě konečné wienerovské funkcionály.

---

[39] S relativně elementárním (ale nikoliv jednoduchým) důkazem se lze seznámit v článku A. N. Ширяев, M. Йор, *Теор. Вероятност. и Применен.* *48*(2003), 375–385.

[40] V již vícekrát zmíněné knize I. Karatzase a S. E. Shrevea je to uvedeno jako Proposition 2.8.1 a Problem 2.8.2.

Věta 4.9. (R. M. Dudley, 1977) *Předpokládejme, že W je standardní jednodimensionální Wienerův proces a $T \in]0,\infty]$. Nechť $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}_T^W$-měřitelná funkce. Potom existuje $(\mathscr{F}_t^W)$-progresivně měřitelný náhodný proces K tak, že*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T |K(s)|^2 \,\mathrm{d}s < \infty\right\} = 1 \tag{34}$$

a

$$\xi = \int_0^T K(s)\,\mathrm{d}W(s) \qquad \mathsf{P}\text{-}\textit{skoro jistě.} \tag{35}$$

Věta 4.9 připouští různá důležitá zobecnění: representace (35) například platí pro $\mathscr{H}_T$-měřitelné náhodné veličiny ξ, pokud je $(\mathscr{H}_t)$ zleva spojitá filtrace splňující (UC) taková, že W je $(\mathscr{H}_t)$-Wienerův proces. (Za $(\mathscr{H}_t)$ lze třeba zvolit (obohacenou) kanonickou filtraci nějakého m-dimensionálního Wienerova procesu, jehož je W jednou komponentou.) Důkaz věty 4.9 není příliš dlouhý, ale je poněkud trikový a nepokusíme se ho zde podat.[41]

V následujícím příkladu ukážeme, že jednoznačnost ve větě 4.9 může být porušena.

Příklad 4.9. Ověřit, že proces K v representaci (35) není určen jednoznačně ve třídě procesů splňujících (34), je snadné, pokud $T = \infty$. Podle zákona iterovaného logarithmu pro Wienerův proces je markovský čas

$$\sigma = \inf\{t \geq 1;\ W(t) = 0\}$$

P-skoro jistě konečný, tedy

$$\int_0^\infty \left|\mathbf{1}_{[0,\sigma[}(s)\right|^2 \mathrm{d}s = \sigma < \infty, \qquad \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\sigma[}(s)\,\mathrm{d}W(s) = W(\sigma) = 0 \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude.}$$

Nulový funkcionál má tedy (alespoň) dvě representace. (Povšimněme si, že z tvrzení o jednoznačnosti ve větě 4.8 nutně plyne $\mathsf{E}\sigma = \infty$.) V případě $T < \infty$ užijeme vhodné záměny časové škály. Buď pro určitost $T = 1$, sestrojíme $(\mathscr{F}_t^W)$-progresivně měřitelný proces $(A_t)_{0 \leq t < 1}$ tak, aby

$$0 < \int_0^1 |A(s)|^2 \,\mathrm{d}s < \infty, \qquad \int_0^1 A(s)\,\mathrm{d}W(s) = 0, \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Definujme

$$Z(t) = \int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}W(s), \qquad 0 \leq t < 1,$$

[41] Původní Dudleyho důkaz je reprodukován ve skriptu P. Mandla *Stochastické integrály*, ÚTIA ČSAV, Praha 1976, na str. 148–151. Zmíněná zobecnění Dudleyho věty lze nalézt v článku M. Emery, C. Stricker, J. A. Yan, *Ann. Probab.* *11* (1983), 635–641.

potom je Z spojitý lokální martingal s kvadratickou variací

$$\langle Z\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{1-t} - 1.$$

Uvažujme přeškálovaný proces $\tilde{Z}(t) = Z(t/(t+1))$, $t \geq 0$, pak $\langle \tilde{Z}\rangle_t = t$, takže podle Lévyho charakterisační věty je $\tilde{Z}$ Wienerův proces. Položme

$$\sigma = \inf\{t \geq 1;\ \tilde{Z}(t) = 0\}, \quad \tau = \inf\{t \geq \frac{1}{2};\ Z(t) = 0\}.$$

Již jsme si ujasnili, že $\mathsf{P}\{\sigma < \infty\} = 1$. Jelikož τ je zřejmě $(\mathscr{F}_t^W)$-markovský čas splňující

$$\tau = \frac{\sigma}{\sigma+1},$$

je také

$$\mathsf{P}\{\omega;\ \tau(\omega) < 1\,\} = 1. \tag{36}$$

Definujme

$$A(t) = \frac{1}{1-t}\,\mathbf{1}_{[0,\tau[}(t), \qquad 0 \leq t < 1,$$

vzhledem k (36) dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 |A(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^\tau \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t < \infty,\\ \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}W(t) &= \int_0^\tau \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}W(t) = Z(\tau) = 0\end{aligned}$$

P-skoro jistě, jak jsme si přáli.

Nyní naznačíme důkaz věty 4.7. Nejprve dokážeme bod (a) omezivše se však jen na případ $n = 1$, poté odvodíme tvrzení (b). Jak již bylo řečeno, tvrzení (c) plyne z (a) a (b) celkem přímočaře, proto jsou detaily přenechány čtenářce či čtenáři.

Jako první krok odvodíme důležitý výsledek o martingalech, užitečný i jinde. Předpokládejme, že $(\mathscr{G}_t)$ je filtrace splňující (UC) a B je standardní jednodimensionální $(\mathscr{G}_t)$-Wienerův proces. Označme

$\mathbf{M}_2 = \big\{M = (M_t)_{t\geq 0};\ M$ zprava spojitý L^2-martingal vzhledem k $(\mathscr{G}_t)$, $M_0 = 0\big\}$,
$\Lambda_T = \big\{X = (X_t)_{t\geq 0};\ X\ (\mathscr{G}_t)$-progresivně měřitelný, $\mathsf{E}\int_0^T |X(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty\big\}$,
$\Lambda = \big\{X = (X_t)_{t\geq 0};\ X\mathbf{1}_{[0,T]} \in \Lambda_T \quad \forall T \geq 0\,\big\}$.

Pro procesy $X \in \Lambda$ je definován stochastický integrál

$$I_t(X) = \int_0^t X(s)\,\mathrm{d}B(s), \quad t \geq 0,$$

a $I(X) \in \mathbf{M}_2$. Dále, Λ_T lze ztotožnit s prostorem $L^2([0,T] \times \Omega, \mathscr{M}, \lambda \otimes \mathsf{P})$, kde $\mathscr{M}$ je σ-algebra $(\mathscr{G}_t)$-progresivně měřitelných množin, a platí

$$\mathsf{E}\big(I_T(X)I_T(Y)\big) = \mathsf{E}\int_0^T X(s)Y(s)\,\mathrm{d}s, \quad X, Y \in \Lambda_T.$$

Zobrazení I_T je tudíž isometrie z Λ_T do $L^2(\Omega, \mathscr{G}_T, \mathsf{P})$ a její obor hodnot $\mathscr{R}_T = \{I_T(X);\ X \in \Lambda_T\}$ je uzavřený podprostor v $L^2(\mathscr{G}_T)$.

Tvrzení 4.10. (H. Kunita & S. Watanabe, 1967) *Pro každý martingal $M \in \mathbf{M}_2$ existují procesy $X \in \Lambda$ a $Z \in \mathbf{M}_2$ tak, že*

$$M_t = I_t(X) + Z_t \quad \textit{pro všechna } t \geq 0 \ \mathsf{P}\textit{-skoro jistě} \tag{37}$$

a

$$\big(Z_t I_t(Y)\big)_{t\geq 0} \quad \textit{je martingal pro libovolné } Y \in \Lambda. \tag{38}$$

Má-li martingal M spojité trajektorie, pak rovnost (37) implikuje spojitost trajektorií Z, jelikož stochastický integrál spojité trajektorie jistě má.

Pro spojité martingaly víme, že (38) je ekvivalentní s $\langle Z, I(Y)\rangle = 0$ přímo podle definice vzájemné variace. Čtenářka či čtenář znalí Doob-Meyerova rozkladu i pro (obecně nespojité) martingaly[42] mohou tvrzení 4.10 přeformulovat do jeho standardní podoby: pro každé $M \in \mathbf{M}_2$ existují $X \in \Lambda$ a $Z \in \mathbf{M}_2$ tak, že $M = I(X) + Z$ a $\langle Z, I(Y)\rangle = 0$ pro všechna $Y \in \Lambda$.

Důkaz. Pokud rozklad splňující (37) a (38) existuje, je určen jednoznačně. Skutečně, nechť $M = I(X_1) + Z_1 = I(X_2) + Z_2$. Potom $Z_1 - Z_2 = I(X_2 - X_1)$, tedy $Z_1 - Z_2$ je L^2-martingal se spojitými trajektoriemi, přitom $(Z_1 - Z_2)I(X_2 - X_1)$ je martingal podle (38), takže $\langle Z_1 - Z_2, I(X_2 - X_1)\rangle_t = 0$, $t \geq 0$. Odtud

$$\langle Z_1 - Z_2\rangle_t = \langle Z_1 - Z_2, Z_1 - Z_2\rangle_t = \langle Z_1 - Z_2, I(X_2 - X_1)\rangle_t = 0$$

a lemma C.1 implikuje $Z_1 - Z_2 = 0$ P-skoro všude. Jestliže tedy pro každé $T > 0$ dokážeme nalézti procesy X a Z tak, aby (37) a (38) platily pro $0 \leq t \leq T$, pak můžeme z jednoznačnosti konstrukci rozšířiti na $\mathbb{R}_+$.

Zvolme proto pevně $T > 0$ a $M \in \mathbf{M}_2$. Víme, že $\mathscr{R}_T$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $L^2(\Omega, \mathscr{G}_T, \mathsf{P})$, existuje tudíž jeho orthogonální doplněk $\mathscr{R}_T^{\perp}$ a funkci $M_T \in L^2(\mathscr{G}_T)$ lze jednoznačně rozložit

$$M_T = I_T(X) + R, \tag{39}$$

kde $X \in \Lambda_T$ a $R \in \mathscr{R}_T^{\perp}$, to jest

$$\big\langle R, I_T(Y)\big\rangle_{L^2(\Omega)} = \mathsf{E}\big(R I_T(Y)\big) = 0 \tag{40}$$

[42] Viz I. Karatzas, S. Shreve: *op. cit.*, Theorem 1.4.10.

pro každé $Y \in \Lambda_T$, přičemž $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ značí skalární součin v $L^2(\Omega)$. Buď $Z = (Z_t)_{0 \le t \le T}$ zprava spojitá modifikace martingalu $\mathsf{E}\big(R \,\big|\, \mathscr{G}_t\big)$, $0 \le t \le T$. Ježto $R \in L^2(\Omega)$, jest Z zřejmě L^2-martingal; martingalová vlastnost užitá na (39) dává

$$M_t = \mathsf{E}\big(M_T \,\big|\, \mathscr{G}_t\big) = \mathsf{E}\big(I_T(X) \,\big|\, \mathscr{G}_t\big) + \mathsf{E}\big(R \,\big|\, \mathscr{G}_t\big) = I_t(X) + Z_t, \quad 0 \le t \le T,$$

P-skoro jistě. Zbývá dokázat, že proces $\big(Z_t I_t(Y)\big)_{0 \le t \le T}$ je $(\mathscr{G}_t)$-martingal pro všechna $Y \in \Lambda_T$. Vzhledem k lemmatu C.3 stačí ověřit, že

$$\mathsf{E}\big(Z_\sigma I_\sigma(Y)\big) = \mathsf{E}\big(Z_0 I_0(Y)\big) = 0$$

pro všechny $(\mathscr{G}_t)$-markovské časy σ, $0 \le \sigma \le T$. Zvolme σ a $Y \in \Lambda_T$ libovolné, potom je proces $\tilde{Y} \equiv Y \mathbf{1}_{[0,\sigma]} \in \Lambda_T$ a $I_\sigma(Y) = I_\sigma(\tilde{Y}) = I_T(\tilde{Y})$. S přihlédnutím k (40) získáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big(Z_\sigma I_\sigma(Y)\big) &= \mathsf{E}\big(\mathsf{E}\big(R \,\big|\, \mathscr{G}_\sigma\big) I_\sigma(Y)\big) \\ &= \mathsf{E}\big(\mathsf{E}\big(R I_\sigma(Y) \,\big|\, \mathscr{G}_\sigma\big)\big) = \mathsf{E}\big(R I_\sigma(Y)\big) \\ &= \mathsf{E}\big(R I_T(\tilde{Y})\big) = 0, \end{aligned}$$

čímž je důkaz završen. Q.E.D.

Důkaz věty 4.7(a) pro $n = 1$. Buď M zprava spojitý L^2-martingal vzhledem k $(\mathscr{F}_t^W)$. Podle tvrzení 4.10 existuje rozklad

$$M(t) = \int_0^t K(s)\,\mathrm{d}W(s) + Z(t), \quad t \ge 0,$$

kde K je $(\mathscr{F}_t^W)$-progresivně měřitelný proces splňující (29) a Z je zprava spojitý L^2-martingal vzhledem k $(\mathscr{F}_t^W)$ takový, že

$$Z \int_0^{\cdot} \psi\,\mathrm{d}W$$

je $(\mathscr{F}_t^W)$-martingal, kdykoliv je ψ progresivně měřitelný proces náležející $L^2([0,t] \times \Omega)$ pro všechna $t \ge 0$. Chceme ověřit, že

$$\mathsf{P}\big\{Z_t = 0 \ \ \forall t \in [0, \infty[\,\big\} = 1. \tag{41}$$

Buď $t > 0$ zatím pevné, indukcí podle N dokážeme:

$$\mathsf{E}\Big(Z_t \prod_{k=0}^{N} f_k(W(s_k))\Big) = 0, \tag{42}$$

kdykoliv $0 = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_N \leq t$ a $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ jsou omezené borelovské funkce, $k = 1, \ldots, N$. Pro $N = 0$ jest

$$\mathsf{E}\big(Z_t f_0(W(0))\big) = f_0(0)\mathsf{E}Z_t = 0,$$

jelikož Z je martingal a $Z_0 = 0$. Předpokládejme tedy, že (42) je již dokázáno pro nějaké $N \geq 0$, a zvolme f_k a $0 = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_N < s_{N+1} \leq t$. Pro fixované $\theta \in \mathbb{R}$ položme

$$\varphi(s) = \mathsf{E}\Big(Z_t \prod_{k=0}^{N} f_k(W(s_k)) e^{i\theta W(s)}\Big), \quad s \in [s_N, t].$$

Povšimněme si, že $\varphi(s_N) = 0$ podle indukčního předpokladu a

$$\varphi(s) = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big(Z_t \prod_{k=0}^{N} f_k(W(s_k)) e^{i\theta W(s)} \,\Big|\, \mathscr{F}_s^W\Big)\Big] = \mathsf{E}\Big(Z_s \prod_{k=0}^{N} f_k(W(s_k)) e^{i\theta W(s)}\Big).$$

Užitím Itôovy formule obdržíme rovnost

$$e^{i\theta W(s)} = e^{i\theta W(s_N)} - \frac{\theta^2}{2} \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}r + i\theta \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}W(r),$$

proto

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\Big(Z_s e^{i\theta W(s)} \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big) = e^{i\theta W(s_N)} \mathsf{E}\Big(Z_s \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big) - \frac{\theta^2}{2} \mathsf{E}\Big(Z_s \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}r \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big) \\ + i\theta \mathsf{E}\Big(Z_s \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}W(r) \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big). \end{aligned}$$

Proces Z byl zvolen tak, aby $Z_s \int_0^s \mathbf{1}_{[s_N,t]}(r) e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}W(r)$, $s \geq 0$, byl martingal, tedy

$$\mathsf{E}\Big(Z_s \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}W(r) \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big) = Z_{s_N} \int_0^{s_N} \mathbf{1}_{[s_N,t]}(r) e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}W(r) = 0.$$

To jest, platí

$$\mathsf{E}\Big(Z_s e^{i\theta W(s)} \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big) = Z_{s_N} e^{i\theta W(s_N)} - \frac{\theta^2}{2} \mathsf{E}\Big(Z_s \int_{s_N}^{s} e^{i\theta W(r)} \,\mathrm{d}r \,\Big|\, \mathscr{F}_{s_N}^W\Big). \tag{43}$$

Vynásobivše (43) $\mathscr{F}_{s_N}^W$-měřitelnou funkcí $\prod_{k=0}^N f_k(W(s_k))$ a zintegrovavše vzniklou rovnost podle míry P získáme vztah

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= -\frac{\theta^2}{2}\int_{s_N}^s \mathsf{E}\Big[Z_s\prod_{k=0}^N f_k(W(s_k))e^{i\theta W(r)}\Big]\,\mathrm{d}r\\ &= -\frac{\theta^2}{2}\int_{s_N}^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r, \quad s\in[s_N,t].\end{aligned}$$

Neboť funkce φ je spojitá, jak lze snadno nahlédnout, implikuje Gronwallovo lemma, že $\varphi = 0$ na $[s_N,t]$. Jelikož θ bylo libovolné, vidíme, že

$$\forall s\in[s_N,t]\ \ \forall\theta\in\mathbb{R}\quad \mathsf{E}\Big[Z_t\prod_{k=0}^N f_k(W(s_k))e^{i\theta W(s)}\Big] = 0. \tag{44}$$

Označme $\mathfrak{d} = Z_t\prod_{k=0}^N f_k(W(s_k))$ a definujme konečné borelovské míry μ^+, μ^- na $\mathbb{R}$ předpisem

$$\mu^+(A) = \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}^+\mathbf{1}_A(W(s_{N+1}))\big), \quad \mu^-(A) = \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}^-\mathbf{1}_A(W(s_{N+1}))\big),$$

pro všechny $A\subseteq\mathbb{R}$ borelovské ($\mathfrak{d}^+$, $\mathfrak{d}^-$ značí kladnou a zápornou část funkce $\mathfrak{d}$). Z této definice standardním postupem plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(r)\,\mathrm{d}\mu^\pm(r) = \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}^\pm g(W(s_{N+1}))\big)$$

pro všechny omezené borelovské funkce $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$. Speciálně z (44) při volbě $s = s_{N+1}$ dostáváme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta r}\,\mathrm{d}\mu^+(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta r}\,\mathrm{d}\mu^-(r), \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Odtud $\mu^+ = \mu^-$, neboť Fourierovy transformace měr μ^+, μ^- splývají. Dále,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big(Z_t\prod_{k=0}^{N+1} f_k(W(s_k))\Big) &= \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}f_{N+1}(W(s_{N+1}))\big)\\ &= \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}^+f_{N+1}(W(s_{N+1}))\big) - \mathsf{E}\big(\mathfrak{d}^-f_{N+1}(W(s_{N+1}))\big)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{N+1}(r)\,\mathrm{d}\mu^+(r) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{N+1}(r)\,\mathrm{d}\mu^-(r)\\ &= 0\end{aligned}$$

a platnost (42) pro $N+1$ je ověřena.

Nakonec si povšimněme, že

$$\mathscr{A} = \{A \in \sigma(W(r),\ r \le t),\ \mathsf{E}(Z_t \mathbf{1}_A) = 0\}$$

je σ-aditivní systém, který podle (42) obsahuje systém (uzavřený na průniky) všech množin tvaru $\{W(s_1) \in C_1, \dots, W(s_N) \in C_N\}$, $C_i \subseteq \mathbb{R}$ borelovské, takže užívajíce Dynkinovo lemma odvodíme, že $\mathscr{A} = \sigma(W(r),\ r \le t)$. σ-algebra $\mathscr{A}$ se tudíž od $\mathscr{F}_t^W$ liší jen o nulové množiny, proto $\mathsf{E}(Z_t \mathbf{1}_A) = 0$ platí pro každou $A \in \mathscr{F}_t^W$. Funkce Z_t je ovšem $\mathscr{F}_t^W$-měřitelná, takže $Z_t = 0$ skoro jistě. Ze spojitosti trajektorií Z zprava plyne ihned (41).

Jednoznačnost representace (30) je zřejmá. Q.E.D.

Důkaz věty 4.7(b). Buď M zprava spojitý $(\mathscr{F}_t^W)$-martingal. Je-li M L^2-martingal, plyne spojitost jeho trajektorií z tvrzení (a) věty 4.7. V opačném případě zvolme $T > 0$ libovolně pevně a nalezněme náhodné veličiny $M^{(k)} \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T^W, \mathsf{P})$ tak, aby

$$\mathsf{E}\left|M_T - M^{(k)}\right| < \frac{1}{2^k}, \quad k \ge 1.$$

Nechť je $L^{(k)}$ zprava spojitá modifikace martingalu $\left(\mathsf{E}(M^{(k)} \mid \mathscr{F}_t^W),\ 0 \le t \le T\right)$. Jelikož $L^{(k)}$ je L^2-martingal, má spojité trajektorie. Užitím Doobovy maximální nerovnosti na (zprava spojitý) martingal $M - L^{(k)}$ dostaneme

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{0\le t\le T} |M_t - L_t^{(k)}| \ge \frac{1}{k} \Big\} \le k\,\mathsf{E}\left|M_T - L_T^{(k)}\right| = k\,\mathsf{E}\left|M_T - M^{(k)}\right| < \frac{k}{2^k}.$$

Z Borel-Cantelliho lemmatu plyne

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{k\to\infty} \Big\{ \sup_{0\le t\le T} \left|M_t - L_t^{(k)}\right| \ge \frac{1}{k} \Big\}\Big) = 0,$$

což znamená, že P-skoro jistě

$$\lim_{k\to\infty} L_t^{(k)} = M_t \quad \text{stejnoměrně v } t \in [0,T].$$

Má tedy M skoro jistě trajektorie spojité na $[0,T]$, avšak $T > 0$ bylo libovolné, takže pro martingaly je dokazované tvrzení již ověřeno.

Buď nakonec M zprava spojitý lokální $(\mathscr{F}_t^W)$-martingal. Existuje lokalisující posloupnost (τ_k) markovských časů tak, že $M_k = M(\cdot \wedge \tau_k)$ jsou zprava spojité $(\mathscr{F}_t^W)$-martingaly. Jak jsme již ukázali, mají martingaly M_k P-skoro jistě spojité trajektorie. Lze proto nalézti množinu $N \in \mathscr{F}$ tak, že $\mathsf{P}(N) = 0$ a pro všechna $\omega \in \Omega \setminus N$ je $\tau_k(\omega) \nearrow \infty$ a $M_{\cdot}(\omega)$ je spojitá funkce na $[0, \tau_k(\omega)[$, $k \in \mathbb{N}$. Tím je důkaz tvrzení (b) věty 4.7 dokončen. Q.E.D.

5. Stochastické diferenciální rovnice: Existence řešení II

Ve druhé kapitole jsme dokázali, že stochastická diferenciální rovnice má – při zadané počáteční podmínce – právě jediné řešení, pokud její koeficienty splňují jisté předpoklady (I) a (II), jež se pro autonomní rovnici (to jest, v případě koeficientů nezávisících na čase) redukují na požadavek

$$b : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \sigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n} \quad \text{lipschitzovské.}$$

To je důležitý výsledek z hlediska theoretického, avšak pro mnohé aplikace je lipschitzovskost příliš restriktivní předpoklad. Třída přípustných koeficientů by se podstatně rozšířila, pokud bychom byli s to pracovati s funkcemi lipschitzovskými pouze lokálně předpokládajíce

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}^m \text{ kouli} \quad b : K \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \sigma : K \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n} \quad \text{lipschitzovské.}$$

Kupříkladu, každá funkce $b \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ je lokálně lipschitzovská. Vskutku, pro $x, y \in K$ máme podle věty o střední hodnotě

$$\begin{aligned}\|b(y) - b(x)\| &= \left\| \int_0^1 Db\big(x + t(y-x)\big)(y-x)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|Db(x + t(y-x))\|\,\|y-x\| \\ &\leq \sup_{z\in K} \|Db(z)\|\,\|y-x\|,\end{aligned}$$

stačí tedy uvážiti, že Fréchetova derivace Db funkce B je spojitá, a tedy omezená, na kompaktu $\overline{K}$. (Pokud bychom chtěli týmž postupem dokázat globální lipschitzovskost b, potřebujeme silný dodatečný předpoklad omezenosti Db na celém $\mathbb{R}^m$.) V této kapitole ukážeme, že předpoklad lokální lipschitzovskosti v prostorových proměnných skutečně může přirozeným způsobem nahradit podmínky (I) a (II) z věty 2.1.

Řešení rovnic vyšetřovaných v kapitole 2 bylo možno hledat na předem zvoleném intervalu $[t_0, T]$. Připustíme-li koeficienty s růstem rychlejším než lineárním, může se situace odlišovat: každé řešení má svůj přirozený maximální definiční obor, vně nějž ho nelze spojitě rozšířit.

Příklad 5.1. Rovnice

$$\mathrm{d}X_t = X_t^2\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 1,$$

to jest

$$X(t) = 1 + \int_0^t X^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

má řešení
$$X(t)=\frac{1}{1-t},\qquad 0\le t<1.$$
Zjevně $\lim_{t\to 1-}X(t)=+\infty$, řešení je proto – jako $\mathbb{R}$-hodnotová funkce – rozumně definováno pouze na intervalu $[0,1[$. Maximální definiční obor řešení závisí na počáteční podmínce: táž rovnice, ale s počáteční podmínkou $X(0)=-1$, má řešení $X(t)=-(1+t)^{-1}$ definované na celém $[0,\infty[$.

Předpokládejme, že pracujeme na libovolné pevně zvolené stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ splňující (UC), na níž je definován n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W. Označme $\mathscr{M}$ σ-algebru $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelných množin. Zobecněme definici řešení stochastické diferenciální rovnice
$$\mathrm{d}X=b(t,X)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X)\,\mathrm{d}W \tag{1}$$
s borelovskými koeficienty $b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\sigma:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times n}$ a s počáteční podmínkou
$$X(t_0)=\varphi \tag{2}$$
tak, aby zahrnovala i řešení s konečnou dobu života. Nejprve zavedeme užitečné označení: Pro markovské časy ζ, τ definujeme *stochastické intervaly* $[\![\zeta,\tau[\![$ a $[\![\zeta,\tau]\!]$ předpisem
$$[\![\zeta,\tau[\![=\big\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega;\ \zeta(\omega)\le t<\tau(\omega)\big\},$$
$$[\![\zeta,\tau]\!]=\big\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega;\ \zeta(\omega)\le t\le\tau(\omega)\big\}.$$
(Analogicky bychom postupovali pro ostatní kombinace závorek.) Upozorněme, že stochastické intervaly jsou podmožiny $\mathbb{R}_+\times\Omega$, ač ζ a τ mohou nabývat i hodnoty ∞, a povšimněme si, že platí
$$\mathbf{1}_{[\![\zeta,\tau[\![}(t,\omega)=\mathbf{1}_{[\zeta(\omega),\tau(\omega)[}(t),\quad (t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega.$$
Není obtížné ověřit, že intervaly $[\![\zeta,\tau[\![$ a $[\![\zeta,\tau]\!]$ jsou progresivně měřitelné množiny. (Například pro $[\![\zeta,\tau[\![$ to plyne ihned z toho, že jeho indikátor je zprava spojitý adaptovaný proces.)

Definice 5.1. Dvojici (X,ε) nazveme *lokální řešení* úlohy (1), (2), jestliže

(i) $\varepsilon:\Omega\longrightarrow\,]t_0,\infty]$ je markovský čas,

(ii) $X:[\![t_0,\varepsilon[\![\longrightarrow\mathbb{R}^m$ je progresivně měřitelný náhodný proces,

(iii) platí
$$\limsup_{t\nearrow\varepsilon(\omega)}\|X(t,\omega)\|=+\infty\quad\text{na množině}\quad\{\omega;\ \varepsilon(\omega)<\infty\},$$

(iv) existují markovské časy η^N, $N \in \mathbb{N}$, splňující $t_0 \le \eta^N < \varepsilon$, $\eta^N \nearrow \varepsilon$ při $N \to \infty$, tak, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ řeší X úlohu (1), (2) na $[\![t_0, \eta^N]\!]$, to jest,

$$\int_{t_0}^{\eta^N} \left\{ \left\| b(s, X(s)) \right\| + \left\| \sigma(s, X(s)) \right\|^2 \right\} \mathrm{d}s < \infty \tag{3}$$

P-skoro jistě a

$$X(t \wedge \eta^N) = \varphi + \int_{t_0}^{t \wedge \eta^N} b(s, X(s)) \, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t \wedge \eta^N} \sigma(s, X(s)) \, \mathrm{d}W(s)$$

platí P-skoro jistě pro všechna $t \ge t_0$.

Markovský čas ε nazveme *čas explose* (nebo *doba života*) řešení X.

Terminologické varování: Objekt zavedený v předchozí definici se zpravidla nazývá prostě řešení X úlohy (1), (2) (s dobou života ε zmiňovanou jen v případě, kdy je explose v konečném čase podstatná) a nikoliv lokální řešení (X, ε). V této kapitole se však pro jasnost přidržíme názvosloví zdůrazňujícího, že užíváme právě definici 5.1.

Poznámka 5.1. a) Požadavek $\mathscr{M}$-měřitelnosti procesu X v bodu (ii) má smysl, jelikož stochastický interval $[\![t_0, \varepsilon[\![\in \mathscr{M}$.

b) V bodu (iv) vystupuje stochastický integrál procesu, definovaného pouze na stochastickém intervalu. Uvědomme si proto, že

$$\int_0^{t \wedge \zeta} Y(s) \, \mathrm{d}W(s) = \int_0^{t \wedge \zeta} Y(s \wedge \zeta) \, \mathrm{d}W(s) = \int_0^{t \wedge \zeta} Y(s \wedge \theta) \, \mathrm{d}W(s)$$

platí pro každý progresivně měřitelný $\mathbb{M}_{m \times n}$-hodnotový proces Y splňující $\|Y\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ P-skoro jistě a pro libovolné markovské časy $\zeta \le \theta$, jak se lze snadno přesvědčit. Lze tudíž konsistentně definovat

$$\int_{t_0}^{t \wedge \eta^N} \sigma(s, X(s)) \, \mathrm{d}W(s) = \int_{t_0}^{t \wedge \eta^N} \sigma(s, X(s \wedge \eta^N)) \, \mathrm{d}W(s),$$

integrand vpravo má již smysl pro všechna $s \ge t_0$ a platí též

$$\int_0^{t \wedge \eta^N} \sigma(s, X(s)) \, \mathrm{d}W(s) = \int_0^{t \wedge \eta^N} \sigma(s, X(s \wedge \zeta)) \, \mathrm{d}W(s),$$

kdykoliv je ζ markovský čas, $\eta^N \le \zeta < \varepsilon$.

c) Řešení rovnice (1), (2) podle definice 2.1 je právě lokální řešení s $\varepsilon = +\infty$. (Je-li $\varepsilon = +\infty$, nazývá se mnohdy X pro zdůraznění *globální* řešení.) Dále, někdy je účelné uvažovat řešení, jejichž doba života je kladná s positivní pravděpodobností, nikoliv však nutně skoro jistě, to jest, $0 < \mathsf{P}\{\varepsilon > t_0\} \le 1$, avšak v této přednášce tak obecný pojem řešení nepotřebujeme a vždy požadujeme $\varepsilon > t_0$ na Ω.

d) Z definice lokálního řešení ihned plyne, že trajektorie $X(\cdot,\omega)$ je P-skoro jistě spojitá na intervalu $[t_0, \varepsilon(\omega)[$ a $\mathsf{P}\{X(t_0) = \varphi\} = 1$.

e) Je užitečné si uvědomit, že definice lokálního řešení nezávisí na konkrétní volbě aproximující posloupnosti markovských časů $\{\eta^N\}$. To plyne z následující úvahy: Nechť je (X, ε) lokální řešení podle definice 5.1 a ζ markovský čas takový, že $t_0 \le \zeta < \varepsilon$ a

$$\int_{t_0}^{\zeta} \left\{ \|b(s, X(s))\| \,\mathrm{d}s + \|\sigma(s, X(s))\|^2 \right\} \mathrm{d}s < \infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{4}$$

Potom X řeší rovnici (1), (2) na stochastickém intervalu $[\![t_0, \zeta]\!]$:

$$X(t \wedge \zeta) = \varphi + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta} b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta} \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s)$$

platí P-skoro jistě pro všechna $t \ge t_0$. Vskutku: fixujme $t \ge t_0$, pro každé $N \in \mathbb{N}$ podle definice lokálního řešení dostaneme

$$\begin{aligned} X(t \wedge \zeta \wedge \eta^N) &= \varphi + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta\wedge\eta^N} b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta\wedge\eta^N} \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s) \\ &= \varphi + \int_{t_0}^{t} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s) b(s, X(s \wedge \zeta))\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s) \sigma(s, X(s \wedge \zeta))\,\mathrm{d}W(s) \end{aligned} \tag{5}$$

P-skoro jistě. Ježto $\eta^N \nearrow \varepsilon$ a $\zeta < \varepsilon$, jest

$$\lim_{N\to\infty} t \wedge \zeta \wedge \eta^N = t \wedge \zeta \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } \Omega$$

a ze spojitosti trajektorií plyne

$$\lim_{N\to\infty} X(t \wedge \zeta \wedge \eta^N) = X(t \wedge \zeta) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na } \Omega.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s) b(s, X(s \wedge \zeta)) &\xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(s) b(s, X(s \wedge \zeta)) \\ \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s) \sigma(s, X(s \wedge \zeta)) &\xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(s) \sigma(s, X(s \wedge \zeta)) \end{aligned}$$

pro každé $s \in [t_0, t]$ P-skoro jistě. Přitom vzhledem k (4)

$$\begin{aligned}
\big\|\mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(\cdot)b(\cdot, X(\cdot\wedge\zeta))\big\| &\le \big\|\mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(\cdot)b(\cdot, X(\cdot\wedge\zeta))\big\| \in L^1([t_0, t]),\\
\big\|\mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(\cdot)\sigma(\cdot, X(\cdot\wedge\zeta))\big\| &\le \big\|\mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(\cdot)\sigma(\cdot, X(\cdot\wedge\zeta))\big\| \in L^2([t_0, t])
\end{aligned}$$

P-skoro jistě, tudíž podle věty o majorisované konvergenci

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s)b(s, X(s\wedge\zeta))\,\mathrm{d}s \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{t_0}^{t} \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(s)b(s, X(s\wedge\zeta))\,\mathrm{d}s,\\
&\int_{t_0}^{t} \big\|\big\{\mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta\wedge\eta^N[}(s) - \mathbf{1}_{[0,t\wedge\zeta[}(s)\big\}\sigma(s, X(s\wedge\zeta))\big\|^2\,\mathrm{d}s \xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

P-skoro jistě. Odtud (viz příklad 1.2)

$$\int_{t_0}^{t\wedge\zeta\wedge\eta^N} \sigma(s, X(s\wedge\zeta))\,\mathrm{d}W(s) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathsf{P}} \int_{t_0}^{t\wedge\zeta} \sigma(s, X(s\wedge\zeta))\,\mathrm{d}W(s)$$

a dokazované tvrzení plyne limitním přechodem z (5).

f) Jsou-li funkce b, σ omezené na omezených množinách, je zpravidla výhodné pracovat v definici 5.1 s markovskými časy

$$\eta^N = \inf\{t \ge t_0;\ \|X(t)\| \ge N\} \wedge N,$$

které zřejmě aproximují ε a přitom je (3) splněno automaticky.

Nejprve vyšetříme jednoznačnost lokálních řešení. Následující výsledek mírně zobecňuje větu 2.2.

Věta 5.1. *Buďte* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ *borelovské funkce vyhovující předpokladu*

(III) $\quad \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists K_N < \infty\ \ \forall t \ge 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \ \|x\| \vee \|y\| \le N$

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \vee \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le K_N\|x - y\|.$$

Nechť $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *a* (X, ε_X), (Y, ε_Y) *jsou dvě lokální řešení rovnice* (1) *splňující* $X(t_0) = Y(t_0)$ P*-skoro všude. Potom* $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$ P*-skoro všude a*

$$X\mathbf{1}_{[t_0,\varepsilon_X[} = Y\mathbf{1}_{[t_0,\varepsilon_Y[} \qquad \mathsf{P}\text{-}\textit{skoro jistě.} \tag{6}$$

Podotkněme, že ve větě 5.1 nepředpokládáme žádnou integrovatelnost počáteční podmínky. Pro jasnost dále poznamenejme, že zápisem (6) míníme:

$$\mathsf{P}\big\{\omega \in \Omega;\ X(t,\omega) = Y(t,\omega)\ \ \forall t \in [t_0, \varepsilon_X(\omega)[\big\} = 1.$$

Z důkazu bude zřejmé, jak větu modifikovat, jsou-li koeficienty definovány pouze na $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ pro nějaké $T>0$ či pokud lze konstanty K_N volit stejnoměrně pouze pro t z kompaktních podintervalů $\mathbb{R}_+$.

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $t_0=0$. Buďte $\{\eta_X^N\}$, $\{\eta_Y^N\}$ posloupnosti markovských časů aproximujících ε_X, respektive ε_Y, jejichž existence je zaručena bodem (iv) definice 5.1. Pro $N\in\mathbb{N}$ položme

$$\begin{aligned}\tau_X^N &= \inf\{t\geq 0;\ \|X(t)\|\geq N\},\\ \tau_Y^N &= \inf\{t\geq 0;\ \|Y(t)\|\geq N\},\\ \tau^N &= \tau_X^N\wedge\tau_Y^N\wedge\eta_X^N\wedge\eta_Y^N.\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že pro každé ω, pro něž jsou trajektorie $X(\cdot,\omega)$, $Y(\cdot,\omega)$ spojité, platí

$$\tau_X^N(\omega)\longrightarrow\varepsilon_X(\omega),\quad \tau_Y^N(\omega)\longrightarrow\varepsilon_Y(\omega)\quad \text{při } N\to\infty,$$

takže $\tau^N\nearrow\varepsilon_X\wedge\varepsilon_Y$ pro $N\to\infty$ P-skoro jistě. Podle definice lokálního řešení dostáváme

$$\begin{aligned}X(t\wedge\tau^N)-Y(t\wedge\tau^N) &= \int_0^{t\wedge\tau^N}\big\{b(s,X(s))-b(s,Y(s))\big\}\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_0^{t\wedge\tau^N}\big\{\sigma(s,X(s))-\sigma(s,Y(s))\big\}\,\mathrm{d}W(s).\end{aligned}$$

Je–li $s\leq\tau^N(\omega)$, pak $\|X(s,\omega)\|\vee\|Y(s,\omega)\|\leq N$, proto užívajíce předpoklad lokální lipschitzovskosti (III) stejně jako v důkazu věty 2.2 odvodíme odhad

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big\|X(t\wedge\tau^N)-Y(t\wedge\tau^N)\big\|^2\\ &\qquad\leq 2\mathsf{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau^N}\|b(s,X(s))-b(s,Y(s))\|\,\mathrm{d}s\bigg)^2\\ &\qquad\quad+2\mathsf{E}\bigg\|\int_0^{t\wedge\tau^N}\big\{\sigma(s,X(s))-\sigma(s,Y(s))\big\}\,\mathrm{d}W(s)\bigg\|^2\\ &\qquad\leq 2K_N^2(t+1)\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau^N}\|X(s\wedge\tau^N)-Y(s\wedge\tau^N)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\qquad\leq 2K_N^2(t+1)\mathsf{E}\int_0^{t}\|X(s\wedge\tau^N)-Y(s\wedge\tau^N)\|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Podle Gronwallova lemmatu

$$\mathsf{E}\|X(t\wedge\tau^N)-Y(t\wedge\tau^N)\|^2=0$$

pro každé $t \geq 0$, spojitost trajektorií implikuje

$$X \mathbf{1}_{[0,\tau^N[} = Y \mathbf{1}_{[0,\tau^N[} \qquad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Limitním přechodem $N \to \infty$ odvodíme

$$X \mathbf{1}_{[0,\varepsilon_X \wedge \varepsilon_Y[} = Y \mathbf{1}_{[0,\varepsilon_X \wedge \varepsilon_Y[} \qquad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{7}$$

Zbývá dokázat, že $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$. Podle (7) lze nalézti množinu $A \in \mathscr{F}$, $\mathsf{P}(A) = 0$, takovou, že při $\omega \notin A$ jsou trajektorie $X(\cdot,\omega)$, $Y(\cdot,\omega)$ spojité a $X(\cdot,\omega) = Y(\cdot,\omega)$ na $[0,\varepsilon_X(\omega) \wedge \varepsilon_Y(\omega)[$. Nechť pro spor existuje $\widetilde{\omega} \notin A$ tak, že $\varepsilon_X(\widetilde{\omega}) \neq \varepsilon_Y(\widetilde{\omega})$, pro určitost předpokládejme, že $\varepsilon_X(\widetilde{\omega}) < \varepsilon_Y(\widetilde{\omega})$ (v opačném případě je důkaz zcela analogický). Speciálně tedy platí $\varepsilon_X(\widetilde{\omega}) < \infty$, nalezněme $R \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varepsilon_X(\widetilde{\omega}) < \tau_Y^R(\widetilde{\omega})$. Jest ovšem $X(s,\widetilde{\omega}) = Y(s,\widetilde{\omega})$ pro $0 \leq s \leq \tau_X^{R+1}(\widetilde{\omega}) < \varepsilon_X(\widetilde{\omega}) < \tau_Y^R(\widetilde{\omega})$, tedy

$$R + 1 \leq \|X(\tau_X^{R+1}(\widetilde{\omega}),\widetilde{\omega})\| = \|Y(\tau_X^{R+1}(\widetilde{\omega}),\widetilde{\omega})\| < R,$$

což je hledaný spor. Q.E.D.

Příklad 5.2. Nejsou–li koeficienty lokálně lipschitzovské, nemusí být řešení určeno jednoznačně. Zvolme $\alpha \in]0,1[$ libovolně pevně a uvažujme rovnici

$$\mathrm{d}X_t = |X_t|^\alpha \,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 0,$$

to jest

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha \,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Přímým výpočtem se snadno ukáže, že pro každé $s \in [0,\infty]$ je funkce

$$X_t = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < s, \\ \big((1-\alpha)(t-s)\big)^{1/(1-\alpha)}, & t \geq s, \end{cases}$$

řešením rovnice (8), jež má tedy nespočetně mnoho různých řešení.

Úloha (8) je čistě deterministická, jednoznačnost však neplatí ani pro analogickou rovnici stochastickou. Buď W reálný Wienerův proces, potom je $X \equiv 0$ řešením rovnice

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha \,\mathrm{d}W_s.$$

Pro $\alpha \geq \frac{1}{2}$ je to jediné řešení, zatímco při $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$ existuje navíc i řešení nenulové (I. V. Girsanov, 1962). Analysa Girsanovova příkladu vyžaduje ovšem nástroje ne zcela elementární.[43] Snáze lze ověřit nejednoznačnost pro následující jednodimensionální problém:

$$X_t = 3\int_0^t X_s^{1/3}\,\mathrm{d}s + 3\int_0^t (X_s^{1/3})^2\,\mathrm{d}W_s, \tag{9}$$

kde W je opět reálný Wienerův proces a funkce $x \mapsto x^{1/3}$ je přirozeně definována jako inverse k prosté funkci $x \mapsto x^3$. Zřejmě $X \equiv 0$ je řešení (9) a přímou aplikací Itôovy formule se ukáže, že i $X = W^3$ řeší (9). Obecněji, pro libovolné $\Theta \in [0,\infty]$ položme $\beta_\Theta = \inf\{t \geq \Theta;\ W_t = 0\}$, snadno nahlédneme, že proces

$$X_t = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \beta_\Theta, \\ W_t^3, & t \geq \beta_\Theta, \end{cases}$$

řeší (9). Lze ukázat, že $\beta_\Theta \neq \beta_\Xi$ pro $\Theta \neq \Xi$, takže (9) má nespočetně mnoho různých řešení.

Nyní je naším cílem dokázat větu o existenci lokálních řešení.

Věta 5.2. *Buďte $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ borelovské funkce vyhovující předpokladům*

(III) $\quad \forall N \in \mathbb{N}\ \exists K_N < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| \vee \|y\| \leq N$

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \vee \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_N \|x - y\|,$$

(IV)
$$\sup_{t\geq 0} \big\{\|b(t,0)\| + \|\sigma(t,0)\|\big\} \equiv \widetilde{K} < \infty.$$

Pro každé $t_0 \in \mathbb{R}_+$ a libovolnou $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelnou funkci $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ splňující $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$ existuje jediné lokální řešení (X, ε) úlohy (1), (2). Je-li navíc splněn předpoklad lineárního růstu

(I) $\quad \exists K_* < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t,x)\| \vee \|\sigma(t,x)\| \leq K_*(1 + \|x\|),$$

pak $\varepsilon = +\infty$ P-skoro jistě a pro každé $T > t_0$ a $p \in [2,\infty[$ existuje konstanta $C^* < \infty$, závisící jen na K_*, T a p, taková, že

$$\mathsf{E} \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|X(t)\|^p \leq C^*\big(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\big). \tag{10}$$

---

[43] Jednoznačnost pro $\alpha \geq 1/2$ plyne z Proposition 5.2.13 v I. Karatzas, S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988; nejednoznačnost viz Remark 5.5.6 tamtéž.

Poznámka 5.2. a) Způsobem již nám známým lze větu 5.2. rozšířit na neintegrovatelné počáteční podmínky, přičemž konstrukce řešení zůstává z valné části nezměněna.

b) Při nepodstatné modifikaci důkazu je možno větu 5.2 dokázat i pro rovnice s koeficienty definovanými pouze na $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ pro nějaké $T>0$. Z důkazu bude též zřejmé, že místo konstant K_N, $\widetilde{K}$ lze uvažovat funkce času t, pokud tyto funkce zůstávají omezené na omezených množinách.

c) Podmínka (IV) je splněna automaticky, pokud koeficienty nezávisí na čase. V neautonomním případě ji však zcela vypustit nelze: rovnice

$$\mathrm{d}X = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 0,$$

nemá řešení s kladnou dobou života, ač její pravá strana splňuje (III). Přesná podoba předpokladu (IV) není příliš důležitá, podstatné je, aby funkce b a σ byly omezené na omezených podmnožinách $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$, což předpoklad (IV) spolu s předpokladem lokální lipschitzovskosti (III) implikují: pro $x\in\mathbb{R}^m$, $\|x\|\le N$, lze odhadnout

$$\|b(t,x)\| \le \|b(t,x)-b(t,0)\| + \|b(t,0)\| \le K_N\|x\| + \widetilde{K} \le K_N N + \widetilde{K}$$

a podobně pro σ.

Poznámka 5.3. Podle definice lokálního řešení platí

$$\limsup_{t\nearrow\varepsilon} \|X(t)\| = +\infty \quad \text{na množině } \{\varepsilon<\infty\}.$$

Lze ukázat,[44] že pro řešení zaručená větou 5.2 dokonce existuje limita:

$$\lim_{t\nearrow\varepsilon} \|X(t)\| = +\infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude na množině } \{\varepsilon<\infty\}.$$

Základem důkazu věty 5.2 je následující tvrzení o lokální jednoznačnosti, jež zhruba říká, že trajektorie řešení v libovolné otevřené množině jsou určeny pouze hodnotami koeficientů na této množině.

Tvrzení 5.3. *Buďte $b_i:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\sigma_i:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times n}$ borelovské funkce, $i=1,2$, splňující předpoklady* (I), (II) *věty 2.1, to jest*

$\exists L<\infty\ \forall t\ge 0\ \forall x,y\in\mathbb{R}^m\ \forall i\in\{1,2\}$

$$\left.\begin{aligned} \|b_i(t,x)-b_i(t,y)\| \vee \|\sigma_i(t,x)-\sigma_i(t,y)\| &\le L\|x-y\|,\\ \|b_i(t,x)\| \vee \|\sigma_i(t,x)\| &\le L\big(1+\|x\|\big). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

[44] Viz např. N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North–Holland, Amsterdam 1981, §IV.2.

Nechť $t_0 \in \mathbb{R}_+$ a $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelná funkce, $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$. Buď $D \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená množina taková, že

$$b_1\big|_{[t_0,\infty[\times D} = b_2\big|_{[t_0,\infty[\times D}, \qquad \sigma_1\big|_{[t_0,\infty[\times D} = \sigma_2\big|_{[t_0,\infty[\times D}. \tag{12}$$

Pro $i = 1, 2$ označme X_i řešení úlohy

$$\mathrm{d}X_i = b_i(t, X_i)\,\mathrm{d}t + \sigma_i(t, X_i)\,\mathrm{d}W, \quad X_i(t_0) = \varphi,$$

a položme

$$\tau_i = \inf\{t \geq t_0;\ X_i(t) \notin D\}.$$

Potom $\mathsf{P}\{\tau_1 = \tau_2\} = 1$ a

$$\sup_{t \geq t_0} \|X_1(t \wedge \tau_1) - X_2(t \wedge \tau_1)\| = 0 \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Opět není těžké ověřit, že tvrzení platí i bez předpokladu $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$.

Důkaz. Položivše pro přehlednost $t_0 = 0$ odhadujme rozdíl

$$\begin{aligned}
X_1(t \wedge \tau_1) - X_2(t \wedge \tau_1) &= \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{b_1(s, X_1(s)) - b_2(s, X_2(s))\big\}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{\sigma_1(s, X_1(s)) - \sigma_2(s, X_2(s))\big\}\,\mathrm{d}W(s) \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{b_1(s, X_1(s)) - b_2(s, X_1(s))\big\}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{b_2(s, X_1(s)) - b_2(s, X_2(s))\big\}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{\sigma_1(s, X_1(s)) - \sigma_2(s, X_1(s))\big\}\,\mathrm{d}W(s) \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_1} \big\{\sigma_2(s, X_1(s)) - \sigma_2(s, X_2(s))\big\}\,\mathrm{d}W(s) \\
&\equiv I_1 + \cdots + I_4.
\end{aligned}$$

Je-li $s < \tau_1(\omega)$, potom $X_1(s, \omega) \in D$, tedy

$$b_1(s, X_1(s, \omega)) = b_2(s, X_1(s, \omega)), \quad \sigma_1(s, X_1(s, \omega)) = \sigma_2(s, X_1(s, \omega))$$

podle (12), odtud $I_1 = 0$ a $I_3 = 0$ P-skoro všude. Předpoklad (11) dává

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\|I_2\|^2 &\leq \mathsf{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_1} \big\|b_2(s, X_1(s)) - b_2(s, X_2(s))\big\|\,\mathrm{d}s\bigg)^2 \\
&\leq tL^2\,\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1} \big\|X_1(s) - X_2(s)\big\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Analogicky

$$\mathsf{E}\|I_4\|^2 \le L^2\,\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1} \big\|X_1(s)-X_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s.$$

Dohromady dostaneme

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big\|X_1(t\wedge\tau_1)-X_2(t\wedge\tau_1)\Big\|^2 &\le 2L^2(t+1)\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1} \|X_1(s)-X_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &= 2L^2(t+1)\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1} \|X_1(s\wedge\tau_1)-X_2(s\wedge\tau_1)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\le 2L^2(t+1)\int_0^{t} \mathsf{E}\|X_1(s\wedge\tau_1)-X_2(s\wedge\tau_1)\|^2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

takže podle Gronwallova lemmatu

$$\forall t\ge 0 \qquad \mathsf{E}\Big\|X_1(t\wedge\tau_1)-X_2(t\wedge\tau_1)\Big\|^2 = 0,$$

což vzhledem ke spojitosti trajektorií znamená

$$X_1\mathbf{1}_{[0,\tau_1[} = X_2\mathbf{1}_{[0,\tau_1[} \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě},$$

tudíž také $\tau_1 \le \tau_2$. Opačná nerovnost se dokáže symetricky. Q.E.D.

Důkaz věty 5.2. Jednoznačnost plyne z věty 5.1, dokažme existenci kladouce opět $t_0 = 0$. Pro $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 1$, položme

$$b_N(t,x) = \begin{cases} b(t,x), & t\ge 0,\ \|x\|\le N,\\ b(t,x)\Big(2-\dfrac{\|x\|}{N}\Big), & t\ge 0,\ N<\|x\|\le 2N,\\ 0 & \text{jinde}\end{cases}$$

a

$$\sigma_N(t,x) = \begin{cases} \sigma(t,x), & t\ge 0,\ \|x\|\le N,\\ \sigma(t,x)\Big(2-\dfrac{\|x\|}{N}\Big), & t\ge 0,\ N<\|x\|\le 2N,\\ 0 & \text{jinde.}\end{cases}$$

Přímým výpočtem se snadno ověří, že b_N, σ_N jsou omezené funkce vyhovující předpokladu (II) z věty 2.1, tedy

$$\|b_N(t,x)-b_N(t,y)\| \vee \|\sigma_N(t,x)-\sigma_N(t,y)\| \le \widehat{K}_N\|x-y\|$$

pro nějakou konstantu $\widehat{K}_N$ (závislou na N) a všechna $t\ge 0$, $x,y\in\mathbb{R}^m$. Podle věty 2.1 tudíž existuje (právě jediné) řešení X_N úlohy

$$\mathrm{d}X_N = b_N(t,X_N)\,\mathrm{d}t + \sigma_N(t,X_N)\,\mathrm{d}W, \quad X_N(0)=\varphi.$$

Definujme markovské časy τ_N, $N \geq 1$, předpisem

$$\tau_N = \inf\{t \geq 0;\ \|X_N(t)\| \geq N\}.$$

Jelikož zřejmě $b_N = b_M$, $\sigma_N = \sigma_M$ na $\mathbb{R}_+ \times \{\|x\| \leq N\}$, kdykoliv $M \geq N$, implikuje tvrzení 5.3, že

$$X_N \mathbf{1}_{[0,\tau_N[} = X_M \mathbf{1}_{[0,\tau_N[} \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě} \tag{13}$$

pro všechna $M \geq N$ a posloupnost $\{\tau_N\}_{N=1}^{\infty}$ je neklesající. Položme

$$\varepsilon = \lim_{N\to\infty} \tau_N,$$

pak je ε markovský čas a vzhledem ke spojitosti trajektorií procesů X_N je $\varepsilon > 0$ P-skoro jistě. Díky (13) lze korektně definovat

$$X(t,\omega) = \lim_{N\to\infty} X_N(t,\omega), \qquad 0 \leq t < \varepsilon(\omega),$$

pro skoro všechna $\omega \in \Omega$. Filtrace $(\mathscr{F}_t)$ splňuje (UC), můžeme tudíž proces X dodefinovat tak, aby byl progresivně měřitelný, měl spojité trajektorie a $\varepsilon > 0$ na Ω. Povšimněme si, že speciálně $X(t,\omega) = X_N(t,\omega)$ pro $0 \leq t < \tau_N(\omega)$ a P-skoro všechna ω. Je-li $\varepsilon(\omega) < \infty$, je nutně $\tau_N(\omega) < \infty$ a podle definice τ_N

$$\|X(\tau_N(\omega),\omega)\| = \|X_N(\tau_N(\omega),\omega)\| \geq N,$$

proto

$$\limsup_{t \nearrow \varepsilon(\omega)} \|X(t,\omega)\| = +\infty.$$

Zvolme nyní $t \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$ libovolně pevně, vzhledem k definici b_N, σ_N, τ_N snadno ověříme, že X řeší úlohu (1), (2) na $[\![0,\tau_N]\!]$, neboť

$$\begin{aligned}
X(t\wedge\tau_N) &= X_N(t\wedge\tau_N) \\
&= \varphi + \int_0^{t\wedge\tau_N} b_N(s, X_N(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\tau_N} \sigma_N(s, X_N(s))\,\mathrm{d}W(s) \\
&= \varphi + \int_0^{t\wedge\tau_N} b(s, X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\tau_N} \sigma(s, X(s))\,\mathrm{d}W(s);
\end{aligned}$$

odtud už nahlížíme, že (X,ε) je lokální řešení.

Nakonec, předpokládejme, že je splněn i předpoklad (I). Všimněme si, že potom též

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|b_N(t,x)\| \vee \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sigma_N(t,x)\| \leq K_*\big(1 + \|x\|\big)$$

pro všechna $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, to jest, b_N a σ_N vyhovují předpokladu (I) s konstantou nezávislou na N. Zvolíme-li $T > 0$ a $p \in [2, \infty[$ libovolná pevná tak, aby $\varphi \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, pak podle věty 2.1 platí

$$\mathsf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_N(t)\|^p \leq C^* \bigl(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\bigr)$$

s konstantou C^*, závislou jen na K_*, T a p (nikoliv tedy na N), a proto

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\varepsilon \leq T\} &\leq \mathsf{P}\{\tau_N \leq T\} = \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_N(t)\| \geq N\Bigr\} \\ &\leq \frac{1}{N^p} \mathsf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_N(t)\|^p \leq \frac{C^*(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p)}{N^p}.\end{aligned}$$

Limitním přechodem $N \to \infty$ odvodíme

$$\mathsf{P}\{\varepsilon \leq T\} = 0; \tag{14}$$

platnost (14) pro libovolné $T > 0$ implikuje

$$\mathsf{P}\{\varepsilon = +\infty\} = 1.$$

Speciálně, $\tau_N \to \infty$ skoro všude a vzhledem ke konstrukci procesu X dostaneme

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_N(t)\| \xrightarrow[N \to \infty]{} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\| \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě},$$

takže díky Fatouovu lemmatu

$$\mathsf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\|^p \leq \liminf_{N \to \infty} \mathsf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_N(t)\|^p \leq C^* \bigl(1 + \mathsf{E}\|\varphi\|^p\bigr),$$

což dokazuje odhad (10). Q.E.D.

Příklad 5.3. Buď W jednodimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces a $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálně lipschitzovská funkce. Podle věty 5.2 pro každou $\mathscr{F}_0$-měřitelnou náhodnou veličinu ξ existuje jediné lokální řešení (X, ε) stochastické diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}X = \sigma(X)\,\mathrm{d}W, \quad X(0) = \xi \tag{15}$$

s nulovým driftem. Lze ukázat, že (nezávisle na růstu σ!) je toto řešení vždy globální, $\varepsilon = +\infty$ P-skoro jistě. H. P. McKean předložil následující důkaz tohoto faktu:[45] řešení X úlohy (15) je spojitý lokální martingal, tudíž

$$X_t = \xi + B\Bigl(\int_0^t \sigma^2(X_s)\,\mathrm{d}s\Bigr)$$

[45] Viz jeho knihu *Stochastic integrals*, Academic Press, New York 1969, § 3.3.

pro nějaký Wienerův proces B, jehož trajektorie však nemohou jíti do nekonečna v konečném čase. Intuitivně jde o velmi přesvědčivý argument, ale samozřejmě nerigorosní, ježto důsledek 4.3 nelze *a priori* užíti na martingaly s konečnou dobou života. Jak předvedenou úvahu jednoduše precisovati, nevím.[46]

Předpoklad lineárního růstu má jen omezené užití. Ukažme si proto methodu (již předložil R. Z. Chas'minskij, 1960) umožňující nalézti dosti obecné postačující podmínky pro neexplosi. Nejprve zaveďme potřebné označení: pro $h \in \mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ definujme funkci $Lh : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\begin{aligned}(Lh)(t,x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\bigl(\sigma(t,x)^* D_x^2 h(t,x)\sigma(t,x)\bigr) + \bigl\langle b(t,x), D_x h(t,x)\bigr\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^m b_i(t,x)\frac{\partial h}{\partial x_i}(t,x),\end{aligned}$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, kde $a(t,x) \equiv \sigma(t,x)\sigma(t,x)^*$. (Připomeňme, že $D_x h(t,x)$, $D_x^2 h(t,x)$ značíme první a druhou Fréchetovu derivaci funkce $h(t,\cdot)$ v bodě x.)

Věta 5.4. *Nechť jsou $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ borelovské funkce vyhovující předpokladům* (III), (IV) *věty 5.2. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}_+$ a $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je $\mathscr{F}_{t_0}$-měřitelná funkce, $\mathsf{E}\|\varphi\|^2 < \infty$. Buď (X,ε) lokální řešení úlohy* (1), (2). *Předpokládejme, že existuje funkce $V \in \mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ splňující:*

(i) $V \geq 0$ *na* $[t_0,\infty[\, \times \mathbb{R}^m$,

(ii) $q_R \equiv \inf\limits_{\substack{t\geq t_0\\ \|x\|\geq R}} V(t,x) \xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$,

(iii) $\mathsf{E}V(t_0,\varphi) < \infty$,

(iv) *existuje $c \geq 0$ tak, že*

$$\Bigl(\frac{\partial V}{\partial t} + LV\Bigr)(t,x) \leq cV(t,x)$$

pro všechna $t \geq t_0$ a $x \in \mathbb{R}^m$.

Potom $\mathsf{P}\bigl\{\varepsilon = +\infty\bigr\} = 1$ *a*

$$\mathsf{E}V(t,X(t)) \leq e^{c(t-t_0)}\mathsf{E}V(t_0,\varphi), \quad t \geq t_0. \tag{16}$$

[46] V knize I. Karatzas, S. Shreve: *op. cit.*, Problem 5.5.3, je to ponecháno jako cvičení s návodem, jemuž nerozumím. Ostatní důkazy, které znám, pokud užívají důsledek 4.3, tak v kombinaci s jinými netriviálními nástroji, cf. třeba knihu D. W. Stroock: *Markov processes from K. Itô's perspective*, Princeton Univ. Press, Princeton 2003, Exercise 7.3.10.

O funkci V se často hovoří jako o *ljapunovské funkci* pro rovnici (1) (podle A. M. Ljapunova, který v osmdesátých letech 19. století užil analogické postupy při vyšetřování stability obyčejných diferenciálních rovnic).

Předpoklad $\varphi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ je nadbytečný, je uveden pouze proto, abychom mohli použít větu 5.2 přesně v té podobě, v níž jsme ji dokázali.

Pokusme se vysvětlit, proč je věta 5.4 velmi přirozený výsledek. Uvažujme deterministický případ $\sigma \equiv 0$. Jelikož je funkce b lokálně lipschitzovská, existuje jediné řešení rovnice

$$\mathrm{d}x = b(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \tag{17}$$

definované na intervalu $[0,\tau[$, kde τ je čas explose. Předpokládejme, že jsme nalezli nezápornou funkci $V \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ takovou, že (A) $V(0,x_0) \geq V(t,x(t))$ pro $0 \leq t < \tau$, (B) $V(t,x) \longrightarrow \infty$ při $\|x\| \to \infty$ lokálně stejnoměrně v $t \geq 0$. Potom je nutně $\tau = \infty$. V opačném případě by totiž platilo $\limsup_{t \nearrow \tau} \|x(t)\| = \infty$, pročež $\limsup_{t \nearrow \tau} V(t,x(t)) = \infty$ podle (B), což ale odporuje (A). Bohužel ověřit (A) není snadné, jelikož řešení x obecně explicitně neznáme. Podmínka (A) je však jistě splněna, je-li funkce $t \longmapsto V(t,x(t))$ nerostoucí, speciálně, má-li nekladnou derivaci. Platí přitom

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t,x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,x(t)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j}(t,x(t))\,\frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,x(t)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j}(t,x(t)) b_j(t,x(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,x(t)) + \big\langle b(t,x(t)), D_x V(t,x(t))\big\rangle,\end{aligned}$$

povšimněme si, že poslední výraz vpravo při $\sigma \equiv 0$ odpovídá $LV(t,x(t))$. Předpoklad (A) je tudíž splněn pro libovolné řešení rovnice (17), pokud

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \big\langle b(t,x), D_x V(t,x)\big\rangle \leq 0 \tag{18}$$

pro všechna $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$. Leckdy je výhodné ověřovati (18) následujícím postupem: nalezneme $\bar{V}$ tak, aby

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}(t,x) + \big\langle b(t,x), D_x \bar{V}(t,x)\big\rangle \leq c\bar{V}(t,x)$$

pro nějaké $c \geq 0$, potom ljapunovská funkce $V(t,x) = e^{-ct}\bar{V}(t,x)$ splňuje (18).

Důkaz věty 5.4 je založen na identické myšlence, toliko místo vzorce pro derivaci složené funkce užijeme Itôovu formuli.

Důkaz. Již jsme zmínili, že lze přejít k případu $c = 0$: Položme $U(t,x) = e^{-ct}V(t,x)$, podle předpokladu (iv) dostaneme

$$\Big(\frac{\partial U}{\partial t} + LU\Big)(t,x) \leq e^{-ct}\big(-cV(t,x) + cV(t,x)\big) = 0, \quad t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}^m. \tag{19}$$

Chceme spočísti $U(t, X(t))$ podle Itôovy formule; jelikož zatím nemůžeme vyloučit, že X exploduje v konečném čase, vyžaduje aplikace Itôova lemmatu jistou ostražitost. Nechť je $L_N U$ funkce definovaná analogicky k LU, ale pomocí koeficientů b_N, σ_N, zavedených v důkazu věty 5.2, to jest,

$$(L_N U)(t,x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big(\sigma_N(t,x)^* D_x^2 U(t,x) \sigma_N(t,x)\big) + \big\langle b_N(t,x), D_x U(t,x)\big\rangle;$$

zjevně LU a $L_N U$ splývají na množině $B_N \equiv \mathbb{R}_+ \times \{\|x\| \le N\}$. Buďte X_N, τ_N procesy a markovské časy zkonstruované v témže důkazu; speciálně tedy $X(t,\omega) = X_N(t,\omega)$ a $\|X(t,\omega)\| \le N$ pro $t_0 \le t < \tau_N(\omega)$, navíc $\|X(\tau_N)\| \ge N$ na množině $\{\tau_N < \infty\}$. Zvolme $t \ge t_0$ a $N \ge 1$ libovolně pevně. Proces X_N má stochastický diferenciál, podle Itôovy formule

$$
\begin{aligned}
&U(t\wedge\tau_N, X(t\wedge\tau_N)) - U(t_0,\varphi) = U(t\wedge\tau_N, X_N(t\wedge\tau_N)) - U(t_0,\varphi) \\
&= \int_{t_0}^{t\wedge\tau_N} \Big(\frac{\partial U}{\partial s} + L_N U\Big)(s, X_N(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_N} D_x U(s, X_N(s))^* \sigma_N(s, X_N(s))\,\mathrm{d}W(s) \\
&= \int_{t_0}^{t\wedge\tau_N} \Big(\frac{\partial U}{\partial s} + LU\Big)(s, X_N(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_N} D_x U(s, X_N(s))^* \sigma(s, X_N(s))\,\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}
$$

poslední rovnost je ovšem okamžitým důsledkem definice funkce σ_N, markovského času τ_N a rovnosti $LU = L_N U$ na B_N. Integrand prvého integrálu vpravo je nekladný podle (19). Dále, předpoklady (III) a (IV) zaručují omezenost funkce σ na omezených množinách, to spolu se spojitostí $D_x U$ implikuje

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\int_{t_0}^{t} \mathbf{1}_{[0,\tau_N[}(s)\, \big\|D_x U(s, X_N(s))^* \sigma(s, X_N(s))\big\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\qquad\qquad\qquad \le t \sup_{\substack{t_0 \le s \le t \\ \|z\| \le N}} \big\|D_x U(s,z)^* \sigma(s,z)\big\|^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Vyšetřovaný stochastický integrál má tedy nulovou střední hodnotu a

$$\mathsf{E}U(t\wedge\tau_N, X(t\wedge\tau_N)) - \mathsf{E}U(t_0,\varphi) \le 0.$$

Uvažme, že $V \ge 0$ a $e^{-c(t\wedge\tau_N)} \ge e^{-ct}$, odtud

$$\mathsf{E}V(t\wedge\tau_N, X(t\wedge\tau_N)) \le e^{c(t-t_0)}\mathsf{E}V(t_0,\varphi). \tag{20}$$

Podle předpokladu (i) věty jest zřejmě

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}V(t\wedge\tau_N, X(t\wedge\tau_N)) &= \mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\tau_N \le t\}} V(\tau_N, X(\tau_N)) + \mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\tau_N > t\}} V(t, X(t)) \\
&\ge \mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\tau_N \le t\}} V(\tau_N, X(\tau_N)) \\
&\ge q_N \mathsf{P}\{\tau_N \le t\},
\end{aligned}
$$

takže

$$\mathsf{P}\{\varepsilon \le t\} \le \mathsf{P}\{\tau_N \le t\} \le \frac{e^{c(t-t_0)}\mathsf{E}V(t_0,\varphi)}{q_N}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem $N \to \infty$ s přihlédnutím k předpokladu (ii) odvodíme $\mathsf{P}\{\varepsilon \le t\} = 0$. Protože $t \ge t_0$ bylo libovolné, jest $\mathsf{P}\{\varepsilon = +\infty\} = 1$, tedy $\tau_N \to \infty$ skoro jistě a odhad (16) plyne z (20) limitním přechodem $N \to \infty$ užitím Fatouova lemmatu. Q.E.D.

Příklad 5.4. a) Uvažme rovnici (1), (2) s koeficienty splňujícími předpoklady (III) a (IV) z věty 5.2. Předpokládejme existenci konstanty $K_\sharp < \infty$ takové, že[47]

$$\begin{aligned} \|\sigma(t,x)\| &\le K_\sharp\big(1+\|x\|\big), \\ \big\langle b(t,x), x\big\rangle &\le K_\sharp\big(1+\|x\|^2\big) \end{aligned} \tag{21}$$

platí pro všechna $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^m$. Nechť $\mathsf{E}\|\varphi\|^p < \infty$ pro nějaké $p > 0$. Potom přirozená volba $V(x) = (1+\|x\|^2)^{p/2}$ vede k ljapunovské funkci splňující předpoklady věty 5.4. Zřejmě stačí ověřit pouze předpoklad (iv). Jelikož

$$DV(x) = p(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}-1}x, \quad D^2V(x) = p(p-2)(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}-2}xx^* + p(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}-1}I,$$

dostaneme snadno

$$\begin{aligned} LV(t,x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big(\sigma(t,x)^* D^2V(x)\sigma(t,x)\big) + \big\langle b(t,x), DV(x)\big\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\|\sigma(t,x)^*\|\|D^2V(x)\|\|\sigma(t,x)\| + p(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}-1}\big\langle b(t,x), x\big\rangle \\ &\le \frac{1}{2}K_\sharp^2(1+\|x\|)^2\|D^2V(x)\| + pK_\sharp(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}} \\ &\le c(1+\|x\|^2)^{\frac{p}{2}} = cV(x) \end{aligned}$$

pro nějakou konstantu $c = c(K_\sharp, p)$. Řešení úlohy (1), (2) je tudíž globální a splňuje

$$\mathsf{E}\|X(t)\|^p \le e^{c(t-t_0)}\mathsf{E}\big(1+\|\varphi\|^2\big)^{p/2}, \quad t \ge t_0.$$

b) Funkce b jistě vyhovuje požadavku (21), pokud splňuje předpoklad lineárního růstu (I), opak rozhodně neplatí. Pro jednodimensionální úlohu ($m=1$) nerovnost (21) přechází v nerovnost

$$b(t,x)x \le K_\sharp\big(1+x^2\big), \tag{22}$$

jež je jistě splněna, pokud b vyhovuje předpokladu *jednostranného lineárního růstu*, to jest, existuje $K_\natural < \infty$ tak, že pro všechna $t \ge 0$

$$\left.\begin{aligned} b(t,x) &\le K_\natural(x+1) \quad \text{pro } x \ge 0, \\ b(t,x) &\ge K_\natural(x-1) \quad \text{pro } x < 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[47] V deterministickém případě ($\sigma \equiv 0$) znamená nerovnost $\langle x(t), \dot{x}(t)\rangle = \langle x(t), b(t, x(t))\rangle \le 0$, že cosinus úhlu mezi průvodičem $x(t)$ a rychlostí $\dot{x}(t)$ v čase t je nekladný, tedy $x(t)$ a $\dot{x}(t)$ svírají tupý (nebo pravý) úhel. Intuitivně, předpoklad $\langle x, b(t,x)\rangle \le 0$ lze vyjádřit slovy: "drift táhne v každém bodě x řešení zpět k počátku". Méně restriktivní podmínka (21) pak může být interpretována tak, že v žádném bodě nesmí být úhel mezi radius-vektorem a rychlostí "příliš ostrý".

(Za předpokladů (III), (IV) je b omezená na libovolnémém okolí nuly stejnoměrně v $t \geq 0$; v tom případě se snadno nahlédne, že (23) a (22) jsou dokonce ekvivalentní.) Ku příkladu, (22) je splněno pro polynom lichého stupně s negativním vedoucím koeficientem,

$$b(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} a_j x^j, \quad a_{2k+1} < 0.$$

(Vskutku, $b(x)x = a_{2k+1}x^{2k+2} + B(x)$, přičemž B je polynom nejvýše $2k+1$-tého stupně, proto $b(x)x \longrightarrow -\infty$ při $|x| \to \infty$, a to již (22) implikuje.) Speciálně třeba řešení rovnice

$$\mathrm{d}X = -X^3 \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W, \quad X_0 = \xi, \tag{24}$$

(kde W je reálný Wienerův proces) je globální, ačkoliv její drift $b(x) = -x^3$, $x \in \mathbb{R}$, zřejmě nesplňuje předpoklad lineárního růstu. Poznamenejme ovšem, že existenci globálních řešení jednoduchých rovnic, jako je (24), může být nejsnazší ověřit přímo: je–li $\mathsf{E}|\xi|^2 < \infty$, pak lze užíti větu 5.4 s volbou $V(x) = 1 + x^2$, ježto

$$LV(x) = 1 - 2x^4 \leq 1 + x^2 = V(x).$$

c) Pokud je regularisující efekt driftu dostatečně silný, lze uvažovat i difusní koeficienty rostoucí rychleji než lineárně. Řešení jednodimensionální rovnice

$$\mathrm{d}X = -X^{2k+1} \,\mathrm{d}t + X^l \,\mathrm{d}W,$$

kde $k, l \in \mathbb{N}$, jsou globální, pokud $k + 1 \geq l$, jak plyne volbou ljapunovské funkce $V(x) = (1 + x^2)^\alpha$ s $\alpha \in \,]0, 1[$. Tedy například rovnice

$$\mathrm{d}X = -X^5 \,\mathrm{d}t + X^3 \,\mathrm{d}W$$

má všechna řešení globální.

d) Pro koeficienty b a σ splňující (III), (IV) uvažujme následující omezení na růst: existuje $K_\flat < \infty$ tak, že pro všechna $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}^m$ jest

$$\left.\begin{aligned} \|b(t,x)\| &\leq K_\flat\big(1 + \|x\| \log^+ \|x\|\big), \\ \|\sigma(t,x)\|^2 &\leq K_\flat^2\big(1 + \|x\|^2 \log^+ \|x\|\big). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(Jako obvykle, $\log^+ q$ značí kladnou část logarithmu q.) Nechť $\mathsf{E}\log(1 + \|\varphi\|^2) < \infty$. Potom funkce $V(x) = \log(1 + \|x\|^2)$ splňuje předpoklady věty 5.4. Podmínka (25) není důležitá sama o sobě, ale R. Z. Chas'minskij ukázal, že nemůže platit žádné podstatně lepší kriterium neexplose, jež by záviselo jen na růstu koeficientů: připustíme-li drift b takový, že $\langle b(t,x), x\rangle > \|x\|^2 \log^{1+\varepsilon}(1 + \|x\|^2)$, anebo difusní koeficient σ takový, že $\|\sigma(t,x)\|^2 > B(1+\|x\|^2)\log^{1+\varepsilon}(1+\|x\|^2)$ pro nějaká $B, \varepsilon > 0$, pak už je možné, aby všechna řešení (1) měla jen konečnou dobu života.[48]

e) Uvažme rovnici formálně zapsanou

$$\ddot{x} + x = \mu(1-x^2)\dot{x} + \sigma\dot{w} \tag{26}$$

kde $\mu > 0$, tečka opět (ve shodě s tradicí ve fysice) značí derivaci podle času a $\dot{w}$ je "bílý šum", formální derivace Brownova pohybu. (Rovnice (26) je známa jako van der Polův oscilátor s bílým šumem intensity σ. Její deterministická verse byla navržena ve 20. letech minulého století jako model pro oscilace v elektrickém obvodu s triodou a našla i četné další aplikace.) Rigorosně jde o systém

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= Y\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y &= \big[-X + \mu(1-X^2)Y\big]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W \end{aligned}$$

s reálným Wienerovým procesem W. Položme

$$V(z) = \frac{\sigma^2}{4\mu} + \frac{1}{2}\|z\|^2, \quad z \in \mathbb{R}^2.$$

Potom

$$\begin{aligned} LV(z) &= \frac{\sigma^2}{2} + \mu(1-x^2)y^2 \le \frac{\sigma^2}{2} + \mu y^2 \le 2\mu\Big[\frac{\sigma^2}{4\mu} + \frac{y^2}{2}\Big] \\ &\le 2\mu V(z), \quad z = (x,y)^* \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

takže všechna řešení rovnice (26) jsou globální.

Příklad 5.5. Věta 5.4 je důležitá sama o sobě, ale zapamatováníhodná je zvláště methoda jejího důkazu, jíž je možno použít i v situacích, kdy předpoklady věty 5.4 nemusí býti přesně splněny. V tomto příkladu to naznačíme pro stochastické nelineární oscilátory, pro něž lze neexplosi často ukázat volbou energie (deterministického) oscilátoru jako ljapunovské funkce. Zatímco věta 5.4 nemusí být přímo aplikovatelná, myšlenku jejího důkazu lze užíti takřka beze změn.

Vyšetřujme rovnici

$$\ddot{x} + h(x,\dot{x}) + g(x) = \sigma(x,\dot{x})\,\dot{w},$$

to jest rigorosně

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= Y(t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y(t) &= \big[-h(X(t),Y(t)) - g(X(t))\big]\,\mathrm{d}t + \sigma(X(t),Y(t))\,\mathrm{d}W(t), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

[48] Příslušné výsledky lze nalézti v knize Р. З. Хасьминский: *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, Москва 1969, §III.4. (Existuje anglický překlad: R. Z. Has'miskiĭ: *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980.)

kde W je 1-dimensionální Wienerův proces, $h, \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálně lipschitzovské funkce a $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ je funkce taková, že její primitivní funkce

$$G(s) = \int_0^s g(r)\,\mathrm{d}r, \quad s \in \mathbb{R},$$

je zdola omezená na $\mathbb{R}$; žádné jiné růstové předpoklady o g nečiníme. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $G \geq 0$ na $\mathbb{R}$. Uvažujme ljapunovskou funkci

$$U(v) = \frac{1}{2}y^2 + G(x), \quad v = (x, y)^* \in \mathbb{R}^2.$$

Rovnice (27) má přirozenou interpretaci jako rovnice stochastického nelineárního oscilátoru, funkce U přitom odpovídá energii jeho deterministické verse ($\sigma \equiv 0$). Pro jednoduchost zadejme počáteční podmínky deterministické. Podle věty 5.2 jistě existuje lokální řešení $((X, Y)^*, \varepsilon)$ úlohy (27). Majíce na zřeteli, že $X(t) = X(0) + \int_0^t Y(s)\,\mathrm{d}s$, a tedy že komponenta X nemůže explodovat v konečném čase, pokud Y existuje globálně, snadno můžeme uzpůsobit důkaz věty 5.4 a odvodit následující tvrzení:

Existují-li konstanty $A_1, A_2, A_3 \in [0, \infty[$ *a* $r \in]0, 2[$ *tak, že*

$$LU(v) \leq A_1 + A_2 U(v) + A_3 |x|^r \tag{28}$$

pro každé $v = (x, y)^* \in \mathbb{R}^2$, *pak* $\varepsilon = +\infty$ P*-skoro jistě.*

Podmínka (28) je speciálně splněna, pokud je σ omezená funkce na $\mathbb{R}^2$ a

$$yh(x, y) \geq -B_1 - B_2\big(|x|^r + y^2\big) \tag{29}$$

pro nějaké konstanty $B_1, B_2 \in [0, \infty[$ a všechna $v = (x, y)^* \in \mathbb{R}^2$. Vzhledem k tvaru rovnice (27) a definici operátoru L jest totiž

$$\begin{aligned}
LU(v) &= \frac{1}{2}\sigma^2(v)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(v) + y\frac{\partial U}{\partial x}(v) - \big[h(v) + g(x)\big]\frac{\partial U}{\partial y}(v) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2(v) - yh(x, y) \\
&\leq \frac{1}{2}\sup \sigma^2 + B_1 + B_2|x|^r + 2B_2 U(v).
\end{aligned}$$

Podobně se ověří, že

$$yh(x, y) \geq -C_1 - C_2 U(v) + \frac{1}{2}\sigma^2(v)$$

pro nějaké konstanty $C_1, C_2 \in [0, \infty[$ a všechna $v = (x, y)^* \in \mathbb{R}^2$ je postačující podmínka pro platnost (28).

Vraťme se k van der Polově rovnici

$$\ddot{x} + x + \nu x^3 + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = \sigma\dot{w} \tag{30}$$

s $\mu > 0$, $\nu \geq 0$ a $\sigma \neq 0$. Potom $G(x) = x^2/2 + \nu x^4/4 \geq 0$, $h(x, y) = \mu(x^2 - 1)y$, tudíž

$$yh(x, y) = \mu(x^2 - 1)y^2 \geq -\mu y^2$$

a (29) je splněno; rovnice (30) má tedy globální řešení. Podobně jsou řešení rovnice (nelineární oscilátor s tlumením)

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\,\dot{w}$$

globální, je-li σ omezená funkce a f nezáporná lokálně lipschitzovská funkce, $f \geq 0$ na $\mathbb{R}$. Jest totiž $yh(x,y) = f(x)y^2 \geq 0$ a (29) je opět splněno.

Zcela analogicky lze vyšetřovat rovnici v $\mathbb{R}^m$

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) + DG(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{w},$$

s n-dimensionálním Wienerovým procesem, kde $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ jsou lokálně lipschitzovské funkce, potenciál $G \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m)$ je zdola omezený a DG značí jeho Fréchetovu derivaci.[49]

Poznámka 5.4. Podle dosud uvedených příkladů by se mohlo zdát, že o existenci globálních řešení rozhoduje drift ("deterministická část") a náhodné fluktuace (representované Wienerovým procesem) situaci jenom "nesmí kazit". Tak tomu sice mnohdy je v příkladech připouštějících aplikaci methody ljapunovských funkcí, ale ve skutečnosti je vztah mezi koeficienty rovnice a neexplosí daleko komplikovanější, jak ukazuje následující výsledek:[50] Buď W 2-dimensionální Wienerův proces, lze dokázat, že

a) existuje $b \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ (speciálně je tedy b lokálně lipschitzovská) tak, že pro každé $z_0 \in \mathbb{R}^2$ řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = b(Z(t)), \quad Z(0) = z_0$$

exploduje v konečném čase, ale řešení stochastické rovnice

$$\mathrm{d}Z(t) = b(Z(t))\,\mathrm{d}t + \kappa\,\mathrm{d}W(t), \quad Z(0) = z_0$$

existuje globálně při libovolném $\kappa > 0$;

b) existuje $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ tak, že pro každé $z_0 \in \mathbb{R}^2$ a libovolné $\kappa > 0$ řešení rovnice

$$\mathrm{d}Z(t) = h(Z(t))\,\mathrm{d}t + \kappa\,\mathrm{d}W(t), \quad Z(0) = z_0$$

exploduje v konečném čase, ale řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = h(Z(t)), \quad Z(0) = z_0$$

existuje globálně; dokonce $\lim_{t\to\infty} Z(t) = 0$ stejnoměrně v $z_0 \in \mathbb{R}^2$.

---

[49]Výsledky uvedené v příkladu 5.5 jsou obsaženy v práci L. Markus, A. Weerasinghe, *Adv. in Appl. Probab. 25* (1993), 649–666.

[50]Je převzat ze článku M. Scheutzow, *Stochastic Anal. Appl. 11* (1993), 97–113, ve kterém se lze seznámit s podrobnostmi.

Poznámka 5.5. Výsledky z druhé a páté kapitoly lze snadno rozšířit na rovnice s náhodnými koeficienty $b : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$, pokud jsou b a σ $\mathscr{M} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$-měřitelné funkce, splňující předpoklady (I), (II) etc. pro každé $\omega \in \Omega$ s *nenáhodnými* konstantami.

Obecněji, lze uvažovat například rovnice tvaru

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X)\,\mathrm{d}A_t + \sigma(t, X)\,\mathrm{d}M_t,$$

kde A je (spojitý) proces s trajektoriemi lokálně konečné variace, M je (spojitý) lokální martingal, b, σ jsou náhodné funkcionály procesu X (v jistém smyslu zachovávající progresivní měřitelnost). Za předpokladů typu lipschitzovskosti lze opět ukázat existenci a jednoznačnost řešení, aniž by důkazy vyžadovaly podstatně nové myšlenky.[51]

Odbočka pro milovníky Girsanovovy věty. Existují hluboké výsledky o existenci a jednoznačnosti řešení rovnic, jejichž koeficienty nejsou ani lokálně lipschitzovské. Důkazy těchto vět však zpravidla vyžadují postupy vymykající se značně rámci této přednášky. Pro ilustraci si odvodíme jenom jeden partikulární výsledek ukazující, že stochastické diferenciální rovnice mohou míti v jistém smyslu daleko regulárnější chování, než jejich deterministické protějšky. Budeme při tom však potřebovat Girsanovovu větu, jejíž znalost jinak v této kapitole nepředpokládáme.

Nechť je $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálně omezená borelovská funkce. Buď B jednodimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces definovaný na nějakém filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{Q})$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $T > 0$ libovolně pevně, položme

$$X_t = B_t + x, \quad G_t = \exp\left(\int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)|^2\,\mathrm{d}s\right), \quad 0 \le t \le T.$$

Je známo, že (G_t) je lokální martingal a supermartingal. Předpokládejme, že (G_t) je dokonce martingal, to jest

$$\int_\Omega G_T\,\mathrm{d}\mathsf{Q} = 1. \tag{31}$$

Potom je podle Girsanovovy věty proces

$$W_t = B_t - \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s = X_t - x - \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T, \tag{32}$$

$(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, kde $\mathrm{d}\mathsf{P} = G_T\,\mathrm{d}\mathsf{Q}$. Přepsavše (32) ve tvaru

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s + W_t, \quad 0 \le t \le T, \tag{33}$$

nahlédneme, že jsme vlastně ukázali: platí-li (31), pak existují stochastická base $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$, $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W a $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný proces X vyhovující rovnosti (33). Tento fakt vyjadřujeme slovy, že za předpokladu (31) má úloha

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x, \tag{34}$$

[51] Vážná zájemkyně či vážný zájemce mohou konsultovat např. knihy M. Métivier: *Semimartingales: a course on stochastic processes*, de Gruyter, Berlin 1982, kapitola 8, nebo P. Protter: *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, Berlin 1990, kapitola V.

slabé řešení. (Naopak, pokud pro každou stochastickou basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ a libovolný $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W existuje $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný proces X splňující (33), pak pravíme, že úloha (34) má *silné* řešení. V této terminologii tedy věty 2.1, 5.2 a jejich varianty hovoří o existenci silných řešení.) Aby se jednalo o užitečný výsledek, je třeba vyjasnit, kdy je splněn předpoklad (31). Tak je tomu kupříkladu, pokud[52]

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |b(X_s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\mathsf{Q} < \infty \tag{35}$$

(tzv. Novikovova podmínka) nebo

$$\exists\delta > 0 \qquad \sup_{0\le t\le T}\int_\Omega \exp\bigl(\delta|b(X_t)|^2\bigr)\,\mathrm{d}\mathsf{Q} < \infty. \tag{36}$$

Obě podmínky (35), (36) jsou očividně splněny, je-li b omezená funkce. Je-li b funkcí nejvýše lineárního růstu,

$$|b(y)| \le L\bigl(1 + |y|\bigr), \quad y \in \mathbb{R},$$

nahlédne se snadno, že (36) je splněna pro $\delta < (4L^2T)^{-1}$, jelikož X_t má gaussovské rozdělení se střední hodnotou x a variancí t.

Shrnuto:

> *Je-li $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borelovská funkce nejvýše lineárního růstu, potom pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ existuje slabé řešení úlohy* (34).

To je poněkud překvapivé, protože odpovídající deterministická rovnice

$$\mathrm{d}X = b(X)\,\mathrm{d}t$$

řešení míti nemusí, není-li b spojitá. Vskutku, definujme

$$b_0(y) = \begin{cases} 1, & y \le 0, \\ -1, & y > 0. \end{cases} \tag{37}$$

Potom je b_0 dokonce omezená nerostoucí funkce, ale rovnice

$$\mathrm{d}X = b_0(X)\,\mathrm{d}t, \quad X(0) = 0 \tag{38}$$

nemá ani lokální řešení. Předpokládejme pro spor, že $X : [0, \tau[\longrightarrow \mathbb{R}$ je pro nějaké $\tau > 0$ řešením (38), tedy

$$X(t) = \int_0^t b_0(X(s))\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t < \tau.$$

Zřejmě $X \equiv 0$ řešením být nemůže, neboť pak by platilo

$$0 = X(t) = \int_0^t b_0(0)\,\mathrm{d}s = t, \quad 0 \le t < \tau.$$

Pokud existuje $t_1 \in]0, \tau[$ tak, že $X(t_1) > 0$, pak položíme

$$r = \inf\bigl\{s \ge 0;\ X > 0 \text{ na }]s, t_1]\bigr\}$$

---

[52]Užívaná fakta o Girsanovově transformaci lze nalézti v I. Karatzas, S. E. Shreve: *op. cit.*, §3.5. Fakt, že podmínky (35) a (36) jsou postačující pro platnost (31), dokážeme v kapitole 7.

a dostaneme

$$0 < X(t_1) = X(t_1) - X(r) = \int_r^{t_1} b_0(X(v))\,\mathrm{d}v = -(t_1 - r) < 0,$$

protože $X(r) = 0$ díky spojitosti funkce X a předpokladu $X(0) = 0$. Analogicky vyvodíme spor z předpokladu $X(t_2) < 0$ pro nějaké $t_2 \in]0, \tau[$.

Vraťme se k rovnici (34). Důležitá věta Yamada-Watanabeho[53] ukazuje, že úloha (34) má silné řešení, má-li slabé řešení, které je určeno jednoznačně v následujícím smyslu: Jsou-li $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}, W, X)$ a $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}, W, \tilde{X})$ dvě slabá řešení (34), definovaná na témže filtrovaném pravděpodobnostním prostoru a s týmž Wienerovým procesem, pak P-skoro jistě $X_t = \tilde{X}_t$ pro každé $0 \leq t \leq T$. To zřejmě plyne z lokální lipschitzovskosti b, ale jednoznačnost můžeme dokázat i předpokládajíce pouze, že b je omezená nerostoucí funkce. Uvědomme si, že funkce b je nerostoucí, právě když $(r-s)(b(r) - b(s)) \leq 0$ pro všechna $r, s \in \mathbb{R}$. Poněvadž

$$X(t) - \tilde{X}(t) = \int_0^t \big\{ b(X(s)) - b(\tilde{X}(s)) \big\}\,\mathrm{d}s,$$

dává aplikace Itôovy formule

$$0 \leq \big(X(t) - \tilde{X}(t)\big)^2 = 2 \int_0^t (X(s) - \tilde{X}(s)) \big\{ b(X(s)) - b(\tilde{X}(s)) \big\}\,\mathrm{d}s \leq 0,$$

odtud už jednoznačnost plyne.

Je-li tedy b_0 funkce definovaná předpisem (37), má rovnice

$$\mathrm{d}X = b_0(X)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W, \quad X_0 = 0,$$

(právě jediné) silné řešení.

Na závěr podotkněme, že uvedený existenční výsledek pro rovnici (34) zůstává evidentně v platnosti i v m-dimensionálním případě, kdy $x \in \mathbb{R}^m$, W je m-dimensionální Wienerův proces a $b : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je borelovská funkce vyhovující předpokladu lineárního růstu. Jednoznačnost platí, pokud

$$\big\langle b(y) - b(z), y - z \big\rangle = \sum_{i=1}^m \big(b_i(y) - b_i(z)\big)(y_i - z_i) \leq 0, \quad y, z \in \mathbb{R}^m.$$

[53] Přesné znění je uvedeno v I. Karatzas, S. E. Shreve: *op. cit.*, Corollory 5.3.23.

6. Řešení jako markovský proces

<u>A. Motivace.</u> Uvažujme homogenní markovský řetězec[54] (X_n) se spočetným stavovým prostorem S, to jest S-hodnotový náhodný proces s *markovskou vlastností*: pro všechna $n \geq 0$, $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ platí

$$\mathsf{P}\big(X_{n+1} = j \,\big|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\big) = \mathsf{P}\big(X_{n+1} = j \,\big|\, X_n = i\big); \quad (1)$$

to jest, stav procesu v čase $n+1$ je za podmínky znalosti stavu v čase n nezávislý na stavech v minulosti (v časech $n-1, \dots, 0$). Rozdělení procesu (X_i) je úplně popsáno pravděpodobnostmi přechodu

$$p_{ij} = \mathsf{P}\big(X_{n+1} = j \,\big|\, X_n = i\big) = \mathsf{P}\big(X_1 = j \,\big|\, X_0 = i\big)$$

(druhá rovnost je vyjádřením homogenity řetězce), ježto z markovské vlastnosti ihned plyne

$$\mathsf{P}\big(X_{n+m} = j \,\big|\, X_n = i\big) = \sum_{j_1, \dots, j_{m-1} \in S} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{m-1} j}.$$

Matice $(p_{ij})_{i,j \in S}$ je stochastická: $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ pro všechna $i, j \in S$. (Jinými slovy, pro všechna i je $(p_{ij})_{j \in S}$ pravděpodobnostní míra na S.)

Jak známo, markovské řetězce jsou velmi užitečné při modelování mnoha reálných jevů, mimo jiné proto, že markovská vlastnost umožňuje dokázat silné limitní věty. Analogickou theorii lze vybudovat i pro procesy se spojitým časem a obecným stavovým prostorem. V této kapitole nejprve uvedeme nejzákladnější pojmy takovéto theorie a ukážeme, že je aplikovatelná na procesy vznikající jako řešení stochastických diferenciálních rovnic.

Obdobou markovské vlastnosti (1) pro $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný proces X s hodnotami v měřitelném prostoru $(E, \mathscr{E})$ je rovnost

$$\mathsf{P}\big(X_t \in A \,\big|\, \mathscr{F}_s\big) = \mathsf{P}\big(X_t \in A \,\big|\, X_s\big), \quad 0 \leq s < t, \ A \in \mathscr{E}, \quad (2)$$

kde, jak je obvyklé, podmiňováním náhodnou veličinou X_s míníme podmiňování σ-algebrou $\sigma(X_s)$. Na rozdíl od diskrétního případu však markovská vlastnost ve formě (2) obecně nezaručuje, že existuje rozumná obdoba přechodové matice; existenci přechodové pravděpodobnosti je třeba zahrnout do definice markovského procesu. Intuitivně, přechodová pravděpodobnost na měřitelném prostoru $(E, \mathscr{E})$ by měla být funkce P s interpretací

$$P(t, x, A) = \text{Pravděpodobnost}\big\{X_t \in A, \ \text{pokud } X_0 = x\big\}, \quad x \in E, \ A \in \mathscr{E}. \quad (3)$$

[54] Základní poučení o markovských řetězcích se spočetně mnoha stavy lze načerpat ze skripta Z. Prášková, P. Lachout: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha 1998.

Vyslovme následující tři požadavky na funkci P:

1° $P(t, x, \cdot)$ je pravděpodobnost na $\mathscr{E}$ pro $t \geq 0$ a $x \in E$;
2° $P(t, \cdot, A)$ je $\mathscr{E}$-měřitelná funkce pro $t \geq 0$, $A \in \mathscr{E}$;
3° pro $0 \leq s \leq t$, $x \in E$ a $A \in \mathscr{E}$ platí Chapman-Kolmogorovova rovnost

$$P(t, x, A) = \int_E P(t-s, z, A) P(s, x, \mathrm{d}z).$$

Požadavek 1° je zřejmý vzhledem k interpretaci (3), 2° působí jako rozumně slabý předpoklad o měřitelné závislosti na počátečním stavu. Chapman-Kolmogorovova rovnost pak je odrazem markovské vlastnosti: chování v budoucnosti závisí jen na současném stavu, nikoliv na vývoji v minulosti, neboť stav v čase t je podle pravé strany Chapman-Kolmogorovovy rovnosti jednoznačně určen stavem v okamžiku s (popsaným pravděpodobností $P(s, x, \cdot)$) a nezávisí na vývoji systému v časech $u \in [0, s[$.

Nechť speciálně $E = \mathbb{Z}$, položme $p_{ij}(t) = P(t, i, \{j\})$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Potom 1° přechází v $p_{ij}(t) \geq 0$, $\sum_j p_{ij}(t) = 1$, 2° je splněno triviálně a 3° nabývá tvaru $\sum_j p_{ij}(t) p_{jk}(s) = p_{ik}(t+s)$; tedy $(p_{ij}(t))$ má vlastnosti přechodové matice (homogenního) markovského řetězce se spojitým časem. Požadavky 1°–3° jsou přirozeným rozšířením těchto vlastností na nediskrétní stavové prostory.

Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}X = b(X)\,\mathrm{d}t + \sigma(X)\,\mathrm{d}W. \tag{4}$$

Intuitivní představě (3) odpovídá definice

$$P(t, x, A) = \mathsf{P}\{X^y(t) \in A\}, \tag{5}$$

kde X^y je řešení úlohy (4) s počáteční podmínkou $X^y(0) = y \in \mathbb{R}^m$. Ukážeme, že takto definovaná funkce je přechodová pravděpodobnost s vlastnostmi 1°–3°, řešení rovnice (4) mají markovskou vlastnost a jejich (podmíněná) konečnědimensionální rozdělení jsou popsána pomocí přechodové pravděpodobnosti P. Budeme přitom uvažovat – vzhledem k zamýšlené aplikaci na neautonomní stochastické diferenciální rovnice – i nehomogenní případ.[55]

Zformulujme na ukázku jeden hluboký výsledek o limitních vlastnostech rovnice (4), k jehož formulaci i důkazu je nutná theorie markovských procesů. Předpokládejme, že přechodová pravděpodobnost P definovaná vztahem (5) má následující vlastnosti:

(A) irreducibilita: $P(t, x, U) > 0$ pro všechna $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ a každou otevřenou množinu $U \neq \emptyset$ v $\mathbb{R}^m$,
(B) silná fellerovskost: $x \longmapsto P(t, x, C)$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}^m$ pro všechna $t > 0$ a každou borelovskou množinu $C \subseteq \mathbb{R}^m$.

[55] To jest takový, v němž přechodová pravděpodobnost závisí nejen na počátečním stavu, ale i na čase, v němž byl tento stav zadán.

Pro borelovskou míru μ na $\mathbb{R}^m$ položme

$$P_t^*\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^m} P(t,x,A)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Je-li X řešení (4) a μ rozdělení počáteční podmínky $X(0)$, pak je $P_t^*\mu$ rozdělení náhodné veličiny $X(t)$. Pravíme, že míra $\bar{\mu}$ je invariantní, jestliže $P_t^*\bar{\mu} = \bar{\mu}$ pro všechna $t \geq 0$. Není složité ověřit, že řešení X s $\mathsf{P} \circ X(0)^{-1} = \bar{\mu}$ je striktně stacionární proces. Lze dokázat (G. Maruyama & H. Tanaka, 1959; R. Z. Chas'minskij, 1960), že za předpokladů (A), (B) rovnice (4) připouští při $t \to \infty$ jen následující dva typy limitního chování:

(i) Existuje rekurentní kompakt $K \subseteq \mathbb{R}^m$, to jest

$$\mathsf{P}\big\{\, \exists t < \infty \;\; X^y(t) \in K \,\big\} = 1$$

pro každé $y \in \mathbb{R}^m$. Potom je rovnice (4) rekurentní:

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_G(X^y(t))\,\mathrm{d}t = \infty \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

pro každou $G \neq \emptyset$ otevřenou v $\mathbb{R}^m$ a všechna $y \in \mathbb{R}^m$, existuje σ-konečná Radonova invariantní míra $\bar{\mu}$ a platí

$$\big|P(t,x,A) - P(t,y,A)\big| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

pro každá $x, y \in \mathbb{R}^m$ a libovolnou $A \subseteq \mathbb{R}^m$ borelovskou (řešení "zapomínají" na počáteční podmínku a limitní chování na ní nezávisí). Invariantní míra je určena jednoznačně až na multiplikativní konstantu (jsou-li ϖ, ν dvě σ-konečné invariantní míry, pak $\varpi = c\nu$ pro nějaké $c > 0$), stačí tedy rozlišovat dva případy: Je-li $\bar{\mu}(\mathbb{R}^m) = 1$, pak

$$\sup_{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)} \big|\mathsf{P}\big\{X(t) \in A\big\} - \bar{\mu}(A)\big| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \quad \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\bar{\mu}$$

pro všechna řešení X rovnice (4) a libovolnou omezenou borelovskou funkci f (limitní chování je tudíž jednoznačně popsáno invariantní pravděpodobností). Je-li naopak $\bar{\mu}(\mathbb{R}^m) = \infty$, potom

$$P(t,x,K) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

pro každý kompakt K a všechna $x \in \mathbb{R}^m$ (to jest, pro libovolný počáteční stav x přechodová pravděpodobnost konverguje slabě k Diracově míře sedící v "nekonečnu").

(ii) Rovnice (4) je transientní: $\|X^z(t)\| \longrightarrow \infty$ při $t \to \infty$ pro všechna z. V takovém případě neexistuje konečná invariantní míra.

Síla uvedeného tvrzení o dichotomii mezi rekurencí a transiencí vynikne, uvědomíme-li si, že jde výsledek čistě pravděpodobnostní: žádná analogická klasifikace limitního chování rovnice (4) nemůže platit v deterministickém případě $\sigma = 0$.

Vraťme se k předpokladům (A), (B). O lineární rovnici

$$\mathrm{d}X = AX\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W$$

víme, že regularita kovarianční matice $\varrho(t,t)$ pro všechna $t > 0$ implikuje (A) (viz důsledek 3.4). Je-li ovšem $\varrho(t,t)$ regulární, pak

$$\begin{aligned} P(t,x,C) &= \mathscr{N}(e^{At}x, \varrho(t,t))(C) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \varrho(t,t)}} \int_C \exp\left(-\frac{1}{2}\big\langle \varrho(t,t)^{-1}(y - e^{At}x), y - e^{At}x\big\rangle\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

a platí též (B). Regularita $\varrho(t,t)$ je přitom důsledkem positivní definitnosti matice $\sigma\sigma^*$. Pro nelineární rovnici (4) je situace obdobná: za předpokladu $\sigma\sigma^* > 0$ (tj. positivní definitnosti matice $\sigma(x)\sigma(x)^*$ pro každé $x \in \mathbb{R}^m$) lze ukázat platnost (A) i (B).

Na závěr si uvědomme, že uvedený výsledek o dichotomii je (netriviálním) rozšířením věty známé pro markovské řetězce. Je-li totiž markovský řetězec (se stavovým prostorem $\mathbb{Z}$) nerozložitelný (tedy platí-li (A)), pak jsou všechny stavy buď transientní, anebo jsou všechny stavy rekurentní a limitní rozdělení $\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ je stacionárním rozdělením (tj. invariantní mírou).[56]

B. Konstrukce markovského procesu. V této části ukážeme, že přechodovým pravděpodobnostem korespondují (v jistém smyslu jednoznačně určené) náhodné procesy s markovskou vlastností typu (2), jejichž jednodimensionální rozdělení jsou přechodovou pravděpodobností popsána ve smyslu intuitivní představy (3).

Definice 6.1. Buď $(E, \mathscr{E})$ měřitelný prostor. Funkce $P : \mathbb{R}_+ \times E \times \mathbb{R}_+ \times \mathscr{E} \longrightarrow [0,1]$ se nazývá *přechodová pravděpodobnost* (na prostoru $(E, \mathscr{E})$), jestliže

(a) pro všechna $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s \le t$, a každé $x \in E$ je $P(s,x,t,\cdot)$ pravděpodobnostní míra na $\mathscr{E}$,

(b) pro všechna $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s \le t$, a každé $A \in \mathscr{E}$ je $P(s,\cdot,t,A)$ $\mathscr{E}$-měřitelná funkce,

(c) pro všechna $s, u, t \in \mathbb{R}_+$, $s \le u \le t$, každé $x \in E$ a všechna $A \in \mathscr{E}$ platí

$$P(s,x,t,A) = \int_E P(u,y,t,A)P(s,x,u,\mathrm{d}y). \tag{6}$$

Jak jsme již uvedli, vztah (6) se nazývá *Chapman-Kolmogorovova rovnost.*

Je-li $\mathscr{E}$ libovolná σ-algebra, budeme v dalším značit $\mathrm{b}\mathscr{E}$ vektorový prostor všech omezených reálných $\mathscr{E}$-měřitelných funkcí.

Poznámka 6.1. Často budeme užívat následující elementární fakt: je–li P přechodová pravděpodobnost na měřitelném prostoru $(E, \mathscr{E})$ a $g \in \mathrm{b}(\mathscr{E} \otimes \mathscr{E})$, pak je funkce

$$x \longmapsto \int_E g(x,y)P(s,x,t,\mathrm{d}y)$$

$\mathscr{E}$-měřitelná. Důkaz je přímočarý: jak známo, díky struktuře součinové σ-algebry $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ lze funkci g aproximovat funkcemi tvaru $h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \times B_i}$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i, B_i \in \mathscr{E}$, zbývá uvážit, že

$$\begin{aligned}\int_E h(x,y)P(s,x,t,\mathrm{d}y) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_E \mathbf{1}_{A_i}(x)\mathbf{1}_{B_i}(y)P(s,x,t,\mathrm{d}y)\\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x)P(s,x,t,B_i)\end{aligned}$$

[56]Výsledky platné pro markovské řetězce lze najíti např. v §3.3 citovaného skripta Z. Práškové a P. Lachouta.

je zřejmě $\mathscr{E}$-měřitelná funkce proměnné x vzhledem k předpokladu (b) z definice 6.1.

Prvním cílem je odvodit výraz pro konečnědimensionální rozdělení procesu, jehož podmíněná rozdělení jednodimensionální jsou popsána přechodovou pravděpodobnsotí.

Věta 6.1. *Buď P přechodová pravděpodobnost na měřitelném prostoru $(E,\mathscr{E})$ a $Y=(Y_t)_{t\geq s}$ E-hodnotový $(\mathscr{F}_t)$-adaptovaný náhodný proces, definovaný na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geq s},\mathsf{P})$. Předpokládejme, že*

$$\mathsf{P}\big(Y(t)\in A\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)=P(r,Y(r),t,A) \tag{7}$$

pro všechna $s\leq r<t$ a $A\in\mathscr{E}$. Potom

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big(f_1(Y(t_1))\cdots f_n(Y(t_n))\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)\\&\quad=\int_E\cdots\int_E f_1(y_1)\cdots f_n(y_n)P(t_{n-1},y_{n-1},t_n,\mathrm{d}y_n)\cdots P(r,Y(r),t_1,\mathrm{d}y_1),\end{aligned} \tag{8}$$

kdykoliv $s\leq r<t_1<\cdots<t_n$ a $f_1,\dots,f_n\in\mathrm{b}\mathscr{E}$.

Položme $\pi=\mathsf{P}\circ Y(s)^{-1}$, pak speciálně platí

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big\{Y(t_1)\in B_1,\dots,Y(t_n)\in B_n\big\}\\&\quad=\int_E\int_{B_1}\cdots\int_{B_n}P(t_{n-1},y_{n-1},t_n,\mathrm{d}y_n)\cdots P(s,y_0,t_1,\mathrm{d}y_1)\,\mathrm{d}\pi(y_0)\end{aligned} \tag{9}$$

pro libovolná $s<t_1<\cdots<t_n$ a $B_1,\dots,B_n\in\mathscr{E}$.

Poznámka 6.2. Předpoklad (7) znamená, že pro skoro všechna $\omega\in\Omega$ je $\mathsf{P}\big(Y(t)\in A\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)(\omega)=P(r,Y(r,\omega),t,A)$. Funkce $P(r,\cdot,t,A)$ je $\mathscr{E}$-měřitelná, pročež $P(r,Y(r),t,A)=P(r,\cdot,t,A)\circ Y(r)$ je $\sigma(Y_r)$-měřitelná funkce. Ze (7) tak plyne

$$\mathsf{P}\big(Y(t)\in A\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)=\mathsf{P}\big(Y(t)\in A\,\big|\,Y(r)\big),$$

předpoklad (7) je tedy zesílenou formou markovské vlastnosti (2). Podotkněme, že integrály ve formuli (8) je třeba chápati jako iterované a počítat je tak, jak naznačují závorky v následujícím přesnějším, ale těžkopádném zápise, to jest, od vnitřních k vnějším:

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big(f_1(Y(t_1))\cdots f_n(Y(t_n))\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)\\&\quad=\int_E\Bigg(\cdots\Bigg(\int_E f_{n-1}(y_{n-1})\Bigg(\int_E f_n(y_n)P(t_{n-1},y_{n-1},t_n,\mathrm{d}y_n)\Bigg)\\&\qquad\qquad\times P(t_{n-2},y_{n-2},t_{n-1},\mathrm{d}y_{n-1})\Bigg)\cdots\Bigg)P(r,Y(r),t_1,\mathrm{d}y_1).\end{aligned}$$

Z poznámky 6.1 plyne, že výraz vpravo je korektně definován.

Důkaz. Formuli (8) dokážeme indukcí. Předpoklad (7) praví, že

$$\mathsf{E}\big(f_1(Y(t_1))\,\big|\,\mathscr{F}_r\big) = \int_E f_1(z)P(r, Y(r), t, \mathrm{d}z)$$

platí pro $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{E}$. Neboť libovolnou funkci z $\mathrm{b}\mathscr{E}$ lze stejnoměrně aproximovat lineární kombinací indikátorů množin z $\mathscr{E}$, plyne odtud ihned platnost (8) pro $n = 1$. Proveďme indukční krok: nechť je již (8) ověřeno pro nějaké $n \geq 1$, ukážeme platnost pro $n+1$. Zvolme $r < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, $f_i \in \mathrm{b}\mathscr{E}$, $i = 1, \ldots, n+1$, libovolně pevně. Položme

$$\tilde{f}_{n+1}(u) = \int_E f_{n+1}(v)P(t_n, u, t_{n+1}, \mathrm{d}v), \quad u \in E;$$

podle poznámky 6.1 je $\tilde{f}_{n+1} \in \mathrm{b}\mathscr{E}$. Opakovaným užitím indukčního předpokladu odvodíme

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\big(f_1(Y(t_1))\cdots f_n(Y(t_n))f_{n+1}(Y(t_{n+1}))\,\big|\,\mathscr{F}_r\big)\\
&\quad = \mathsf{E}\Big(f_1(Y(t_1))\cdots f_n(Y(t_n))\,\mathsf{E}\big(f_{n+1}(Y(t_{n+1}))\,\big|\,\mathscr{F}_{t_n}\big)\,\Big|\,\mathscr{F}_r\Big)\\
&\quad = \mathsf{E}\bigg(f_1(Y(t_1))\cdots f_n(Y(t_n))\int_E f_{n+1}(z_{n+1})P(t_n, Y(t_n), t_{n+1}, \mathrm{d}z_{n+1})\,\bigg|\,\mathscr{F}_r\bigg)\\
&\quad = \mathsf{E}\Big(f_1(Y(t_1))\cdots f_{n-1}(Y(t_{n-1}))\big(f_n\tilde{f}_{n+1}\big)(Y(t_n))\,\Big|\,\mathscr{F}_r\Big)\\
&\quad = \int_E\cdots\int_E f_1(z_1)\cdots\big(f_n\tilde{f}_{n+1}\big)(z_n)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(t_{n-1}, z_{n-1}, t_n, \mathrm{d}z_n)\cdots P(r, Y(r), t_1, \mathrm{d}z_1),\\
&\quad = \int_E\cdots\int_E f_1(z_1)\cdots f_n(z_n)\int_E f_{n+1}(z_{n+1})P(t_n, z_n, t_{n+1}, \mathrm{d}z_{n+1})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(t_{n-1}, z_{n-1}, t_n, \mathrm{d}z_n)\cdots P(r, Y(r), t_1, \mathrm{d}z_1),
\end{aligned}$$

čímž je platnost (8) pro $n+1$ dokázána. Jsou-li $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{E}$, pak z (8) zřejmě plyne

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big\{Y(t_1) \in B_1, \ldots, Y(t_n) \in B_n\big\}\\
&\qquad = \mathsf{E}\,\mathsf{E}\big(\mathbf{1}_{B_1}(Y(t_1))\cdots\mathbf{1}_{B_n}(Y(t_n))\,\big|\,\mathscr{F}_s\big)\\
&\qquad = \mathsf{E}\int\limits_{B_1}\cdots\int\limits_{B_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, \mathrm{d}y_n)\cdots P(s, Y(s), t_1, \mathrm{d}y_1)\\
&\qquad = \int\limits_E\int\limits_{B_1}\cdots\int\limits_{B_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, \mathrm{d}y_n)\cdots P(s, y_0, t_1, \mathrm{d}y_1)\,\mathrm{d}\pi(y_0),
\end{aligned}$$

což je právě rovnost (9). Q.E.D.

Poznámka 6.3. Všechny přechodové pravděpodobnosti, s nimiž budeme dále pracovat, budou vyhovovat dodatečnému předpokladu

$$\text{(N)} \qquad P(s,x,s,A) = \mathbf{1}_A(x), \quad s \ge 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E},$$

to jest, $P(s,x,s,\cdot)$ je Dirakova míra δ_x sedící v bodě x. Přechodové pravděpodobnosti splňující (N) se někdy nazývají *normální*. Pro normální přechodové pravděpodobnosti je snadné nahlédnout, že (8) platí i pro $s \le r = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, analogicky (9) platí pro $s = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Kupříkladu, označme $\Gamma = \{Y(r) \in C_1, Y(t_2) \in C_2, \dots, Y(t_k) \in C_k\}$, $C_i \in \mathscr{E}$. Potom

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\big(\Gamma \,\big|\, \mathscr{F}_r\big) &= \mathbf{1}_{C_1}(Y(r))\,\mathsf{E}\big(\mathbf{1}_{C_2}(X(t_2))\cdots\mathbf{1}_{C_k}(X(t_k)) \,\big|\, \mathscr{F}_r\big)\\
&= \mathbf{1}_{C_1}(Y(r)) \int\limits_{C_2}\cdots\int\limits_{C_k} P(t_{k-1},y_{k-1},t_k,\mathrm{d}y_k)\cdots P(r,Y(r),t_2,\mathrm{d}y_2)\\
&= \int\limits_{C_1}\cdots\int\limits_{C_k} P(t_{k-1},y_{k-1},t_k,\mathrm{d}y_k)\cdots P(r,y_1,t_2,\mathrm{d}y_2)P(r,Y(r),r,\mathrm{d}y_1),
\end{aligned}$$

v druhé rovnosti jsme užili větu 6.1 a ve třetí (N).

Konečněrozměrná rozdělení procesu s markovskou vlastností (7) jsou tedy dána vzorcem (9). Naopak, ukážeme-li, že systém měr odpovídající předpisu (9) je konsistentní, poskytne nám Daniell-Kolmogorovova věta stochastický proces s konečněrozměrnými rozděleními (9), tento proces bude mít i markovskou vlastnost. Přesněji:

Věta 6.2. *Buď E polský prostor a P přechodová pravděpodobnost na $(E,\mathscr{B}(E))$. Potom pro každé $s \ge 0$ a libovolnou pravděpodobnostní míru π na $\mathscr{B}(E)$ existují pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathscr{M},\mathsf{P})$ a E-hodnotový náhodný proces $(X_t)_{t\ge s}$ na Ω tak, že*

$$\mathsf{P}\{X(s) \in B\} = \pi(B), \quad B \in \mathscr{B}(E),$$

a

$$\mathsf{P}\big(X(t) \in A \,\big|\, \mathscr{M}_{s,r}\big) = P(r,X(r),t,A), \quad s \le r < t,\ A \in \mathscr{B}(E), \tag{10}$$

kde $\mathscr{M}_{s,r} = \sigma\big(X(u),\, u \in [s,r]\big)$.

Hlavní myšlenky důkazu. Důkaz je standardní aplikací Daniell-Kolmogorovovy věty[57], připomeňme proto – přijímajíce předpoklady a označení věty 6.2 – nejprve její schema. Za prostor Ω volíme množinu všech možných trajektorií, to jest

[57] Viz J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, §I.9.

funkcí z $[s, \infty[$ do E, za X proces projekcí a za $\mathscr{M}$ součinovou σ-algebru v Ω, definovanou jako nejmenší σ-algebra, vůči níž jsou všechny funkce X_r, $r \geq s$, měřitelné. Tedy, klademe-li $E_r = E$ pro $r \geq s$, jest

$$
\begin{aligned}
\Omega &= E^{[s,\infty[} = \prod_{r \in [s,\infty[} E_r, \\
X_r &: \Omega \longrightarrow E, \ \omega \longmapsto \omega(r), \quad r \geq s, \\
\mathscr{M} &= \bigotimes_{r \in [s,\infty[} \mathscr{B}(E_r) = \sigma\big(X_r, \ r \geq s\big).
\end{aligned}
$$

Označme $\mathbf{F}$ systém všech konečných podmnožin intervalu $[s, \infty[$. Nechť je pro každou množinu $J \in \mathbf{F}$ zadána pravděpodobnostní míra Q_J na (konečném) součinu $(E^J, \mathscr{B}^J)$, kde značíme

$$
E^J = \prod_{r \in J} E_r, \quad \mathscr{B}^J = \bigotimes_{r \in J} \mathscr{B}(E_r).
$$

Předpokládejme, že systém měr $\big\{Q_J; \ J \in \mathbf{F}\big\}$ je projektivní. (To znamená: jsou-li $H = \{r_1, \dots, r_j, v_1, \dots, v_h\}$, $J = \{r_1, \dots, r_j\}$ libovolné množiny z $\mathbf{F}$, $H \supseteq J$, a je-li

$$
p_{H,J} : E^H \longrightarrow E^J, \quad (x_{r_1}, \dots, x_{r_j}, x_{v_1}, \dots x_{v_h}) \longmapsto (x_{r_1}, \dots, x_{r_j})
$$

příslušná kanonická projekce, pak míry $p_{H,J}(Q_H)$ (obraz míry Q_H při zobrazení $p_{H,J}$) a Q_J splývají na $\mathscr{B}^J$. Jelikož semialgebra[58] měřitelných obdélníků generuje $\mathscr{B}^J$, stačí ověřit, že

$$
\begin{aligned}
p_{H,J}(Q_H)(A_1 \times \dots \times A_j) &= Q_H(A_1 \times \dots \times A_j \times E_{v_1} \times \dots \times E_{v_h}) \\
&= Q_J(A_1 \times \dots \times A_j)
\end{aligned}
$$

pro libovolná $A_i \in \mathscr{B}(E_{r_i})$. Za tohoto předpokladu podle Daniell-Kolmogorovovy věty existuje jediná projektivní limita $\mathsf{P} = \varprojlim Q_J$, to jest pravděpodobnostní míra na $(\Omega, \mathscr{M})$ taková, že platí

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\omega \in \Omega; \ \omega(r_1) \in A_1, \dots, \omega(r_j) \in A_j\} &= \mathsf{P}\{X(r_1) \in A_1, \dots, X(r_j) \in A_j\} \\
&= Q_J(A_1 \times \dots \times A_j),
\end{aligned}
$$

kdykoliv je $J = \{r_1, \dots, r_j\} \in \mathbf{F}$ a $A_1, \dots, A_j$ jsou borelovské množiny v E. Méně formálně: projektivní limita je taková míra na Ω, že konečně-rozměrná rozdělení procesu X jsou zadána právě mírami Q_J.

[58] Připomeňme, že množinový systém $\mathbf{S}$ se nazývá semialgebra, je-li uzavřen na konečné průniky, obsahuje celý prostor a prázdnou množinu a doplněk libovolné množiny z $\mathbf{S}$ lze napsat jako konečné disjunktní sjednocení prvků z $\mathbf{S}$. Cf. J. Štěpán: *op. cit.*, definice I.1.8.

Přistupme k vlastnímu důkazu věty 6.2. Zvolme Ω, $\mathscr{M}$, X jako nahoře, naším úkolem je definovat projektivní systém měr $\{Q_J\}$ tak, aby limitní míra P vyhovovala požadavku (10). Z věty 6.1 víme, že jediná možnost je položit

$$\begin{aligned} &Q_J(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &\quad = \int_E \int_{A_1} \cdots \int_{A_{n-1}} \int_{A_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, \mathrm{d}y_n) P(t_{n-2}, y_{n-2}, t_{n-1}, \mathrm{d}y_{n-1}) \\ &\qquad\qquad \times \cdots P(s, y_0, t_1, \mathrm{d}y_1)\, \mathrm{d}\pi(y_0), \end{aligned} \tag{11a}$$

kdykoliv $J = \{t_1 < \cdots < t_n\} \in \mathbf{F}$, $t_1 > s$, $A_i \in \mathscr{B}(E)$, $i = 1, \ldots, n$, respektive

$$\begin{aligned} &Q_J(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &\quad = \int_{A_1} \int_{A_2} \cdots \int_{A_{n-1}} \int_{A_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, \mathrm{d}y_n) P(t_{n-2}, y_{n-2}, t_{n-1}, \mathrm{d}y_{n-1}) \\ &\qquad\qquad \times \cdots P(s, y_1, t_2, \mathrm{d}y_2)\, \mathrm{d}\pi(y_1) \end{aligned} \tag{11b}$$

pokud $t_1 = s$. Snadno se ověří, že Q_J je σ-aditivní pravděpodobnost na semialgebře měřitelných obdélníků, lze ji proto prodloužit[59] na součinovou σ-algebru $\mathscr{B}^J$. Je třeba dokázat, že míry $\{Q_J;\ J \in \mathbf{F}\}$ tvoří projektivní systém. Bez přílišné újmy na obecnosti vyšetříme jen případ $J = \{t_1 < \cdots < t_n\}$, $H = \{t_1 < \cdots < t_k < T < t_{k+1} < \ldots < t_n\}$. Nechť

$$\begin{aligned} p_{H,J} : \prod_{r \in H} E_r &\longrightarrow \prod_{r \in J} E_r, \\ (x_1, \ldots, x_k, \tilde{x}, x_{k+1}, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je příslušná kanonická projekce; máme dokázat, že $p_{H,J}(Q_H) = Q_J$. Nechť pro určitost $t_1 = s$, zvolme $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(E)$ libovolně, potom

$$\begin{aligned} &p_{H,J}(Q_H)(A_1 \times \cdots \times A_n) = Q_H(A_1 \times \cdots \times A_k \times E \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n) \\ &\quad = \int\limits_{A_1} \cdots \int\limits_{A_k} \int\limits_{E} \int\limits_{A_{k+1}} f(y_{k+1}) P(T, \tilde{y}, t_{k+1}, \mathrm{d}y_{k+1}) P(t_k, y_k, T, \mathrm{d}\tilde{y}) \cdots \mathrm{d}\pi(y_1), \end{aligned} \tag{12}$$

kde $f \in \mathrm{b}\mathscr{B}(E)$ je funkce daná jednoznačně předpisem pro Q_H,

$$\begin{aligned} &f(y_{k+1}) \\ &\quad = \int\limits_{A_{k+2}} \cdots \int\limits_{A_{n-1}} \int\limits_{A_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, \mathrm{d}y_n) P(t_{n-2}, y_{n-2}, t_{n-1}, \mathrm{d}y_{n-1}) \\ &\qquad\qquad \times \cdots P(t_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+2}, \mathrm{d}y_{k+2}). \end{aligned}$$

[59] Viz J. Štěpán: *op. cit.*, I.8.12.

Chapman-Kolmogorovova rovnost implikuje

$$P(t_k, y_k, t_{k+1}, A_{k+1} \cap B) = \int_E P(T, \tilde{y}, t_{k+1}, A_{k+1} \cap B) P(t_k, y_k, T, \mathrm{d}\tilde{y})$$

pro každou množinu $B \in \mathscr{B}(E)$. Jinými slovy,

$$\begin{aligned} \int_{A_{k+1}} & g(y_{k+1}) P(t_k, y_k, t_{k+1}, \mathrm{d}y_{k+1}) \\ &= \int_E \int_{A_{k+1}} g(y_{k+1}) P(T, \tilde{y}, t_{k+1}, \mathrm{d}y_{k+1}) P(t_k, y_k, T, \mathrm{d}\tilde{y}) \end{aligned} \tag{13}$$

platí pro libovolnou funkci g tvaru $g = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathscr{B}(E)$, tudíž i pro lineární kombinace takových funkcí. Každá omezená borelovská funkce na E je ovšem stejnoměrnou limitou lineárních kombinací indikátorů borelovských množin, proto (13) platí pro všechny funkce $g \in \mathrm{b}\mathscr{B}(E)$. Užívajíce vztah (13) na funkci f v rovnosti (12) odvodíme

$$\begin{aligned} & p_{H,J}(Q_H)(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \int\limits_{A_1} \cdots \int\limits_{A_k} \int\limits_{A_{k+1}} f(y_{k+1}) P(t_k, y_k, t_{k+1}, \mathrm{d}y_{k+1}) P(t_{k-1}, y_{k-1}, t_k, \mathrm{d}y_k) \cdots \mathrm{d}\pi(y_1) \\ &= Q_J(A_1 \times \cdots \times A_n). \end{aligned}$$

Odtud nahlížíme, že $p_{H,J}(Q_H) = Q_J$ na $\mathscr{B}^J$; buď $\mathsf{P} = \varprojlim Q_J$ míra zaručená Daniell-Kolmogorovovou větou. Přímo z její definice

$$\mathsf{P}\{X(s) \in B\} = Q_{\{s\}}(B) = \pi(B), \quad B \in \mathscr{B}(E).$$

Zbývá nám dokázat vztah (10); to jest, zvolivše libovolně pevně $A \in \mathscr{B}(E)$ a $s \leq r < t$ chceme pro všechna $D \in \mathscr{M}_{s,r}$ ověřit rovnost

$$\int_D \mathbf{1}_{\{X(t) \in A\}} \, \mathrm{d}\mathsf{P} = \int_D P(r, X(r), t, A) \, \mathrm{d}\mathsf{P}. \tag{14}$$

Množiny $D \in \mathscr{M}_{s,r}$, pro něž (14) platí, tvoří σ-aditivní systém, takže podle Dynkinova lemmatu o σ-aditivních systémech[60] stačí (14) ověřit pro množiny tvaru

$$\begin{gathered} D = \big\{X(r_0) \in B_0, \ldots, X(r_{n+1}) \in B_{n+1}\big\}, \\ s = r_0 < \cdots < r_{n+1} = r, \; B_i \in \mathscr{B}(E), \end{gathered} \tag{15}$$

[60] J. Štěpán: *op. cit.*, tvrzení I.1.5.

protože soubor množin s representací (15) je uzavřený na průniky a generuje $\mathscr{M}_{s,r}$. Nechť je tedy D množina tvaru (15), definice míry P implikuje

$$
\begin{aligned}
\int_D &\mathbf{1}_{\{X(t)\in A\}}\,\mathrm{d}\mathsf{P} \\
&\qquad = \mathsf{P}\big(D\cap\{X(t)\in A\}\big) \\
&\qquad = \mathsf{P}\big\{X(r_0)\in B_0,\dots,X(r_{n+1})\in B_{n+1}, X(t)\in A\big\} \\
&\qquad = \int_{B_0}\cdots\int_{B_{n+1}} P(r_{n+1},y_{n+1},t,A)P(r_n,y_n,r_{n+1},\mathrm{d}y_{n+1})\cdots\mathrm{d}\pi(y_0).
\end{aligned}
$$

Uvědomme si, že $r_{n+1}=r$, ověříme-li tedy, že rovnost

$$
\int_D g(X_r)\,\mathrm{d}\mathsf{P} = \int_{B_0}\cdots\int_{B_{n+1}} g(y_{n+1})P(r_n,y_n,r_{n+1},\mathrm{d}y_{n+1})\cdots\mathrm{d}\pi(y_0) \tag{16}
$$

platí pro každou $g\in \mathrm{b}\mathscr{B}(E)$, získáme dokazovaný vztah (14) volbou $g=P(r,\cdot,t,A)$. Dokažme (16) pro funkce tvaru $g=\mathbf{1}_C$, $C\in\mathscr{B}(E)$, je zřejmé, že z toho už obecný případ ihned plyne standardní stejnoměrnou aproximací omezených borelovských funkcí lineárními kombinacemi indikátorů. Nechť tedy $C\in\mathscr{B}(E)$, potom však

$$
\begin{aligned}
\int_D \mathbf{1}_C(X(r))\,\mathrm{d}\mathsf{P} &= \mathsf{P}\big(D\cap\{X(r)\in C\}\big) \\
&= \mathsf{P}\big\{X(r_0)\in B_0,\dots,X(r_{n+1})\in B_{n+1}\cap C\big\} \\
= \int\limits_{B_0}\cdots\int\limits_{B_n}\int\limits_{B_{n+1}\cap C} &P(r_n,y_n,r_{n+1},\mathrm{d}y_{n+1})P(r_{n-1},y_{n-1},r_n,\mathrm{d}y_n)\cdots\mathrm{d}\pi(y_0) \\
&= \int\limits_{B_0}\cdots\int\limits_{B_n}\int\limits_{B_{n+1}} \mathbf{1}_C(y_{n+1})P(r_n,y_n,r_{n+1},\mathrm{d}y_{n+1}) \\
&\qquad\qquad \times P(r_{n-1},y_{n-1},r_n,\mathrm{d}y_n)\cdots\mathrm{d}\pi(y_0),
\end{aligned}
$$

opět přímo podle definice P. Q.E.D.

Rekapitulujme provedenou konstrukci: prostor Ω můžeme zvolit nezávisle na $s\geq 0$, kladouce $\Omega=E^{[0,\infty[}$. Definujme proces X, $X_t(\omega)=\omega(t)$, $t\geq 0$, na Ω a σ-algebry $\mathscr{M}_{s,t}=\sigma\big(X_u,\ u\in[s,t]\big)$, $\mathscr{M}_{s,\infty}=\sigma\big(X_u,\ u\geq s\big)$. Proces $(X_t,\ t\geq s)$ je zřejmě adaptovaný vzhledem k filtraci $(\mathscr{M}_{s,t})_{t\in[s,\infty[}$. Pro libovolné $s\geq 0$ a libovolnou pravděpodobnostní míru π na $\mathscr{B}(E)$ jsme nalezli pravděpodobnostní míru $\mathsf{P}_{s,\pi}$ na $\mathscr{M}_{s,\infty}$ tak, že $\mathsf{P}_{s,\pi}\circ X_s^{-1}=\pi$ a platí vztah (10). Upozorněme na další vlastnost zkonstruovaných měr. Při speciální volbě $\pi=\delta_x$, $x\in E$, budeme psát pro jednoduchost $\mathsf{P}_{s,\pi}=\mathsf{P}_{s,x}$. Pomocí formulí (11) lze přímo ověřit, že kdykoliv je

$A \in \mathscr{M}_{s,\infty}$ měřitelný válec (to jest, $A = \big\{X(t_1) \in C_1, \dots, X(t_n) \in C_n\big\}$ pro nějaká $s \le t_1 \le \dots \le t_n$ a $C_i \in \mathscr{B}(E)$), pak

$$\Big[x \longmapsto \mathsf{P}_{s,x}(A)\Big] \in \mathrm{b}\mathscr{B}(E) \quad \text{a} \quad \mathsf{P}_{s,\mu}(A) = \int_E \mathsf{P}_{s,x}(A)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{17}$$

pro libovolnou borelovskou pravděpodobnost μ na E. Semialgebra měřitelných válců generuje σ-algebru $\mathscr{M}_{s,\infty}$, tudíž (17) platí pro každou množinu $A \in \mathscr{M}_{s,\infty}$. Mohli jsme se tedy omezit na "deterministické počáteční podmínky", tj. za π volit pouze Diracovy míry.

Shrňme nyní vlastnosti zkonstruovaného objektu v následující definici.

Definice 6.2. (E. B. Dynkin, 1959) Buď $(E, \mathscr{E})$ měřitelný prostor, v němž jsou všechny singletony měřitelné (to jest, $\{x\} \in \mathscr{E}$ pro každé $x \in E$), buď P přechodová pravděpodobnost na $(E, \mathscr{E})$. Systém $(\Omega, (\mathscr{F}_{s,t})_{0 \le s \le t < \infty}, X, (\mathsf{P}_{s,x})_{s \ge 0, x \in E})$ se nazývá *markovský proces* v E s přechodovou pravděpodobností P, jestliže

(a) Pro každá $s, t \in \mathbb{R}_+$, $t \ge s$, je $\mathscr{F}_{s,t}$ σ-algebra na množině Ω a $\mathscr{F}_{s,t} \subseteq \mathscr{F}_{q,r}$, kdykoliv $0 \le q \le s \le t \le r < \infty$,

(b) $X = (X_t)_{t \ge 0}$ je E-hodnotový náhodný proces na Ω, přičemž pro všechna $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t \ge s$, je náhodná veličina X_t $\mathscr{F}_{s,t}$-měřitelná,

(c) pro všechna $s \ge 0$ a $x \in E$ je $\mathsf{P}_{s,x}$ pravděpodobnostní míra na $\mathscr{F}_{s,\infty} = \bigvee_{t \ge s} \mathscr{F}_{s,t}$ taková, že

$$\mathsf{P}_{s,x}\big\{X(s) = x\big\} = 1 \tag{18}$$

a

$$\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t) \in A \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = P(r, X(r), t, A) \quad \mathsf{P}_{s,x}\text{-skoro jistě} \tag{19}$$

pro všechna $A \in \mathscr{E}$ a $s \le r < t$.

O množině E hovoříme jako o *stavovém prostoru* markovského procesu; o rovnost (19) jako o markovské vlastnosti procesu X. Integrál podle míry $\mathsf{P}_{s,x}$ budeme značit $\mathsf{E}_{s,x}$.

Markovský proces tedy není náhodný proces ve smyslu běžně užívané definice, ale jest celým souborem náhodných procesů: pro každou volbu počáteční podmínky, tj. míry $\mathsf{P}_{s,x}$, dostáváme jiný náhodný proces s markovskou vlastností. Tyto procesy jsou ovšem definovány na stejném filtrovaném měřitelném prostoru $(\Omega, \mathscr{F}_{0,\infty}, (\mathscr{F}_{s,t}))$ a pomocí týchž funkcí X_t a jsou svázány přechodovou pravděpodobností P. Není-li nebezpečí konfuse, užívá se jednodušší značení a hovoří se o markovském procesu $(X, \mathsf{P}_{s,x})$ a pod.

Věta 6.2 v právě zavedené terminologii říká, že přechodové pravděpodobnosti na polském prostoru odpovídá markovský proces; jeho konečněrozměrná rozdělení jsou – podle věty 6.1 – jednoznačně určena.

Poznámka 6.4. Uvedeme nyní několik užitečných důsledků markovské vlastnosti (19). Jestliže $s \le r < t$, pak podle (19) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t)\in A \,\big|\, X(r)\big) &= \mathsf{P}_{s,x}\big(\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t)\in A \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) \,\big|\, X(r)\big)\\ &= \mathsf{E}_{s,x}\big(P(r,X(r),t,A) \,\big|\, X(r)\big)\\ &= P(r,X(r),t,A),\end{aligned}$$

proto opětovným užitím (19) nahlédneme, že

$$\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t)\in A \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \mathsf{P}_{s,x}\big(X(t)\in A \,\big|\, X(r)\big) \tag{20}$$

pro všechna $0 \le s \le r < t$, $x \in E$ a $A \in \mathscr{E}$. Rovnosti (20) je pro markovské procesy obdobou vztahu (2), proto je také nazývána markovská vlastnost, ač je obecně slabší než vztah (19).

Uživše nejprve rovnost (19) ve speciálním případě $s = r$ a poté (18) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{s,x}\big\{X(t)\in A\big\} &= \mathsf{E}_{s,x}\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t)\in A \,\big|\, \mathscr{F}_{s,s}\big) = \mathsf{E}_{s,x}P(s,X(s),t,A)\\ &= P(s,x,t,A),\end{aligned}$$

ve shodě s intuitivní interpretací přechodové pravděpodobnosti. Vidíme, že

$$\mathsf{E}_{s,x}f(X(t)) = \int_E f(z)P(s,x,t,\mathrm{d}z) \tag{21}$$

kdykoliv $0 \le s < t$, $x \in E$ a f je tvaru $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{E}$. Odtud ihned plyne platnost (21) pro libovolnou $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$.

Podobně, je-li $s \le r < t$, pak z (19) standardní aproximací odvodíme, že

$$\mathsf{E}_{s,x}\big(f(X(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \int_E f(z)P(r,X(r),t,\mathrm{d}z)$$

platí $\mathsf{P}_{s,x}$-skoro jistě pro každou funkci $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$. To jest, pro $\mathsf{P}_{s,x}$-skoro všechna ω platí

$$\mathsf{E}_{s,x}\big(f(X(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big)(\omega) = \int_E f(z)P(r,X(r,\omega),t,\mathrm{d}z).$$

Aplikujeme-li na pravou stranu této rovnosti (při pevném ω!) vztah (21), dostaneme

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{s,x}\big(f(X(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big)(\omega) &= \mathsf{E}_{r,X(r,\omega)}f(X(t))\\ &= \int_\Omega f(X(t,\tilde\omega))\,\mathrm{d}\mathsf{P}_{r,X(r,\omega)}(\tilde\omega).\end{aligned} \tag{22}$$

Markovská vlastnost procesu X se proto často přepisuje (a užívá) v následujícím tvaru: pro všechna $r, s, t \in \mathbb{R}_+$, $s \le r < t$, libovolné $x \in E$ a každou $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$ platí

$$\mathsf{E}_{s,x}\big(f(X(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \mathsf{E}_{r,X(r)} f(X(t)) \quad \mathsf{P}_{s,x}\text{-skoro všude.} \tag{23}$$

Formuli (23) je ovšem třeba chápat ve smyslu naznačeném vzorcem (22). Uvědomme si, že pravá strana (23) je skutečně dobře definovaná $\sigma(X_r)$-měřitelná náhodná veličina. Pro $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$ je funkce

$$\Pi : x \longmapsto \mathsf{E}_{r,x} f(X(t))$$

jistě $\mathscr{E}$-měřitelná: je-li $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{E}$, plyne to z definice přechodové pravděpodobnosti, obecný případ odtud odvodíme zřejmým způsobem. Zbývá si uvědomit, že

$$\mathsf{E}_{r,X(r)} f(X(t)) = \Pi(X(r)).$$

Markovská vlastnost ve formě popsané rovnostmi (20) a (23) se vztahuje k podmíněným pravděpodobnostem jevů tvaru $\{X_t \in A\}$; věta 6.1 nám umožňuje třídu přípustných jevů podstatně rozšířit.

Důsledek 6.3. *Buď $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_{s,t}), X, \mathsf{P}_{s,x})$ markovský proces v měřitelném prostoru $(E, \mathscr{E})$. Položme $\mathscr{M}_{>t} = \sigma\big(X_u,\ u > t\big)$, $t \ge 0$. Potom pro libovolná $r, s \in \mathbb{R}_+$, $s \le r$, všechna $y \in E$ a každou množinu $B \in \mathscr{M}_{>r}$ platí*

$$\mathsf{P}_{s,y}\big(B \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \mathsf{P}_{s,y}\big(B \,\big|\, X(r)\big) = \mathsf{P}_{r,X(r)}(B) \quad \mathsf{P}_{s,y}\text{-}\textit{skoro jistě.} \tag{24}$$

Jde skutečně o rozšíření: je-li $t > r$, pak jistě $\{X_t \in A\} \in \mathscr{M}_{>r}$. Úplně standardně lze vztah (24) zobecnit na podmíněné střední hodnoty: pro všechna $0 \le s \le r$, $y \in E$ a libovolnou funkci $\xi \in \mathrm{b}\mathscr{M}_{>r}$ jest

$$\mathsf{E}_{s,y}\big(\xi \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \mathsf{E}_{s,y}\big(\xi \,\big|\, X(r)\big) = \mathsf{E}_{r,X(r)}\xi \quad \mathsf{P}_{s,y}\text{-skoro jistě.}$$

Důkaz. Označme P přechodovou pravděpodobnost uvažovaného procesu. Zvolme libovolně pevně $y \in E$ a $r, s \in \mathbb{R}_+$, $r > s$. Buď $\mathscr{G}$ systém všech množin $\Gamma \in \mathscr{M}_{>r}$ tvaru

$$\Gamma = \big\{\omega;\ X(t_1) \in C_1, \dots, X(t_k) \in C_k\big\}$$

pro nějaká $r < t_1 < \cdots < t_k$, $C_1, \dots, C_k \in \mathscr{E}$. Aplikujíce rovnost (8) na proces X uvažovaný na stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_{s,t})_{t \ge s}, \mathsf{P}_{s,y})$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{s,y}\big(\Gamma \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) &= \mathsf{E}_{s,y}\big(\mathbf{1}_{C_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{C_k}(X(t_k)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) \\ &= \int\limits_{C_1} \cdots \int\limits_{C_k} P(t_{k-1}, y_{k-1}, t_k, \mathrm{d}y_k) \cdots P(r, X(r), t_1, \mathrm{d}y_1), \end{aligned} \tag{25}$$

funkce na pravé straně rovnosti (25) je očividně $\sigma(X(r))$-měřitelná, takže levá strana nutně splývá s podmíněnou pravděpodobností vzhledem k $\sigma(X(r))$. Podobně podle věty 6.1 platí

$$\mathsf{P}_{r,z}(\varGamma) = \int_{C_1} \cdots \int_{C_k} P(t_{k-1}, y_{k-1}, t_k, \mathrm{d}y_k) \cdots P(r, z, t_1, \mathrm{d}y_1) \tag{26}$$

pro každé $z \in E$. Porovnáním formulí (25) a (26) nahlédneme, že

$$\mathsf{P}_{s,y}\big(\varGamma \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) = \mathsf{P}_{r,X(r)}(\varGamma).$$

(Vzorec (26) také ukazuje, že $z \longmapsto \mathsf{P}_{r,z}(\varGamma)$ je $\mathscr{E}$-měřitelná funkce, tedy $\mathsf{P}_{r,X(r)}(\varGamma)$ je dobře definovaná náhodná veličina.) Tím jsme ověřili dokazovaný vztah (26) pro všechny množiny $B \in \mathscr{G}$; systém $\mathscr{G}$ je uzavřen na konečné průniky a generuje σ-algebru $\mathscr{M}_{>r}$, důkaz lze proto završit přímočarým užitím Dynkinova lemmatu. Q.E.D.

Poznámka 6.5. V situaci důsledku 6.3 zvolme $r > s$, $x \in E$, $M \in \mathscr{F}_{s,r}$ a $B \in \mathscr{M}_{>r}$ libovolně. Potom

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{s,x}\big(M \cap B \,\big|\, X(r)\big) &= \mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_{M\cap B} \,\big|\, X(r)\big) = \mathsf{E}_{s,x}\Big(\mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_M \mathbf{1}_B \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) \,\Big|\, X(r)\Big) \\
&= \mathsf{E}_{s,x}\Big(\mathbf{1}_M \mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_B \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) \,\Big|\, X(r)\Big) \\
&= \mathsf{E}_{s,x}\Big(\mathbf{1}_M \mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_B \,\big|\, X(r)\big) \,\Big|\, X(r)\Big) \\
&= \mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_M \,\big|\, X(r)\big)\mathsf{E}_{s,x}\big(\mathbf{1}_B \,\big|\, X(r)\big) \\
&= \mathsf{P}_{s,x}\big(M \,\big|\, X(r)\big)\mathsf{P}_{s,x}\big(B \,\big|\, X(r)\big).
\end{aligned}$$

Dospěli jsme k další alternativní formulaci markovské vlastnosti: pro každou míru $\mathsf{P}_{s,x}$ a pro všechna $r > s$ jsou σ-algebry $\mathscr{F}_{s,r}$ a $\mathscr{M}_{>r}$ podmíněně nezávislé vzhledem k $\sigma(X(r))$. (Neformálně: minulost a budoucnost markovského procesu jsou podmíněně nezávislé vzhledem k přítomnosti.)

Poznámka 6.6. Pokud přechodová pravděpodobnost P vyhovuje předpokladu (N), platí markovská vlastnost (19) a všechny její důsledky i pro $t = r$, ježto

$$\mathsf{P}_{s,x}\big(X(t) \in A \,\big|\, \mathscr{F}_{s,t}\big) = \mathbf{1}_{\{X(t)\in A\}} = P(t, X(t), t, A).$$

Speciálně ku příkladu (24) platí pro každou množinu $B \in \mathscr{M}_{\geq r} \equiv \sigma\big(X_u,\, u \geq t\,\big)$. Vskutku, dokažme na ukázku (25) pro množiny tvaru $\varGamma = \big\{X(r) \in C_1, X(t_2) \in C_2, \ldots, X(t_k) \in C_k\big\}$, $r < t_2 < \cdots < t_k$, $C_i \in \mathscr{E}$. Jest totiž

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{s,y}\big(\varGamma \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) &= \mathbf{1}_{C_1}(X(r))\, \mathsf{E}_{s,y}\big(\mathbf{1}_{C_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{C_k}(X(t_k)) \,\big|\, \mathscr{F}_{s,r}\big) \\
&= \mathbf{1}_{C_1}(X(r)) \int\limits_{C_2} \cdots \int\limits_{C_k} P(t_{k-1}, y_{k-1}, t_k, \mathrm{d}y_k) \cdots P(r, X(r), t_2, \mathrm{d}y_2) \\
&= \int\limits_{C_1} \cdots \int\limits_{C_k} P(t_{k-1}, y_{k-1}, t_k, \mathrm{d}y_k) \cdots P(r, y_1, t_2, \mathrm{d}y_2) P(r, X(r), r, \mathrm{d}y_1),
\end{aligned}$$

v druhé rovnosti jsme užili větu 6.1 a ve třetí (N).

C. Markovské procesy definované stochastickými diferenciálními rovnicemi. Buď $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ stochastická base s filtrací splňující (UC). Nechť je W n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces; budeme vyšetřovat stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}X = b(t,X)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,X)\,\mathrm{d}W \tag{27}$$

umluvivše se, že v celé části C šesté kapitoly je splněn následující předpoklad:

Předpoklad 6.1. Koeficienty $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ rovnice (27) jsou borelovské funkce lineárního růstu lipschitzovské v prostorové proměnné, to jest

(I) $\exists K_* < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t,x)\| \vee \|\sigma(t,x)\| \leq K_*(1 + \|x\|),$$

(II) $\exists K < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \vee \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Je-li $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathscr{F}_s$-měřitelná funkce, označíme $X(\cdot\,; s, \xi) = X^{s,\xi}$ (jediné) řešení rovnice (27) s počáteční podmínkou $X^{s,\xi}(s) = \xi$. Položme

$$P(s,x,t,A) = \mathsf{P}\big\{X^{s,x}(t) \in A\big\}, \quad 0 \leq s \leq t,\ x \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m). \tag{28}$$

Funkce $P(s,x,t,\cdot)$ je zřejmě pravděpodobnostní míra na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$; naším cílem je ukázat, že P je přechodová pravděpodobnost, a vyjasnit, v jakém smyslu řešení rovnice (27) korespondují s markovským procesem (jak je zaveden v definici 6.2) s přechodovou pravděpodobností P.

Nejprve dokážeme jednoduché lemma o spojité závislosti řešení rovnice (27) na počáteční podmínce.

Lemma 6.4. *Pro každé $T > 0$ a libovolné $p \in [2, \infty[$ existují konstanty $C_i < \infty$, $i = 1, \dots, 4$, závisící jen na T, p, K a K_*, tak, že*

$$\mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(t)\big\|^p \leq C_1\big(1 + \mathsf{E}\|\xi\|^p\big), \tag{29}$$

$$\mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(t) - X^{s,\eta}(t)\big\|^p \leq C_2\mathsf{E}\|\xi - \eta\|^p, \tag{30}$$

$$\mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(\tau) - X^{s,\xi}(t)\big\|^p \leq C_3\big(1 + \mathsf{E}\|\xi\|^p\big)|\tau - t|^{\frac{p}{2}}, \tag{31}$$

$$\mathsf{E}\big\|X^{\varrho,\xi}(t) - X^{s,\xi}(t)\big\|^p \leq C_4\big(1 + \mathsf{E}\|\xi\|^p\big)|\varrho - s|^{\frac{p}{2}}, \tag{32}$$

kdykoliv $0 \leq s \leq \varrho \leq t \leq \tau \leq T$ a $\xi, \eta \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ jsou $\mathscr{F}_s$-měřitelné funkce.

Důkaz. Odhady (29), (30) již byly odvozeny (viz věta 2.1 a poznámka 2.5). Dokažme nyní nejprve (31): podle definice řešení, věty 1.1 a předpokladu lineárního růstu

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(\tau)-X^{s,\xi}(t)\big\|^p &= \mathsf{E}\bigg\|\int_t^\tau b(r,X^{s,\xi}(r))\,\mathrm{d}r+\int_t^\tau \sigma(r,X^{s,\xi}(r))\,\mathrm{d}W(r)\bigg\|^p \\
&\le 2^{p-1}(\tau-t)^{p-1}\mathsf{E}\int_t^\tau \big\|b(r,X^{s,\xi}(r))\big\|^p\,\mathrm{d}r \\
&\quad + 2^{p-1}C_p\mathsf{E}\bigg(\int_t^\tau \big\|\sigma(r,X^{s,\xi}(r))\big\|^2\,\mathrm{d}r\bigg)^{\frac{p}{2}} \\
&\le 2^{p-1}T^{\frac{p}{2}}(\tau-t)^{\frac{p}{2}-1}\mathsf{E}\int_t^\tau \big\|b(r,X^{s,\xi}(r))\big\|^p\,\mathrm{d}r \\
&\quad + 2^{p-1}C_p(\tau-t)^{\frac{p}{2}-1}\mathsf{E}\int_t^\tau \big\|\sigma(r,X^{s,\xi}(r))\big\|^p\,\mathrm{d}r \\
&\le 4^{p-1}(T^{\frac{p}{2}}+C_p)K_*^p(\tau-t)^{\frac{p}{2}-1}\int_t^\tau \big(1+\mathsf{E}\|X^{s,\xi}(r)\|^p\big)\,\mathrm{d}r;
\end{aligned}
$$

integrand posledního integrálu odhadneme užitím (29). Podobně berouce navíc do úvahy předpoklad (II) dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(t)-X^{\varrho,\xi}(t)\big\|^p \\
&\qquad = \mathsf{E}\bigg\|\int_s^\varrho b(r,X^{s,\xi}(r))\,\mathrm{d}r+\int_s^\varrho \sigma(r,X^{s,\xi}(r))\,\mathrm{d}W(r) \\
&\qquad\qquad + \int_\varrho^t \Big\{b(r,X^{s,\xi}(r))-b(r,X^{\varrho,\xi}(r))\Big\}\,\mathrm{d}r \\
&\qquad\qquad + \int_\varrho^t \Big\{\sigma(r,X^{s,\xi}(r))-\sigma(r,X^{\varrho,\xi}(r))\Big\}\,\mathrm{d}W(r)\bigg\|^p \\
&\qquad \le 8^{p-1}(T^{\frac{p}{2}}+C_p)K_*^p(\varrho-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^\varrho \big(1+\mathsf{E}\|X^{s,\xi}(r)\|^p\big)\,\mathrm{d}r \\
&\qquad\qquad + 4^{p-1}(T^{p-1}+C_pT^{\frac{p}{2}-1})K^p\int_\varrho^t \mathsf{E}\big\|X^{s,\xi}(r)-X^{\varrho,\xi}(r)\big\|^p\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Prvý integrál vpravo odhadneme opět pomocí (29), aplikace Gronwallova lemmatu pak dává (32). Q.E.D.

Pokud nehrozí nebezpečí omylu, budeme σ-algebru borelovských množin v $\mathbb{R}^m$ značit pouze $\mathscr{B}$ místo $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, analogickou konvenci přijmeme pro prostor $\mathrm{b}\mathscr{B}\equiv\mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ všech omezených reálných borelovských funkcí na $\mathbb{R}^m$. Připomeňme, že $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$ značí prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^m$.

Pro $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$ a $0 \le s \le t$ definujme funkci $P_{s,t}\varphi$ vztahem

$$P_{s,t}\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \mathsf{E}\varphi(X^{s,y}(t)). \tag{33}$$

Přímo z definice plyne linearita zobrazení $\varphi \longmapsto P_{s,t}\varphi$: jsou-li $\varphi, \psi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$, $c, d \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned} P_{s,t}(c\varphi + d\psi)(y) &= \mathsf{E}\big\{(c\varphi + d\psi)(X^{s,y}(t))\big\} = c\mathsf{E}\varphi(X^{s,y}(t)) + d\mathsf{E}\psi(X^{s,y}(t)) \\ &= cP_{s,t}\varphi(y) + dP_{s,t}\psi(y), \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Též je zřejmé, že $P_{s,s}\varphi = \varphi$. Je-li $\zeta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ libovolná funkce, označme

$$\|\zeta\|_\infty \equiv \sup_{z \in \mathbb{R}^m} |\zeta(z)|.$$

Platí

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}\varphi\|_\infty &= \sup_{z \in \mathbb{R}^m} \big|\mathsf{E}\varphi(X^{s,z}(t))\big| \le \sup_{z \in \mathbb{R}^m} \mathsf{E}\big|\varphi(X^{s,z}(t))\big| \\ &\le \|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

pro každou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$. To spolu s linearitou implikuje, že $P_{s,t}\varphi_k \longrightarrow P_{s,t}\varphi_0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^m$ při $k \to \infty$, kdykoliv $\varphi_k, \varphi_0 \in \mathrm{b}\mathscr{B}$, $\varphi_k \longrightarrow \varphi_0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^m$ při $k \to \infty$. Dále, $P_{s,t}\varphi \ge 0$ na $\mathbb{R}^m$ pro libovolnou nezápornou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$. Povšimněme si nakonec, že zvolíme-li v (33) speciálně $\varphi = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{B}$, získáme

$$\begin{aligned} P_{s,t}\mathbf{1}_A(x) &= \mathsf{E}\mathbf{1}_A\big(X^{s,x}(t)\big) = \mathsf{P}\big\{X^{s,x}(t) \in A\big\} \\ &= P(s,x,t,A) \end{aligned}$$

podle definice funkce P (viz formule (28)). Rovnost

$$P_{s,t}\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) P(s,y,t,\mathrm{d}z), \quad y \in \mathbb{R}^m, \tag{34}$$

tedy platí pro každou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$ tvaru $\varphi = \mathbf{1}_A$ s borelovskou množinou A. Je-li $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$ libovolná, pak existují funkce $\varphi_k \in \mathrm{b}\mathscr{B}$ takové, že

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} \mathbf{1}_{A_{kj}}, \ \alpha_{kj} \in \mathbb{R}, \ A_{kj} \in \mathscr{B}, \ \text{a } \varphi_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \varphi \quad \text{stejnoměrně na } \mathbb{R}^m.$$

Z právě odvozených vlastností zobrazení $P_{s,t}$ plyne[61]

$$\begin{aligned} P_{s,t}\varphi(y) &= \lim_{k\to\infty} P_{s,t}\varphi_k(y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} P_{s,t}\mathbf{1}_{A_{kj}}(y) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} P(s,y,t,A_{kj}) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(z) P(s,y,t,\mathrm{d}z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) P(s,y,t,\mathrm{d}z), \end{aligned}$$

tedy (34) platí pro každou funkci $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$.

Důsledek 6.5. *Pro každou funkci $\varphi \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$ je zobrazení*

$$(s,t,x) \longmapsto P_{s,t}\varphi(x)$$

spojité na množině $\{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2;\ s \le t\} \times \mathbb{R}^m$.

Toto tvrzení lze odvodit z lemmatu 6.4 přímočarou aplikací věty o majorisované konvergenci.

Důsledek 6.6. *Pro každou funkci $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ a libovolná $s,t \in \mathbb{R}_+$, $s \le t$, jest $P_{s,t}\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$.*

Uživše důsledek 6.6 na funkci $\varphi = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{B}$, nahlédneme, že $P(s,\cdot,t,A)$ je borelovská funkce. Dále, důsledky 6.5 a 6.6 implikují, že $P_{s,t}$ zobrazuje vektorové prostory $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$ a $\mathrm{b}\mathscr{B}$ do sebe. Opatříme-li tyto prostory přirozenou (supremální) normou $\|\cdot\|_\infty$, je $P_{s,t}$ v obou spojitý lineární operátor.

Důkaz. Zvolme $t,s \in \mathbb{R}_+$ libovolná pevná, $s \le t$. Buď $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená množina, pak existují $\varphi_k \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$, $0 \le \varphi_k \le 1$, $\varphi_k \nearrow \mathbf{1}_\Gamma$ na $\mathbb{R}^m$ (ku příkladu, lze položit $\varphi_k(x) = \min(k\,\mathrm{dist}(x,\mathbb{R}^m \setminus \Gamma),1)$). Odtud

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(X^{s,y}(t)) = \mathbf{1}_\Gamma(X^{s,y}(t)) \quad \text{na } \Omega$$

pro každé $y \in \mathbb{R}^m$. Podle věty o monotonní konvergenci

$$\lim_{k\to\infty} P_{s,t}\varphi_k(y) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\varphi_k(X^{s,y}(t)) = \mathsf{E}\mathbf{1}_\Gamma(X^{s,y}(t)) = P_{s,t}\mathbf{1}_\Gamma(y), \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

funkce $P_{s,t}\mathbf{1}_\Gamma$ je tedy borelovská jako bodová limita spojitých funkcí $P_{s,t}\varphi_k$. Položme

$$\mathfrak{M} = \{U \in \mathscr{B};\ P_{s,t}\mathbf{1}_U \text{ je borelovská funkce}\},$$

[61]Analogické aproximační úvahy nebudeme v dalších důkazech podrobně provádět.

ukázali jsme, že $\mathfrak{M}$ obsahuje systém všech otevřených množin (uzavřený na konečné průniky). Dále platí: jsou-li $U, V \in \mathfrak{M}$, $V \supseteq U$, pak vzhledem k linearitě $P_{s,t}$

$$P_{s,t}\mathbf{1}_{V\setminus U} = P_{s,t}(\mathbf{1}_V - \mathbf{1}_U) = P_{s,t}\mathbf{1}_V - P_{s,t}\mathbf{1}_U,$$

tedy $V \setminus U \in \mathfrak{M}$. Jsou-li $U, V \in \mathfrak{M}$, $U \cap V = \emptyset$, odvodí se podobně

$$P_{s,t}\mathbf{1}_{U\cup V} = P_{s,t}\mathbf{1}_U + P_{s,t}\mathbf{1}_V,$$

proto $U \cup V \in \mathfrak{M}$. Nakonec, jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$, pak $\mathbf{1}_{A_k} \nearrow \mathbf{1}_A$ a podle Leviho věty

$$P_{s,t}\mathbf{1}_A(y) = \mathsf{E}\mathbf{1}_A(X^{s,y}(t)) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\mathbf{1}_{A_k}(X^{s,y}(t)) = \lim_{k\to\infty} P_{s,t}\mathbf{1}_{A_k}(y), \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

tudíž $A \in \mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}$ je σ-aditivní systém. Podle Dynkinova lemmatu o σ-aditivních systémech $\mathfrak{M} = \mathscr{B}$, to jest $P_{s,t}\mathbf{1}_U \in \mathrm{b}\mathscr{B}$ pro každou $U \in \mathscr{B}$. Z toho plyne tvrzení důsledku 6.6 pro každou jednoduchou borelovskou funkci (lineární kombinaci indikátorů) díky linearitě $P_{s,t}$. Zbývá uvážit, že libovolná funkce z $\mathrm{b}\mathscr{B}$ je stejnoměrnou limitou jednoduchých funkcí a že operátor $P_{s,t}$ je spojitý vzhledem ke stejnoměrné konvergenci. Q.E.D.

Formulaci následující věty předešleme dvě tvrzení o rovnici (27). Nejprve připomeňme lemma o lokální jednoznačnosti (krok 1 v důkazu důsledku 2.3). Jsou-li X, Y dvě řešení rovnice (27), $\mathsf{E}\{\|X(s)\|^2 + \|Y(s)\|^2\} < \infty$, $\Sigma = \{\omega \in \Omega;\ X(s,\omega) = Y(s,\omega)\}$, potom

$$\mathsf{P}\Big\{\omega \in \Sigma;\ \sup_{t\geq s} \|X(t,\omega) - Y(t,\omega)\| > 0\Big\} = 0.$$

Dále si uvědomme, že platí:

Poznámka 6.7. Nechť $s \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}^m$, pak jsou řešení $X^{s,x}$ a σ-algebra $\mathscr{F}_s$ nezávislé. Označme totiž $\mathscr{P}_s$ σ-algebru generovanou přírůstky $W(t) - W(s)$, $t \geq s$ a všemi P-nulovými množinami v $\mathscr{F}$, σ-algebry $\mathscr{P}_s$ a $\mathscr{F}_s$ jsou zřejmě nezávislé. Podle důkazu věty 2.1 je proces $X^{s,x}$ limitou procesů X_k, definovaných pro $t \geq s$, $k \geq 1$ vztahem

$$X_{k+1}(t) = x + \int_s^t b(r, X_k(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^t \sigma(r, X_k(r))\,\mathrm{d}W(r), \quad X_0(t) = x.$$

Indukcí podle k lze snadno nahlédnout, že X_k jsou $\mathscr{P}_s$-měřitelné.[62]

Nyní již můžeme dokázat náš hlavní výsledek.

[62] Podotkněme, že proces $X^{s,x}$ je možno vybrat dokonce $\sigma\big(W(t) - W(s),\ t \geq s\big)$-měřitelný. Viz D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan: *Multidimensional diffusion processes*, Springer-Verlag, Berlin 1979, Corollary 5.1.3.

Věta 6.7. *Pro všechna $s, t, u \in \mathbb{R}_+$, $s \le u \le t$, pro libovolnou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ a každou $\mathscr{F}_s$-měřitelnou funkci $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ platí*

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X^{s,\xi}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = P_{u,t}\varphi(X^{s,\xi}(u)) \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{35}$$

Při volbě $\varphi = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{B}$, přechází (35) v rovnost

$$\mathsf{P}\big(X^{s,\xi}(t) \in A \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = P(u, X^{s,\xi}(u), t, A),$$

tedy proces $X^{s,\xi}$ má markovskou vlastnost:

$$\mathsf{P}\big(X^{s,\xi}(t) \in A \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = \mathsf{P}\big(X^{s,\xi}(t) \in A \,\big|\, X^{s,\xi}(u)\big).$$

Výsledky odvozené v části B nynější kapitoly však zatím nelze užít, neboť dosud nevíme, zda P je přechodová pravděpodobnost (nebyla ještě ověřena Chapman-Kolmogorovova rovnost).

Důkaz. 1° Řešení rovnice (27) je určeno jednoznačně, tedy

$$X^{s,\xi}(t) = X^{u,X(u;s,\xi)}(t) \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Vztah (35) je tudíž ekvivalentní s

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X^{u,X(u;s,\xi)}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = P_{u,t}\varphi(X^{s,\xi}(u)).$$

Náhodná veličina $X^{s,\xi}(u)$ je $\mathscr{F}_u$-měřitelná, jistě proto stačí místo (35) ověřit, že rovnost

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X^{u,\eta}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = P_{u,t}\varphi(\eta) \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě} \tag{36}$$

platí pro každou $\mathscr{F}_u$-měřitelnou náhodnou veličinu $\eta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

2° Předpokládejme na okamžik, že (36) už bylo ověřeno pro všechny funkce $\varphi \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$, ukážeme, že pak (36) platí i pro libovolnou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$. Postup je analogický důkazu důsledku 6.6: buď nejprve $\varphi = \mathbf{1}_\Gamma$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená. Nalezněme $\varphi_k \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$ tak, aby $0 \le \varphi_k \le 1$, $\varphi_k \nearrow \mathbf{1}_\Gamma$ na $\mathbb{R}^m$. Tedy také $\varphi_k(X^{u,\eta}(t)) \nearrow \mathbf{1}_\Gamma(X^{u,\eta}(t))$ na Ω a podle Leviho věty pro podmíněné střední hodnoty

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\big(\varphi_k(X^{u,\eta}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = \mathsf{E}\big(\mathbf{1}_\Gamma(X^{u,\eta}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Z důkazu důsledku 6.6 víme, že $P_{u,t}\varphi_n \longrightarrow P_{u,t}\mathbf{1}_\Gamma$ na $\mathbb{R}^m$, odtud ihned plyne $P_{u,t}\varphi_k(\eta) \longrightarrow P_{u,t}\mathbf{1}_\Gamma(\eta)$ na Ω.

Položme

$$\mathfrak{N} = \{K \in \mathscr{B};\ (36) \text{ platí pro } \varphi = \mathbf{1}_K\}.$$

Právě jsme ukázali, že $\mathfrak{N}$ obsahuje systém všech otevřených množin; postupujíce jako v důkazu důsledku 6.6 se snadno přesvědčíme, že $\mathfrak{N}$ je σ-aditivní systém, proto $\mathfrak{N} = \mathscr{B}$. To už zřejmě implikuje, že (36) platí pro každou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}$.

3° Zbývá dokázat platnost (36) pro spojité funkce, zvolme proto pevně libovolnou $\varphi \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Nechť nejprve $\eta = y \in \mathbb{R}^m$. Protože řešení $X^{u,y}$ je nezávislé s $\mathscr{F}_u$, máme

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X^{u,y}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) = \mathsf{E}\varphi(X^{u,y}(t)) = P_{u,t}\varphi(y).$$

V dalším kroku předpokládejme, že η je jednoduchá $\mathscr{F}_u$-měřitelná funkce,

$$\eta = \sum_{i=1}^{N} y_i \mathbf{1}_{A_i},$$

kde množiny $A_1, \dots, A_N \in \mathscr{F}_u$ tvoří disjunktní rozklad prostoru Ω. Podle tvrzení o lokální jednoznačnosti

$$X^{u,\eta}(t) = \sum_{i=1}^{N} X^{u,y_i}(t)\mathbf{1}_{A_i} \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.} \tag{37}$$

Disjunktnost $A_1, \dots, A_N$ implikuje, že pro každé $\omega \in \Omega$ je nejvýše jeden sčítanec na pravé straně (37) nenulový, proto

$$\varphi(X^{u,\eta}(t)) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(X^{u,y_i}(t))\mathbf{1}_{A_i} \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Odtud snadno plyne

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big(\varphi(X^{u,\eta}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) &= \mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} \varphi(X^{u,y_i}(t))\mathbf{1}_{A_i} \,\Big|\, \mathscr{F}_u\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_i} \mathsf{E}\big(\varphi(X^{u,y_i}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_i} P_{u,t}\varphi(y_i) \\
&= P_{u,t}\varphi(\eta).
\end{aligned}$$

Buď dále $\eta \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ libovolná $\mathscr{F}_u$-měřitelná. Nutně existuje posloupnost $\{\eta_k\} \subseteq L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ jednoduchých $\mathscr{F}_u$-měřitelných funkcí tak, že $\eta_k \longrightarrow \eta$ v $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Podle lemmatu 6.4 také $X(t;u,\eta_k) \longrightarrow X(t;u,\eta)$ v $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$, vyberme podposloupnost $\{\eta_{k_j}\}$ takovou, aby

$$\eta_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \eta, \quad X(t;u,\eta_{k_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} X(t;u,\eta) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude.} \tag{38}$$

Ze spojitosti φ a důsledku 6.5 plyne

$$P_{u,t}\varphi(\eta_{k_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} P_{u,t}\varphi(\eta) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude}$$

a z věty o majorisované konvergenci dostaneme

$$\varphi(X(t;u,\eta_{k_j})) \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi(X(t;u,\eta)) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude a v } L^1(\Omega),$$

tedy také

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X(t;u,\eta_{k_j}))\,\big|\,\mathscr{F}_u\big) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mathsf{E}\big(\varphi(X(t;u,\eta))\,\big|\,\mathscr{F}_u\big) \quad \mathsf{P}\text{-skoro všude a v } L^1(\Omega).$$

Ježto ovšem

$$\mathsf{E}\big(\varphi(X(t;u,\eta_{k_j}))\,\big|\,\mathscr{F}_u\big) = P_{u,t}\varphi(\eta_{k_j}),$$

plyne (36) v uvažovaném případě limitním přechodem $j \to \infty$. Buď nakonec $\eta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ libovolná $\mathscr{F}_u$-měřitelná. Položme $\eta_k = \eta \mathbf{1}_{\{\|\eta\| \le k\}}$, z důkazu důsledku 2.3 víme, že $X(t;u,\eta) = X(t;u,\eta_k)$ P-skoro jistě na množině $\{\|\eta\| \le k\}$. To znamená, že $X(t;u,\eta_k) \longrightarrow X(t;u,\eta)$ v pravděpodobnosti při $k \to \infty$, proto pro nějakou podposloupnost $\{\eta_{k_j}\}$ platí (38) a důkaz završíme zřejmým způsobem. Q.E.D.

Věta 6.8. *Pro všechna $s,t,u \in \mathbb{R}_+$, $s \le u \le t$, a každou $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ platí*

$$P_{s,u}(P_{u,t}\varphi) = P_{s,t}\varphi \quad \textit{na } \mathbb{R}^m. \tag{39}$$

Speciálně, funkce P definovaná vztahem (28) *je přechodová pravděpodobnost.*

Důkaz. Užitím věty 6.7 dostáváme

$$\begin{aligned} P_{s,t}\varphi(y) &= \mathsf{E}\varphi(X^{s,y}(t)) = \mathsf{E}\mathsf{E}\big(\varphi(X^{s,y}(t))\,\big|\,\mathscr{F}_u\big) \\ &= \mathsf{E}\big(P_{u,t}\varphi(X^{s,y}(u))\big) \\ &= P_{s,u}(P_{u,t}\varphi)(y) \end{aligned}$$

pro každé $y \in \mathbb{R}^m$. Buď dále $\Lambda \in \mathscr{B}$ libovolná, formule (39) aplikována na funkci $\mathbf{1}_\Lambda$ dává

$$\begin{aligned} P(s,y,t,\Lambda) &= P_{s,t}\mathbf{1}_\Lambda(y) \\ &= P_{s,u}(P_{u,t}\mathbf{1}_\Lambda)(y) = P_{s,u}\big(P(u,\cdot,t,\Lambda)\big)(y) \\ &= \mathsf{E}P(u,X^{s,y}(u),t,\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^m} P(u,z,t,\Lambda)\,\mathrm{d}\mathsf{P}\circ X^{s,y}(u)^{-1}(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} P(u,z,t,\Lambda)P(s,y,u,\mathrm{d}z), \end{aligned}$$

protože $\mathsf{P} \circ X^{s,y}(u)^{-1} = P(s,y,u,\cdot)$ přímo podle definice (28). Vidíme tedy, že P vyhovuje Chapman-Kolmogorovově rovnosti; ostatní požadované vlastnosti přechodové pravděpodobnosti plynou z (28) a z důsledku 6.6. Q.E.D.

Konstrukce. Nyní popíšeme markovský proces, korespondující rovnici (27). Již víme, že funkce

$$P(s,y,t,A) = \mathsf{P}\big\{X^{s,y}(t) \in A\big\}$$

je přechodová pravděpodobnost. Podle věty 6.2 bychom tudíž mohli sestrojit markovský proces s přechodovou pravděpodobností P, definovaný na součinovém prostoru $(\mathbb{R}^m)^{[0,\infty[}$ všech trajektorií, tím bychom se však ochudili o informaci, kterou přináší spojitost trajektorií řešení rovnice (27). Položme proto

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Omega} = \mathscr{C}([0,\infty[\,;\mathbb{R}^m),\\
&\widehat{X}(t) : \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ \hat{\omega} \longmapsto \hat{\omega}(t), \quad t \ge 0,\\
&\widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty} = \sigma(\widehat{X}(r), r \ge s),\ \widehat{\mathscr{F}}_{s,t} = \sigma(\widehat{X}(r), s \le r \le t),\ \widehat{\mathscr{F}} = \widehat{\mathscr{F}}_{0,\infty}, \quad 0 \le s \le t.
\end{aligned}$$

Pro $s \ge 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ definujme míru $\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}$ na $\widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty}$ předpisem

$$\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}(B) = \mathsf{P}\big\{\omega \in \Omega;\ X^{s,y}(\cdot,\omega) \in B\big\}, \quad B \in \widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty}. \tag{40}$$

Funkce $\omega \longmapsto X^{s,y}(\cdot,\omega)$ je $(\mathscr{F}, \widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty})$-měřitelná a definice (40) je tudíž korektní. To je zřejmé, protože σ-algebru $\widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty}$ generují množiny tvaru

$$\Xi = \big\{\hat{\omega} \in \widehat{\Omega};\ \widehat{X}(t) \in A\big\}, \quad t \ge s,\ A \in \mathscr{B}$$

a

$$\big\{\omega \in \Omega;\ X^{s,y}(\cdot,\omega) \in \Xi\big\} = \big\{\omega \in \Omega;\ X^{s,y}(t) \in A\big\}$$

je očividně $\mathscr{F}$-měřitelná. Z definice (40) snadno plyne, že pro $f \in \mathrm{b}\widehat{\mathscr{F}}_{s,\infty}$ jest

$$\widehat{\mathsf{E}}_{s,y} f = \mathsf{E} f(X^{s,y}(\cdot)).$$

Speciálně pro $f = h(\widehat{X}(t_1), \dots, \widehat{X}(t_k))$, $h \in \mathrm{b}\mathscr{B}^{\otimes k}$, $0 \le t_1 < \dots < t_k$, platí

$$\widehat{\mathsf{E}}_{s,y} f = \widehat{\mathsf{E}}_{s,y} h(\widehat{X}(t_1), \dots, \widehat{X}(t_k)) = \mathsf{E} h(X^{s,y}(t_1), \dots, X^{s,y}(t_k)). \tag{41}$$

Očividně,

$$\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}\big\{\widehat{X}(s) = y\big\} = 1,$$

zbývá ověřit markovskou vlastnost:

$$\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}\big(\widehat{X}(t) \in A \,\big|\, \widehat{\mathscr{F}}_{s,u}\big) = P(u, \widehat{X}(u), t, A) \quad \widehat{\mathsf{P}}_{s,y}\text{-skoro jistě,}$$

kdykoliv $0 \le s \le u \le t$, $A \in \mathscr{B}$, $y \in \mathbb{R}^m$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti je třeba dokázat

$$\forall Z \in \widehat{\mathscr{F}}_{s,u} \qquad \int_Z \mathbf{1}_A(\widehat{X}(t))\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_{s,y} = \int_Z P(u, \widehat{X}(u), t, A)\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}. \tag{42}$$

Běžným postupem, který jsme již několikrát užili, lze důkaz (42) redukovat k případu

$$Z = \{\widehat{X}(r_1) \in B_1, \dots, \widehat{X}(r_k) \in B_k\},$$

$s \le r_1 < \cdots < r_k \le u$, $B_i \in \mathscr{B}$ libovolné. Užívajíce (41) a větu 6.7 dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_Z \mathbf{1}_A(\widehat{X}(t))\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_{s,y} &= \int_{\widehat{\Omega}} \mathbf{1}_{B_1}(\widehat{X}(r_1)) \cdots \mathbf{1}_{B_k}(\widehat{X}(r_k))\mathbf{1}_A(\widehat{X}(t))\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_{s,y} \\
&= \widehat{\mathsf{E}}_{s,y} \mathbf{1}_{B_1 \times \cdots \times B_k \times A}(\widehat{X}(r_1), \dots, \widehat{X}(r_k), \widehat{X}(t)) \\
&= \mathsf{E}\mathbf{1}_{B_1 \times \cdots \times B_k \times A}(X^{s,y}(r_1), \dots, X^{s,y}(r_k), X^{s,y}(t)) \\
&= \mathsf{E}\Big(\mathbf{1}_{B_1 \times \cdots \times B_k}(X^{s,y}(r_1), \dots, X^{s,y}(r_k))\mathsf{E}\big(\mathbf{1}_A(X^{s,y}(t)) \,\big|\, \mathscr{F}_u\big)\Big) \\
&= \mathsf{E}\Big(\mathbf{1}_{B_1 \times \cdots \times B_k}(X^{s,y}(r_1), \dots, X^{s,y}(r_k))P(u, X^{s,y}(u), t, A)\Big) \\
&= \widehat{\mathsf{E}}_{s,y}\Big(\mathbf{1}_{B_1 \times \cdots \times B_k}(\widehat{X}(r_1), \dots, \widehat{X}(r_k))P(u, \widehat{X}(u), t, A)\Big) \\
&= \int_Z P(u, \widehat{X}(u), t, A)\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_{s,y}.
\end{aligned}$$

Tedy $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{F}}, (\widehat{\mathscr{F}}_{s,t}), \widehat{X}, (\widehat{\mathsf{P}}_{s,x}))$ je markovský proces se spojitými trajektoriemi a s přechodovou pravděpodobností P. (Někdy se hovoří o kanonickém markovském procesu definovaném rovnicí (27).)

Poznámka 6.8. Je užitečné si uvědomit následující vlastnost předvedené konstrukce: opatříme-li prostor $\widehat{\Omega} = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ metrikou

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_{0 \le t \le n} \|f(t) - g(t)\|}{1 + \sup\limits_{0 \le t \le n} \|f(t) - g(t)\|},$$

jest $(\widehat{\Omega}, \varrho)$ úplný separabilní metrický prostor a $f_n \to f$ v $(\widehat{\Omega}, \varrho)$, právě když $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na $[0, \infty[$. Dále, σ-algebra $\widehat{\mathscr{F}}$ generovaná všemi projekcemi $\widehat{X}(t) : \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\widehat{\omega} \longmapsto \widehat{\omega}(t)$, splývá s borelovskou σ-algebrou prostoru $(\widehat{\Omega}, \varrho)$. Naznačme důkaz: inkluse $\widehat{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{B}(\widehat{\Omega})$ je jasná, ježto projekce $\widehat{X}(t)$ jsou spojité a množiny $\{\widehat{X}(t) \in A\}$, $t \ge 0$, $A \in \mathscr{B}$, generující $\widehat{\mathscr{F}}$, jsou proto borelovské v $\widehat{\Omega}$.

Naopak, povšimněme si, že $\varrho(\cdot, g)$ je $\widehat{\mathscr{F}}$-měřitelná funkce pro libovolnou $g \in \widehat{\Omega}$. Stačí ověřit, že funkce

$$f \longmapsto \sup_{0 \le t \le n} \|f(t) - g(t)\|$$

jsou $\widehat{\mathscr{F}}$-měřitelné pro všechna $n \in \mathbb{N}$, avšak zřejmě

$$\Big\{ f \in \widehat{\Omega};\ \sup_{0 \le t \le n} \|f(t) - g(t)\| \le a \Big\} = \bigcap_{\substack{0 \le s \le n \\ s \in \mathbb{Q}}} \Big\{ f \in \widehat{\Omega};\ \|f(s) - g(s)\| \le a \Big\} \in \widehat{\mathscr{F}}$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$. Koule v $(\widehat{\Omega}, \varrho)$ tedy náleží σ-algebře $\widehat{\mathscr{F}}$ a k důkazu $\mathscr{B}(\widehat{\Omega}) \subseteq \widehat{\mathscr{F}}$ zbývá jen uvážit, že díky separabilitě je každá otevřená množina v $\widehat{\Omega}$ spočetným sjednocením koulí.

Z věty 6.1 víme, že přechodová pravděpodobnost určuje markovský proces v podstatě jednoznačně (přesněji: určuje jednoznačně jeho konečnědimensionální rozdělení, nikoliv třeba trajektorie). Nevíme ale, zda koeficienty b, σ rovnice (27) určují jednoznačně přechodovou pravděpodobnost. Buď totiž B libovolný n-dimensionální Wienerův proces, definovaný na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Xi, \mathscr{G}, \mathsf{Q})$, pro $s \ge 0$ a $z \in \mathbb{R}^m$ označme $Y^{s,z}$ řešení rovnice

$$\mathrm{d}Y = b(t, Y)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, Y)\,\mathrm{d}B \tag{43}$$

s počáteční podmínkou $Y^{s,z}(s) = z$. (To jest, (43) je rovnice s týmiž koeficienty, jako (27), ale obecně s odlišným Wienerovým procesem, definovaným na jiném pravděpodobnostním prostoru.) Abychom mohli říci, že přechodová pravděpodobnost definovaná předpisem (28) závisí jen na b, σ, potřebujeme ověřit, že

$$\mathsf{P}\big\{X^{s,z}(t) \in A\big\} = \mathsf{Q}\big\{Y^{s,z}(t) \in A\big\}, \quad 0 \le s \le t,\ z \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathscr{B}.$$

Formulaci příslušného výsledku je zapotřebí předeslat definici několika nových pojmů. Uvažujme rovnici

$$\mathrm{d}X = f(t, X)\,\mathrm{d}t + g(t, X)\,\mathrm{d}W, \tag{44}$$

kde $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}$ jsou borelovské funkce.

Definice 6.3. Čtveřici $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, X)$ nazveme *slabé řešení* rovnice (44) na intervalu $[s, \infty[$, $s \ge 0$, jestliže

i) $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ je filtrovaný pravděpodobnostní prostor;

ii) W je n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces na Ω;

iii) $X = (X_t)_{t \ge s}$ je $\mathbb{R}^m$-hodnotový $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný náhodný proces splňující

$$\int_s^t \big\{ \|f(r, X_r)\| + \|g(r, X_r)\|^2 \big\}\,\mathrm{d}r < \infty$$

a

$$X_t = X_s + \int_s^t f(r, X_r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t g(r, X_r)\,\mathrm{d}W_r$$

pro každé $t \geq s$ P-skoro jistě.

Buď μ borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^m$. Řekneme, že slabé řešení $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, X)$ je řešením vyhovujícím *počáteční podmínce* (s, μ), pokud $\mathsf{P} \circ X_s^{-1} = \mu$.

Uvědomme si, že počáteční podmínka (s, δ_x) má jednoduchou interpretaci – požadujeme, aby slabé řešení $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), (W, X))$ splňovalo $X(s) = x$ P-skoro jistě; jde tedy o deterministickou počáteční podmínku.

Naše dosavadní úvahy v kapitolách 2, 3 a 5 odpovídaly odlišnému konceptu řešení: pravíme, že rovnice (44) s počáteční podmínkou (s, μ) má *silné řešení*, jestliže pro každý filtrovaný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$, každý n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces W a libovolnou $\mathscr{F}_s$-měřitelnou náhodnou veličinu $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s $\mathsf{P} \circ \varphi^{-1} = \mu$ existuje $(\mathscr{F}_t)$-progresivně měřitelný proces X se stochastickým diferenciálem (44), splňující $X_s = \varphi$ P-skoro jistě. (Pro slabá řešení naopak chceme *nalézti* vhodně stochastickou basi a Wienerův proces tak, aby existoval proces se stochastickým diferenciálem (44)). Zřejmě je silné řešení úlohy (44) s počáteční podmínkou (s, μ) i jejím slabým řešením, opak neplatí (srovnej příklad 6.1 níže).

Definice 6.4. Pravíme, že rovnice (44) je

i) *silně jednoznačná*, jestliže pro libovolné $s \geq 0$ a každá dvě její slabá řešení $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, X)$ a $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, \widetilde{X})$ na $[s, \infty[$ s touž stochastickou basí a týmž Wienerovým procesem platí: je-li $\mathsf{P}\{X(s) = \widetilde{X}(s)\} = 1$, pak

$$\mathsf{P}\big\{\sup_{t \geq s} \|X(t) - \widetilde{X}(t)\| = 0\big\} = 1;$$

ii) *slabě jednoznačná*, jestliže pro libovolné $s \geq 0$ a každá dvě její slabá řešení $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, X)$ a $((\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, (\widetilde{\mathscr{F}}_t), \widetilde{\mathsf{P}}), \widetilde{W}, \widetilde{X})$ na $[s, \infty[$ platí: je-li

$$\mathsf{P} \circ X(s)^{-1} = \widetilde{\mathsf{P}} \circ \widetilde{X}(s)^{-1} \quad \text{na } \mathscr{B}(\mathbb{R}^m),$$

pak

$$\mathsf{P} \circ X^{-1} = \widetilde{\mathsf{P}} \circ \widetilde{X}^{-1} \quad \text{na } \mathscr{B}\big(\mathscr{C}([s, \infty[\,; \mathbb{R}^m)\big).$$

(Méně formálně, slabá jednoznačnost znamená: mají-li počáteční podmínky stejná rozdělení, mají i procesy X, $\widetilde{X}$ stejná rozdělení.[63]) Uvažujíce pouze řešení splňující

[63] Uvažme, že rozdělení uvažovaných náhodných procesů jsou skutečně definována na borelovské σ-algebře prostoru spojitých funkcí podle poznámky 6.8.

$\mathsf{P}\circ X(s)^{-1} = \mu$ zřejmým způsobem definujeme silnou a slabou jednoznačnost rovnice (44) s počáteční podmínkou (s,μ).[64]

Existenční věty odvozené v kapitolách 2, 3 a 5 tedy v nové terminologii říkají, že rovnice tam uvažované mají (za příslušných předpokladů) silně jednoznačná silná řešení. Jak uvidíme v příkladu 6.1, rovnice (44) může mít vlastnost slabé jednoznačnosti, i je-li silná jednoznačnost porušena, v opačném směru však platí následující netriviální výsledek:[65]

Věta 6.9. (T. Yamada & S. Watanabe, 1971) *Je-li rovnice* (44) *s počáteční podmínkou* (s,μ) *silně jednoznačná, je slabě jednoznačná.*

Důsledkem důkazu věty 6.9 je následující pozoruhodné tvrzení, ukazující sílu předpokladu o silné jednoznačnosti.[66]

Věta 6.10. *Nechť je rovnice* (44) *s počáteční podmínkou* (s,μ) *silně jednoznačná a nechť existuje její slabé řešení. Potom existuje její silné řešení. Dokonce existuje borelovská funkce* $F : \mathbb{R}^m \times \mathscr{C}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^m)$ *taková, že kdykoliv je* $((\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathsf{P}),W,X)$ *slabé řešení rovnice* (44) *s počáteční podmínkou* (s,μ)*, pak* $X = F(X(s),W)$ P*-skoro jistě.*

Funkce F obecně závisí na s a μ. Z representace $X = F(X(s),W)$ lze vyvodit, že za předpokladu silné jednoznačnosti je libovolné řešení měřitelné vůči obohacené filtraci generované počáteční podmínkou a Wienerovým procesem. Odtud dostáváme, že rovnice (44) silně jednoznačná podle definice 6.4 je jednoznačná po trajektoriích i v následujícím smyslu: pro každá dvě slabá řešení $((\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}),(\mathscr{F}_t),W,X)$ a $((\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}),(\tilde{\mathscr{F}}_t),W,\tilde{X})$ s týmž pravděpodobnostním prostorem a týmž Wienerovým procesem, ale s obecně různými filtracemi, platí: je-li $X(s) = \tilde{X}(s)$ skoro jistě, pak $X(t) = \tilde{X}(t)$ pro všechna $t \geq s$ skoro jistě. Povšimněme si, že přímý důkaz tohoto tvrzení není zřejmý ani pro rovnice s lipschitzovskými koeficienty, protože W nemusí být $(\mathscr{F}_t \vee \tilde{\mathscr{F}}_t)$-Wienerův proces.

Vraťme se k rovnici (27). Díky předpokladu (II) o lipschitzovskosti funkcí b, σ má (27) vlastnost silné jednoznačnosti, podle věty 6.9 je proto slabě jednoznačná, což speciálně znamená, že přechodová pravděpodobnost je rovnicí určena jednoznačně.

Příklad 6.1. (H. Tanaka) Definujme modifikovanou funkci signum předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases}$$

a uvažujme jednodimensionální stochastickou diferenciální rovnici

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\,\mathrm{d}W_s. \tag{45}$$

[64] V angličtině se pro silnou (respektive slabou) jednoznačnost nejčastěji používá termín "pathwise uniqueness" (respektive "uniqueness in law"), česká terminologie ustálena není.

[65] Jeho důkaz lze nalézti např. v N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland, Amsterdam 1981, §IV.1, nebo (mírně neúplný) v I. Karatzas, S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, Berlin 1988, Proposition 5.3.20.

[66] Jeho důkaz je uveden např. v N. Ikeda, S. Watanabe: *loc. cit.*, nebo v I. Karatzas, S. E. Shreve: *op. cit.*, Corollary 5.3.23.

a) Je-li $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, X)$ libovolné slabé řešení úlohy (45), pak $X_0 = 0$ a X je spojitý martingal s kvadratickou variací

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \left|\operatorname{sgn}(X_s)\right|^2 \mathrm{d}s = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s = t.$$

Podle Lévyho věty je proto X Wienerův proces a rovnice (45) má vlastnost slabé jednoznačnosti. Pro Wienerův proces ovšem platí[67] $\lambda \otimes \mathsf{P}\{X = 0\}=0$, tudíž $\operatorname{sgn}(-X) = -\operatorname{sgn}(X)$ $\lambda \otimes \mathsf{P}$-skoro všude. Odtud

$$-X_t = \int_0^t -\operatorname{sgn}(X_s) \, \mathrm{d}W_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(-X_s) \, \mathrm{d}W_s,$$

vidíme, že $((\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P}), W, -X)$ je také slabé řešení a rovnice (45) není silně jednoznačná.

b) Aby byl příklad zajímavý, je třeba dokázat, že existuje alespoň jedno slabé řešení. Buď X libovolný Wienerův proces, definovaný na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Xi, \mathscr{G}, \mathsf{Q})$. Označme $(\mathscr{G}_t^X)$ obohacenou kanonickou filtraci procesu X, to jest $\mathscr{G}_t^X = \sigma\big(\mathbf{N} \cup \sigma(X_r,\ 0 \le r \le t)\big)$, kde $\mathbf{N} = \{N \in \mathscr{G};\ \mathsf{Q}(N) = 0\}$. Definujme

$$W_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) \, \mathrm{d}X_s, \quad t \ge 0.$$

Podle části a) je W Wienerův proces a vzhledem k asociativitě stochastického integrálu

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) \, \mathrm{d}W_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\operatorname{sgn}(X_s) \, \mathrm{d}X_s = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}X_s = X_t,$$

tedy $((\Xi, \mathscr{G}, \mathsf{Q}), (\mathscr{G}_t^X), W, X)$ je slabé řešení rovnice (45). Označíme-li $(\mathscr{G}_t^W)$ obohacenou kanonickou filtraci procesu W, lze ukázat, že žádné $(\mathscr{G}_t^W)$-adaptované řešení rovnice (45) neexistuje; tato rovnice tedy nemá silné řešení – neznám však žádný elementární důkaz tohoto faktu.[68] (Povšimněme si, že v předvedené konstrukci jest $\mathscr{G}_t^X \supseteq \mathscr{G}_t^W$, pro případné $(\mathscr{G}_t^W)$-adaptované řešení X by musela platit inkluse opačná.)

Podotkněme nakonec, že pokud bychom definovali funkci signum standardně,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

[67] Viz J. Štěpán: *op. cit.*, Věta VII.1.11.

[68] Lze konsultovat např. Example 5.3.5 v již citované knize I. Karatzase a S. Shrevea.

pak by rovnici (45) přibylo ještě řešení $X \equiv 0$ a nebyla by ani slabě jednoznačná.

Slabou jednoznačnost nyní využijeme, abychom ukázali, že v autonomním případě – to jest, pokud koeficienty nezávisí na čase – je řešení rovnice (27) homogenní: změníme-li čas, v němž je zadána počáteční podmínka, řešení se posune, ale jeho rozdělení se nezmění, ve smyslu, který precisuje následující

Důsledek 6.11. *Nechť koeficienty b a σ vyhovují předpokladu 6.1, avšak nezávisí na čase, to jest, $b : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $\sigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times m}$ jsou lipschitzovské funkce. Je-li P přechodová pravděpodobnost definovaná rovnicí* (27)*, pak*

$$P(s, y, t, A) = P(0, y, t-s, A) \tag{46}$$

pro všechna $0 \le s \le t$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$.

Přechodové pravděpodobnosti splňující (46) se nazývají *homogenní.* Z (46) se snadno odvodí, že

$$P_{s,t}\varphi = P_{0,t-s}\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}.$$

Obvykle se v homogenním případě klade $P(t, y, A) = P(0, y, t, A)$, $P_t\varphi = P_{0,t}\varphi$. Operátory $(P_t)_{t\ge 0}$ pak tvoří semigrupu spojitých lineárních operátorů v prostorech $\mathrm{b}\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^m)$ (to jest, $P_{t+s} = P_tP_s$, $s, t \ge 0$).

Nástin důkazu. Podle definice řešení pro všechna $v \ge 0$ platí

$$\begin{aligned}
X^{0,y}(v) &= y + \int_0^v b(X^{0,y}(r))\,\mathrm{d}r + \int_0^v \sigma(X^{0,y}(r))\,\mathrm{d}W(r),\\
X^{s,y}(s+v) &= y + \int_s^{s+v} b(X^{s,y}(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^{s+v} \sigma(X^{s,y}(r))\,\mathrm{d}W(r)\\
&= y + \int_0^v b(X^{s,y}(s+r))\,\mathrm{d}r + \int_0^v \sigma(X^{s,y}(s+r))\,\mathrm{d}W^s(r),
\end{aligned}$$

kde $W^s(u) = W(s+u) - W(s)$, $u \ge 0$, je opět n-dimensionální Wienerův proces; rovnost stochastických integrálů by byla zřejmá, kdyby byl integrand jednoduchý proces, obecný případ lze ověřit standardní aproximační procedurou. Ze slabé jednoznačnosti rovnice (27) plyne, že procesy $X^{s,y}(s+\cdot)$ a $X^{0,y}$ mají stejná rozdělení,

$$\mathsf{P} \circ X^{s,y}(s+u)^{-1} = \mathsf{P} \circ X^{0,y}(u)^{-1}, \quad u \ge 0,$$

odtud

$$P(s, y, t, A) = \mathsf{P}\big\{X^{s,y}(t) \in A\big\} = \mathsf{P}\big\{X^{0,y}(t-s) \in A\big\} = P(0, y, t-s, A).$$

Q.E.D.

Poznámka 6.9. Dosti restriktivní předpoklady (I), (II) na koeficienty rovnice (27) jsme v části C užili jen na dvou místech: při důkazu lemmatu 6.4 a k zajištění (lokální) jednoznačnosti rovnice (27). Předvedené důkazy lze tudíž užít i na obecnou rovnici (44) s libovolnými borelovskými koeficienty, pokud jsme schopni ověřit jednoznačnost a spojitou závislost na počáteční podmínce (toho typu, který je uvažován v lemmatu 6.4). Všechny výsledky zůstavají tedy v platnosti např. pro rovnice s lokálně lipschitzovskými koeficienty nejvýše lineárního růstu.

Markovská vlastnost řešení stochastické diferenciální rovnice je ovšem – zhruba řečeno – důsledkem slabé jednoznačnosti a žádné předpoklady o koeficientech v podstatě nejsou zapotřebí. Důkazy příslušných tvrzení však vyžadují nové myšlenky a nejsou tak elemantární jako úvahy námi předvedené. Základní výsledek je následující:[69] má-li rovnice (44) s borelovskými koeficienty pro každou deterministickou počáteční podmínku slabě jednoznačné slabé řešení, pak mají všechna její řešení markovskou vlastnost s přechodovou pravděpodobností definovanou očekávaným způsobem.

Užití markovské vlastnosti ilustrujme alespoň jedním jednoduchým příkladem, který doplňuje výsledky z kapitoly 3.

Příklad 6.2. Vyšetřujme lineární rovnici

$$\mathrm{d}X = \big\{A(t)X + b(t)\big\}\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W \tag{47}$$

předpokládajíce, že W je n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces na stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ a $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times m}$, $b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ jsou lokálně integrovatelné (to jest, splňují předpoklad (P) z kapitoly 3). V důsledku 3.4 jsme ukázali: je-li X řešení rovnice (47) s gaussovskou počáteční podmínkou X_0 a je-li $t > 0$ takové, že kovarianční matice $\varrho(t,t)$ je regulární, pak

$$\forall U \neq \emptyset \text{ otevřenou} \quad \mathsf{P}\{X(t) \in U\} > 0. \tag{48}$$

Speciálně, označíme-li $\Phi = \Phi(\cdot, 0)$ fundamentální matici homogenní rovnice $\dot{X} = A(t)X$,

$$M_t = \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\sigma(s)^*\Phi^{-1}(s)^*\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

a $X^{0,y}$ řešení rovnice (47) s počáteční podmínkou $X^{0,y}(0) = y$, pak regularita M_t implikuje

$$\forall y \in \mathbb{R}^m \ \forall U \neq \emptyset \text{ otevřenou} \quad P(0,y,t,U) = \mathsf{P}\{X^{0,y}(t) \in U\} > 0. \tag{49}$$

[69] Pro omezené koeficienty je to dokázáno v D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan: *op. cit.*, Theorem 6.2.2; předpoklad omezenosti není podstatný.

Nyní tvrdíme: je-li M_t regulární, potom (48) platí pro *libovolné* řešení X rovnice (47). Vskutku, podle (49) a věty 6.7

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{X(t)\in U\} &= \mathsf{E}\mathsf{P}\big(X(t)\in U \,\big|\, \mathscr{F}_0\big) = \mathsf{E}P(0,X(0),t,U) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} P(0,y,t,U)\,\mathrm{d}\mathsf{P}\circ X(0)^{-1}(y) > 0. \end{aligned}$$

Podobně, vyšetřujíce jednodimensionální Ornstein-Uhlenbeckův proces X definovaný rovnicí

$$\mathrm{d}X = \alpha X\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W \tag{50}$$

s $\alpha < 0$, $\sigma \neq 0$, jsme ukázali, že

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E} f(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty) \quad \forall f \in \mathrm{b}\mathscr{B}(\mathbb{R}), \tag{51}$$

pokud má řešení X gaussovskou počáteční podmínku. (Připomeňme, že $\mathscr{N}(0,\varrho_\infty)$ značíme gaussovskou míru na $\mathbb{R}$ s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\varrho_\infty = -\sigma^2/(2\alpha)$.) Speciálně lze (51) užíti na řešení $X^{0,y}$ s počáteční podmínkou $X^{0,y}(0) = y \in \mathbb{R}$; dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} P_{0,t} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Z toho lze už usoudit, že (51) platí pro libovolné řešení X rovnice (50). Vzhledem k markovské vlastnosti

$$\begin{aligned} \mathsf{E} f(X_t) - \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty) &= \mathsf{E}\mathsf{E}\big(f(X_t)\,\big|\,\mathscr{F}_0\big) - \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty) \\ &= \mathsf{E}P_{0,t}f(X_0) - \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{0,t}f(y)\,\mathrm{d}\mathsf{P}\circ X_0^{-1}(y) - \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[P_{0,t}f(y) - \int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}\mathscr{N}(0,\varrho_\infty)\Big]\,\mathrm{d}\mathsf{P}\circ X_0^{-1}(y) \end{aligned}$$

a užijeme větu o majorisované konvergenci.

D. Markovské procesy se zadanými lokálními charakteristikami. Jedním z klasických příkladů motivujících vyšetřování spojitých markovských procesů v $\mathbb{R}^m$ je popis difuse mikroskopických částic v mediu. Pro jednoduchost zápisu uvažujme jednodimensionální případ, nechť je uvažovaná difuse popsána procesem (X_t). Sledujme částici, která se v čase s nacházela v bodě y, a hledejme pozorovatelné charakteristiky jejího pohybu. Posunutí částice za malý čas h lze přibližně popsat vztahem

$$X(s+h)-y \approx (\text{rychlost částice v čase } s \text{ a bodě } y)\times h + \text{náhodné fluktuace.}$$

Rychlost částice v čase s je podle definice

$$\text{rychlost} = \lim_{h\to 0}\frac{X(s+h)-X(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{X(s+h)-y}{h};$$

tato limita ovšem nemusí existovat, jak ukazuje příklad Brownova pohybu. Jsou-li náhodné fluktuace centrované, lze spíše očekávat, že bude existovat střední hodnota rychlosti ("průměr přes ansámbl částic")

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\mathsf{E}_{s,y}\left(\frac{X(s+h)-y}{h}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{E}_{s,y}X(s+h)-y}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}(z-y)P(s,y,s+h,\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

Nejjednodušším popisem fluktuací ("lokálního rozptylu trajektorií vycházejících z bodu y") je střední posunutí $\mathsf{E}_{s,y}(X(s+h)-y)^2$, které pro malá h chceme aproximovat lineární funkcí:

$$\mathsf{E}_{s,y}\big(X(s+h)-y\big)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(z-y)^2P(s,y,s+h,\mathrm{d}z)\approx a(s,y)h, \quad h\to 0.$$

Dalším přirozeným požadavkem je spojitost trajektorií, z níž též plyne, že

$$P\big(s,y,s+h,]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\big)\xrightarrow[h\downarrow 0]{} 1, \quad \varepsilon>0.$$

Je-li tato konvergence dostatečně rychlá ("pravděpodobnost nekonečně rychle se šířícího signálu dostatečně malá"), lze při výpočtu rychlosti a fluktuací uvažovat jen chování X na okolí bodu y; speciálně, nemusíme předpokládat existenci žádných momentů.

Naznačené úvahy motivují následující definici, v níž značíme $B(y,\varepsilon)$ otevřenou kouli v $\mathbb{R}^m$ o středu y a poloměru $\varepsilon>0$.

Definice 6.5. Buď $(X,\mathsf{P}_{s,x})$ markovský proces v $\mathbb{R}^m$ se spojitými trajektoriemi a s přechodovou pravděpodobností P. Nechť existují funkce $b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$,

$a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times m}$ tak, že pro všechna $s \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} P(s, y, s+h, \mathbb{R}^m \setminus B(y,\varepsilon)) = 0, \tag{52}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{B(y,\varepsilon)} (z-y) P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = b(s,y), \tag{53}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{B(y,\varepsilon)} (z-y)(z-y)^* P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = a(s,y). \tag{54}$$

Potom pravíme, že X je *difusní proces* s *driftem* (lokálním posunutím) b a s *maticí difuse* a. O funkcích b, a hovoříme jako o *lokálních charakteristikách* procesu X.

Pro úplnou jasnost přepišme ještě (54) po složkách:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{B(y,\varepsilon)} (z_i - y_i)(z_j - y_j) P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = a_{ij}(s,y), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Povšimněme si, že definice 6.5 klade omezení hlavně na přechodovou pravděpodobnost, vlastní proces do ní vstupuje pouze požadavkem spojitosti trajektorií.

Je třeba varovat, že pojem difusní proces je užíván různými autory v nejrozmanitějších kontextech, někdy s poněkud vágním významem (řešení "rozumné" stochastické diferenciální rovnice, silně markovský proces se spojitými trajektoriemi, markovský proces definovaný lokálním diferenciálním operátorem 2. řádu, ...). Uvedená definice je trochu staromódní, ale je intuitivně názorná.

Nejprve odvodíme jednoduché postačující podmínky pro platnost (52)–(54), aplikovatelné na procesy X mající momenty dostatečně vysokého řádu.

Lemma 6.12. *Buď P přechodová pravděpodobnost v $\mathbb{R}^m$ taková, že pro nějaké $\delta > 0$ a všechna $s \geq 0$ a $y \in \mathbb{R}^m$ platí*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} \|z-y\|^{2+\delta} P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = 0, \tag{55}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} (z-y) P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = b(s,y), \tag{56}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} (z-y)(z-y)^* P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) = a(s,y). \tag{57}$$

Potom jsou splněny požadavky (52)–(54) *z definice 6.5.*

Důkaz. Zvolme $s \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$ libovolně pevně. Předpokládajíce (55) dostaneme

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\{\|z-y\|\geq\varepsilon\}} P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta}} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \|z-y\|^{2+\delta} P(s, y, s+h, \mathrm{d}z) \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0$$

podle Čebyševovy nerovnosti, tedy (55) implikuje (52). Podobně pro $j = 1, 2$ platí

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\{\|z-y\|\geq\varepsilon\}} \|z-y\|^j P(s,y,s+h,\mathrm{d}z)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta-j}} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \|z-y\|^{2+\delta} P(s,y,s+h,\mathrm{d}z) \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0,$$

tedy za předpokladu (55) je (53) ekvivalentní s (56) a (54) s (57). Q.E.D.

Definice 6.5 vyvolává přirozenou otázku: jsou-li dány funkce b a a (vyvozené např. z fysikálních experimentů), existuje difusní proces s lokálními chrakteristikami b, a? (Povšimněme si, že definice 6.5 klade na funkce b, a jediné apriorní omezení: matice $a(s,y)$ musí být pro všechna (s,y) symetrická positivně semidefinitní.) První navržené řešení tohoto problému bylo analytické (A. N. Kolmogorov, W. Feller, 30. léta dvacátého století). Předpokládejme, že hledaný difusní proces existuje, pak lze za vhodných předpokladů na funkce b a a dokázat, že jeho přechodová pravděpodobnost P má hustotu vůči Lebesgueově míře,

$$P(s,y,t,A) = \int_A p(s,y,t,z)\,\mathrm{d}z, \quad 0 \leq s \leq t,\ y \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathscr{B},$$

a funkce $p(\cdot,\cdot,t,z)$ řeší rovnici

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(s,y)\frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^m b_i(s,y)\frac{\partial p}{\partial y_i} = 0 \tag{58}$$

s koncovou podmínkou

$$\lim_{s\to t-} p(s,y,t,\cdot)\lambda = \delta_y$$

ve smyslu vágní konvergence měr, to jest

$$\lim_{s\to t-} \int_{\mathbb{R}^m} f(z)p(s,y,t,z)\,\mathrm{d}z = f(y)$$

pro každou $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^m)$ s kompaktním nosičem. (To je tzv. Kolmogorovova zpětná (backward) rovnice.) Naopak, jsme-li pro dostatečně regulární koeficienty a, b schopni vyřešit rovnici (58) s příslušnou koncovou podmínkou a ukázat, že nalezené řešení má vlastnosti přechodové hustoty, pak lze definovat markovský proces procedurou z věty 6.2 a završit konstrukci důkazem spojitosti trajektorií.

K. Itô (1942) vytvořil theorii stochastických diferenciálních rovnic jako alternativní, pravděpodobnostní methodu konstrukce markovských procesů.[70] Uvedeme si nyní jeden výsledek v tomto směru. Vraťme se opět k rovnici

$$\mathrm{d}X = b(t,X)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,X)\,\mathrm{d}W, \tag{27}$$

[70] Nezávisle pravděpodobnostní konstrukci difusních procesů nalezl W. Doeblin. Doeblinova pozoruhodná práce však byla opublikována až v roce 2000, šedesát let po autorově smrti, a neměla vliv na další vývoj.

jejíž koeficienty vyhovují podmínkám (I), (II) lineárního růstu a lipschizovskosti v prostorové proměnné z předpokladu 6.1. Víme, že (27) definuje markovský proces se spojitými trajektoriemi a s přechodovou pravděpodobností

$$P(s,y,t,A) = \mathsf{P}\big\{X^{s,y}(t) \in A\big\}, \quad 0 \le s \le t,\ y \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathscr{B}, \tag{28}$$

kde stále značíme $X^{s,y}$ řešení (27) s počáteční podmínkou $X^{s,y}(s) = y$.

Věta 6.13. *Buďte* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *a* $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ *spojité funkce takové, že jsou splněny předpoklady* (I), (II). *Potom je markovský proces definovaný rovnicí* (27) *difusní proces s driftem* b *a maticí difuse* $\sigma\sigma^*$.

Před vlastním důkazem připomeňme několik tvrzení. Ve větě 2.1 jsme dokázali, že pro všechna $p \ge 2$ a $T > s$ existuje konstanta $C = C(p, T, K_*)$ tak, že

$$\mathsf{E} \sup_{s \le r \le T} \big\|X^{s,y}(r)\|^p \le C\big(1 + \|y\|^p\big). \tag{59}$$

Dále je nám známo (srovnej formule (33) a (34)), že rovnost

$$\mathsf{E} f(X^{s,y}(t)) = \int_{\mathbb{R}^m} f(z) P(s,y,t,\mathrm{d}z), \quad 0 \le s \le t,\ z \in \mathbb{R}^m, \tag{60}$$

platí pro každou $f \in \mathrm{b}\mathscr{B}$. Buď nyní $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ borelovská funkce polynomiálního růstu, to jest

$$\exists \alpha > 0\ \exists L < \infty\ \forall z \in \mathbb{R}^m \qquad |f(z)| \le L\big(1 + \|z\|^\alpha\big), \tag{61}$$

tvrdíme, že formule (60) opět platí. Odhady (59) a (61) zajišťují konečnost levé strany v (60), bez újmy na obecnosti proto můžeme předpokládat, že $f \ge 0$. Potom existují omezené borelovské funkce $f_N \ge 0$ (pro které (60) platí) tak, že $f_N \nearrow f$ na $\mathbb{R}^m$, tudíž (60) platí i pro funkci f podle Leviho věty.

Důkaz věty 6.13. Zvolme pevně $s \ge 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, položme $a = \sigma\sigma^*$. Užijeme-li rovnost (60) a lemma 6.12, vidíme, že stačí dokázat

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{E}\big\|X^{s,y}(s+h) - y\big\|^4 = 0, \tag{62}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{E}\big(X^{s,y}(s+h) - y\big) = b(s,y), \tag{63}$$

$$\lim_{h \to 0+} \mathsf{E}\Big\{\big(X_i^{s,y}(s+h) - y_i\big)\big(X_j^{s,y}(s+h) - y_j\big)\Big\} = a_{ij}(s,y) \tag{64}$$

pro $1 \le i, j \le m$, kde jsme označili $X^{s,y} = (X_1^{s,y}, \ldots, X_m^{s,y})^*$. Podle lemmatu 6.4 existuje konstanta $C' < \infty$ taková, že pro $h \in [0,1]$ platí

$$\mathsf{E}\big\|X^{s,y}(s+h) - y\big\|^4 \le C' h^2 \big(1 + \|y\|^4\big),$$

odtud (62) přímo plyne. Ověříme (63):

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\mathsf{E}\big(X^{s,y}(s+h)-y\big) &= \frac{1}{h}\mathsf{E}\Big\{\int_s^{s+h} b(r,X^{s,y}(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^{s+h}\sigma(r,X^{s,y}(r))\,\mathrm{d}W(r)\Big\}\\ &= \frac{1}{h}\mathsf{E}\int_s^{s+h} b(r,X^{s,y}(r))\,\mathrm{d}r\\ &= \mathsf{E}\int_0^1 b(s+hv,X^{s,y}(s+hv))\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Vzhledem ke spojitosti b a spojitosti trajektorií procesu $X^{s,y}$

$$\lim_{h\to 0+} b(s+hv,X^{s,y}(s+hv)) = b(s,y)$$

pro $\lambda\otimes\mathsf{P}$-skoro všechna $(v,\omega)\in[0,1]\times\Omega$, odtud

$$\lim_{h\to 0+}\mathsf{E}\int_0^1 b(s+hv,X^{s,y}(s+hv))\,\mathrm{d}v = b(s,y),$$

ježto integrand vlevo má vzhledem k předpokladu (I) a k (59) integrovatelnou majorantu $K_*(1+\sup_{s\le r\le s+1}\|X^{s,y}(r)\|)$ nezávislou na $h\in\,]0,1]$, tím je (63) dokázáno. K důkazu (64) fixujme $i,j\in\{1,\dots,m\}$, užitím Itôovy formule na funkci $u\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m)$, $u(z)=z_iz_j$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathsf{E}u(X^{s,y}(s+h))-u(y) &= \mathsf{E}X_i^{s,y}(s+h)X_j^{s,y}(s+h)-y_iy_j\\ &= \mathsf{E}\int_s^{s+h}\Big\{b_i(r,X^{s,y}(r))X_j^{s,y}(r)+b_j(r,X^{s,y}(r))X_i^{s,y}(r)\\ &\qquad+\sum_{k=1}^n\sigma_{ik}(r,X^{s,y}(r))\sigma_{jk}(r,X^{s,y}(r))\Big\}\,\mathrm{d}r\\ &\qquad+\mathsf{E}\int_s^{s+h}\cdots\,\mathrm{d}W(r)\\ &= \mathsf{E}\int_s^{s+h}\Big\{b_i(r,X^{s,y}(r))X_j^{s,y}(r)+b_j(r,X^{s,y}(r))X_i^{s,y}(r)\\ &\qquad+a_{ij}(r,X^{s,y}(r))\Big\}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Postupujíce jako v důkazu formule (63) odvodíme

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\mathsf{E}\Big\{X_i^{s,y}(s+h)X_j^{s,y}(s+h)-y_iy_j\Big\} = b_i(s,y)y_j+b_j(s,y)y_i+a_{ij}(s,y).$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\mathsf{E}\Big\{\big(X_i^{s,y}(s+h)-y_i\big)\big(X_j^{s,y}(s+h)-y_j\big)\Big\}\\ &= b_i(s,y)y_j + b_j(s,y)y_i + a_{ij}(s,y)\\ &\quad - y_j\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\mathsf{E}\big(X_i^{s,y}(s+h)-y_i\big)\\ &\quad - y_i\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\mathsf{E}\big(X_j^{s,y}(s+h)-y_j\big)\\ &= a_{ij}(s,y);\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost vyplývá z (63). Q.E.D.

Věta 6.13 říká, že řešení rovnice (27) je difusní proces s lokálními charakteristikami b a $\sigma\sigma^*$. Původní úloha byla ovšem poněkud odlišná: máme zadány funkce b a a a hledáme difusní proces s lokálními charakteristikami b a a. Abychom ho mohli získat řešením rovnice (27), musíme umět faktorisovat matici a do tvaru $a=\sigma\sigma^*$, to obecně není snadné. Přímo z definice difusní matice plyne, že $a(s,y)$ je symetrická positivně semidefinitní matice pro všechna $(s,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$. Pro každé (s,y) tedy existuje jediná symetrická positivně semidefinitní matice $\sigma(s,y)\equiv a^{1/2}(s,y)\in\mathbb{M}_{m\times m}$ taková, že $\sigma^2(s,y)=a(s,y)$. Není však *a priori* zřejmé, zda je funkce $x\mapsto\sigma(s,x)$ dostatečně regulární, aby bylo možno řešit rovnici (27). Ocitujme proto dva základní výsledky v tomto směru,[71] pro zjednodušení je zformulujeme jen v autonomním případě, kdy matice a nezávisí na čase. Situace je relativně přehledná v regulárním případě, je-li a uniformně positivně definitní.

Buď $a:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times m}$ lipschitzovská funkce taková, že matice $a(x)$ je symetrická pro každé $x\in\mathbb{R}^m$ a existuje $\alpha>0$ takové, že $\langle a(x)\theta,\theta\rangle\ge\alpha\|\theta\|^2$ pro všechna $x,\theta\in\mathbb{R}^m$. Potom je funkce $a^{1/2}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times m}$ také lipschitzovská.

Odtud lze ihned nahlédnout, že pro a lokálně lipschitzovskou s hodnotami v symetrických positivně definitních maticích (tj. $\langle a(x)\theta,\theta\rangle>0$ pro všechna $\theta,x\in\mathbb{R}^m$, $\theta\ne 0$) je $a^{1/2}$ lokálně lipschitzovská. Situace se komplikuje, pokud matice a může degenerovat, platí však věta (M. I. Freidlin; R. S. Phillips & L. Sarason, 1968):

Buď $a\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{M}_{m\times m})$ taková, že $a(x)$ je symetrická positivně semidefinitní pro každé $x\in\mathbb{R}^m$. Potom je funkce $a^{1/2}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{M}_{m\times m}$ lokálně lipschitzovská. Jesliže navíc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\sup_{1\le i,j,k,l\le m}\left|\frac{\partial^2 a_{ij}(x)}{\partial x_k\partial x_l}\right|<\infty,$$

potom je funkce $a^{1/2}$ lipschitzovská na $\mathbb{R}^m$.

---

[71] Cf. D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan: *op. cit.*, Theorems 5.2.2, 5.2.3; nebo A. Friedman: *Stochastic differential equations and applications*, Vol. I, Academic Press, New York 1975, Theorem 6.1.2.

Předpoklad $\mathscr{C}^2$-hladkosti nelze obecně oslabit: nechť $m = 1$, definujme $a(x) = |x|^{2-\varepsilon}$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$. Potom $a \notin \mathscr{C}^2$, a vskutku odmocnina $a^{1/2}(x) = |x|^{1-\varepsilon/2}$ není lokálně lipschitzovská funkce.

7. Exponenciální martingaly

Mějme pevně zvolenu stochastickou basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC). Motivací výsledků uvedených v této kapitole je hluboká Girsanovova věta:

Věta 7.1. (I. V. Girsanov, 1960) *Buď W n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces a X progresivně měřitelný n-dimensionální náhodný proces takový, že $X \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ P-skoro jistě pro nějaké $T > 0$. Položme*

$$G_t(X) = \exp\left(\int_0^t X_s^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

a předpokládejme, že

$$\mathsf{E}G_T(X) = 1. \tag{2}$$

Buď $\tilde{\mathsf{P}}$ pravděpodobnostní míra na $\mathscr{F}_T$ s hustotou $G_T(X)$, to jest $\mathrm{d}\tilde{\mathsf{P}} = G_T(X)\,\mathrm{d}\mathsf{P}$. Definujme

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s \,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T.$$

Potom je $(\widetilde{W}_t,\ 0 \le t \le T)$ n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}_T, \tilde{\mathsf{P}})$.

Každé užití věty 7.1 je podmíněno ověřením předpokladu (2), což zpravidla nelze provést na základě definice (1). Tuto kapitolu proto věnujeme postačujícím podmínkám pro platnost (2). Přitom se ukáže, že mnohdy není podstatný speciální tvar procesu $G(X)$ a místo stochastických integrálů lze vyšetřovat libovolné spojité lokální martingaly.

Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, jeho exponenciálu[72] definujeme vztahem

$$\mathscr{E}(M)_t = \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\Big), \quad t \ge 0.$$

Proces $G(X)$ definovaný rovností (1) je zřejmě speciálním případem:

$$G(X) = \mathscr{E}\left(\int_0^\cdot X^* \,\mathrm{d}W\right).$$

Itôova formule pro semimartingaly praví, že

$$\mathrm{d}f(Y) = f'(Y)\,\mathrm{d}Y + \frac{1}{2}f''(Y)\,\mathrm{d}\langle Y\rangle, \tag{3}$$

[72] Běžně užívané názvosloví je značně pestré: pro odlišení od standardní deterministické exponenciální funkce se hovoří často o *stochastické exponenciále*, o *exponenciále Doléansové* či o *exponenciálním (lokálním) martingalu* přiřazeném M.

kdykoliv $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ a Y je (reálný) semimartingal se spojitými trajektoriemi. Uživše (3) na funkci $f : r \longmapsto e^r$ a proces $Y = -\frac{1}{2}\langle M\rangle + M$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathscr{E}(M) &= -\frac{1}{2}\mathscr{E}(M)\,\mathrm{d}\langle M\rangle + \mathscr{E}(M)\,\mathrm{d}M + \frac{1}{2}\mathscr{E}(M)\,\mathrm{d}\langle Y\rangle \\ &= \mathscr{E}(M)\,\mathrm{d}M, \end{aligned}$$

neboť zřejmě $\langle Y\rangle = \langle M\rangle$. Očividně $\mathscr{E}(M)_0 = 1$, tudíž

$$\mathscr{E}(M)_t = 1 + \int_0^t \mathscr{E}(M)_s\,\mathrm{d}M_s, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Nyní je zřejmé, proč proces $\mathscr{E}(M)$ nazýváme exponenciálou: (4) je obdoba deterministického vztahu

$$e^t = 1 + \int_0^t e^s\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z formule (4) ihned plyne, že $\mathscr{E}(M)$ je spojitý lokální martingal. Jelikož $\mathscr{E}(M) \geq 0$, je $\mathscr{E}(M)$ také supermartingal a $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_t \leq \mathsf{E}\mathscr{E}(M)_0 = 1$ pro všechna $t \geq 0$. Skutečně, položme

$$\tau(n) = \inf\big\{t \geq 0;\ \mathscr{E}(M)_t = n\big\},$$

potom $\tau(n) \nearrow \infty$ P-skoro jistě a $(\mathscr{E}(M)_{\cdot\wedge\tau(n)})$ je omezený lokální martingal, tedy martingal. Proto

$$\mathsf{E}\big(\mathscr{E}(M)_{t\wedge\tau(n)}\,\big|\,\mathscr{F}_s\big) = \mathscr{E}(M)_{s\wedge\tau(n)}, \quad 0 \leq s \leq t,\ n \geq 1.$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ získáme podle Fatouova lemmatu[73] supermartingalovou vlastnost

$$\mathsf{E}\big(\mathscr{E}(M)_t\,\big|\,\mathscr{F}_s\big) \leq \mathscr{E}(M)_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Supermartingal $\mathscr{E}(M)$ je martingal, právě když

$$\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_t = \mathsf{E}\mathscr{E}(M)_0 = 1, \quad t \geq 0.$$

Dále, $\mathscr{E}(M)$ je nezáporný supermartingal, podle martingalové konvergenční věty proto existuje $\mathscr{E}(M)_\infty \in L^1(\mathsf{P})$ tak, že $\mathscr{E}(M)_t \longrightarrow \mathscr{E}(M)_\infty$ P-skoro všude při $t \to \infty$ a proces $(\mathscr{E}(M)_t,\ 0 \leq t \leq \infty)$ je supermartingal. $\mathscr{E}(M)$ je stejnoměrně integrovatelný martingal, právě když $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\infty = 1$. Pro libovolný (obecně $[0,\infty]$-hodnotový) markovský čas γ je náhodná veličina $\mathscr{E}(M)_\gamma$ dobře definována a $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma \leq 1$; $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$ platí, právě když je $(\mathscr{E}(M)_{t\wedge\gamma})_{t\geq 0}$ stejnoměrně integrovatelný martingal. (Ježto zřejmě $\mathscr{E}(M_{\cdot\wedge\gamma}) = \mathscr{E}(M)_{\cdot\wedge\gamma}$, stačilo by v dalším vždy uvažovat jen případ $\gamma \equiv +\infty$.)

[73] Fatouovo lemma pro podmíněné střední hodnoty lze nalézti např. v J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, Tvrzení VI.1.28.

Naším cílem je nalézti podmínky implikující, že exponenciální lokální martingal $\mathscr{E}(M)$ je martingal. Prvým hlavním výsledkem je následující

Věta 7.2. *Nechť je M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, a γ markovský čas. Předpokládejme, že*

$$\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) < \infty \tag{5}$$

pro všechna $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ a platí

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \log \mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) = 0. \tag{6}$$

Potom $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$.

Z věty 7.2 ihned vyplývá užitečný

Důsledek 7.3. (A. A. Novikov, 1972) *Je-li M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, γ markovský čas a platí-li*

$$\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) < \infty, \tag{7}$$

pak $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$.

Poznámka 7.1. Faktor $\frac{1}{2}$ v Novikovově podmínce je v jistém smyslu optimální: K libovolnému $\varrho \in]0, \frac{1}{2}[$ lze nalézti martingal M takový, že $\mathsf{E}\exp(\varrho\langle M\rangle_\infty) < \infty$, ale $\mathscr{E}(M)$ není stejnoměrně integrovatelný martingal. Vskutku, buď B jednodimensionální Wienerův proces, nalezněme $a \in]0, 1[$ takové, že $\varrho = a^2/2$, položme

$$\tau = \inf\{t \geq 0;\ B_t - at = -1\}$$

a definujme $M_t = B_{t\wedge\tau}$, $t \geq 0$. Zřejmě je τ markovský čas konečný P-skoro jistě a $M_\infty = B_\tau = a\tau - 1$, $\langle M\rangle_\infty = \langle B\rangle_\tau = \tau$, proto

$$M_\infty - \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty = \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\tau - 1,$$

odtud

$$\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\infty = \frac{1}{e}\,\mathsf{E}\exp\Big(\Big(a - \frac{1}{2}\Big)\tau\Big) \leq \frac{1}{e}\,\mathsf{E}\exp\Big(\frac{a^2}{2}\tau\Big).$$

Ovšem aM je opět spojitý lokální martingal, takže

$$1 \geq \mathsf{E}\mathscr{E}(aM)_\infty = \mathsf{E}\exp\Big(aB_\tau - \frac{a^2}{2}\tau\Big) = e^{-a}\,\mathsf{E}\exp\Big(\frac{a^2}{2}\tau\Big).$$

Z toho plyne

$$\mathsf{E}\exp(\varrho\langle M\rangle_\infty) = \mathsf{E}\exp\Big(\frac{a^2}{2}\langle M\rangle_\infty\Big) = \mathsf{E}\exp\Big(\frac{a^2}{2}\tau\Big) \le e^a < \infty,$$

zároveň ovšem platí

$$\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\infty \le e^{a-1} < 1.$$

Důkaz věty 7.2 je založen na následujícím lemmatu:[74]

Lemma 7.4. (R. Š. Lipcer & A. N. Širjajev, 1972) *Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, a γ markovský čas. Nechť existuje $\varepsilon > 0$ tak, že*

$$\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1+\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) < \infty. \tag{8}$$

Potom $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$.

Důkaz. Buď $\tau \le \gamma$ libovolný markovský čas. Vzhledem k předpokladu (8) je $\langle M\rangle_\tau \le \langle M\rangle_\gamma < \infty$ P-skoro jistě, tudíž M_τ je dobře definovaná náhodná veličina podle poznámky 4.3.[75] Buďte $p, r > 1$ zatím též libovolná. Potom

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\tau^p &= \mathsf{E}\exp\Big(pM_\tau - \frac{p}{2}\langle M\rangle_\tau\Big)\\
&= \mathsf{E}\Big\{\exp\Big(pM_\tau - \frac{p^2 r}{2}\langle M\rangle_\tau\Big)\exp\Big(\frac{p(pr-1)}{2}\langle M\rangle_\tau\Big)\Big\}\\
&\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(prM_\tau - \frac{p^2r^2}{2}\langle M\rangle_\tau\Big)\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)}\langle M\rangle_\tau\Big)\Big)^{\frac{r-1}{r}}\\
&= \big(\mathsf{E}\mathscr{E}(prM)_\tau\big)^{\frac{1}{r}}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)}\langle M\rangle_\tau\Big)\Big)^{\frac{r-1}{r}}\\
&\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)}\langle M\rangle_\tau\Big)\Big)^{\frac{r-1}{r}}\\
&\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{\frac{r-1}{r}};
\end{aligned}$$

na třetím řádku jsme využili Hölderovu nerovnost, na předposledním skutečnost, že $\mathscr{E}(prM)$ je supermartingal, na posledním neklesající trajektorie procesu $\langle M\rangle$.

[74]Větu 7.2 dokážeme postupem přejatým z preprintu N. V. Krylov: A simple proof of a result of A. Novikov, jenž je vystaven na adrese `http://arXiv.org/abs/math/0207013`.

[75]Z lemmatu C.2 dokonce víme, že $(M_{t\wedge\tau})$ je stejnoměrně integrovatelný martingal, neboť z předpokladu (8) plyne $\mathsf{E}\langle M\rangle_\gamma < \infty$.

Nechť nyní $p = 1 + \delta$, $r = 1 + \sqrt{\delta}$ pro nějaké $\delta > 0$, potom

$$\begin{aligned}\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)} &= \frac{(1+\delta+\sqrt{\delta}+\delta\sqrt{\delta})(\delta+\sqrt{\delta}+\delta\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}} \\ &= \frac{1+2\sqrt{\delta}+3\delta+3\delta\sqrt{\delta}+2\delta^2+\delta^2\sqrt{\delta}}{2}.\end{aligned}$$

Lze tedy zvolit $\delta > 0$ tak, aby

$$\frac{pr(pr-1)}{2(r-1)} \le \frac{1+\varepsilon}{2},$$

při této volbě δ (a p) podle (8) platí

$$\sup_{\tau\le\gamma} \mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\tau^p \equiv L < \infty, \tag{9}$$

kde supremum bereme přes všechny markovské časy $\tau \le \gamma$. Podle lemmatu C.4 je $\big(\mathscr{E}(M)_{t\wedge\gamma}\big)_{t\ge 0}$ stejnoměrně integrovatelný martingal, z čehož již dokazované tvrzení plyne. Q.E.D.

Podotkněme, že důkaz lze na základě (9) bez obtíží dokončit i přímo, bez užití lemmatu C.4: Existuje lokalisující posloupnost $\{\tau(n)\}$ omezených markovských časů tak, že $(\mathscr{E}(M)_{t\wedge\tau(n)})$ jsou omezené martingaly, tedy $(\mathscr{E}(M)^p_{t\wedge\tau(n)})$ jsou submartingaly. Pomocí Doobovy maximální nerovnosti a (9) odvodíme

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \mathscr{E}(M)^p_{t\wedge\tau(n)\wedge\gamma} \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathsf{E}\mathscr{E}(M)^p_{\tau(n)\wedge\gamma} \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p L,$$

takže podle Leviho věty o monotonní konvergenci také

$$\mathsf{E}\sup_{t\ge 0} \mathscr{E}(M)^p_{t\wedge\gamma} \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p L < \infty. \tag{10}$$

Proces $(\mathscr{E}(M)_{t\wedge\tau(n)})$ je martingal, tudíž $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_{\tau(n)\wedge\gamma} = 1$. Zřejmě $\mathscr{E}(M)_{\tau(n)\wedge\gamma} \longrightarrow \mathscr{E}(M)_\gamma$ P-skoro jistě při $n \to \infty$ a $\sup_{t\ge 0} \mathscr{E}(M)_{t\wedge\gamma} \in L^1(\mathsf{P})$ podle (10), proto podle věty o majorisované konvergenci $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$.

Z lemmatu 7.4 již větu 7.2 snadno odvodíme.

Důkaz věty 7.2. Vzhledem k předpokladu (5) pro $\varepsilon \in \,]0, 1/2[$ platí

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1+\varepsilon}{2}\big\langle(1-2\varepsilon)M\big\rangle_\gamma\Big) &= \mathsf{E}\exp\Big(\frac{(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) \\ &= \mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-\varepsilon(3-4\varepsilon^2)}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) < \infty,\end{aligned}$$

jelikož $3 - 4\varepsilon^2 \ge 1$. Proces $(1-2\varepsilon)M$ tedy splňuje předpoklady lemmatu 7.4 a

$$\mathsf{E}\mathscr{E}\big((1-2\varepsilon)M\big)_\gamma = 1. \tag{11}$$

Podle Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\mathscr{E}\big((1-2\varepsilon)M\big)_\gamma \\
&\quad= \mathsf{E}\exp\Big((1-2\varepsilon)M_\gamma - \frac{(1-2\varepsilon)^2}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) \\
&\quad= \mathsf{E}\Big\{\exp\Big((1-2\varepsilon)M_\gamma - \frac{(1-2\varepsilon)}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\exp\Big(\frac{2\varepsilon(1-2\varepsilon)}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big\} \\
&\quad\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(M_\gamma - \frac{1}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{1-2\varepsilon}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-2\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{2\varepsilon} \\
&\qquad\qquad= \Big(\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma\Big)^{1-2\varepsilon}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-2\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{2\varepsilon}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Uvědomme si, že předpoklad (6) znamená

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{\varepsilon} = 1. \qquad (13)$$

Užívajíce (11) a (13) limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$ z (12) odvodíme

$$\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma \ge 1,$$

opačná nerovnost platí vždy. Q.E.D.

Poznámka 7.2. Při pečlivém pohledu na důkaz věty 7.2 lze rozpoznat, že věta zůstává v platnosti, oslabíme-li (6) na

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\log\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big) < \infty.$$

Důkaz vyžaduje modifikaci až v posledním kroku, kdy při pevně zvoleném $N > 0$ odhadneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\mathscr{E}\big((1-2\varepsilon)M\big)_\gamma &= \mathsf{E}\big\{\mathbf{1}_{\{\langle M\rangle_\gamma\le N\}}\mathscr{E}\big((1-2\varepsilon)M\big)_\gamma\big\} + \mathsf{E}\big\{\mathbf{1}_{\{\langle M\rangle_\gamma> N\}}\mathscr{E}\big((1-2\varepsilon)M\big)_\gamma\big\} \\
&\le \Big(\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma\Big)^{1-2\varepsilon}\Big(\mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\langle M\rangle_\gamma\le N\}}\exp\Big(\frac{1-2\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{2\varepsilon} \\
&\qquad + \Big(\mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\langle M\rangle_\gamma> N\}}\mathscr{E}(M)_\gamma\Big)^{1-2\varepsilon}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1-2\varepsilon}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{2\varepsilon},
\end{aligned}$$

takže provedše nejprve vhodným způsobem limitní přechod $\varepsilon \to 0+$ a poté $N \to +\infty$ obdržíme opět $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma \ge 1$.

Poznámka 7.3. Důsledek 7.3 připouští následující zesílení (N. Kazamaki, 1977): *Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, a γ markovský čas takový, že*

$$\sup_{t\ge 0}\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}M_{t\wedge\gamma}\Big) < \infty. \qquad (14)$$

Potom $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1.$[76]

Povšimněme si nejprve, že (14) je slabší předpoklad, než (7): podle Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}M_{t\wedge\gamma}\Big) &= \mathsf{E}\Big\{\exp\Big(\frac{1}{2}M_{t\wedge\gamma} - \frac{1}{4}\langle M\rangle_{t\wedge\gamma}\Big)\exp\Big(\frac{1}{4}\langle M\rangle_{t\wedge\gamma}\Big)\Big\} \\
&\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(M_{t\wedge\gamma} - \frac{1}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\gamma}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\gamma}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_{t\wedge\gamma}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}\langle M\rangle_{t\wedge\gamma}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \Big(\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}\langle M\rangle_\gamma\Big)\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

tudíž (7) implikuje (14). Opačná implikace neplatí: buď B jednodimensionální Wienerův proces, položme $\sigma = \inf\{t \ge 0;\ B_t = 1\}$, potom $\mathsf{E}\exp(B_{t\wedge\sigma}/2) \le \exp(1/2) < \infty$. Podle tvrzení 0.4 však $\mathsf{E}\sigma = \infty$, tím spíše $\mathsf{E}\exp(\langle B\rangle_\sigma/2) = \mathsf{E}\exp(\sigma/2) = +\infty$.

Právě uvedený příklad nám též umožňuje ukázat, že supremum v (14) nelze vynechat, tedy že

$$\mathsf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}M_\gamma\Big) < \infty \tag{15}$$

může platit pro konečný markovský čas γ, aniž by $\mathsf{E}\mathscr{E}(M)_\gamma = 1$. Položme totiž $\tau = \inf\{t \ge 1;\ B_t = 1\}$, potom jistě $\mathsf{E}\exp(B_\tau/2) = \exp(1/2) < \infty$. (Uvědomme si, že odhad $B_{t\wedge\tau} \le 1$ nyní odvodit nelze, jelikož na intervalu $]0,1[$ proces $(B_{t\wedge\tau})$ nijak nekontrolujeme.) Protože platí $B_\tau = B_\sigma = 1$, $\tau \ge \sigma$ a $\mathsf{P}\{\tau > \sigma\} > 0$, jest

$$\mathsf{E}\mathscr{E}(B)_\tau = \mathsf{E}\exp\Big(B_\tau - \frac{1}{2}\tau\Big) < \mathsf{E}\exp\Big(B_\sigma - \frac{1}{2}\sigma\Big) = 1.$$

Někdy lze s výhodou užíti skutečnost, že předpoklad (14) z (15) vyplývá, je-li $(M_{t\wedge\gamma})$ stejnoměrně integrovatelný martingal. Díky stejnoměrné integrovatelnosti a konvexitě funkce exp je totiž $(\exp(M_{t\wedge\gamma}/2),\ 0 \le t \le \infty)$ submartingal, takže $\mathsf{E}\exp(M_{t\wedge\gamma}/2) \le \mathsf{E}\exp(M_\gamma/2)$ pro každé $t \ge 0$.

Poznámka 7.4. Všechny dosud uvedené postačující podmínky zaručovaly stejnoměrnou integrovatelnost exponenciálního martingalu. Je ovšem dobře možné, aby $\mathscr{E}(M)$ byl martingal, nikoliv však stejnoměrně integrovatelný. Kupříkladu, je-li B opět jednodimensionální Wienerův proces, jest $\mathscr{E}(B)$ martingal, jak snadno plyne z Novikovova kriteria (užitého pro deterministické markovské časy $\gamma = T \in \mathbb{R}_+$). Pokud by byl stejnoměrně integrovatelný, existovala by náhodná veličina Z tak, že $\mathscr{E}(B)_t \longrightarrow Z$ při $t \to \infty$ skoro jistě a v L^1, speciálně by platilo $\mathsf{E}Z = 1$. Avšak

$$\lim_{t\to\infty}\exp\Big(B_t - \frac{1}{2}t\Big) = \lim_{t\to\infty}\exp\Big(t\Big(\frac{B_t}{t} - \frac{1}{2}\Big)\Big) = 0$$

[76] Důkaz, založený na téže myšlence jako důkaz věty 7.2 a jen o málo méně přehledný, lze nalézti v již citovaném preprintu Krylovově.

skoro jistě, protože podle zákona velkých čísel $t^{-1}B_t \longrightarrow 0$ pro $t \to \infty$ skoro jistě.

Vraťme se k exponenciálním lokálním martingalům tvaru (1). Novikovova podmínka říká, že

$$\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|X_s\|^2\,\mathrm{d}s\right) < \infty \tag{16}$$

implikuje $\mathsf{E}G_T(X) = 1$. Leckdy však může být výhodnější pracovat s předpoklady o samotném procesu X, nikoliv o jeho integrálu. Předpoklad existence $\delta > 0$ takového, že

$$\sup_{0\le t\le T} \mathsf{E}\exp\left(\delta\|X_t\|^2\right) < \infty, \tag{17}$$

lze ku příkladu pro gaussovské procesy X ověřiti snáze než (16). Ukážeme proto, že (17) také postačuje k platnosti (2). Zvolme dělení $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ intervalu $[0, T]$ takové, že

$$\max_{j=0,\ldots,k-1} \left|t_{j+1} - t_j\right| \le 2\delta.$$

Podle Jensenovy nerovnosti[77]

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|X_s\|^2\,\mathrm{d}s\right) &= \exp\left(\frac{1}{t_{j+1}-t_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1}-t_j}{2}\|X_s\|^2\,\mathrm{d}s\right)\\
&\le \frac{1}{t_{j+1}-t_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp\left(\frac{t_{j+1}-t_j}{2}\|X_s\|^2\right)\mathrm{d}s\\
&\le \frac{1}{t_{j+1}-t_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp\left(\delta\|X_s\|^2\right)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

pro $j = 0, \ldots, k-1$. Definujme lokální martingaly

$$M_j(t) = \int_{t\wedge t_j}^{t} X_s^*\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \le t \le T,\ j = 0, \ldots, k-1.$$

Vzhledem k (17)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}\langle M_j\rangle_{t_{j+1}}\right) &= \mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|X_s\|^2\,\mathrm{d}s\right)\\
&\le \frac{1}{t_{j+1}-t_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathsf{E}\exp\left(\delta\|X_s\|^2\right)\,\mathrm{d}s\\
&\le \sup_{0\le s\le T} \mathsf{E}\exp\left(\delta\|X_s\|^2\right) < \infty
\end{aligned}$$

[77] Viz např. J. Štěpán: *op. cit.*, Věta II.2.6.

a podle důsledku 7.3 jsou $\big(\mathscr{E}(M_j)_t,\ 0 \le t \le t_{j+1}\big)$ martingaly, $j = 0, \dots, k-1$, pročež

$$\mathsf{E}\big(\mathscr{E}(M_j)_{t_{j+1}} \,\big|\, \mathscr{F}_{t_j}\big) = \mathscr{E}(M_j)_{t_j} = 1, \quad j = 0, \dots, k-1. \tag{18}$$

Nyní můžeme spočítat

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\exp\bigg(\int_0^T X_s^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\bigg) \\
&= \mathsf{E}\exp\bigg(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} X_s^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\bigg) \\
&= \mathsf{E}\prod_{j=0}^{k-1}\exp\bigg(\int_{t_j}^{t_{j+1}} X_s^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\bigg) \\
&= \mathsf{E}\prod_{j=0}^{k-1}\mathscr{E}(M_j)_{t_{j+1}} \\
&= \mathsf{E}\mathsf{E}\bigg(\prod_{j=0}^{k-1}\mathscr{E}(M_j)_{t_{j+1}} \,\bigg|\, \mathscr{F}_{t_{k-1}}\bigg) \\
&= \mathsf{E}\bigg(\prod_{j=0}^{k-2}\mathscr{E}(M_j)_{t_{j+1}}\mathsf{E}\big(\mathscr{E}(M_{k-1})_{t_k} \,\big|\, \mathscr{F}_{t_{k-1}}\big)\bigg) \\
&= \mathsf{E}\prod_{j=0}^{k-2}\mathscr{E}(M_j)_{t_{j+1}} = \dots \\
&= \mathsf{E}\mathscr{E}(M_0)_{t_1} = 1,
\end{aligned}$$

přičemž rovnost mezi třetím a druhým řádkem od konce plyne dosazením z (18).

Shrnuto:

Věta 7.5. (I. I. Gichman & A. V. Skorochod, 1968) *Buď W n-dimensionální $(\mathscr{F}_t)$-Wienerův proces a X progresivně měřitelný $\mathbb{R}^n$-hodnotový náhodný proces splňující $\|X\| \in L^2([0,T])$ P-skoro jistě pro nějaké $T \in \mathbb{R}_+$. Předpokládejme, že existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathsf{E}\exp\big(\delta\|X_t\|^2\big) < \infty.$$

Potom

$$\mathsf{E}\exp\bigg(\int_0^T X_s^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|X_s\|^2 \,\mathrm{d}s\bigg) = 1.$$

V kapitole 5 (v závěrečné odbočce) jsme již ukázali typické užití Girsanovovy věty při konstrukci slabého řešení rovnice

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,dt + \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le t \le T, \tag{19}$$

kde $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je borelovská funkce. Studium rovnice (19) vede na vyšetřování exponenciály lokálního martingalu

$$N_t^x = \int_0^t b(x + W_s)^* \,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \le t \le T.$$

Důsledek 7.3 je možno snadno užíti pro omezený drift b, zatímco větu 7.5 pro b lineárního růstu. Vzhledem ke speciálnímu tvaru lokálního martingalu N^x lze však rovnost $\mathsf{E}\mathscr{E}(N^x)_T = 1$ dokázat i za podstatně slabších předpokladů na b. Ocitujme na ukázku dva důležité výsledky:

(a) H. J. Engelbert a W. Schmidt ukázali,[78] že z

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \mathsf{E} \int_0^T \left\| b(y + W_s) \right\|^2 \mathrm{d}s < \infty$$

plyne $\mathsf{E}\mathscr{E}(N^x)_T = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) (N. I. Portěnko, 1974) Buď $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ borelovská funkce taková, že

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^T \left\| b(s, y) \right\|^{2q} \mathrm{d}t \right)^{r/q} \mathrm{d}y < \infty \tag{20}$$

pro nějaká $q > 1$ a $r > \dfrac{qn}{2q - 2}$. Potom[79]

$$\mathsf{E} \exp\left(\int_0^T b(s, x + W_s)^* \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|b(s, x + W_s)\|^2 \,\mathrm{d}s \right) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Povšimněme si, že v autonomním případě se předpoklad (20) redukuje na $\|b\| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ s $p > n$.

[78] H. J. Engelbert, W. Schmidt: On exponential local martingales connected with diffusion processes, *Math. Nachr. 119* (1984), 97–115, Theorem 2.11.

[79] Důkaz uvedené verse Portěnkova kriteria si lze vyhledat v knize N. V. Krylov: *Introduction to the theory of diffusion processes*, Amer. Math. Soc., Providence 1995, Theorem IV.3.5 (c).

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{Q}_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$	množina všech nezáporných racionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$a \wedge b = \min(a, b)$	minimum čísel $a, b \in \mathbb{R}$
$a \vee b = \max(a, b)$	maximum čísel $a, b \in \mathbb{R}$
$\inf \emptyset \equiv +\infty$	(není-li řečeno jinak)
$\mathbb{M}_{m\times n}$	vektorový prostor reálných matic typu $m \times n$
$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$	vektorový prostor komplexních matic typu $m \times n$
A^*	matice konjugovaná k matici A
$\operatorname{Tr} A$	stopa (čtvercové) matice A
$I = I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$	identická matice (typu $n \times n$)
$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$	standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$
$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$	(euklidovská) norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$
$\|A\|$	Hilbert-Schmidtova norma matice A
$\|A\|_{\mathrm{op}}$	norma matice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ jako operátoru z (Hilbertova) prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
$[s_1, \dots, s_n]$	$m \times n$ matice se sloupci $s_1, \dots s_n \in \mathbb{R}^m$

Komentář:

1° δ_{ij} je Kroneckerovo delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

2° $A^* = A^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{j=1}^{n}{}_{i=1}^{m} \in \mathbb{M}_{n\times m}$ pro $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in \mathbb{M}_{m\times n}$ (transponovaná matice),

3° $A^* = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ pro $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$,

4° pro $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m} \in \mathbb{M}_{m\times m}$ čtvercovou

$$\operatorname{Tr} A \ = \sum_{i=1}^{m} a_{ii},$$

5° $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{M}_{m\times 1}$ ztotožňujeme (vektory v $\mathbb{R}^m$ chápeme jako sloupcové),

6° pro $x = (x_1, \dots, x_n)^*, y = (y_1, \dots, y_n)^* \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{1/2},$$

7° pro $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{Tr}(AA^*)}, \quad \|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|=1}} \big\|Ax\big\|_{\mathbb{R}^m}.$$

$\sigma(\mathscr{F})$	σ-algebra generovaná systémem množin $\mathscr{F}$
$\sigma(F)$	σ-algebra generovaná systémem funkcí F
$\bigvee_{\alpha\in A}\mathscr{A}_\alpha$	$=\sigma\Big(\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{A}_\alpha\Big)$ pro σ-algebry $\mathscr{A}_\alpha$, $\alpha\in A$
$\mathbf{1}_G$	indikátor množiny G
$\mathscr{B}(X)$	borelovská σ-algebra metrického prostoru X
λ	Lebesgueova míra na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$
$\mathscr{N}(a,Q)$	gaussovská míra na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ se střední hodnotou a a kovarianční maticí Q ($a\in\mathbb{R}^m$, $Q\in\mathbb{M}_{m\times m}$ positivně semidefinitní)
$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} f$	konvergence náhodných veličin f_n k náhodné veličině f podle pravděpodobnosti P
$\mu\circ f^{-1} = f(\mu)$	obraz míry μ při zobrazení f
$f\mu = f\,\mathrm{d}\mu$	míra s hustotou f vzhledem k míře μ
μ_f	(znaménková) míra s distribuční funkcí f konečné variace nebo (σ-konečná) míra s neklesající distribuční funkcí f

Komentář:

8° $\mathscr{F}$ je systém podmnožin libovolné množiny Ω,

9° $F = \{f_\alpha;\ \alpha\in A\}$ systém zobrazení $f_\alpha : \Omega \longrightarrow (E_\alpha, \mathscr{E}_\alpha)$ pro měřitelné prostory $(E_\alpha,\mathscr{E}_\alpha)$, $\alpha\in A$,

10° pro $G\subseteq\Omega$

$$\mathbf{1}_G(x) = \begin{cases} 1 & x\in G,\\ 0 & x\in\Omega\setminus G.\end{cases}$$

$\mathscr{L}(E)$	prostor spojitých lineárních zobrazení v Hilbertově prostoru E
$\operatorname{Ker} A$	jádro lineárního zobrazení $A\in\mathscr{L}(E)$
$\operatorname{Rng} A$	obraz lineárního zobrazení $A\in\mathscr{L}(E)$
$\operatorname{Lin} S$	lineární obal množiny $S\subseteq E$
$S^\perp$	orthogonální doplněk množiny S
$AC(I)$	algebra všech absolutně spojitých reálných funkcí na kompaktním intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$
$\mathscr{C}(G)$	prostor spojitých reálných funkcí na $G\subseteq\mathbb{R}^m$

$\mathscr{C}_b(G)$	podprostor omezených funkcí v $\mathscr{C}(G)$
$\mathscr{C}^k(G)$	prostor reálných funkcí majících spojité parciální derivace až do řádu k včetně (G otevřená)
b$\mathscr{E}$	prostor všech omezených $\mathscr{E}$-měřitelných funkcí
$L^p(\mu)$	$= L^p(S, \mathscr{S}, \mu)$ viz níže

Komentář:

11° Je-li $\mathscr{F}$ nějaký prostor funkcí, klademe

$$\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(J) = \big\{f : J \longrightarrow \mathbb{R};\ \forall x \in J\ \exists U \ni x \text{ okolí v } J \text{ tak, že } f \in \mathscr{F}(U)\big\},$$
$$\mathscr{F}(J; \mathbb{R}^n) = \big\{f = (f_1, \ldots, f_n)^* : J \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ \forall i = 1, \ldots, n\ f_i \in \mathscr{F}(J)\big\}.$$

12° Je-li $(S, \mathscr{S}, \mu)$ prostor s mírou a $1 \leq p \leq \infty$, značí $L^p(S, \mathscr{S}, \mu)$ prostor (tříd ekvivalence) reálných $\mathscr{S}$-měřitelných funkcí takových, že

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \equiv \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

13° Obdobně v prostoru $L^p(\mu; \mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_S \|f\|_{\mathbb{R}^n}^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

14° Při $I \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ píšeme $L^p(I)$ místo $L^p(I, \mathscr{B}(I), \lambda)$.

Apendix B. Dvě elementární nerovnosti

Buďte $a_1, \dots, a_n \geq 0$ nezáporná reálná čísla, $p \in]1, \infty[$. Potom

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^p. \tag{1}$$

Nerovnost (1) je velmi speciálním případem Hölderovy nerovnosti, kterou nyní připomeneme: Nechť je $(S, \mathscr{S}, \mu)$ prostor s mírou, $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, pak $fg \in L^1(\mu)$ a

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

To jest, pro $1 < p < \infty$ platí

$$\int_S |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int_S |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_S |g|^q \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q}.$$

K důkazu (1) stačí položit $S = \{1, \dots, n\}$, $\mu(\{i\}) = 1$, $f(i) = a_i$, $g(i) = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Pro $p \in]0, 1[$ nerovnost (1) neplatí, k disposici je však následující odhad: pro libovolná nezáporná reálná čísla $a_1, \dots, a_n \geq 0$ platí

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^p \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^p. \tag{2}$$

Nerovnost (2) stačí zřejmě dokázat pro $n = 2$. Zvolme pevně $y \in]0, \infty[$ a definujme funkci

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^p + y^p - (x + y)^p.$$

Potom $f(0) = 0$, $f' \geq 0$ na $]0, \infty[$ (ježto $p - 1 < 0$), tedy funkce f je neklesající a $f \geq 0$ na $\mathbb{R}_+$, odtud důkaz (2) již plyne.

A. Kvadratická variace. V prvé části apendixu dokážeme několik výsledků o kvadratické variaci spojitých lokálních martingalů, jež budou důležité v dalším výkladu. Umluvme se, že pracujeme na libovolném pevně zvoleném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC).

Uveďme nejprve výsledky, jejichž znalost předpokládáme. Martingal M se nazývá L^2-martingal, pokud $\mathsf{E}|M_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \geq 0$. Důsledkem věty o existenci Doob-Meyerova rozkladu[80] je následující tvrzení:

Je-li $M = (M_t)_{t\geq 0}$ spojitý L^2-martingal, potom existuje jediný proces $\langle M \rangle$ takový, že:

(a) *$\langle M \rangle$ je adaptovaný a P-skoro jistě má spojité neklesající trajektorie,*
(b) *$\langle M \rangle_0 = 0$ P-skoro jistě,*
(c) *$M^2 - \langle M \rangle$ je martingal.*

Jednoznačnost $\langle M \rangle$ je míněna až na nerozlišitelnost: je-li Y jiný proces s vlastnostmi (a), (b), (c), pak

$$\mathsf{P}\big\{\omega;\ \langle M \rangle_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \ \forall t \in [0, \infty[\,\big\} = 1.$$

Proces $\langle M \rangle$ se nazývá *kompensátor* nebo *kvadratická variace* martingalu M. Druhý název souvisí s následující vlastností: pro každé $t \geq 0$ pevné platí:

$$\sum_{k=1}^{m_n} \big| M(t_k^n) - M(t_{k-1}^n) \big|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \langle M \rangle_t \tag{1}$$

pro libovolnou posloupnost dělení $\{0 = t_0^n < \cdots < t_{m_n}^n = t\}$ intervalu $[0, t]$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k=1,\ldots,m_n} \big| t_k^n - t_{k-1}^n \big| = 0.$$

Připomeňme si postup, jímž lze definici kvadratické variace rozšířit na lokální martingaly, ježto jde o proceduru, již budeme opakovaně užívat. Buď M spojitý lokální martingal; pro jednoduchost předpokládejme, že $M_0 = 0$ (jinak bychom přešli k procesu $M - M_0$). Podle definice lokálního martingalu existuje lokalisující posloupnost (T_k) – to jest, T_k jsou markovské časy a $T_k \nearrow \infty$ skoro jistě – taková, že pro každé $k \geq 1$ je proces $(M_{T_k \wedge t})$ martingal. Položme

$$R_k = T_k \wedge \inf\{t \geq 0;\ |M_t| = k\,\}.$$

[80] Formulaci i důkaz lze nalézti např. v knize I. Karatzas, S. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988, §1.4.

Díky spojitosti trajektorií procesu M je zřejmě (R_k) opět lokalisující posloupnost, definujme $M_t^k = M_{R_k \wedge t}$, $t \geq 0$. M^k jsou omezené martingaly se spojitými trajektoriemi, speciálně L^2-martingaly, a tudíž existují adaptované procesy $\langle M^k \rangle$ se spojitými neklesajícími trajektoriemi takové, že $(M^k)^2 - \langle M^k \rangle$ jsou martingaly, $k \geq 1$. Je-li $m \geq n$, pak $M_t^n = M_{t \wedge R_n}^m$, $t \geq 0$, tedy proces

$$(M_t^n)^2 - \langle M^m \rangle_{t \wedge R_n} = (M_{t \wedge R_n}^m)^2 - \langle M^m \rangle_{t \wedge R_n}$$

je martingal; z jednoznačnosti kvadratické variace

$$\langle M^n \rangle_t = \langle M^m \rangle_{t \wedge R_n} \quad \text{pro všechna } t \geq 0 \ \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

Lze proto konsistentně definovat

$$\langle M \rangle = \langle M^n \rangle \quad \text{na } \big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega;\ 0 \leq t \leq R_n(\omega)\big\}.$$

Proces $\langle M \rangle$ je adaptovaný a P-skoro jistě má spojité neklesající trajektorie, $\langle M \rangle_0 = 0$, a nadto

$$M_{t \wedge R_n}^2 - \langle M \rangle_{t \wedge R_n} = (M_t^n)^2 - \langle M^n \rangle_t$$

jsou martingaly, $n \geq 1$, tudíž $M^2 - \langle M \rangle$ je lokální martingal. Dokázali jsme:

Buď M lokální martingal se spojitými trajektoriemi. Potom existuje jediný adaptovaný proces $\langle M \rangle$ s P-skoro jistě spojitými neklesajícími trajektoriemi takový, že $\langle M \rangle_0 = 0$ a $M^2 - \langle M \rangle$ je lokální martingal.

Formule (1) zůstává v platnosti i pro lokální martingaly. Připomeňme ještě jeden pojem. Jsou-li M, N spojité lokální martingaly, definujeme jejich *vzájemnou* (či *křížovou*) *variaci* $\langle M, N \rangle$ vztahem

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4}\big[\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t\big], \quad 0 \leq t < \infty.$$

Snadno se ověří, že $\langle M, N \rangle$ je jediný adaptovaný proces s P-skoro jistě spojitými trajektoriemi majícími konečnou variaci na každém kompaktním intervalu takový, že $\langle M, N \rangle_0 = 0$ a $MN - \langle M, N \rangle$ je lokální martingal. Pokud jsou M a N spojité L^2-martingaly, je také $MN - \langle M, N \rangle$ martingal.

Nyní uvedeme několik výsledků o vztahu mezi lokálním martingalem a jeho kvadratickou variací. Nejprve si uvědomme následující jednoduchý fakt.

Lemma C.1. *Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$, a buď T markovský čas. Je-li $\langle M \rangle_T = 0$ P-skoro jistě, pak*

$$\mathsf{P}\big\{M_{t \wedge T} = 0 \ \ \forall t \in [0, \infty[\,\big\} = 1.$$

Důkaz. Proces $\langle M\rangle$ je spojitý a neklesající, tedy

$$\mathsf{P}\big\{\langle M\rangle_{t\wedge T}=0\ \ \forall t\in[0,\infty[\,\big\}=1. \tag{2}$$

Předpokládejme nejprve, že M je L^2-martingal; $t\geq 0$ buď zatím pevné. Proces $M^2-\langle M\rangle$ je martingal a $t\wedge T$ je omezený markovský čas, tudíž podle věty o "optional sampling" máme

$$\mathsf{E}\big(M_{t\wedge T}^2-\langle M\rangle_{t\wedge T}\big)=\mathsf{E}\big(M_0^2-\langle M\rangle_0\big)=0.$$

To jest,

$$\mathsf{E}M_{t\wedge T}^2=\mathsf{E}\langle M\rangle_{t\wedge T}=0,$$

a proto $M_{t\wedge T}=0$ P-skoro všude. Je-li M pouze lokální martingal, existuje lokalisující posloupnost (T_k) tak, že procesy M^k, $M_s^k=M_{s\wedge T_k}$ pro $s\geq 0$, jsou L^2-martingaly. Podle (2) platí $\langle M^k\rangle_T=\langle M\rangle_{T\wedge T_k}=0$ P-skoro jistě, tudíž podle již provedených úvah $M_{t\wedge T}^k=M_{t\wedge T\wedge T_k}=0$ P-skoro jistě. Limitním přechodem $k\to\infty$ odvodíme $M_{t\wedge T}=0$ P-skoro jistě pro každé pevné $t\geq 0$, dokazované tvrzení nyní plyne ze spojitosti trajektorií procesu M. Q.E.D.

Následující tvrzení ukazuje, že integrovatelnost kvadratické variace je silně svázána s integrovatelností samotného martingalu.

Lemma C.2. *Buď M spojitý lokální martingal, $M_0=0$. Nechť*

$$\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty<\infty.$$

Potom jsou M a $M^2-\langle M\rangle$ martingaly, M je L^2-omezený a $M^2-\langle M\rangle$ stejnoměrně integrovatelný.

Připomeňme, že martingal M se nazývá L^2-omezený, jestliže $\sup_{t\geq 0}\mathsf{E}M_t^2<\infty$. L^2-omezené martingaly jsou očividně stejnoměrně integrovatelné. Lemma C.2 budeme zpravidla užívat v následující versi:

Nechť je M spojitý lokální martingal, $M_0=0$, a ϱ markovský čas. Jestliže $\mathsf{E}\langle M\rangle_\varrho<\infty$, pak jsou $(M_{\cdot\wedge\varrho})$ a $(M_{\cdot\wedge\varrho}^2-\langle M\rangle_{\cdot\wedge\varrho})$ stejnoměrně integrovatelné martingaly a $(M_{\cdot\wedge\varrho})$ je nadto L^2-omezený. Speciálně, $M_\varrho\in L^2(\mathsf{P})$ a $\mathsf{E}M_\varrho^2=\mathsf{E}\langle M\rangle_\varrho$.

Jde vskutku o snadný důsledek. Buď ϱ markovský čas takový, že $\mathsf{E}\langle M\rangle_\varrho<\infty$. Definujme lokální martingal $\tilde M$ vztahem $\tilde M_s=M_{\varrho\wedge s}$, $s\geq 0$, potom $\mathsf{E}\langle\tilde M\rangle_\infty=\mathsf{E}\langle M\rangle_\varrho<\infty$, tudíž $\tilde M$ a $\tilde M^2-\langle\tilde M\rangle$ jsou stejnoměrně integrovatelné martingaly, $\tilde M$ navíc L^2-omezený. Lze užíti větu o "optional sampling", s výsledkem

$$\mathsf{E}[\tilde M_\varrho^2-\langle\tilde M\rangle_\varrho]=\mathsf{E}[\tilde M_0^2-\langle\tilde M\rangle_0]=0.$$

Přímo podle definice ovšem $\mathsf{E}\tilde{M}_\varrho^2 = \mathsf{E}M_\varrho^2$, $\mathsf{E}\langle\tilde{M}\rangle_\varrho = \mathsf{E}\langle M\rangle_\varrho$. (Uvažme, že podle martingalové konvergenční věty

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{M}_t = \lim_{t\to\infty} M_{\varrho\wedge t} \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} \bigl(\tilde{M}_t^2 - \langle\tilde{M}\rangle_t\bigr) = \lim_{t\to\infty} \bigl(M_{\varrho\wedge t}^2 - \langle M\rangle_{\varrho\wedge t}\bigr)$$

existují P-skoro všude a v $L^1(\mathsf{P})$, náhodná veličina $\tilde{M}_\varrho = M_\varrho$ je proto dobře definována i na množině $\{\varrho = \infty\}$.)

Důkaz lemmatu C.2 užívá dvou pomocných tvrzení o martingalech, zajímavých i o sobě.

Lemma C.3. *Buď M adaptovaný proces se zprava spojitými trajektoriemi, $M_t \in L^1(\mathsf{P})$ pro $t \geq 0$. Proces M je martingal, právě když pro každý omezený markovský čas τ platí*

$$\mathsf{E}M_\tau = \mathsf{E}M_0. \tag{3}$$

Důkaz. Nutnost podmínky (3) plyne z věty o "optional sampling", dokážeme postačitelnost. Zvolme $s < t$, $A \in \mathscr{F}_s$ a definujme

$$\tau = s\mathbf{1}_{\Omega\setminus A} + t\mathbf{1}_A.$$

Snadno se nahlédne, že τ je omezený markovský čas. Užívajíce předpoklad (3) pro markovské časy τ a s spočteme

$$\mathsf{E}\bigl(M_s\mathbf{1}_{\Omega\setminus A}\bigr) + \mathsf{E}\bigl(M_t\mathbf{1}_A\bigr) = \mathsf{E}M_\tau = \mathsf{E}M_0 = \mathsf{E}M_s = \mathsf{E}\bigl(M_s\mathbf{1}_{\Omega\setminus A}\bigr) + \mathsf{E}\bigl(M_s\mathbf{1}_A\bigr).$$

Dokázali jsme tedy

$$\mathsf{E}\bigl(\mathbf{1}_A M_t\bigr) = \mathsf{E}\bigl(\mathbf{1}_A M_s\bigr), \qquad A \in \mathscr{F}_s,$$

což je právě martingalová vlastnost. Q.E.D.

Lemma C.4. *Buď M lokální martingal se zprava spojitými trajektoriemi. Je-li množina*

$$\mathscr{T} = \bigl\{M_\sigma;\ \sigma \text{ omezený markovský čas}\bigr\}$$

stejnoměrně integrovatelná, potom je M stejnoměrně integrovatelný martingal.

Důkaz. Ze stejnoměrné integrovatelnosti množiny $\mathscr{T}$ speciálně vyplývá, že $M_t \in L^1(\mathsf{P})$ pro všechna $t \geq 0$. Buď (T_k) lokalisující posloupnost taková, že $(M_{T_k\wedge t})$ jsou martingaly, $k \geq 1$. Nechť je σ omezený markovský čas, potom i $\sigma \wedge T_k$ jsou omezené markovské časy a podle předpokladu lemmatu je posloupnost $\{M_{\sigma\wedge T_k}\}_{k\geq 1}$ stejnoměrně integrovatelná. Protože zřejmě

$$M_{\sigma\wedge T_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} M_\sigma \quad \mathsf{P}\text{-skoro jistě},$$

jest i

$$M_{\sigma\wedge T_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} M_\sigma \quad \text{v } L^1(\mathsf{P})$$

a speciálně platí

$$\mathsf{E}M_\sigma = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}M_{\sigma\wedge T_k}.$$

Ovšem rovnost $\mathsf{E}M_{\sigma\wedge T_k} = \mathsf{E}M_0$, $k \geq 1$, je okamžitým důsledkem věty o "optional sampling" a omezenosti σ, takže tvrzení nyní plyne z lemmatu C.3 a inkluse $\{M_t;\ t \geq 0\} \subseteq \mathscr{T}$. Q.E.D.

Poznámka C.1. (a) Je užitečné si povšimnout, že lemmata C.2 a C.3 ani jejich důkazy nezávisí na tom, zda filtrace splňuje předpoklad (UC).

(b) Z lemmatu C.4 speciálně plyne, že omezené zprava spojité lokální martingaly jsou vždy martingaly. Obecněji, zprava spojitý lokální martingal, pro nějž je $\sup_{t\geq 0} M_t$ integrovatelná náhodná veličina, je (stejnoměrně integrovatelný) martingal. Naopak upozorněme, že stejnoměrná integrovatelnost lokálního martingalu M sama o sobě není postačující k tomu, aby M byl martingal, a to ani pro M spojitý.[81]

(c) Buď M spojitý lokální martingal, $M_0 = 0$. Díky spojitosti trajektorií je

$$\eta_k = \inf\{t \geq 0;\ |M_t| = k\}, \quad k \geq 1,$$

lokalisující posloupnost markovských časů. Přitom jsou $(M_{\cdot\wedge\eta_k})$, $k \geq 1$, omezené lokální martingaly, tedy martingaly. V případě spojitých lokálních martingalů lze tedy přejít k martingalům kanonickým způsobem, volbou lokalisující posloupnosti (η_k).

Důkaz lemmatu C.2. Buď M lokální martingal se spojitými trajektoriemi takový, že $\langle M\rangle_\infty \in L^1(\mathsf{P})$ a $M_0 = 0$. Užijme obrat z poznámky C.1(c) a položme

$$R_k = \inf\{t \geq 0;\ |M_t| = k\} \wedge \inf\{t \geq 0;\ \langle M\rangle_t = k\}.$$

Vzhledem ke spojitosti trajektorií procesů M a $\langle M\rangle$ je (R_k) lokalisující posloupnost markovských časů. Lokální martingaly $(M_{R_k\wedge t})$, $(M^2_{R_k\wedge t} - \langle M\rangle_{R_k\wedge t})$, $k \in \mathbb{N}$, jsou zřejmě omezené, podle lemmatu C.4 jsou proto stejnoměrně integrovatelnými martingaly. Z martingalové konvergenční věty plyne existence náhodné veličiny $M_{R_k} \in L^1(\mathsf{P})$ takové, že

$$M_{R_k\wedge t} \xrightarrow[t\to\infty]{} M_{R_k} \quad \text{v } L^1(\mathsf{P}) \text{ a } \mathsf{P}\text{-skoro jistě}$$

[81] Odpovídající příklady nejsou úplně jednoduché, jeden je naznačen v I. Karatzas, S. Shreve: *op. cit.*, Example 3.3.36, jiný je uveden v knize M. Meyer: *Continuous stochastic calculus with applications to finance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2001, Example I.8.a.6.

a

$$M^2_{R_k\wedge t} - \langle M\rangle_{R_k\wedge t} \xrightarrow[t\to\infty]{} M^2_{R_k} - \langle M\rangle_{R_k} \quad \text{v } L^1(\mathsf{P}) \text{ a } \mathsf{P}\text{-skoro jistě.}$$

To implikuje

$$\mathsf{E}\big(M^2_{R_k} - \langle M\rangle_{R_k}\big) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\big(M^2_{R_k\wedge t} - \langle M\rangle_{R_k\wedge t}\big) = \mathsf{E}\big(M^2_0 - \langle M\rangle_0\big) = 0,$$

odtud

$$\mathsf{E}M^2_{R_k} = \mathsf{E}\langle M\rangle_{R_k} \le \mathsf{E}\langle M\rangle_\infty. \tag{4}$$

Dále,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\sup_{t\ge0} M_t^2 &= \lim_{k\to\infty} \mathsf{E} \sup_{0\le t<R_k} M_t^2 = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}\sup_{t\ge0} M^2_{R_k\wedge t} \le 4\limsup_{k\to\infty} \mathsf{E}M^2_{R_k} \\ &\le 4\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty, \end{aligned} \tag{5}$$

kde jsme postupně užili Leviho větu o monotonní konvergenci, Doobovu maximální nerovnost a odhad (4). Je-li ζ libovolný omezený markovský čas, pak díky (5) dostaneme

$$\mathsf{E}M^2_\zeta \le \mathsf{E}\sup_{t\ge0} M^2_t \le 4\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty < \infty \tag{6}$$

a

$$\big|M^2_\zeta - \langle M\rangle_\zeta\big| \le \sup_{t\ge0} M^2_t + \langle M\rangle_\infty \in L^1(\mathsf{P}). \tag{7}$$

Množina

$$\mathscr{V} = \big\{M_\sigma;\ \sigma \text{ omezený markovský čas}\big\}$$

je omezená v $L^2(\mathsf{P})$ vzhledem k (6), speciálně i stejnoměrně integrovatelná. Soubor náhodných veličin

$$\big\{M^2_\sigma - \langle M\rangle_\sigma;\ \sigma \text{ omezený markovský čas}\big\}$$

má podle (7) integrovatelnou majorantu, je proto také stejnoměrně integrovatelný. Lemma C.4 implikuje, že M i $M^2 - \langle M\rangle$ jsou stejnoměrně integrovatelné martingaly. L^2-omezenost M plyne ihned z L^2-omezenosti množiny $\mathscr{V}$. Q.E.D.

Dále si ujasníme, že vzájemná variace nezávislých martingalů je nulová.

Lemma C.5. *Buďte $(\mathscr{J}_t)_{t\ge0}$ a $(\mathscr{H}_t)_{t\ge0}$ filtrace v $\mathscr{F}$, M, N procesy se spojitými trajektoriemi takové, že M je lokální $(\mathscr{J}_t)$-martingal, N lokální $(\mathscr{H}_t)$-martingal. Položme $\mathscr{K}_t = \mathscr{J}_t \vee \mathscr{H}_t$, $t\ge0$. Nechť jsou σ-algebry $\mathscr{J}_\infty$ a $\mathscr{H}_\infty$ nezávislé. Potom jsou M, N a MN lokální $(\mathscr{K}_t)$-martingaly. Speciálně,*

$$\langle M, N\rangle = 0, \quad \langle M+N\rangle = \langle M\rangle + \langle N\rangle.$$

(Připomeňme, že značíme $\mathscr{J}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathscr{J}_t$, podobně pro $\mathscr{H}_\infty$.) Důkaz lemmatu C.5 plyne ihned z definice uvažovaných pojmů a z následujícího tvrzení.

Lemma C.6. *Nechť je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ pravděpodobnostní prostor, $\mathscr{J}$ a $\mathscr{H}$ buďte sub-σ-algebry $\mathscr{F}$, $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrovatelné náhodné veličiny. Nechť jsou σ-algebry $\mathscr{J} \vee \sigma(X)$ a $\mathscr{H} \vee \sigma(Y)$ nezávislé. Potom*

$$\mathsf{E}\big(XY \,\big|\, \mathscr{J} \vee \mathscr{H}\big) = \mathsf{E}(X|\mathscr{J})\mathsf{E}(Y|\mathscr{H}) \quad \mathsf{P}\text{-}\textit{skoro jistě.}$$

Důkaz. Stačí ověřit, že

$$\int_C XY \,\mathrm{d}\mathsf{P} = \int_C \mathsf{E}(X|\mathscr{J})\mathsf{E}(Y|\mathscr{H}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} \tag{8}$$

pro každou $C \in \mathscr{J} \vee \mathscr{H}$, neboť integrand vpravo je zřejmě $\mathscr{J} \vee \mathscr{H}$-měřitelný. (Povšimněme si, že konvergence obou integrálů ve formuli (8) je zřejmá díky integrovatelnosti a nezávislosti X, Y, respektive nezávislosti σ-algeber $\mathscr{J}$, $\mathscr{H}$.) Nechť je množina C nejprve tvaru $C = J \cap H$, $J \in \mathscr{J}$, $H \in \mathscr{H}$. Pak

$$\begin{aligned}
\int_C \mathsf{E}(X|\mathscr{J})\mathsf{E}(Y|\mathscr{H}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} &= \int_\Omega \mathbf{1}_J \mathbf{1}_H \mathsf{E}(X|\mathscr{J})\mathsf{E}(Y|\mathscr{H}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} \\
&= \int_\Omega \mathsf{E}(\mathbf{1}_J X|\mathscr{J})\mathsf{E}(\mathbf{1}_H Y|\mathscr{H}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} \\
&= \int_\Omega \mathsf{E}(\mathbf{1}_J X|\mathscr{J}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} \int_\Omega \mathsf{E}(\mathbf{1}_H Y|\mathscr{H}) \,\mathrm{d}\mathsf{P} \\
&= \mathsf{E}(\mathbf{1}_J X)\mathsf{E}(\mathbf{1}_H Y) = \mathsf{E}(\mathbf{1}_J \mathbf{1}_H XY) \\
&= \int_C XY \,\mathrm{d}\mathsf{P},
\end{aligned}$$

předpoklad o nezávislosti jsme užili ve třetí a páté rovnosti. Položme

$$\mathscr{S} = \big\{C \in \mathscr{J} \vee \mathscr{H};\ \text{pro } C \text{ platí (8)}\big\}.$$

Snadno se nahlédne, že $\mathscr{S}$ je σ-aditivní systém, který obsahuje, jak jsme právě ukázali, systém všech množin tvaru $J \cap H$, $J \in \mathscr{J}$, $H \in \mathscr{H}$, uzavřený na konečné průniky a generující $\mathscr{J} \vee \mathscr{H}$. Dokazované tvrzení tedy plyne z Dynkinova lemmatu.[82] Q.E.D.

Na závěr připomeňme Kunita-Watanabeho nerovnost:

[82] Cf. J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1987, Tvrzení I.1.5.

Tvrzení C.7. *Buďte M, N spojité lokální martingaly. Označme $\mathbf{V}_{\langle M,N\rangle}$ náhodný proces definovaný předpisem*

$$\mathbf{V}_{\langle M,N\rangle}(t,\omega) = \textit{variace funkce } \langle M,N\rangle(\omega) \textit{ na intervalu } [0,t].$$

Potom P*-skoro jistě platí*

$$\int_0^t |HK|\,\mathrm{d}\mathbf{V}_{\langle M,N\rangle} \le \left(\int_0^t H^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle\right)^{1/2} \left(\int_0^t K^2\,\mathrm{d}\langle N\rangle\right)^{1/2}, \tag{9}$$

kdykoliv jsou H a K měřitelné procesy a $t \in [0,\infty]$.

Povšimněme si, že v nerovnosti (9) vystupují pouze Lebesgueovy integrály, takže měřitelnost trajektorií je jediný relevantní předpoklad o procesech H a K; tvrzení C.7 je ovšech netriviální pouze tehdy, je-li pravá strana v (9) konečná. Z nerovnosti (9) plyne slabší, ale mnohdy postačující odhad

$$\left|\int_0^t HK\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle\right| \le \left(\int_0^t H^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle\right)^{1/2} \left(\int_0^t K^2\,\mathrm{d}\langle N\rangle\right)^{1/2}, \quad t \ge 0;$$

integrál vlevo má smysl, pokud je pravá strana konečná. Volbou $H = K = \mathbf{1}_{[s,t]}$ z něj získáme nerovnost

$$\big|\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s\big| \le \sqrt{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}\,\sqrt{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}. \tag{10}$$

B. Trajektorie martingalu. V kapitole 4 budeme uvažovat martingaly, o jejichž trajektoriích nebude *a priori* nic známo; následující závažná věta však ukazuje, že lze vždy předpokládat, že martingal má – až na modifikaci – trajektorie dosti regulární. Nadále pracujme na libovolné pevně zvolené stochastické basi $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ s filtrací splňující (UC).

Věta C.8. *Každý $(\mathscr{F}_t)$-martingal má modifikaci, jejíž* P*-skoro všechny trajektorie jsou spojité zprava na $\mathbb{R}_+$.*

Lze ukázat, že modifikace zaručená větou C.8 má P-skoro všechny trajektorie regulované,[83] to jest spojité zprava a mající v každém bodě z $]0,\infty[$ limitu zleva.[84]

[83] V angličtině se název *regulated* užívá v literatuře o obyčejných diferenciálních rovnicích, v pravděpodobnostní literatuře převládl akronym *càdlàg*, převzatý z francouzštiny. Obecně přijímaný český název neexistuje.

[84] Důkaz věty C.8 užívá jen základní vlastnosti (sub)martingalů, je však poněkud zdlouhavý. Lze ho nalézti např. v I. Karatzas, S. Shreve: *op. cit.*, Theorem 1.3.13.

Apendix D. Gronwallovo lemma

Následující jednoduchá, ale velice důležitá nerovnost je známa jako Gronwallovo lemma.

Věta D.1. *Buďte $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $s \in I$, $\varepsilon > 0$. Nechť jsou $\varrho, \xi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ nezáporné funkce, ξ spojitá, $\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ lokálně integrovatelná. Nechť*

$$\forall t \in I \qquad \xi(t) \le \varepsilon + \left| \int_s^t \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right|. \tag{1}$$

Potom

$$\forall t \in I \qquad \xi(t) \le \varepsilon \exp\left(\left| \int_s^t \varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right| \right).$$

Speciálně, je–li

$$\forall t \in I \qquad \xi(t) \le \left| \int_s^t \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right|, \tag{2}$$

pak $\xi = 0$ na I.

Připomeňme, že lokální integrovatelnost znamená: pro libovolný kompakt $K \subseteq I$ je $\int_K \varrho\,\mathrm{d}\lambda < \infty$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažujme případ $t \ge s$, podle předpokladu (1) platí

$$\xi(t)\varrho(t) \le \varrho(t)\left(\varepsilon + \int_s^t \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right),$$

tedy

$$\frac{\xi(t)\varrho(t)}{\varepsilon + \int_s^t \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma} \le \varrho(t). \tag{3}$$

Jelikož $\xi\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ a jmenovatel je větší nebo roven $\varepsilon > 0$, lze nerovnost (3) integrovat:

$$\int_s^v \frac{\xi(t)\varrho(t)}{\varepsilon + \int_s^t \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}t \le \int_s^v \varrho(t)\,\mathrm{d}t, \quad v \in I,\ v \ge s.$$

Pro libovolné $v \in I$, $v \ge s$, má integrand vlevo na intervalu $[s, v]$ absolutně spojitou primitivní funkci

$$\log\left(\varepsilon + \int_s^{\cdot} \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right) \in AC([s, v]),$$

tudíž

$$\log\left(\varepsilon + \int_s^v \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right) - \log\varepsilon \le \int_s^v \varrho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Odtud

$$\varepsilon + \int_s^v \xi(\sigma)\varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \le \varepsilon \exp\left(\int_s^v \varrho(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

a dokazované tvrzení plyne užitím (1). Jestliže předpokládáme (2), pak je (1) splněno s libovolným $\varepsilon > 0$, proto pro každé $t \in I$ platí

$$\xi(t) \le \varepsilon \exp\left(\left|\int_s^t \varrho(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right|\right)$$

s libovolně malým $\varepsilon > 0$, to už zřejmě implikuje nulovost ξ. Q.E.D.

Apendix E. Fundamentální matice

V tomto appendixu uvedeme základní poznatky o existenci a struktuře řešení (deterministických) lineárních diferenciálních rovnic.

Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ libovolný interval, $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{M}_{m\times m})$, $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$. Uvažujme lineární diferenciální rovnici tvaru

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1}$$

kde $\dot{x}$ značí derivaci $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Řešením rovnice (1) rozumíme měřitelnou funkci $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takovou, že $A(\cdot)x(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$ a

$$x(t) = x(s) + \int_s^t A(r)x(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r$$

pro všechna $t, s \in I$. Uváživše vlastnosti Lebesgueova integrálu ihned nahlédneme, že funkce x je řešením rovnice (1), právě když $x \in AC_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$ a platí

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad \text{pro } \lambda\text{-skoro všechna } t \in I. \tag{2}$$

Nechť jsou pevně dána $s \in I$ a $y \in \mathbb{R}^m$. Řešení x rovnice (1) splňující

$$x(s) = y \tag{3}$$

nazýváme řešením s *počáteční podmínkou* (3). To jest, x řeší úlohu (1), (3), právě když

$$x(t) = y + \int_s^t A(r)x(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r, \qquad t \in I. \tag{4}$$

Poznámka E.1 (terminologická). (i) Právě definovaným řešením se v theorii obyčejných diferenciálních rovnic říká *absolutně spojitá* nebo *Carathéodoryho řešení*. Klasickým řešením (1), (3) se pak rozumí spojitě diferencovatelná funkce $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ splňující $x(s) = y$ a rovnost (2) pro všechna $t \in I$.

(ii) Někdy je užitečné považovat za řešení úlohy (1), (3) funkci definovanou jen na nějakém intervalu $J \subseteq I$, $J \ni s$, vyhovující rovnosti (4) pro každé $t \in J$. Řešení se potom nazývá maximální, není-li restrikcí jiného řešení. Za našich předpokladů jsou však maximální řešení vždy definována na celém intervalu I. Nebude-li proto přímo řečeno jinak, jsou uvažována pouze řešení s definičním oborem I.

Nejprve ověříme, že řešení rovnice (1) existují.

Věta E.1. *Pro libovolná $s \in I$, $y \in \mathbb{R}^m$ existuje právě jediné řešení x úlohy* (1), (3).

Poznámka E.2. Porovnejme větu E.1 s existenční větou 2.1 pro stochastické diferenciální rovnice. Řešení rovnice (1) jsou definována ve shodě s tím, jak jsme v definici 2.1 zavedli řešení stochastických diferenciálních rovnic. Položíme-li

$$f : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ (t, x) \longmapsto A(t)x + b(t),$$

je tudíž problém (1), (3) speciálním případem stochastické diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}x = f(t, x)\,\mathrm{d}t, \quad x(s) = y.$$

Předpoklad (II) lipschitzovskosti v prostorové proměnné z věty 2.1 je (na kompaktních intervalech v I) triviálně splněn, je-li A lokálně omezená, předpoklad (I) lineárního růstu je splněn, pokud jsou A i b lokálně omezené (což lze požadovat bez přílišné újmy na obecnosti). Ani za těchto dodatečných předpokladů však věta E.1 nevyplývá z věty 2.1: řešitelnost stochastické diferenciální rovnice jsme dokázali na intervalech tvaru $[s, s + T]$, což je vzhledem k požadavku adaptovanosti řešení dosti přirozené omezení, zatímco u rovnice (1), (3) pro nás bude podstatné (při vyšetřování regularity fundamentální matice), že s může být libovolným, i vnitřním, bodem intervalu I.

Důkaz věty E.1 založíme na Banachově větě o pevném bodu. (Připomeňme její znění: je-li (S, d) úplný metrický prostor a $f : S \longrightarrow S$ kontraktivní zobrazení – to jest, lze nalézti $\gamma < 1$ tak, že $d(f(x), f(y)) \leq \gamma d(x, y)$ pro všechna $x, y \in S$ – pak existuje jediné $x_0 \in S$ splňující $f(x_0) = x_0$.) Nejprve odvoďme jednoduché pomocné tvrzení.

Lemma E.2. *Buď $J \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní interval a $s \in J$. Potom pro každou funkci $\theta \in L^1(J)$ platí*

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{t \in J} \left| \int_s^t e^{-\beta|t-r|}\theta(r)\,\mathrm{d}r \right| = 0.$$

Důkaz. Nechť nejprve $\theta \in AC(J)$. Potom λ-skoro všude existuje derivace θ' a $\theta' \in L^1(J)$. Integrujíce per partes pro $t \in J$, $t > s$ odvodíme

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t e^{-\beta(t-r)}\theta(r)\,\mathrm{d}r \right| &= \left| \Big[\frac{1}{\beta} e^{-\beta(t-r)}\theta(r)\Big]_s^t - \frac{1}{\beta}\int_s^t e^{-\beta(t-r)}\theta'(r)\,\mathrm{d}r \right| \\
&\leq \frac{1}{\beta}\left|\theta(t) - e^{-\beta(t-s)}\theta(s)\right| + \frac{1}{\beta}\int_s^t e^{-\beta(t-r)}|\theta'(r)|\,\mathrm{d}r \\
&\leq \frac{2}{\beta}\|\theta\|_{L^\infty(J)} + \frac{1}{\beta}\|\theta'\|_{L^1(J)}.
\end{aligned}$$

Analogický výpočet dává týž odhad i pro $t \in J$, $t \le s$. Je-li nyní $\theta \in L^1(J)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme nalézti $\eta \in AC(J)$ splňující $\|\theta - \eta\|_{L^1(J)} < \varepsilon$. Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t e^{-\beta|t-r|}\theta(r)\,\mathrm{d}r\right| &\le \left|\int_s^t e^{-\beta|t-r|}\eta(r)\,\mathrm{d}r\right| + \left|\int_s^t e^{-\beta|t-r|}|\theta(r)-\eta(r)|\,\mathrm{d}r\right| \\ &\le \left|\int_s^t e^{-\beta|t-r|}\eta(r)\,\mathrm{d}r\right| + \|\theta-\eta\|_{L^1(J)} \\ &\le \frac{2}{\beta}\|\eta\|_{L^\infty(J)} + \frac{1}{\beta}\|\eta'\|_{L^1(J)} + \varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $t \in J$, z čehož dokazované tvrzení už snadno plyne. Q.E.D.

Důkaz věty E.1. 1° Nejprve dokažme jednoznačnost. Buďte $K, L \subseteq I$ intervaly takové, že $s \in K \cap L$, a nechť jsou $x_K : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a $x_L : L \longrightarrow \mathbb{R}^m$ řešení úlohy (1), (3). Tvrdíme, že $x_K = x_L$ na $K \cap L$. Vskutku, $K \cap L$ je opět interval a pro každé $t \in K \cap L$ platí

$$\begin{aligned}x_K(t) &= y + \int_s^t A(r)x_K(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r, \\ x_L(t) &= y + \int_s^t A(r)x_L(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

tudíž

$$x_K(t) - x_L(t) = \int_s^t A(r)\big[x_K(r) - x_L(r)\big]\,\mathrm{d}r$$

a

$$\|x_K(t) - x_L(t)\| \le \left|\int_s^t \|A(r)\|\,\|x_K(r) - x_L(r)\|\,\mathrm{d}r\right|, \quad t \in K \cap L.$$

Jednoznačnost proto plyne z Gronwallova lemmatu.

2° Jestliže pro každý kompaktní interval $J \subseteq I$ existuje řešení $x : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$ úlohy (1), (3), pak existuje i řešení definované na celém I. Je-li I kompaktní, je to zřejmé. V opačném případě nalezněme neklesající posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních intervalů tak, že $s \in K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \nearrow I$. Jsou-li $x_n : K_n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ řešení (1), (3), pak $x_n = x_m$ na K_n pro všechna $m \ge n$ podle bodu 1°. Lze tedy definovat $x(t) = x_n(t)$, $t \in K_n$, a funkce $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je zřejmě řešení (1), (3).

3° Buď tedy I kompaktní interval. Prostor $\mathscr{C} = \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^m)$ všech spojitých funkcí $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ opatřený normou $\|f\|_{\mathscr{C}} = \sup_I \|f\|$ je úplný metrický prostor. Užitím lemmatu E.2 nalezněme $\alpha > 0$ tak, aby[85]

$$\sup_{t\in I}\left|\int_s^t e^{-\alpha|t-r|}\|A(r)\|\,\mathrm{d}r\right| \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

[85]Poznamenejme, že zde není podstatné, zda uvažujeme právě Hilbert-Schmidtovu normu matic; může být výhodnější užívat standardní "operátorovou" normu.

V prostoru $\mathscr{C}$ zaveďme nyní normu

$$|||f||| = \sup_{t\in I} e^{-\alpha|t-s|}\|f(t)\|_{\mathbb{R}^m}, \quad f\in\mathscr{C}.$$

Ježto $e^{-\kappa\alpha}\|f\|_{\mathscr{C}} \le |||f||| \le \|f\|_{\mathscr{C}}$ pro každé $f\in\mathscr{C}$, kde $\kappa = \max(s-\inf I, \sup I - s)$, mají prostory $(\mathscr{C}, \|\cdot\|_{\mathscr{C}})$ a $(\mathscr{C}, |||\cdot|||)$ tytéž cauchyovské a tytéž konvergentní posloupnosti. Prostor $(\mathscr{C}, |||\cdot|||)$ je tedy také úplný metrický prostor. Položme

$$\mathfrak{K}f(t) = y + \int_s^t A(r)f(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r, \quad t\in I,\ f\in\mathscr{C}.$$

Jelikož

$$\|A(\cdot)f(\cdot)\| \le \|A(\cdot)\| \sup_I \|f\| \in L^1(I),$$

je $\mathfrak{K}f$ dobře definovaná spojitá funkce na I. Tedy $\mathfrak{K}:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$, ověříme, že $\mathfrak{K}$ je kontrakce. Buďte $f,g\in\mathscr{C}$, pak

$$\begin{aligned}
|||\mathfrak{K}f - \mathfrak{K}g||| &= \sup_{t\in I} e^{-\alpha|t-s|}\|\mathfrak{K}f(t) - \mathfrak{K}g(t)\| \\
&= \sup_{t\in I} e^{-\alpha|t-s|}\left\|\int_s^t A(r)\big[f(r)-g(r)\big]\,\mathrm{d}r\right\| \\
&\le \sup_{t\in I} e^{-\alpha|t-s|}\left|\int_s^t \|A(r)\|\,\|f(r)-g(r)\|\,\mathrm{d}r\right| \\
&\le \sup_{t\in I} e^{-\alpha|t-s|}\left|\int_s^t e^{\alpha|r-s|}\|A(r)\|e^{-\alpha|r-s|}\|f(r)-g(r)\|\,\mathrm{d}r\right| \\
&\le \sup_{t\in I}\left|\int_s^t \exp\big(-\alpha\big[|t-s|-|r-s|\big]\big)\|A(r)\|\,\mathrm{d}r\right| |||f-g||| \\
&= \sup_{t\in I}\left|\int_s^t e^{-\alpha|t-r|}\|A(r)\|\,\mathrm{d}r\right| |||f-g||| \\
&\le \frac{1}{2}|||f-g|||;
\end{aligned}$$

v posledním odhadu jsme užili (5). Zobrazení $\mathfrak{K}$ je tedy kontraktivní a existuje jediné $x\in\mathscr{C}$ tak, že $x=\mathfrak{K}x$, to jest

$$x(t) = \mathfrak{K}x(t) = y + \int_s^t A(r)x(r)\,\mathrm{d}r + \int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r, \quad t\in I,$$

což právě znamená, že x je řešení úlohy (1), (3). Q.E.D.

Vyšetřujme nyní rovnici (1) předpokládajíce navíc $b \equiv 0$, to jest, uvažujme rovnici

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{6}$$

(Rovnice tvaru (6) se nazývají *homogenní.*) Položme

$$\mathscr{S} = \big\{x \in AC_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R}^m);\ x \text{ je řešení } (6)\big\}.$$

Snadno se ověří

Lemma E.3. *$\mathscr{S}$ je vektorový prostor.*

Uvažujme libovolná řešení $x_1, \dots, x_k \in \mathscr{S}$. Připomeňme, že funkce $x_1, \dots, x_k$ se nazývají lineárně závislé, právě když existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{k} |c_i| > 0 \tag{7}$$

a

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i(t) = 0, \qquad \forall t \in I. \tag{8}$$

Předpokládejme, že existuje $t_0 \in I$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i(t_0) = 0$$

pro nějaké konstanty c_i vyhovující (7). Potom je $x_0 = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ řešení rovnice (6) s počáteční podmínkou $x_0(t_0) = 0$, podle tvrzení o jednoznačnosti z věty E.1 je nutně $x_0 = 0$ na I, to jest, platí (8). To znamená: Jsou-li $x_1, \dots, x_k \in \mathscr{S}$ lineárně nezávislá řešení, potom pro libovolné $s \in I$ jsou $x_1(s), \dots, x_k(s)$ lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^m$. Naopak, buďte $x_1, \dots, x_k \in \mathscr{S}$ libovolná řešení. Existuje-li $s \in I$ takové, že vektory $x_1(s), \dots, x_k(s)$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^m$, pak jsou nutně řešení $x_1, \dots, x_k$ lineárně nezávislá v $\mathscr{S}$. Dokázali jsme

Lemma E.4. *Dimense vektorového prostoru $\mathscr{S}$ je m.*

Jinými slovy, homogenní soustava m lineárních diferenciálních rovnic má právě m lineárně nezávislých řešení.

Buď $\{e_i\}_{i=1}^m$ kanonická base prostoru $\mathbb{R}^m$, tedy

$$e_j = \big(0, \dots, \underset{j\text{-té místo}}{1}, \dots, 0\big)^*, \quad 1 \le j \le m.$$

Zvolme $s \in I$ libovolně pevně, buďte $u_1, \dots, u_m$ řešení homogenní rovnice (6) splňující

$$u_j(s) = e_j, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Potom jsou $u_1, \dots, u_m$ lineárně nezávislá řešení tvořící basi prostoru $\mathscr{S}$. Položme

$$\Phi(t) \equiv \Phi(t, s) = \bigl[u_1(t), \dots, u_m(t)\bigr], \quad t \in I,$$

(to jest, j-tý sloupec matice Φ je tvořen právě řešením u_j). $\mathbb{M}_{m\times m}$-hodnotová funkce Φ se nazývá *fundamentální matice* rovnice (6). Matice $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in I$ (neboť má lineárně nezávislé sloupce) a zřejmě platí

$$\Phi \in AC_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{M}_{m\times m}), \tag{9}$$

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{pro } \lambda\text{-skoro všechna } t \in I, \tag{10}$$

$$\Phi(s) = I. \tag{11}$$

Naopak, je-li Φ funkce splňující (9)–(11), pak její sloupce tvoří basi prostoru $\mathscr{S}$. Uvědomme si též, že vztahy (9)–(11) jsou ekvivalentní s rovností

$$\Phi(t) = I + \int_s^t A(r)\Phi(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{pro všechna } t \in I.$$

Buď $y \in \mathbb{R}^m$ libovolný prvek. Položme $v(t) = \Phi(t, s)y$, potom zřejmě $v(s) = y$, $v \in AC_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$ a platí

$$\dot{v}(t) = \dot{\Phi}(t)y = A(t)\Phi(t)y = A(t)v(t)$$

pro λ-skoro všechna $t \in I$, tedy v je řešení úlohy (6) s počáteční podmínkou (3). Libovolné řešení homogenní rovnice lze tudíž representovat pomocí fundamentální matice a počáteční podmínky.

Matice Φ je závislá na zvoleném počátečním čase s. Zvolme $s, t_0 \in I$ libovolně, potom

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, s)\Phi^{-1}(t_0, s) \quad \text{pro všechna } t \in I.$$

Položíme-li totiž $\Psi(t) = \Phi(t, s)\Phi^{-1}(t_0, s)$, pak zřejmě $\Psi \in AC_{\mathrm{loc}}(I; \mathbb{M}_{m\times m})$, $\Psi(t_0) = I$ a

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t, s)\Phi^{-1}(t_0, s) = A(t)\Phi(t, s)\Phi^{-1}(t_0, s) = A(t)\Psi(t)$$

pro skoro všechna $t \in I$. Je proto Ψ fundamentální matice rovnice (6) odpovídající volbě počátečního času t_0, $\Psi = \Phi(\cdot, t_0)$. Přechod k jinému počátečnímu času je tedy snadný, takže proměnnou s v označení fundamentální matice zpravidla nevyznačujeme.

Dále si uvědomme:

Lemma E.5. *Je-li Φ fundamentální matice rovnice* (6), *pak* $\Phi^{-1} \in AC_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{M}_{m\times m})$.

Důkaz. Matice Φ je regulární a její prvky jsou lokálně absolutně spojité funkce, proto je $\det \Phi \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ a $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in I$. Podobně $\det D_{ij} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, kde $D_{ij}(t)$ je matice vzniklá z $\Phi(t)$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Je-li K kompakt v I, pak existuje konstanta $c > 0$ taková, že $|\det \Phi(t)| \geq c$ pro všechna $t \in K$. To znamená, že funkce Γ_{ij}, definované předpisem

$$\Gamma_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto (-1)^{i+j} \frac{\det D_{ji}(t)}{\det \Phi(t)}, \qquad 1 \leq i,j \leq m,$$

jsou lokálně absolutně spojité na I. Je ovšem dobře známo, že $\Phi^{-1}(t) = \big(\Gamma_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{m}$. Q.E.D.

Nyní se vraťme k počáteční úloze pro nehomogenní rovnici

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1}$$

$$x(s) = y, \tag{3}$$

kde stále předpokládáme, že $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{M}_{m\times m})$ a $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^m)$. Je-li $\Phi = \Phi(\cdot, s)$ fundamentální matice homogenní rovnice

$$\dot{x} = A(t)x$$

odpovídající zadání počáteční podmínky v čase s, pak má (jediné) řešení problému (1), (3) tvar

$$x(t) = \Phi(t)y + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(r)b(r)\,\mathrm{d}r, \quad t \in I. \tag{12}$$

Vztah (12) se tradičně nazývá *formule pro variaci konstant.* Ze vzorce (12) plyne, že fundamentální matice umožňuje nalézti libovolné řešení i pro nehomogenní úlohu; jeho důkaz je přitom zcela přímočarý: vzhledem k lokální integrovatelnosti b, vlastnostem Φ a lemmatu E.5 je ihned vidět, že funkce x, definovaná vztahem (12), je lokálně absolutně spojitá, $x(s) = y$, a snadno se spočte, že

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)y + \dot{\Phi}(t)\int_s^t \Phi^{-1}(r)b(r)\,\mathrm{d}r + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= A(t)\Phi(t)y + A(t)\Phi(t)\int_s^t \Phi^{-1}(r)b(r)\,\mathrm{d}r + b(t) \\
&= A(t)\left[\Phi(t)y + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(r)b(r)\,\mathrm{d}r\right] + b(t) \\
&= A(t)x(t) + b(t)
\end{aligned}$$

pro λ-skoro všechna $t \in I$.

Úkol řešit lineární diferenciální rovnici (1) jsme tedy převedli na problém nalezení fundamentální matice příslušné rovnice homogenní. Ukážeme nyní dva důležité případy, kdy lze fundamentální matici buď explicitně spočísti, nebo alespoň representovati způsobem, který umožňuje vyšetřovat její vlastnosti.

Příklad E.1. Uvažujme 1-dimensionální případ

$$\dot{x} = a(t)x,$$

kde $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$; zvolme $s \in I$, potom je

$$\Phi(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(r)\,\mathrm{d}r\right), \quad t \in I,$$

fundamentální řešení: zřejmě $\Phi \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $\Phi(s) = 1$ a

$$\dot{\Phi}(t) = \exp\left(\int_s^t a(r)\,\mathrm{d}r\right) a(t) \quad \text{pro } \lambda\text{-skoro všechna } t \in I.$$

Tedy v jednodimensionálním případě má řešení nehomogenní rovnice

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(s) = y$$

vyjádření

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_s^t a(r)\,\mathrm{d}r\right) y + \int_s^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) \exp\left(-\int_s^r a(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) b(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \exp\left(\int_s^t a(r)\,\mathrm{d}r\right) y + \int_s^t \exp\left(\int_r^t a(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) b(r)\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Vícedimensionální případ (tj. případ soustavy rovnic) takto jednoduše řešit nelze; dobrý popis fundamentální matice je však k disposici pro rovnice autonomní s maticí $A(t) \equiv A \in \mathbb{M}_{m\times m}$ nezávislou na $t \in I$. Nejprve zaveďme potřebné označení. Pro matici $B \in \mathbb{M}_{m\times m}$ položme

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

(B^0 je definováno jako identická matice, $B^0 = I$.) Řada vpravo je absolutně konvergentní v prostoru $\mathbb{M}_{m\times m}$, ježto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|B^n\|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|B\|^n}{n!} \le e^{\|B\|} < \infty.$$

Snadno se ověří, že
$$\left(e^B\right)^* = e^{B^*}.$$
Jsou-li $B, C \in \mathbb{M}_{m\times m}$ komutující matice, $BC = CB$, potom elementární výpočet ukáže
$$e^{B+C} = e^B e^C = e^C e^B, \quad Ce^B = e^B C. \tag{13}$$
Vztah (13) má dva důležité důsledky:

(i) Matice e^B je vždy regulární: $(e^B)^{-1} = e^{-B}$;

(ii) jsou-li $s, t \in \mathbb{R}$, pak $e^{(s+t)B} = e^{sB}e^{tB}$.

Příklad E.2. Buď $A \in \mathbb{M}_{m\times m}$, vyšetřujme homogenní diferenciální rovnici
$$\dot{x} = Ax. \tag{14}$$
Položme
$$\Phi(t) = \Phi(t,s) = e^{A(t-s)}, \qquad t \in \mathbb{R},$$
snadno se ověří, že $\Phi(s) = I$, Φ je spojitě diferencovatelná funkce na $\mathbb{R}$ a
$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{A(t-s)}\right) = Ae^{A(t-s)} = e^{A(t-s)}A, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Jest tedy Φ fundamentální matice rovnice (14) a vzorec pro variaci konstant pro nehomogenní rovnici
$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(s) = y$$
nabývá tvaru
$$x(t) = e^{A(t-s)}y + \int_s^t e^{A(t-r)}b(r)\,\mathrm{d}r.$$
Fundamentální matice e^{tA} je definována nekonečnou řadou. Naznačíme nyní, jak je možno vyjádřiti matici e^{tA} explicitní formulí, známe-li Jordanův kanonický tvar matice A. Víme, že existuje regulární matice $H \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ (obecně s komplexními prvky i pro A reálnou) tak, že
$$A = HQH^{-1}$$
s blokově diagonální maticí
$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q_\kappa \end{pmatrix},$$

kde Q_j jsou Jordanovy buňky

$$Q_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

a $\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa \in \mathbb{C}$ vlastní čísla matice A (ne nutně různá). (Matice Q je určena jednoznačně až na pořadí bloků $Q_1, \dots, Q_\kappa$.) Je zřejmé, že

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(HQH^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} HQ^n H^{-1} \\ &= He^{Qt}H^{-1}. \end{aligned}$$

Matice Q je blokově diagonální,

$$Q^n = \begin{pmatrix} Q_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q_\kappa^n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1,$$

proto

$$e^{Qt} = \begin{pmatrix} e^{Q_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{Q_\kappa t} \end{pmatrix}.$$

Nyní chceme nalézti matici $e^{Q_j t}$; předpokládejme, že Q_j je matice typu $s \times s$ pro nějaké $s \leq m$. Pišme $Q_j = \lambda_j I + U$, kde $U \in \mathbb{M}_{s \times s}$ je matice s prvky 1 v první diagonále nad hlavní diagonálou a s ostatními prvky nulovými. Označme

$$U^n = \left(u_{ij}^{[n]}\right)_{i,j=1}^{s},$$

indukcí se snadno spočte

$$u_{ij}^{[n]} = \begin{cases} 1, & i + n = j, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \qquad n \geq 0,\ 1 \leq i, j \leq s.$$

(Neformálně: matice U^2 má jedničky v druhé diagonále nad hlavní diagonálou a jinde nuly, ..., U^{s-1} má jedničku v pravém horním rohu a jinde nuly a $U^s = U^{s+1} = \cdots = 0$.). Matice $\lambda_j I$ a U komutují, proto

$$e^{tQ_j} = e^{\lambda_j t I} e^{tU} = e^{\lambda_j t} e^{tU}.$$

Podle definice

$$e^{tU} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U^n = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{t^n}{n!} U^n = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

odtud

$$e^{Q_j t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokážeme-li tedy transformovat matici A na Jordanův kanonický tvar, dokážeme i spočísti fundamentální matici rovnice (14).

Poznámka E.3. Předchozí výklad by mohl vzbuzovat dojem, že representace e^{At} pomocí exponenciály příslušné matice Jordanovy má význam jen pro explicitní vyjádření matice e^{At}. Tak tomu vůbec není, už proto, že nalézt vlastní čísla matice A lze jen ve speciálních případech. Hlavní užití odvozené representace je v tom, že umožňuje vyšetřovat vlastnosti fundamentální matice e^{At}, například její chování pro velké časy, známe-li nějaké kvalitativní charakteristiky spektra matice A. Ilustrujme to na velmi jednoduchém příkladu:[86] Nechť víme, že $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ pro všechna vlastní čísla matice A. Potom

$$\|e^{At}\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

to jest, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ pro libovolné řešení x rovnice (13). Vskutku,

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\le \|H\| \|e^{Qt}\| \|H^{-1}\| \le \|H\| \|H^{-1}\| \sum_{j=1}^{\kappa} \|e^{Q_j t}\| \\ &\le \text{const.} \sum_{j=1}^{\kappa} t^{s(j)-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda_j) t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

kde jsme označili $s(j)$ řád matice Q_j.

Na závěr předvedeme, jak lze proceduru z příkladu E.2 použít v jednom důležitém speciálním případě.

[86] Methody pro nalezení a vyšetřování fundamentální matice jsou podrobně vyloženy v každé důkladnější učebnici obyčejných diferenciálních rovnic, cf. např. J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978, kapitola 5.

Příklad E.3. Uvažujme rovnici harmonického oscilátoru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

kde $\omega > 0$ je kladná konstanta, to jest – ekvivalentně – systém dvou rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega^2 x. \end{aligned} \tag{15}$$

Položme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

pak je možno (15) přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Matice A má vlastní čísla $\{\mathrm{i}\omega, -\mathrm{i}\omega\}$, jejím Jordanovým kanonickým tvarem je tedy matice

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}.$$

Snadno se ověří, že $A = HJH^{-1}$ pro regulární matici H danou

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega & -\frac{1}{4}\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \\ 2 & 2\frac{\mathrm{i}}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Jelikož

$$e^{At} = H \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix} H^{-1}, \tag{17}$$

vzavše do úvahy rovnost $e^{\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t$ platnou pro všechna $t \in \mathbb{R}$ snadno spočteme

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Výpočtu matice H se lze vyhnout následující úvahou: Díky tvaru systému (16) je druhá komponenta každého řešení derivací komponenty první, tudíž musí platit

$$e^{At} = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

pro nějaká (lineárně nezávislá) řešení u_1 a u_2. Přitom ze (17) plyne existence konstant $c_{jk} \in \mathbb{C}$ takových, že $u_j(t) = c_{j1}e^{\mathrm{i}\omega t} + c_{j2}e^{-\mathrm{i}\omega t}$, $j = 1, 2$. Koeficienty c_{jk} snadno nalezneme z podmínky $e^{A0} = I$.

Řešení nehomogenní rovnice

$$\ddot{x} + \omega^2 x = b(t), \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0,$$

má podle vzorce pro variaci konstant tvar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-r)} \begin{pmatrix} 0 \\ b(r) \end{pmatrix} \mathrm{d}r,$$

což dává

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t b(r) \sin \omega (t - r) \, \mathrm{d}r.$$

Analogicky lze vyšetřovat rovnici tlumených kmitů

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{18}$$

s kladným $\gamma > 0$, již odpovídá systém

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \equiv \mathit{\Lambda} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice $\mathit{\Lambda}$ je $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2$, označme λ_1, λ_2 jeho kořeny. Jordanovým kanonickým tvarem matice $\mathit{\Lambda}$ je tedy matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ pro } \gamma \neq \omega, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ pro } \gamma = \omega.$$

Fundamentální matici $e^{\mathit{\Lambda} t}$ nyní můžeme spočítat zcela stejně, jako v případě $\gamma = 0$; její tvar závisí na konstantách γ a ω. Například pro tzv. slabý útlum, kdy $0 < \gamma < \omega$, dostaneme

$$e^{\mathit{\Lambda} t} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos \varpi t + \dfrac{\gamma}{\varpi} \sin \varpi t & \dfrac{1}{\varpi} \sin \varpi t \\ -\left(\dfrac{\gamma^2}{\varpi} + \varpi\right) \sin \varpi t & \cos \varpi t - \dfrac{\gamma}{\varpi} \sin \varpi t \end{pmatrix},$$

kde klademe $\varpi = \left(\omega^2 - \gamma^2\right)^{1/2}$. (Podotkněme, že pro $-\omega < \gamma < 0$ dostaneme výsledek formálně shodný, ale rovnice (18) v tomto případě odpovídá nuceným kmitům s rostoucí amplitudou.)

Apendix F. Spektrální věta pro symetrické matice

Buď E konečnědimensionální unitární prostor[87] (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Připomeňme, že skalární součin definuje v E normu $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ a že $\mathscr{L}(E)$ značíme vektorový prostor všech lineárních zobrazení (homomorfismů) v E, $I \in \mathscr{L}(E)$ identické zobrazení. V $\mathscr{L}(E)$ zaveďme tzv. operátorovou normu

$$\|\gamma\|_{\mathrm{op}} = \sup\bigl\{\|\gamma y\|;\ y \in E,\ \|y\| = 1\bigr\}, \quad \gamma \in \mathscr{L}(E).$$

Jak známo, $\mathscr{L}(E)$ je okruh, definujeme-li násobení jako skládání lineárních zobrazení. (Pokud je pevně zvolena base N v E, odpovídá superposici lineárních zobrazení násobení matic representujících tato zobrazení vůči basi N.) Buď p libovolný polynom s reálnými koeficienty, $p(z) = \sum_{j=1}^m a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{R}$. Pro každé $\gamma \in \mathscr{L}(E)$ lze přirozeně definovat lineární zobrazení $p(\gamma) \in \mathscr{L}(E)$ předpisem

$$p(\gamma) = \sum_{j=1}^m a_j \gamma^j.$$

Pro libovolné pevně zvolené γ je zobrazení $\boldsymbol{\gamma} : p \longmapsto p(\gamma)$ homomorfismus okruhu všech reálných polynomů do $\mathscr{L}(E)$. V tomto apendixu ukážeme, že pro vhodná $\gamma \in \mathscr{L}(E)$ lze $\boldsymbol{\gamma}$ rozšířit na homomorfismus vektorového prostoru všech reálných borelovských funkcí na $\mathbb{R}$ do $\mathscr{L}(E)$, tato konstrukce umožňuje jednotným způsobem representovat inversní zobrazení ke γ, odmocninu γ, projekce na vlastní vektory a pod. Nadto získáme nástroj umožňující ověřit měřitelnost některých náhodných procesů s hodnotami v $\mathscr{L}(E)$, obojího užíváme ve čtvrté kapitole.

Definice F.1. Pravíme, že lineární zobrazení $\beta \in \mathscr{L}(E)$ je *samoadjungované*, jestliže

$$\langle \beta x, y\rangle = \langle x, \beta y\rangle \quad \text{pro všechna } x, y \in E.$$

Zobrazení β se nazývá *positivně semidefinitní* (nebo prostě *positivní*), jestliže

$$\langle \beta x, x\rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } x \in E.$$

V reálných prostorech někdy místo o samoadjungovaných zobrazeních hovoříme o zobrazeních symetrických, v komplexních prostorech o hermitovských. Poznamenejme, že positivní semidefinitnost v komplexních prostorech E implikuje

[87] Poučení o unitárních prostorech lze nalézti třeba v knize J. Bečvář: *Lineární algebra*, matfyzpress, Praha 2000, část VI, jejíž terminologie se budeme držet. Značná část výsledků probíraných v tomto apendixu je v Bečvářově učebnici uvedena, ale s cíli odlišnými od našich, proto se pokusíme o soustavný výklad, inspirovaný knihou P. Halmos: *Finite-dimensional vector spaces*, Springer, New York 1987 (a četná jiná vydání), z níž lze načerpat další informace.

samoadjungovanost,[88] v reálných prostorech to neplatí. (Protipříkladem je třeba rotace o úhel $\frac{\pi}{2}$ v rovině $\mathbb{R}^2$.)

Pozorování F.1. *Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$, M orthonormální base E a B matice zobrazení β vzhledem k basi M. Potom je β samoadjungované, právě když $B = B^*$.*

Tvrzení lze ověřit přímým výpočtem.[89] V reálném prostoru E rovnost $B = B^*$ znamená, že B je symetrická matice (rovná se své transponované B^{T}); v komplexním prostoru E, že matice $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{\dim E}$ je hermitovská, to jest $B = \bar{B}^{\mathrm{T}}$, kde $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})$ je komplexně sdružená matice.

Připomeňme, že pro lineární zobrazení α ve vektorovém prostoru V nad tělesem T definujeme vlastní číslo jako takový prvek $h \in T$, pro který existuje vektor $v \in V$, $v \neq 0$ splňující $\alpha(v) = hv$. (To jest, h je vlastní číslo, pokud $\operatorname{Ker}(\alpha - hI) \neq \{0\}$.) Každý vektor z $\operatorname{Ker}(\alpha - hI) \setminus \{0\}$ pak nazýváme vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu h.

Tvrzení F.2. *Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované.*
(a) Je-li b vlastní číslo β, pak $b \in \mathbb{R}$.
(b) Jsou-li u, v vlastní vektory β odpovídající různým vlastním číslům, pak $u \perp v$.

Důkaz. Bod (a) je nutno dokazovat jen v komplexním prostoru E. Buď $u \neq 0$ vlastní vektor odpovídající b, potom

$$\begin{aligned} b\|u\|^2 &= b\langle u, u\rangle = \langle bu, u\rangle = \langle \beta u, u\rangle = \langle u, \beta u\rangle = \langle u, bu\rangle \\ &= \bar{b}\langle u, u\rangle = \bar{b}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Tedy $b = \bar{b}$, což implikuje $b \in \mathbb{R}$.

Dále, buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, vlastní čísla taková, že $\beta u = au$, $\beta v = bv$. Potom

$$a\langle u, v\rangle = \langle \beta u, v\rangle = \langle u, \beta v\rangle = b\langle u, v\rangle,$$

to jest

$$\underbrace{(a-b)}_{\neq 0}\langle u, v\rangle = 0.$$

Nutně tedy $\langle u, v\rangle = 0$ a vektory u a v jsou orthogonální. Q.E.D.

Existenci alespoň jednoho vlastního čísla samoadjungovaného zobrazení nahlédneme následující úvahou.[90]

[88] To plyne z J. Bečvář: *op. cit.*, věta 24.17.

[89] V případě nejasností lze též vyhledat v citované Bečvářově knize důkaz věty 29.3.

[90] V komplexním prostoru E lze postupovat jednodušeji: každé lineární zobrazení má alespoň jedno vlastní číslo, neboť vlastní čísla jsou právě kořeny charakteristického polynomu. V reálném případě však existence kořenů není *a priori* jasná.

Tvrzení F.3. *Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované. Pak je $\|\beta\|_{\mathrm{op}}$ nebo $-\|\beta\|_{\mathrm{op}}$ vlastní číslo zobrazení β. Je-li β positivně semidefinitní, nastane první možnost.*

Důkaz. Množina $\{z \in E;\ \|z\| = 1\}$ je kompaktní, takže lze nalézti $y \in E$, $\|y\| = 1$ tak, aby $\|\beta\|_{\mathrm{op}} = \|\beta y\|$. Potom

$$\begin{aligned}0 &\le \big\|\beta^2 y - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2 y\big\|^2 = \big\langle \beta^2 y - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2 y, \beta^2 y - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2 y\big\rangle \\ &= \|\beta^2 y\|^2 - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2\langle \beta^2 y, y\rangle - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2\langle y, \beta^2 y\rangle + \|\beta\|_{\mathrm{op}}^4\|y\|^2 \\ &\equiv J.\end{aligned}$$

Uvažme, že platí

$$\begin{aligned}&\|\beta^2 y\|^2 \le \|\beta^2\|_{\mathrm{op}}^2 \le \|\beta\|_{\mathrm{op}}^4, \\ &\langle \beta^2 y, y\rangle = \langle \beta y, \beta y\rangle = \|\beta y\|^2 = \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2, \quad \langle y, \beta^2 y\rangle = \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2\end{aligned}$$

a $\|y\|^2 = 1$, tudíž

$$J \le \|\beta\|_{\mathrm{op}}^4 - 2\|\beta\|_{\mathrm{op}}^2\|\beta\|_{\mathrm{op}}^2 + \|\beta\|_{\mathrm{op}}^4 = 0.$$

Odtud

$$\beta^2 y - \|\beta\|_{\mathrm{op}}^2 y = \big(\beta - \|\beta\|_{\mathrm{op}} I\big)\big(\beta + \|\beta\|_{\mathrm{op}} I\big)y = 0.$$

Buď je tedy $\big(\beta + \|\beta\|_{\mathrm{op}} I\big)y = 0$, pak je y vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-\|\beta\|_{\mathrm{op}}$, anebo $z \equiv \big(\beta + \|\beta\|_{\mathrm{op}} I\big)y \ne 0$, pak je z vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\|\beta\|_{\mathrm{op}}$.

Předpokládáme-li navíc, že β je positivně semidefinitní, pak jsou všechna jeho vlastní čísla nezáporná. (Vskutku, je-li a vlastní číslo, $v \ne 0$ odpovídající vlastní vektor, pak $a\|v\|^2 = \langle av, v\rangle = \langle \beta v, v\rangle \ge 0$.) Vlastním číslem zobrazení β může být tedy jenom $\|\beta\|_{\mathrm{op}}$. Q.E.D.

Věta F.4. *Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované. Potom existuje orthonormální base prostoru E složená z vlastních vektorů zobrazení β.*

Důkaz věty F.4 provedeme indukcí podle $m = \dim E$. Je-li $\dim E = 1$, zvolme vektor $v \in E$ s $\|v\| = 1$. Potom nutně $\beta v = av$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, takže $\{v\}$ je orthonormální base sestávající z vlastního vektoru.

Nechť již je věta dokázána pro nějaké $m \ge 1$, dokažme ji pro $m + 1$. Z tvrzení F.3 plyne, že existuje vlastní číslo $b \in \mathbb{R}$, buď $v_1 \in E$, $\|v_1\| = 1$ odpovídající vlastní vektor. Tvrdíme, že $\big[\mathrm{Lin}(v_1)\big]^\perp$ je β-invariantní podprostor E. Vskutku, buď $u \in \big[\mathrm{Lin}(v_1)\big]^\perp$, pak

$$\langle \beta u, v_1\rangle = \langle u, \beta v_1\rangle = b\langle u, v_1\rangle = 0,$$

to jest $\beta u \perp \mathrm{Lin}(v_1)$. Podle indukčního předpokladu existuje orthonormální base $\{v_2, \dots, v_{m+1}\}$ v $\left[\mathrm{Lin}(v_1)\right]^{\perp}$ sestávající z vlastních vektorů zobrazení $\beta_{|[\mathrm{Lin}(v_1)]^\perp}$. Snadno se ověří, že $\{v_1, v_2, \dots v_{m+1}\}$ je hledaná base E. Q.E.D.

Uvědomme si, že matice β vůči basi nalezené ve větě F.4 je diagonální; na diagonále má (reálná) vlastní čísla zobrazení β.

Důsledek F.5. *Buď A symetrická matice s reálnými prvky. Potom existuje (reálná) orthonormální matice C (to jest, $C^* = C^{-1}$) taková, že matice C^*AC je diagonální. Každý sloupec matice C je vlastním vektorem matice A.*

Důkaz. Nechť je $\beta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, jehož matice vůči kanonické basi je právě A. Pak je β samoadjungované a podle věty F.4 existuje orthonormální base M složená z vlastních vektorů β; matice D zobrazení β vůči basi M je diagonální. Buď C matice přechodu od M ke kanonické basi, pak $D = C^{-1}AC$. Sloupci C jsou vektory base M, má tedy C orthonormální sloupce a proto $C^{-1} = C^*$. Q.E.D.

Poznámka F.1. Analogické tvrzení zřejmě platí pro komplexní hermitovské matice A: existuje unitární matice U tak, že U^*AU je diagonální.

Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ všechna různá vlastní čísla zobrazení β. Položme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}(\beta) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \quad \text{(spektrum zobrazení } \beta\text{)},\\
&V_i = \mathrm{Ker}(\beta - \lambda_i I), \quad i = 1, \dots, r,\\
&P_i = \text{orthogonální projektor na } V_i, \quad i = 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

Připomeňme, že $P_i \in \mathscr{L}(E)$ je zobrazení splňující $\mathrm{Rng}\, P_i = V_i$, $x - P_i x \perp V_i$ pro všechna $x \in E$. Z věty F.4 a definice projektoru se snadno odvodí, že

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = E, \quad \sum_{i=1}^{r} P_i = I, \tag{1}$$

podprostory V_i, V_j jsou na sebe kolmé při $i \neq j$ a

$$P_i \text{ samoadjungované}, \quad P_i^2 = P_i, \quad P_i P_j = 0, \quad 1 \le i, j \le r, \ i \neq j. \tag{2}$$

Můžeme postupovat například takto: nechť jsou $m(1), \dots, m(r)$ po řadě (geometrické) násobnosti vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, to jest $m(j) = \dim \mathrm{Ker}(\beta - \lambda_j I)$. Buď $\{v_{11}, \dots, v_{1m(1)}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rm(r)}\}$ orthonormální base složená z vlastních vektorů, $\beta v_{ij} = \lambda_i v_{ij}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots m(i)$. Pak $V_i = \mathrm{Lin}\{v_{i1}, \dots, v_{im(i)}\}$, každé $x \in E$ má jednoznačné vyjádření

$$x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m(i)} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij}$$

a projektor P_i je dán vzorcem

$$P_i : x \longmapsto \sum_{j=1}^{m(i)} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij}.$$

Pozorování F.6. *Platí*

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i. \tag{3}$$

Důkaz. Pro libovolné $x \in E$ dostaneme

$$\begin{aligned} \beta x &= \beta\Big(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m(i)} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m(i)} \langle x, v_{ij} \rangle \beta v_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m(i)} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij}}_{=P_i x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i x, \end{aligned}$$

jak jsme tvrdili. Q.E.D.

Buď $f : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ libovolná funkce, definujme lineární zobrazení $f \star \beta$ předpisem

$$f \star \beta : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i) P_i x.$$

(Označení $f \star \beta$ je provisorní, zakrátko ho zjednodušíme.) Pro $n \geq 0$ položme $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^n$.

Lemma F.7. *Nechť je $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované lineární zobrazení. Potom:*
(a) Pro libovolnou funkci $f : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ je $f \star \beta$ je samoadjungované zobrazení.
(b) Je-li navíc $f \geq 0$ nezáporná, je $f \star \beta$ positivně semidefinitní.
(c) Pro všechny funkce $f, g : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ a každé $b \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} (bf) \star \beta &= b(f \star \beta), \\ (f + g) \star \beta &= f \star \beta + g \star \beta, \\ (fg) \star \beta &= (f \star \beta)(g \star \beta). \end{aligned} \tag{4}$$

Speciálně, lineární zobrazení $f \star \beta$ a $g \star \beta$ komutují.
(d) Platí $p_0 \star \beta = I$ a $p_1 \star \beta = \beta$.

Důkaz. Všechna tvrzení jsou přímým důsledkem definice. Dokažme na ukázku rovnost (4):

$$\begin{aligned}(f\star\beta)(g\star\beta) &= \Big(\sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)P_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{r} g(\lambda_j)P_j\Big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_j)P_iP_j = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_i)P_i^2\\ &= \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_i)P_i = (fg)\star\beta;\end{aligned}$$

opakovaně jsme užili vztahů (2). Analogicky, (b) plyne z následujícího výpočtu:

$$\big\langle (f\star\beta)x, x\big\rangle = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)\langle P_i x, x\rangle = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)\langle P_i^2 x, x\rangle = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)\|P_i x\|^2 \geq 0.$$

Nakonec, (d) je přepisem rovností (1) a (3). Q.E.D.

Poznámka F.2. a) Funkce $\boldsymbol{\beta} : f \longmapsto f\star\beta$ zobrazuje prostor všech reálných funkcí na $\mathrm{Sp}(\beta)$ do $\mathscr{L}(E)$. Lemma F.7(c) praví, že $\boldsymbol{\beta}$ je homomorfismus vektorových prostorů i okruhů. Někdy je výhodné $\boldsymbol{\beta}$ chápat jako homomorfismus prostoru všech reálných borelovských funkcí na $\mathbb{R}$ do $\mathscr{L}(E)$.

b) Je-li E prostor nad $\mathbb{C}$, můžeme lineární zobrazení $f\star\beta$ definovat týmž předpisem i pro funkce $f : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$, opět jde o homomorfismus vektorových prostorů i okruhů; $f\star\beta$ je však samoadjungované, právě když je f reálná funkce.

Lemma F.8. *Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované. Nechť je p libovolný polynom s reálnými koeficienty, $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{R}$. Potom*

$$p\star\beta = p(\beta) \equiv \sum_{j=0}^{m} a_j\beta^j.$$

Lemma ukazuje, že nová definice je konsistentní s elementární, budeme proto psát, jak je obvyklé, $f(\beta)$ místo $f\star\beta$.

Důkaz. Vzhledem k lemmatu F.7(c) stačí ověřit, že $p_n\star\beta = \beta^n$. Avšak

$$p_n\star\beta = (\underbrace{p_1\cdots p_1}_{n\text{-krát}})\star\beta = \underbrace{(p_1\star\beta)\cdots(p_1\star\beta)}_{n\text{-krát}} = \beta^n,$$

opět podle lemmatu F.7(c), (d). Q.E.D.

Lemma F.9. *(a) Pro libovolnou funkci* $f : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *platí*

$$\|f(\beta)\|_{\mathrm{op}} = \max_{\mathrm{Sp}(\beta)} |f| = \max\bigl\{|f(\lambda_i)|;\ i = 1, \ldots, r\bigr\}.$$

(b) Jsou-li $f_n, f : \mathrm{Sp}(\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkce splňující*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \textit{na}\ \mathrm{Sp}(\beta),$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} \bigl\|f_n(\beta) - f(\beta)\bigr\|_{\mathrm{op}} = 0.$$

Důkaz. Buď $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ index takový, že $|f(\lambda_{i_0})| = \max |f|$. Potom

$$\begin{aligned}
\|f(\beta)\|_{\mathrm{op}} \geq \bigl\|f(\beta)v_{i_0 1}\bigr\| &= \Bigl\|\sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)P_i v_{i_0 1}\Bigr\| = \bigl\|f(\lambda_{i_0})P_{i_0} v_{i_0 1}\bigr\| \\
&= |f(\lambda_{i_0})|\,\|v_{i_0 1}\| = |f(\lambda_{i_0})| = \max_{\mathrm{Sp}(\beta)} |f|.
\end{aligned}$$

K důkazu obrácené nerovnosti si povšimněme, že

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|P_i x\|^2, \quad x \in E.$$

To plyne z (1) a (2), neboť

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \Bigl\langle \sum_{i=1}^{r} P_i x, \sum_{j=1}^{r} P_j x \Bigr\rangle = \sum_{i,j=1}^{r} \langle P_i x, P_j x\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} \langle P_j P_i x, x\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle P_i^2 x, x\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle P_i x, P_i x\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \|P_i x\|^2.
\end{aligned}$$

Analogický výpočet pak dává

$$\begin{aligned}
\|f(\beta)x\|^2 &= \Bigl\|\sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)P_i x\Bigr\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} f(\lambda_i)f(\lambda_j)\langle P_i x, P_j x\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)^2 \langle P_i^2 x, x\rangle \leq \Bigl(\max_{\mathrm{Sp}(\beta)} |f|\Bigr)^2 \sum_{i=1}^{r} \|P_i x\|^2 \\
&= \Bigl(\max_{\mathrm{Sp}(\beta)} |f|\Bigr)^2 \|x\|^2,
\end{aligned}$$

čímž je důkaz (a) završen. Tvrzení (b) je okamžitý důsledek (a). Q.E.D.

Příklad F.1. Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ positivně semidefinitní samoadjungované lineární zobrazení. Potom $\mathrm{Sp}(\beta) \subseteq \mathbb{R}_+$, takže funkce $p_{1/2} : t \longmapsto \sqrt{t}$ je dobře definována a nezáporná na spektru zobrazení β. Lze tedy definovat positivně semidefinitní samoadjungované zobrazení $p_{1/2}(\beta)$, přitom podle (4) platí

$$p_{1/2}(\beta)p_{1/2}(\beta) = (\underbrace{p_{1/2}p_{1/2}}_{=p_1})(\beta) = \beta.$$

Zobrazení $p_{1/2}(\beta)$ je zvykem značit $\beta^{1/2}$ či $\sqrt{\beta}$ a nazývat odmocninou zobrazení β. (V řeči matic: positivně semidefinitní symetrická matice má positivně semidefinitní odmocninu.)

Příklad F.2. Nechť je $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované a prosté, tedy $0 \notin \mathrm{Sp}(\beta)$. Pak je funkce $p_{-1} : t \longmapsto t^{-1}$ dobře definována na spektru β a jí odpovídající operátor $p_{-1}(\beta)$ splňuje

$$p_{-1}(\beta)\beta = p_{-1}(\beta)p_1(\beta) = (\underbrace{p_{-1}p_1}_{=p_0})(\beta) = I, \quad \beta p_{-1}(\beta) = I.$$

Je tedy $p_{-1}(\beta) = \beta^{-1}$ inversní zobrazení k β.

Příklad F.3. Buď $\beta \in \mathscr{L}(E)$ samoadjungované, potom pro $\lambda \in \mathbb{R}$ libovolné

$$\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(\beta) = \text{projektor na } \mathrm{Ker}(\beta - \lambda I).$$

Tedy $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(\beta) = 0$ pro $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\beta)$, zatímco pro vlastní číslo λ je $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(\beta)$ projektor na podprostor vlastních vektorů odpovídajících λ.

Příklad F.4. Buď $g \in \mathscr{L}(E, F)$, kde E a F jsou konečnědimensionální unitární prostory. Označme g^* adjungované lineární zobrazení,[91] to jest $g^* \in \mathscr{L}(F, E)$ splňuje $\langle gx, y\rangle_F = \langle x, g^*y\rangle_E$ pro všechna $x \in E$, $y \in F$. Potom je $g^*g : E \longrightarrow E$ samoadjungované a positivně semidefinitní, neboť

$$\begin{aligned}\langle g^*gx, v\rangle_E &= \langle gx, gv\rangle_F = \langle x, g^*gv\rangle_E,\\ \langle g^*gx, x\rangle_E &= \|gx\|_F^2 \geq 0, \quad x, v \in E,\end{aligned}$$

podle definice adjungovaného zobrazení.

Uvažujme lineární zobrazení

$$\boldsymbol{g} = g\mathbf{1}_{\{0\}}(g^*g) : E \longrightarrow F.$$

[91] Viz J. Bečvář: *op. cit.*, Důsledek 29.6.

Tvrdíme, že $\boldsymbol{g} = 0$. Je-li $x \in E$ takové, že $g^*g(x) = 0$, pak $\langle g^*gx, x\rangle_E = \|gx\|_F^2 = 0$, to jest $g(x) = 0$. Injektivita g tedy implikuje injektivitu g^*g, takže pro prosté g nemá g^*g vlastní číslo 0 a $\mathbf{1}_{\{0\}}(g^*g) = 0$. Pokud g prosté není, pak právě provedený výpočet spolu s předchozím příkladem ukazují, že

$$\operatorname{Rng} \mathbf{1}_{\{0\}}(g^*g) = \operatorname{Ker}(g^*g) \subseteq \operatorname{Ker} g,$$

proto $g\mathbf{1}_{\{0\}}(g^*g) = 0$.

Označme

$$\mathscr{S}(E) = \{\gamma \in \mathscr{L}(E);\ \gamma \text{ samoadjungované}\}$$

množinu všech samoadjungovaných lineárních zobrazení v E. $\mathscr{S}(E)$ je zřejmě reálný vektorový podprostor v $\mathscr{L}(E)$ opatřený metrikou $(\alpha, \gamma) \longmapsto \|\alpha - \gamma\|_{\mathrm{op}}$.

Výsledky tohoto apendixu jsou v kapitole 4 aplikovány nikoliv na pevně zvolené lineární zobrazení β, ale na progresivně měřitelný náhodný proces (β_t) s hodnotami v $\mathscr{S}(E)$. Je-li f borelovská funkce, lze pro všechna t a ω definovat samoadjungované zobrazení $f(\beta_t(\omega))$, není však zřejmé, zda je i proces $f(\beta_t)$ progresivně měřitelný. Kladná odpověď plyne z následující věty:

Věta F.10. *Buď $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borelovská funkce. Potom je zobrazení*

$$\mathscr{S}(E) \longrightarrow \mathscr{S}(E),\ \ \beta \longmapsto f(\beta)$$

borelovské.

Důkaz. Stačí ukázat, že pro všechna $x, y \in E$ je $\beta \longmapsto \langle f(\beta)x, y\rangle$ reálná borelovská funkce. Pro $f = p_0, p_1$ je dokazované tvrzení jistě pravdivé, předpokládejme, že již víme, že

$$\beta \longmapsto \langle f(\beta)x, y\rangle \quad \text{borelovská pro každé } x, y \in E, \tag{5}$$

kdykoliv je f polynom stupně nejvýše n. Zvolme libovolnou orthonormální basi $\{v_i\}_{i=1}^{\dim E}$ v E. Potom

$$\begin{aligned}\langle \beta^{n+1}x, y\rangle &= \big\langle \beta(\beta^n x), y\big\rangle = \Big\langle \beta\Big(\sum_{i=1}^{\dim E} \langle \beta^n x, v_i\rangle v_i\Big), y\Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\dim E} \langle \beta^n x, v_i\rangle\langle \beta v_i, y\rangle,\end{aligned}$$

funkce $\beta \longmapsto \langle \beta^n x, v_i\rangle$ a $\beta \longmapsto \langle \beta v_i, y\rangle$ jsou borelovské podle indukčního předpokladu. Platí tedy (5) i pro polynomy stupně $n+1$, tím je věta dokázána pro libovolný polynom f.

Buď dále $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce, nalezněme polynomy $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, aby $g_k \longrightarrow f$ pro $k \to \infty$ bodově na $\mathbb{R}$. Pro každé $\beta \in \mathscr{L}(E)$ podle lemmatu F.9(b) platí $\lim_{k\to\infty} g_k(\beta) = f(\beta)$, tudíž funkce $\beta \longmapsto \langle f(\beta)x, y\rangle$ je borelovská jako bodová limita borelovských funkcí. Je-li $G \subseteq \mathbb{R}$ libovolná otevřená množina, pak existují $f_k \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ spojité takové, že $0 \leq f_k \nearrow \mathbf{1}_G$ na $\mathbb{R}$. To opět implikuje, že

$$f_k(\beta) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{1}_G(\beta) \quad \text{pro každé } \beta \in \mathscr{L}(E),$$

tudíž i funkce $\beta \longmapsto \langle \mathbf{1}_G(\beta)x, y\rangle$ je borelovská. Systém množin

$$\mathscr{Z} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R});\ \forall x, y \in E \ \ \beta \longmapsto \langle \mathbf{1}_A(\beta)x, y\rangle \text{ borelovská}\}$$

je σ-aditivní a obsahuje systém všech otevřených množin uzavřený na konečné průniky; podle Dynkinova lemmatu $\mathscr{Z} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Okamžitým důsledkem je borelovská měřitelnost funkce $\beta \longmapsto \langle s(\beta)x, y\rangle$, kdykoliv je $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jednoduchá borelovská funkce.

Nakonec předpokládejme, že f je libovolná borelovská funkce. Jelikož lze nalézti jednoduché borelovské funkce $s_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, že $s_k \longrightarrow f$ na $\mathbb{R}$ při $k \to \infty$, můžeme důkaz završit zřejmým způsobem. Q.E.D.