



Akademie věd České republiky
Ústav teorie informace a automatizace

Academy of Sciences of the Czech Republic
Institute of Information Theory and Automation

RESEARCH REPORT

PETR VOLF:

**Problém umístění zásobníků
ve výrobní lince**

No. 2263

November 2009

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 18208 Prague, Czech Republic
Telex: 122018 atom c, Fax: (+42) (2) 688 4903
E-mail: utia@utia.cas.cz

This report constitutes an unrefereed manuscript which is intended to be submitted for publication. Any opinions and conclusions expressed in this report are those of the author(s) and do not necessarily represent the views of the Institute.

Problém umístění zásobníků ve výrobní lince

P. Volf, ÚTIA AV ČR

Abstrakt: Zpráva se zabývá dílčím problémem souvisejícím s úlohou optimální konfigurace výrobní linky. V případě nesladěného taktu stanovišť (operací) v lince, což může být způsobeno i poruchovostí jednotlivých strojů, se zde uvažuje možnost zredukovat takto vzniklé prostoje pomocí mezizásobníků, které by vyrovnávaly výkyvy. Po úvodním příkladu se zabýváme stanovením velikosti zásobníků. Více než na přesné výpočty (které nejsou vždy jednoduché) se soustředíme na ukázky generované pomocí Monte Carlo přístupu, tj. počítačovou "simulací" jednotlivých situací.

1 Problém v lince s různým taktém operací

V této části se budeme zabývat následujícím problémem: Pokud ve výrobní lince jsou v sérii uzly (stroje), jejichž operace trvají různou dobu, nutně dochází k 'prostojům', resp. některé stroje nejsou využity naplno (organizací přecházení obsluhy lze dostatečně využít pracovníky, ale v době značně automatizovaného provozu toto problém není). I v případě dobře 'sladěných' operací na lince může prostoje způsobit poruchovost v některých uzlech. Porucha jednoho uzlu samozřejmě vede k zastavení části linky před i za ním, či celé linky, nebo aspoň zpomalení, není-li linka složena 'sériově', tj. má třeba paralelní větve. Pak (samozřejmě kromě snahy poruchovost snížit) se nabízí možnost vložit mezi jednotlivé operace zásobníky s kapacitou, která vyrovná nerovnoměrnost vzniklou náhodným výskytem poruch. Stanovit optimální velikost zásobníků mezi jednotlivými uzly není snadné, zvláště v případě, kdy výskyt poruch je "silně" náhodný, tj. např. odpovídá Poissonovu procesu. Pak pro každou velikost zásobníku může teoreticky být dosažena celá jeho kapacita s kladnou pravděpodobností za konečnou dobu. Jde tedy i o to určit, jaké 'střední' zpomalení je ještě únosné, resp. kdy už není přínosem velikost zásobníků zvyšovat.

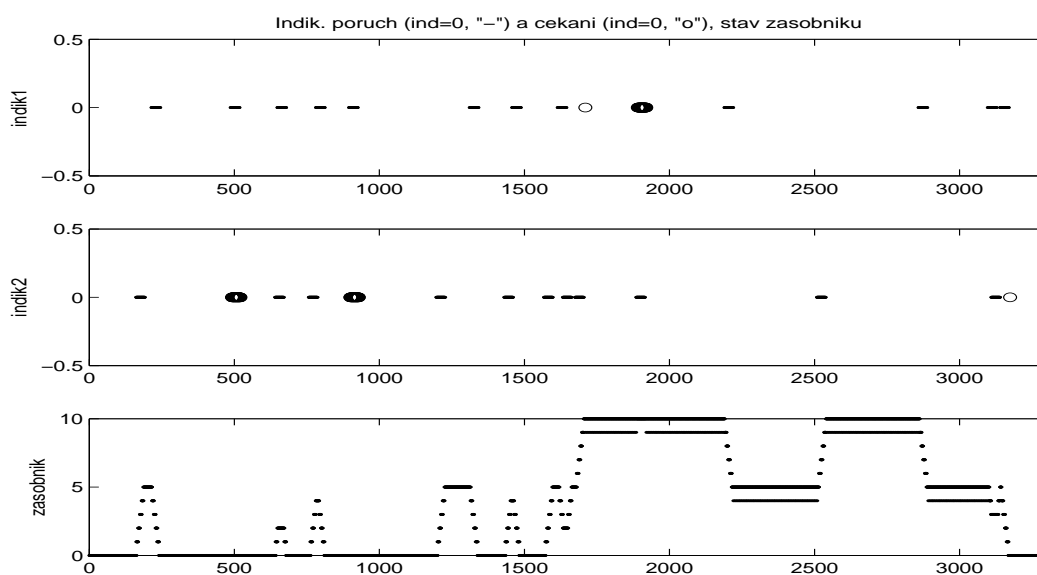
Stejným způsobem jako na jednotlivé operace ve výrobní lince se můžeme dívat i na větší celky, celé linky a střediska v rámci podniku.

Celá tato idea odporuje vlastně současné snaze o co nejdynamičtější výrobu, bez zbytečného skladování výrobků ani na vstupu či výstupu z provozu, ani mezi operacemi (t.zv. koncepce "Lean Production"). Ale to má smysl především tam, kde je minimum poruch. Dává se pak přednost celkové preventivní údržbě v daných intervalech a linka běží ve 'vyladěném' taktu, ať už je více či méně automatizovaná (tj. obsluha je přímo u operací nebo jen kontroluje a případně seřizuje chod linky). V případě, že výskyt poruch je náhodný a nezanedbatelný, má tedy smysl se zabývat i otázkou (mezi)zásobníků a jejich velikosti. Nejdřív ukážeme vliv zásobníku na jednoduchém příkladě, pak se budeme zabývat optimální velikostí zásobníku.

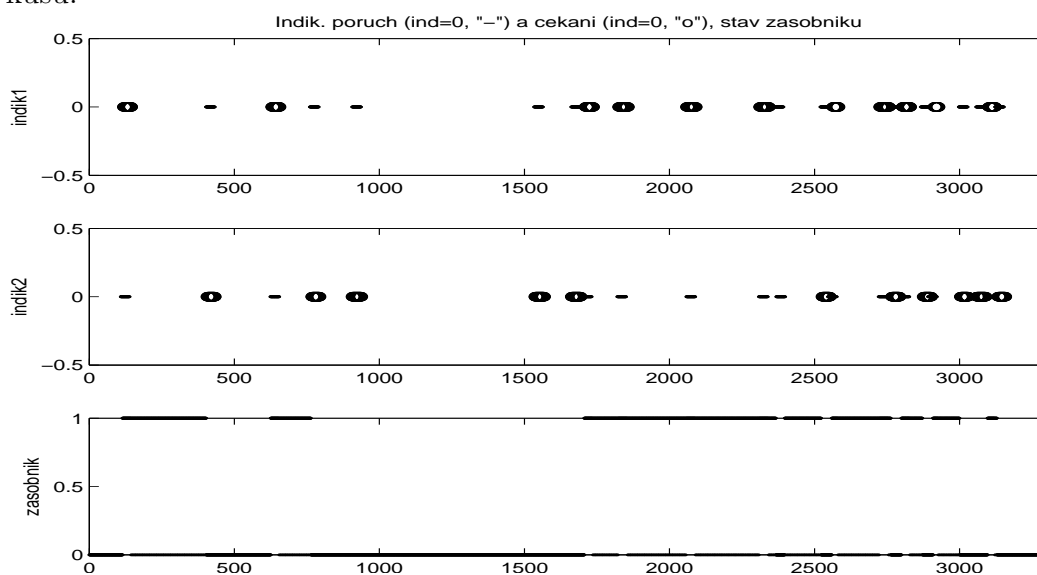
2 Sériový systém dvou operací – příklad

Uvažujeme jednoduchý případ kdy na operaci 1 navazuje operace 2. V našem příkladě mají obě stejný fixní (nenáhodný) takt, 1 kus projde za 6 minut. Ale obě mají poruchovost s dobou mezi poruchami exponenciální, se střední dobou 300 minut, doba opravy nechť je v obou případech opět pevná, 30 minut. Tedy každý stroj je v provozu v průměru 10/11 doby (opravuje se v průměru 30 minut po 300 minutách provozu). Jenže další prostoje

vznikají když a) 2. stroj čeká na výrobek od 1. stroje, a ten je v opravě, b) 1. stroj nemá 'odbyt', takže se zastaví, když je 2. stroj v opravě. Kdyby se poruchy 1. a 2. stroje střídaly pravidelně, stačil by mezizásobník na 5 kusů (počet výrobků za dobu opravy). Ale díky exponenciálnímu rozdělení dob mezi poruchami je výskyt poruch značně nepravidelný. K dosažení maximální možné rychlosti 50 výrobků za 330 minut se můžeme zvětšováním zásobníku dostatečně přiblížit, kdežto bez zásobníků by linka mohla stát dvakrát déle (to když se opravy strojů nebudou vůbec překrývat, což má zde pravděpodobnost asi 0,9 (tj. doba nepřekrývající se oprav ku době všech oprav). Následující obrázky ukazují náhodně generované výsledky v situaci našeho příkladu, a to jednak se zásobníkem na 10 kusů, jednak pro případ bez zásobníku, linka byla 'generována' po 55 hodin (3300 minut). Takže ideální vyrobený počet by byl 500 kusů, minimální očekávaný počet v situaci bez zásobníku je 450 kusů. Výpočty byly provedeny pomocí kódu *poruchy1.m*.



Obrázek 1: Grafické výsledky jednoho generovaného běhu v situaci 1, tj. se zásobníkem na 10 kusů.



Obrázek 2: Grafické výsledky jednoho generovaného běhu v situaci 2, tj. se zásobníkem na 1 kus.

Situace 1: Bylo vyrobeno celkem 484 kusů, stroj 1 stál navíc (mimo opravy) 31 minut, stroj 2 61 minut. Obrázek 1 ukazuje na horních 2 subplotech, kdy stroj 1 či 2 stál pro poruchu, tj. byl opravován (čárkovaně) a kdy stál navíc (označeno sérií koleček), dolní subplot ukazuje stav zásobníku.

Situace 2: Bylo vyrobeno celkem 454 kusů, stroj 1 stál navíc (kromě oprav) 273 minut, stroj 2 stál navíc 294 minut. Průběh simulace je na obrázku 2.

3 Otázka velikosti zásobníku - podrobněji

Výchozí situace je nyní následující: Zásobník před výrobní linkou (nebo její částí) je pravidelně doplňován s periodou T a linka z něj odebírá kusy (po jednom). Doby mezi odběry (tj. výstupy ze zásobníku) jsou i.i.d. náhodné veličiny X_i .

Otázka: Za jakou dobu T_M se odebere M kusů (optimální interval doplňování zásobníku), nebo obráceně, kolik kusů se odebere za danou dobu T (optimální velikost zásobníku).

Stejný problém se týká situace, kdy zásobník je výstupní, tj. za linkou. Nechť je na začátku prázdný a X_i jsou doby mezi příchody kusů do něj. Řeší se úloha, za jak dlouho se zásobník o kapacitě M naplní, resp. jak má být velký, bude-li vyměněn za prázdný až za dobu T .

Protože $P(T_M < t) = P(M_t > M)$, kde M_t je počet odebraných kusů za dobu t , soustředíme se jen na první problém, a to rozdělení $T_M = \sum_{i=1}^M X_i$ pro dané M . Zajímají nás především jeho dolní kvantily, protože chceme zvolit takový interval doplnění (do) M kusů, T_M^* , aby s pravděpodobností $< \alpha$ (α malé, řekněme 1% ~ 5%) nedošlo k vyprázdnění zásobníku, tj. $P(T_M < T_M^*) \leq \alpha$, tj. T_M^* je na úrovni α -kvantilu rozdělení T_M .

Protože se jedná o součet M i.i.d. náhodných veličin, nabízí se použít aproximace pomocí normálního rozdělení (díků centrální limitní větě), tj. $T_M = \sum_{i=1}^M X_i$ považovat za normální náhodnou veličinu s $E(T_M) = M \cdot \mu$ a $var(T_M) = M \cdot \sigma^2$, kde $\mu = E(X_i)$ a $\sigma^2 = var(X_i)$. Ukazuje se, že tato aproximace už pro třeba $M \sim 20$ je dost dobrá, rozdíly jsou většinou $\ll 1\%$, kromě případu kdy $\sigma^2 \gg \mu$ (případ exponenciálního rozdělení).

Pokud bude kapacita zásobníku o něco větší $M + M_1$, a M_1 budeme považovat za rezervu, tak tím pravděpodobnost prázdného zásobníku ještě značně snížíme.

Ale simulace ukazují, že ta normální aproximace dává dokonce menší T_M než je skutečně potřeba pro exp. rozdělení, takže už i tato aproximace zahrnuje určitou rezervu.

Přitom v realitě očekáváme doby odběru X_i s relativně malým rozptylem, i proto lze k aproximaci rozdělení T_M normálního rozdělení využít.

Kód *zasob1.m* provádí výpočet T_M k M jak uvedeno shora, a také provádí simulaci T_M z několika distribucí pro X_i , podle volby uživatele, a také pro srovnání "skutečností" s přesností normální aproximace. Lze zde také spočítat vliv oné další rezervy M_1 .

Shrnutí: Je dáno či odhadnuto μ, σ, M , zvoleno α např. 0.05, pak řešení je

$$T_M = \alpha - \text{kvantil } N(E = M\mu, var = M\sigma^2) = M\mu + \sqrt{M}\sigma u_\alpha,$$

kde u_α je kvantil standardního normálního rozdělení $N(0, 1)$, např. pro $\alpha = 0.05$ $u_\alpha = -1.645$ (v Matlabu spočtené funkcí *norminv(0.05)*).

V případě hodně malé (až zanedbatelné) směrodatné odchylky σ je lépe použít postup z části 3, kdy některý parametr m_j volíme hodně velký, např. uvažujeme-li jen vstup do zásobníku, tak volíme $m_2 \sim \infty$.

Příklad 1: Doba mezi vstupy (nebo výstupy) má standardní exponenciální rozdělení tj. $EX = \text{var}X = 1$, zásobník má kapacitu $M = 20$ kusů. Dolní 0.01 až 0.1 kvantily rozdělení T_M ze "skutečných", tj. generovaných dat (10000 simulací) byly:

11.1157 11.9444 12.5180 12.9833 13.2974 13.5922 13.8379 14.0698 14.2886 14.4793,

zatímco normální aproximace dala následující hodnoty kvantilů T_M :

9.5963 10.8154 11.5888 12.1707 12.6440 13.0468 13.4001 13.7163 14.0040 14.2687.

Je vidět, že skutečně normální aproximace dává ještě rezervu.

Příklad 2: Doba mezi vstupy (nebo výstupy) má rovnoměrné rozdělení $Ro(1, 2)$, zásobník má kapacitu $M = 20$ kusů. Dolní 0.01 až 0.1 kvantily rozdělení T_M naplnění (resp. vyprázdnění) zásobníku ze "skutečných", tj. generovaných dat (10000 simulací) byly:

27.0798 27.3781 27.5883 27.7623 27.9063 28.0188 28.1120 28.1990 28.2734 28.3428,

zatímco normální aproximace dala následující hodnoty kvantilů T_M :

26.9967 27.3486 27.5719 27.7399 27.8765 27.9928 28.0948 28.1861 28.2691 28.3455.

Opačná úloha, tj. nalezení velikosti zásobníku M_T k danému intervalu doplnění zásobníku T pomocí normální aproximace, se řeší výpočtem kvadratické rovnice pro M vzniklé ze vztahu

$$\frac{M \cdot \mu - T}{\sqrt{M} \cdot \sigma} = u_p,$$

kde u_p je kvantil standardního normálního rozdělení – zde používáme horní kvantily, např. pro $p = 0.90, 0.91, \dots, 0.99$. To provádí kód *zasob11.m*, a to opět jednak pomocí této aproximace (která je dobrá ve většině případů), jednak pomocí Poissonova rozdělení, které řeší tento problém právě v případě exponenciálních vstupů (počet událostí za dobu T má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = T/EX$, EX je střední hodnota náhodné veličiny X). Pro srovnání se počítá výsledek simulací M_T při známé dané distribuci veličin X_i .

Opět, normální aproximace je většinou velice přesná a pro případy s velkým rozptylem dává dokonce větší M_T než je skutečně potřeba, takže i zde tato aproximace zahrnuje určitou rezervu.

Shrnutí: Označíme-li $M = z^2$, tak řešení oné kvadratické rovnice je

$$z = \frac{u_p \sigma}{2\mu} + \sqrt{\frac{T}{\mu} + \left(\frac{u_p \sigma}{2\mu}\right)^2},$$

a tedy vezmeme $M_T = [z^2] + 1$ ($[.]$ značí 'celá část').

Zde se používají horní kvantily $N(0, 1)$, tedy např. pro $p = 0.95$ je $u_p = 1.645$ ($= \text{norminv}(0.95)$).

Příklad 3: Doba mezi vstupy (nebo výstupy) má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 10, vymezený čas $T = 50$. Horní 0.99 až 0.90 kvantily rozdělení M_T počtu kusů, které za T přijdou (resp. odejdou), odhadnuté z generovaných dat (10000 simulací) byly (po zaokrouhlení nahoru):

12 11 11 10 10 10 9 9 9 9,
Poissonova aproximace dala:
11 10 10 9 9 9 8 8 8 8,
a normální aproximace (také po zaokrouhlení nahoru) dala následující hodnoty:
14 13 12 11 11 10 10 10 10 9,
tj. opět pro krajní kvantily dává i rezervu.

Příklad 4: Doba mezi vstupy (nebo výstupy) má Weibullovo rozdělení $W(20,2)$, které má $EX = 17.7245$, $\sigma = 9.2650$, vymezený čas byl $T = 200$. Horní 0.99 až 0.90 kvantily rozdělení M_T počtu kusů, které za T přijdou (resp. odejdou), odhadnuté z generovaných dat (10000 simulací) byly:

17 16 16 15 15 15 15 14 14,
Poissonova aproximace dala:
20 19 18 17 17 17 16 16 16 16,
a normální aproximace dala následující hodnoty:
17 16 16 15 15 15 15 14 14.

Pro praktické výpočty v této úloze je tedy třeba znát (nebo odhadnout z dat) střední hodnotu a rozptyl rozdělení doby X , není třeba znát její distribuci přesně. Z kódů se tedy vynechají příkazy týkající se simulace, a je jen potřeba zadat nějak μ a σ náhodné veličiny X .

4 Varianta se vstupem a výstupem

Nyní jde o klasickou úlohu z teorie front (obsluhy). Je jeden náhodný vstup, s časy vstupu X_i (i.i.d.) a jeden výstup, s časy Y_j (také i.i.d.), mezi nimi fronta – zásobník. Tedy systém $\mathcal{G}/\mathcal{G}/1$.

Otázkou je rozsah fronty, případně, pokud roste, tak kdy a na jak dlouho zastavit vstup (resp. nasměrovat jinam), je-li zásobník omezený. Označíme-li $m_1 = EX_i$, $m_2 = EY_j$ střední hodnoty, obrácené hodnoty $h_j = 1/m_j$ intenzity vstupů či výstupů, pak při $h_1 > h_2$ dochází k prodlužování fronty, při $h_1 < h_2$ zase k častému vyprázdnění zásobníku a čekání na další vstup. Ani jedno není ideální. Přesná řešení jsou známa jen pro některé situace $h_1 < h_2$ (ustálená pravděpodobnost obsahu zásobníku jako stacionární rozdělení příslušného Markovova řetězce, viz teorie front v literatuře). Proto zde navrhneme regulaci založenou na Monte Carlo přístupu, tj. využití náhodného generátoru.

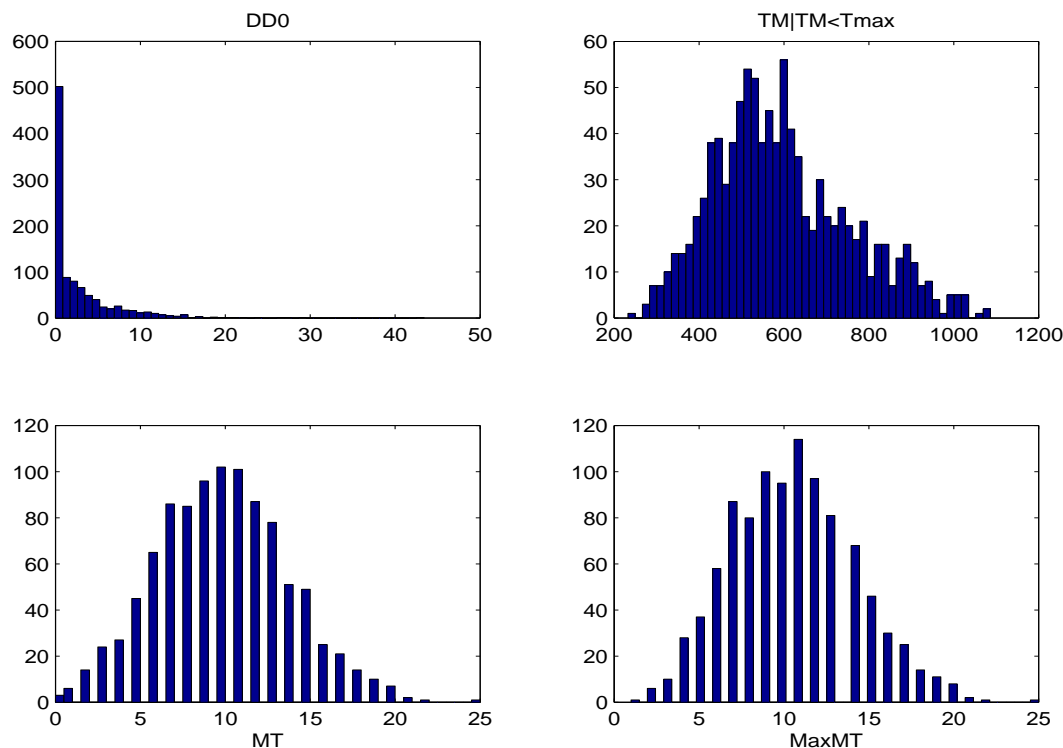
Kód *zasob2.m* pro zadaný typ a parametry rozdělení X_i a Y_j určí dobu do překročení stavu M v zásobníku, stav zásobníku (resp. maximum stavu) do doby T , a také (relativní) dobu čekání, kdy je zásobník prázdný. Jaká je pak vhodná procedura řízení stavu zásobníku?

Je-li $m_1 > m_2$ (tj. $h_1 < h_2$), stačí zjistit velikost zásobníku M tak, že se přeplní jen s malou pravděpodobností α . Ale už je-li $m_1 \sim m_2$, roste obsah zásobníku s rychlostí $\mathbf{O}_p(\sqrt{t})$. V tomto případě (a případě $m_1 < m_2$) je tedy nutné např.: Zvolit velikost zásobníku M a k ní zjistit rozdělení T_M času, kdy se naplní, resp jeho dolní α kvantil, tj. čas $T_M(\alpha)$ takový, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ bude T_M delší. Pak vstup ‘odklonit’, vypnout, a zapnout jej znovu až stav poklesne na malou rezervu M_1 (tato část je vlastně řešena v části 1). Tento postup stále opakovat.

Nebo stanovit interval vypnutí vstupu T , k němu zjistit rozdělení maxima počtu kusů nahromaděných v zásobníku, M , horní $1 - \alpha$ kvantil (který tedy s pravděpodobností $1 - \alpha$

nebude překročen) a ještě přidat malou rezervu M_1 . Pak postupovat tak, že po T vždy vstup odstavím, po dalším T^* (zjištěném v bodě 1) jej znovu zapnu, stav zásobníku pak lze sledovat jen namátkově (případně kombinovat s předchozím postupem). Důležité výsledky jsou tedy: velikost zásobníku $M + M_1$ a očekávané intervaly ‘odstávky’ vstupu, T_M , resp. T , plus T_M^* resp. T^* z 1. části na snížení obsahu zásobníku zhruba na rezervu M_1 . Toto zjištění T_M k M či M_T k T provádí kód *zasob2.m*.

Ten tedy vyžaduje přesné zadání obou distribucí (či jim odpovídající data), ale jistě by stálo za pokus i zde zjistit přesnost normální aproximace.



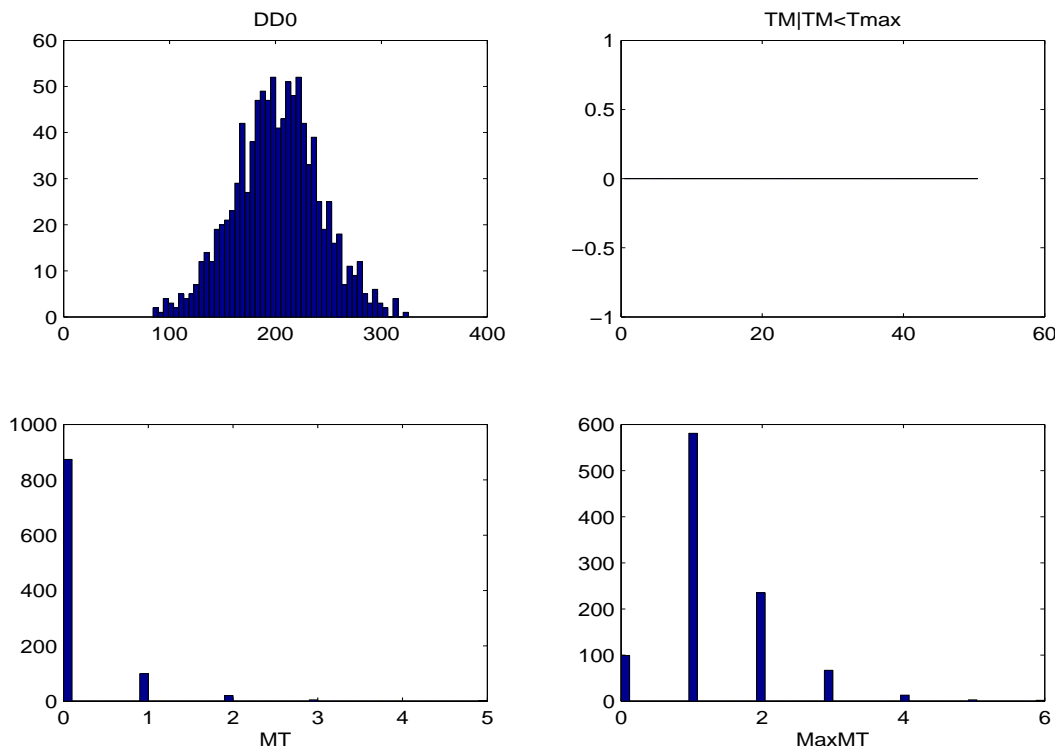
Obrázek 3: Grafické výsledky pro Příklad 5.

Příklad 5: V této situaci vstup \rightarrow zásobník \rightarrow výstup jsme předpokládali normální rozdělení, $X \sim N(\mu_1 = 5, \sigma_1 = 2)$, $Y \sim N(\mu_2 = 6, \sigma_2 = 2)$, čili výstup ”pomalejší” než výstup, zásobník se bude plnit. Generovali jsme 1000 procesů, každý do doby 200 vstupů, tj. přibližně 1000 časových jednotek dlouhý. Obrázek 5 v příloze ukazuje průběh všech trajektorií, a jsou vyznačeny hranice, které nás zajímaly: čas do překročení počtu $M = 20$ v zásobníku a také maximum kusů v zásobníku do času $T = 300$. Přibližně to lze vyčíst z grafu, a také z histogramů na obrázku 3: Tam je nejdříve doba čekání D_0 , kdy výstup musel čekat, protože zásobník byl prázdný, pak je tam rozdělení časů T_M dosažení stavu M , pak stav MT v zásobníku v čase T , a důležitější je maximum $MaxMT$ počtu kusů v zásobníku do času T . Ze simulací byly spočteny tyto hodnoty:

5-ti procentní kvantil $TM = 363$, tj. jen s pravděpodobností 5% se zásobník zaplní více než 20 kusů před $t = 363$

95-ti procentní kvantil $MaxMT = 17$, tj. s pravděpodobností 95% bude do $T = 300$ v zásobníku nanejvýš 17 kusů.

Dále, doba čekání byla zanedbatelná, zhruba 0.003 z celkové doby.



Obrázek 4: Grafické výsledky pro Příklad 6.

Příklad 6: V dalším příkladě jsme předpokládali naopak, že $X \sim N(\mu_1 = 6, \sigma_1 = 2)$, $Y \sim N(\mu_2 = 5, \sigma_2 = 2)$, čili výstup rychlejší než vstup. Generovali jsme opět 1000 procesů, každý do doby 200 vstupů. Obrázek 6 v příloze ukazuje znovu průběh trajektorií. Nyní nebyla hranice $M = 20$ vůbec dosažena. Obrázek 4 přináší stejné veličiny jako Obr. 3. Ze simulací byly nyní spočteny tyto hodnoty:

95-ti procentní kvantil $\text{MaxMT} = 3$, tj. s pravděpodobností 95% budou do $T = 300$ v zásobníku nanejvýš 3 kusy.

Doba čekání byla zhruba 0.17 z celkové doby.

5 Situace s malým rozptylem

Dále, pokud je takt vstupů a výstupů skoro deterministický (jak to ve většině případů očekáváme), tak se vystačí se sčítáním Gaussovské neurčitosti, a přičtením této neurčitosti k deterministickým výsledkům.

Nechť tedy $T_j = N(m_j, \sigma_j)$, $j = 1, 2$, a směrodatné odchylky σ_j jsou relativně malé vzhledem k m_j . Dále předpokládejme $m_2 > m_1$ (jinak se fronta prakticky tvořit nebude). Pokud jsou rozptyly zanedbatelné, tak za dobu T přijde zhruba T/m_1 a odejde T/m_2 výrobků, tedy zbyde $T/m_1 - T/m_2$. Takže náš odhad počtu kusů v zásobníku za čas T je (zaokrouhlíme na celé číslo nahoru)

$$M_T = \left\lceil \frac{T}{m_1} - \frac{T}{m_2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{T}{m_1 m_2} (m_2 - m_1) \right\rceil + 1. \quad (3)$$

Pokud naopak chceme určit čas T , za který stav v zásobníku dosáhne M kusů, dostaneme

z (3)

$$T_M = (M - 1) \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} = (M - 1) \frac{1}{\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}}. \quad (4)$$

Nyní si představme, že doby mezi příchody jsou náhodné, v (3) ve jmenovateli místo m_1, m_2 musí být nějaké průměrné hodnoty \bar{T}_1, \bar{T}_2 , které vznikly jako

$$\bar{T}_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} T_{ji} = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} (m_j + \varepsilon_{ji}),$$

kde $j = 1, 2$, ε_{ji} jsou i.i.d. náhodné veličiny $\sim N(0, \sigma_j)$, a N_j je odhadnutý (průměrný) počet vstupů či výstupů za dobu T , neboli $N_j = \frac{T}{m_j}$. Pak místo (3) dostáváme

$$M_T = \frac{T}{m_1 + \bar{\varepsilon}_1} - \frac{T}{m_2 + \bar{\varepsilon}_2},$$

kde $\bar{\varepsilon}_j \sim N(0, \text{var} = \sigma_j^2/N_j)$, a použijeme 1 člen Taylorova rozvoje $\frac{1}{x+c} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot c$ ($+\mathcal{O}(c^2)$):

$$M_T = T \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{m_1^2} + \frac{\bar{\varepsilon}_2}{m_2^2} \right),$$

což má střední hodnotu z (3) a rozptyl

$$\text{var}(M_T) = T^2 \left(\frac{\sigma_1^2}{N_1 m_1^4} + \frac{\sigma_2^2}{N_2 m_2^4} \right) = T \left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{\sigma_2^2}{m_2^3} \right). \quad (5)$$

Směrodatná odchylka $\sigma(M_T)$ je pak odmocnina z tohoto. Zároveň považujeme M_T za normálně rozdělené. V rozvoji jsme zanedbali členy $\bar{\varepsilon}_j^2$ a vyššího řádu.

Pokud jde o dobu T_M prvního dosažení obsazenosti zásobníku M kusy, máme obdobně z (4)

$$\begin{aligned} T_M &= (M - 1) \frac{1}{\frac{1}{\bar{T}_1} - \frac{1}{\bar{T}_2}} = (M - 1) \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_2}{\bar{T}_1 - \bar{T}_1} = \\ &= (M - 1) \frac{m_1 m_2 + m_1 \bar{\varepsilon}_2 + m_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}{m_2 - m_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1} \sim \\ &\sim (M - 1) \left(\frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} - \frac{m_1 m_2}{(m_2 - m_1)^2} (\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1) + \frac{m_2 \bar{\varepsilon}_1 + m_1 \bar{\varepsilon}_2}{m_2 - m_1} \right), \end{aligned}$$

kde jsou po Taylorově rozvoji opět zanedbány členy řádu $\bar{\varepsilon}_j^2, \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2$ a vyšší.

Vidíme, že střední hodnota $T_M = (M - 1) \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1}$ opět odpovídá (4), a náhodná část (která je gaussovská a má střední hodnotu 0) dá

$$\begin{aligned} &(M - 1) \left\{ \bar{\varepsilon}_1 \left(\frac{m_1 m_2}{(m_2 - m_1)^2} + \frac{m_2}{m_2 - m_1} \right) + \bar{\varepsilon}_2 \left(\frac{m_1}{m_2 - m_1} - \frac{m_1 m_2}{(m_2 - m_1)^2} \right) \right\} = \\ &= (M - 1) \left(\bar{\varepsilon}_1 \frac{m_2^2}{(m_2 - m_1)^2} + \bar{\varepsilon}_2 \frac{m_1^2}{(m_2 - m_1)^2} \right). \end{aligned}$$

Ještě v neznámých N_j nahradíme T střední hodnotou, dostaneme $N_1 = \frac{m_2}{m_2 - m_1} (M - 1)$, $N_2 = \frac{m_1}{m_2 - m_1} (M - 1)$, a pak je

$$\begin{aligned} \text{var } T_M &= (M - 1)^2 \left\{ \frac{\sigma_1^2 (m_2 - m_1)}{(M - 1) m_2} \cdot \frac{m_2^4}{(m_1 - m_1)^4} + \frac{\sigma_2^2 (m_2 - m_1)}{(M - 1) m_1} \cdot \frac{m_1^4}{(m_2 - m_1)^4} \right\} = \\ &= \frac{(M - 1)}{(m_2 - m_1)^3} \left\{ \sigma_1^2 m_2^3 + \sigma_2^2 m_1^3 \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Dále, směrodatná odchylka $\sigma(T_M) = (\text{var } T_M)^{\frac{1}{2}}$.

Shrnutí: Řešení pro prakticky deterministický případ bez kolísání jsou ve vztazích (3) a (4).

V případě s sice malými, ale nezanedbatelnými rozptyly dob mezi vstupy, výstupy, navrhuje řešení první úlohy tedy takto: Pokud chceme mít ‘jistotu’ α (např. 95 %), že za danou dobu T se zásobník nepřeplní, volíme velikost zásobníku

$$M_T = \left\lceil \frac{T}{m_1} - \frac{T}{m_2} + u_\alpha \cdot \sigma(M_T) \right\rceil + 1,$$

kde $\lceil \cdot \rceil$ je ‘celá část’, u_α je tedy např. 95 % kvantil $N(0, 1)$, $\sigma(M_T)$ máme z (5).

Pro opačnou úlohu, tj. při fixní velikosti zásobníku M zvolit takovou dobu, za kterou se zásobník nepřeplní s pravděpodobností α (\sim opět řekněme 95 %), volíme

$$T_M = (M - 1) \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} - u_\alpha \cdot \sigma(T_M),$$

(případně ještě zaokrouhlíme na celé číslo dolů, je-li čas počítán v celých jednotkách). Tyto výpočty jsou prováděny kódem *zasob3.m*; $\sigma(T_M)$ dostaneme z (6).

Samozřejmě, i tento případ se dá analyzovat simulacemi s Gaussovskými veličinami s malými rozptyly, pomocí kódu *zasob2.m*.

Příklad 7: Nyní jsme předpokládali, že $X \sim N(m_1 = 5, \sigma_1 = 0.2)$, $Y \sim N(m_2 = 6, \sigma_2 = 0.2)$, tj. střední hodnoty jako v příkladě 5, ale podstatně menší rozptyly. Výsledky, pomocí kódu *zasob3.m*:

5-ti procentní kvantil $TM = 543$, tj. jen s pravděpodobností 5% se zásobník zaplní více než 20 kusy před $t = 543$. Standardní odchylka TM byla asi 16.1.

95-ti procentní kvantil $MaxMT = 11$, tj. s pravděpodobností 95% bude do $T = 300$ v zásobníku nanejvýš 11 kusů.

Doba čekání byla zcela zanedbatelná.

Stejná úloha byla řešena i simulací pomocí kódu *zasob2.m*, která ukázala, že shora uvedené výsledky mají ještě rezervu, tj. jsou až příliš opatrné, a že v podstatě stačí vzít hodnoty odpovídající těm, které jsme dostali z kódu *zasob3.m*, ale s nulovými rozptyly:

Za předpokladu zcela **determinovaných dob**, tj. s rozptyly 0 a taktem vstupu 5 a výstupu 6 časových jednotek, vyšlo také $MT = 11$, ale delší $TM = 570$.

Obrázek 7 v příloze ukazuje průběh trajektorií (1000) při generování tohoto případu pomocí kódu *zasob3.m*.

6 Neurčitost doby odstávky T

V minulé části jsme řešili problém, kolik kusů (polotovarů) se vyrobí či spotřebuje za dobu T . Pro určení počtu M_T jsme použili dostatečně dobrou aproximaci pomocí normálního rozdělení. Teď si představme, že doba T není pevná, ale náhodně kolísá. Úloha zní opět: Jak (na kolik kusů M) nastavit velikost zásobníku, aby jen s malou pravděpodobností α (řekněme 1 %–5 %) toto M nestačilo, tj. skutečný počet kusů byl větší než M .

6.1 Známé rozdělení T

Pokud je $f_T(t)$ hustota rozdělení pravděpodobnosti veličiny T , máme najít nejmenší takové M , aby už

$$\int_0^\infty P(T_M < t) \cdot f_T(t) dt \leq \alpha, \quad (7)$$

tj. aby pravděpodobnost jevu, že čas T_M vyčerpání (či výstupu) M kusů bude menší než aktuální T , byla po ‘zprůměrování’ přes distribuci T menší než α .

Když pak pro T_M použijeme normální rozdělení jako v části 1, tj. $T_M \sim \mathcal{N}(M \cdot \mu, M \cdot \sigma^2)$, kde μ, σ^2 jsou střední doba a rozptyl doby zpracování 1 kusu, tak $P(T_m < t) \sim \Phi\left(\frac{t - M\mu}{\sigma \cdot \sqrt{M}}\right)$, kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Takže (7) se změnil na

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{t - M\mu}{\sigma \cdot \sqrt{M}}\right) \cdot f_T(t) dt \leq \alpha. \quad (8)$$

Nejmenší M , které to splňuje, lehce najdeme (M jsou celá čísla), provádí to kód *zasob4.m*. Tento kód zároveň výsledek porovnává s výsledkem získaným simulací.

Pokud rozdělení doby odstávek T není dáno svou distribucí, ale daty T_1, \dots, T_N (dobami pozorovaných odstávek), pak lze použít ‘empirickou’ verzi (8), a to

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi\left(\frac{T_i - M\mu}{\sigma \cdot \sqrt{M}}\right) < \alpha. \quad (9)$$

6.2 Neznámé rozdělení T

Horší případ nastane, když známe třeba jen průměrnou délku odstávky, tj. vlastně střední hodnotu μ_T pro náhodnou veličinu T . Pokud je navíc zjištěn i rozptyl σ_T^2 , můžeme zkusit vzít za rozdělení pro T normální rozdělení s těmito parametry, případně při relativně velkém rozptylu i Weibullovo rozdělení.

Pokud skutečně známe jen průměr, je možné pro rozdělení T vzít tu ‘nejhorší’ situaci, a sice exponenciální rozdělení s $ET = \mu_T$ (pak rozptyl $T = \mu_T^2$). I potom lze kód *zasob4.m* použít pro výpočet M a porovnat, jak se liší výsledek pro různé distribuce T .

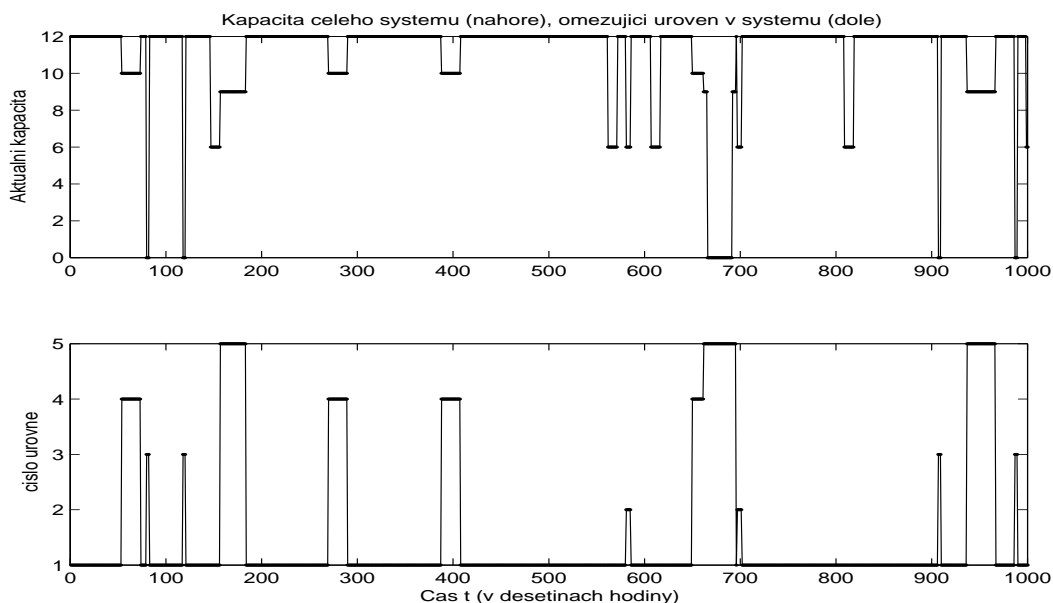
Příklad 8:

- Nechť T má normální rozdělení s $\mu_T = 30$, $\sigma_T = 5$ a doba výroby 1 kusu má $\mu = 3$, $\sigma = 1$. Pak pro $\alpha = 0,05$ je dle (8) nejmenší $M = 14$ (pravděpodobnost jeho překročení je jen 0,027), zatímco pravděpodobnost překročení 13 je již 0,072. Výsledky pomocí náhodného generování z 10 000 náhodných čísel byly prakticky stejné.
- Místo přímo použitého rozdělení pro T jsme vygenerovali 50 dat $\{T_i\}$ z $\mathcal{N}(\mu_T = 30, \sigma_T = 5)$. Pomocí (9) bylo opět zjištěno nejmenší $M = 14$, náhodné generování to také potvrdilo.

Příklad 9: Mějme jen $\mu_T = 20$, předpokládejme exponenciální rozdělení T , pro výrobu 1 kusu stále nechť je $\mu = 3$, $\sigma = 1$. Pak vyšlo minimální $M = 21$ s pravděpodobností překročení 0,043.

Pokud jsme brali míto exponenciální distribuce useknutou normální, tj. $T \sim \mathcal{N}(\mu_T = 20, \sigma_T = 20)$ a jen $T > 0$, tak bylo nalezené minimální $M = 19$, čili jen o trochu menší. Je ovšem jasné, že znalost rozptýlenosti (variability) T je dost důležitá pro správné rozhodnutí.

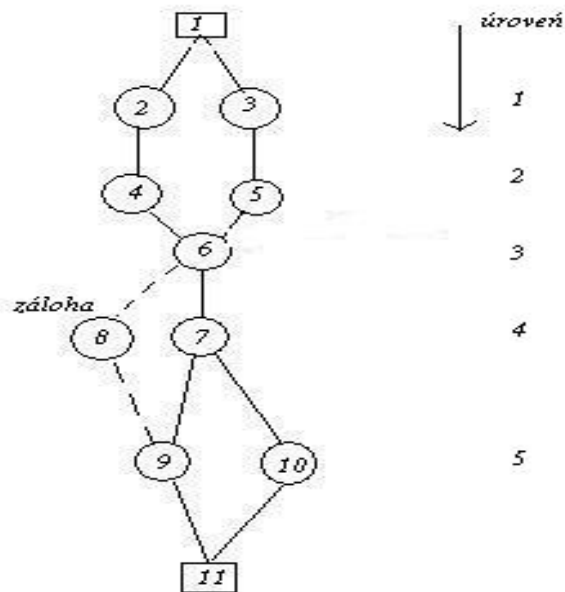
Poznámka. Předpokládá se, že mezi jednotlivými odstávkami jednoho stanoviště je dostatečná doba provozu bez poruchy, aby se následky odstávek nekumulovaly.



Obrázek 8: Grafické výsledky pro příklad využití linky.

7 Závěrečný příklad

Na obrázku 8 je ukázka konfigurace jednoduché linky, se seriově řazenými i paralelními operacemi, tj. některé operace jsou zdvojené, pro malou kapacitu jednotlivých strojů, pro jednu operaci je i záloha. Jednotlivá stanoviště mají své intenzity poruch (řádově 0,01 až 0,1 poruch za hodinu) s dobami oprav v rozmezí 0,25 až 3 hodiny. Kapacity jednotlivých stanovišť jsou od 6-ti ks za hodinu (ta zdvojená) až po 15 ks/hod. Pokud by se braly v potaz střední doby oprav, tak maximální dosažitelná rychlost linky by byla 11,76 ks/hodinu. Ale simulace v situaci bez vyrovnávacích zásobníků ukazují, že díky rozložení poruch, kdy jednotlivá stanoviště musejí čekat na ostatní, je dosažená rychlost jen kolem 11 ks/hod. V případě zde uvedeném byla v průměru 10,89. Obrázek 9 ukazuje výsledky této simulace (celkově 100 hodin provozu). Nahoře je okamžitá kapacita linky (v případě bez poruchy rovná 12 ks/hod., omezující úrovně byly 1 a 2). V dolním grafu je ukázáno, která úroveň kdy omezovala kapacitu linky (tj. svými poruchami, v případě že dosažená kapacita byla menší než 12).



Obrázek 9. Schéma jednoduché linky

Poděkování: Práce vznikla za podpory projektu MŠMT ČR č. 1M06047, "Výzkumné centrum pro jakost a spolehlivost".

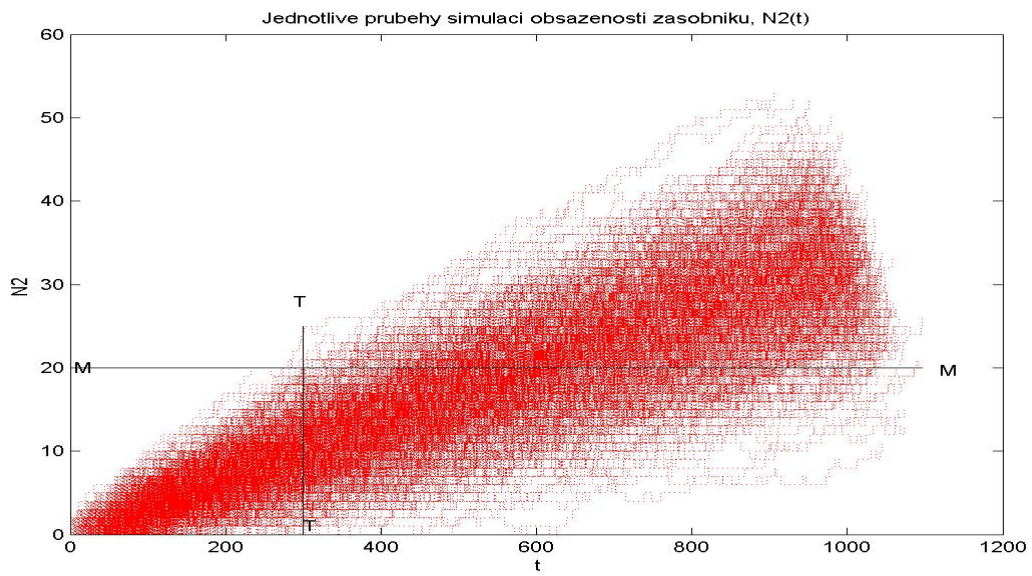
Literatura:

Robert Ph.: Stochastic Networks and Queues, Springer, 2003.

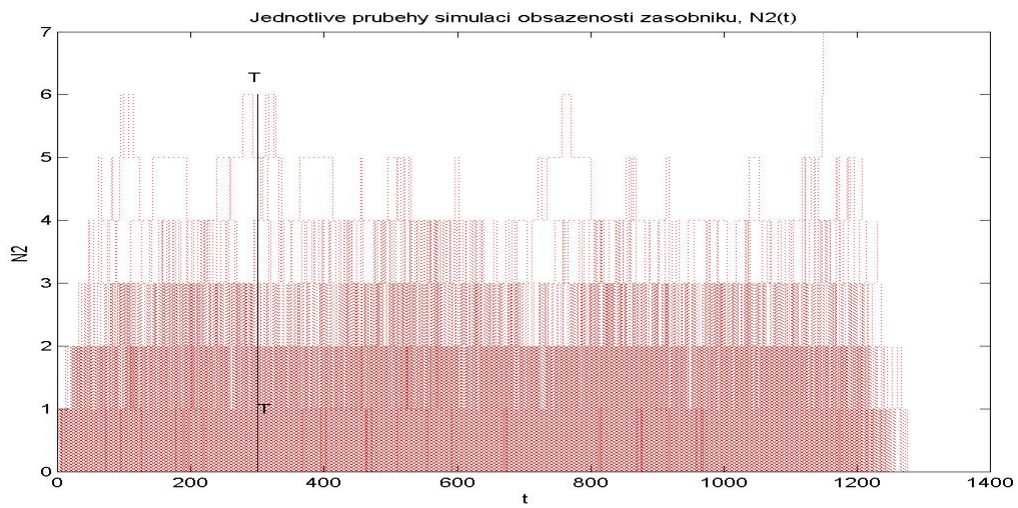
Anděl J.: Matematika náhody, Matfyzpress, Praha 2003.

PŘÍLOHA:

Obrázek 5 (k příkladu 5):



Obrázek 6 (k příkladu 6):



Obrázek 7 (k příkladu 7):

