Modální logika

Nejběžnějším výrokovým modifikátorem, se kterým se setkáváme v přirozeném jazyce je negace. Operátor negace je jedním z klíčových „spojek“ klasické logiky. Běžně se ovšem v přirozeném jazyce setkáváme se spoustou dalších výrokových modifikátorů. S jejich pomocí můžeme vytvořit výroky jako

V1 *Je možné, že Aristotelés obdivoval Kleopatru*,
V2 *Je známo, že Aristotelés obdivoval Kleopatru*,
V3 *Je pravděpodobné, že Aristotelés obdivoval Kleopatru*,
V4 *Je dojemné, že Aristotelés obdivoval Kleopatru*,

ale třeba i výroky, kde se za modifikátorem nachází složený výrok jako

V5 *Je možné, že Aristotelés obdivoval Kleopatru a Kleopatra obdivovala Aristotela*,

nebo výroky, ve kterých je zřetězeno více modifikátorů jako

V6 *Je možné, že je pravděpodobné, že Aristotelés obdivoval Kleopatru a Kleopatra obdivovala Aristotela.*

Zakladatel moderní logiky Gottlob Frege byl toho názoru, že k posuzování správnosti úsudků vystačíme s uvažováním o extenzích jazykových výrazů. To se ovšem zdá v rámci logiky, která připustí výrokové modifikátory (operátory) výše zmíněného druhu, tj. takové jimž neodpovídají pravdivostní funkce, neudržitelné. Pro vyjádření, která jsou vytvořena s jejich pomocí, totiž zjevně neplatí princip, který říká, že nahradíme-li ve složeném výroku výrok, který je jeho složkou, jiným výrokem se stejnou pravdivostní hodnotu, pravdivostní hodnota složeného výroku se nezmění.

Připomeneme-li si, co jsme řekli o *extenzích* výrazů (to jest o designátech, kterými jsou opatřeny výrazy jazyka klasické logiky – extenzí jména je jím pojmenovávaný předmět, extenzí predikátu množina předmětů, které pod něj spadají, a extenzí výroku jeho pravdivostní hodnota), můžeme říci, že klasická logika splňuje *princip extenzionality*:

Předpokládáme-li, že význam složeného výrazu je jednoznačně určen významy jeho částí (tzv. princip kompozicionality), má tento princip za důsledek to, že nahradíme-li ve složeném výrazu výraz, který je jeho složkou, jiným výrazem se stejnou extenzí, extenze složeného výrazu se nezmění.

Podívejme se ale nyní na modifikovaný výrok:

V7 *Není možné (aby bylo pravda), že Václav Klaus spolkl dospělého slona.*

Patrně se shodneme na tom, že jde o pravdivý výrok. Přijměme nyní přirozený předpoklad, že jeho složkou je výrok *Václav Klaus spolkl dospělého slona*, a zkusme nyní tento výrok nahradit výrokem, který má stejnou extenzi – totiž hodnotu nepravda – *Liberec je větší než Plzeň*. Výsledkem takového nahrazení bude výrok:

V8 *Není možné (aby bylo pravda), že Liberec je větší než Plzeň.*

Tento výrok je ale očividně nepravdivý. To, že Liberec co do velikosti předstihne Plzeň, sice může být nepravděpodobné, ale jistě to možné je. Zjevně tedy stojíme před volbou: buď odmítneme přijmout výroky modifikované pomocí jiných modifikátorů, než je negace (případně ony další tři extenzionální), do logického diskurzu nebo odmítneme obecnou platnost principu extenzionality. Část moderních logiků, zvláště těch orientovaných na matematiku, zvolila první možnost. Jiná část se však postupně přiklonila k té druhé možnosti – totiž k přesvědčení, že stojí za to budovat logické systémy, ve kterých princip extenzionality obecně neplatí.

Prostřednictvím takových logik se samozřejmě dostáváme za hranice logiky klasické; neextenzionální logiky jsou tedy logikami *neklasickými*. Avšak klasická logika není charakterizována jenom svou extenzionalitou. Chápeme-li princip extenzionality tak, že o výrocích konstatuje pouze to, že výroky designují pravdivostní hodnoty, pak k tomu musíme dodat, že tyto hodnoty jsou právě dvě: *pravda* a *nepravda*. (Lze totiž uvažovat i o logikách, které některým výrokům nepřiřazují ani jednu z těchto hodnot.) Princip, který postuluje, že výrok může mít jen hodnotu *pravda* či *nepravda*, se obvykle označuje jako *princip bivalence* (*dvouhodnotovosti*): Každý výrok je buďto pravdivý nebo nepravdivý.

Neklasické logiky tedy v typickém případě porušují buďto princip extenzionality nebo princip bivalence.

Názor, že je smysluplné budovat logické systémy, které by umožňovaly zachytit logické vlastnosti výroků utvořených pomocí neextenzionálních operátorů, dnes přinejmenším mezi filosoficky orientovanými logiky výrazně dominuje. Má ostatně v dějinách logiky nikoli nevýznamnou tradici. Logické vlastnosti některých z těchto výrokových modifikátorů se totiž staly předmětem logických zkoumání už na samém úsvitu dějin logiky – v antice. Označení těchto zkoumání je odvozeno z toho, že výrokové modifikátory, které se nevejdou do rámce klasické logiky, můžeme často vidět jako jistým způsobem 'kvalifikující' pravdivostní hodnotu výroku, který modifikují – říkají *jakým způsobem* je pravdivý, například *nutně*, *možná*, *jasně*, *podle někoho* apod. A protože latinským výrazem pro *způsob* je *modus*, začalo se logice takových modifikátorů, zejména logice nutnosti a možnosti, říkat logika *modální*.

První známé úvahy v rámci západní tradice logiky, které očividně vycházejí z názoru, že modální výroky představují legitimní předmět logických zkoumání, lze nalézt už u Aristotela. Ten se v *Prvních analytikách* (8-22) zabývá úsudky, v nichž se modální výroky vyskytují. I když jeho úvahy v této oblasti jsou zatížené mnoha nejednoznačnostmi a vedou k argumentaci, která je kritizována jako pochybná, je zřejmé, že Aristotelés považuje rozbor logických vlastností modálních výroků za téma hodné soustavné pozornosti. Stejně jako většina jeho následovníků se Aristotelés soustřeďuje na výroky utvořené pomocí modifikátorů *je nutné, že ...* a *je možné, že ...* (případně modifikátoru *je nahodilé, že ...*). Aristotelův pokus o vytvoření teorie modálních sylogismů tak můžeme považovat za zakladatelský počin na poli modální logiky. Ve středověké logice se pak můžeme setkat i s úvahami o logických vlastnostech dalších neextenzionálních modifikátorů.

Termín *modální logika* se v dějinách logiky ani dnes nepoužívá zcela jednoznačně. V užším smyslu se jím rozumí pouze logika nutnosti a možnosti, v širším slova smyslu pod tento termín spadají i teorie zaměřené na logické zkoumání jiných neextenzionálních modifikátorů, případně i neextenziolnálních operátorů jiných než jsou modifikátory. Tak třeba na výroky utvořené pomocí modifikátorů jako *je známo, že ..., není známo, zda..., je prokázáno, že ...* nebo *osoba x je přesvědčena, že ...* se zaměřuje tzv. *epistemická logika*. Na výroky utvořené pomocí modifikátorů jako *je přikázáno, aby ..., je zakázáno, aby ..., je dovoleno, aby ...* se soustřeďuje *logika deontická* (z řeckého slova *deontos* – žádoucí, povinné). Výrokům, kde roli modifikátorů hrají obraty jako *v minulosti bylo pravda, že ..., v budoucnu bude pravda že ..., vždy bylo pravda, že ...*, se věnuje *temporální logika*. Výrokům, kde roli modifikátorů hrají obraty jako *je dobré, že ...*, je špatné, *že ...* se věnuje *hodnotová logika*. V rámci tohoto širšího pojetí se modální logika v užším slova smyslu obvykle označuje jako *aletická modální logika*.

Moderní modální logika se začala formovat ve druhém desetiletí 20. století. Za jejího zakladatele je považován americký logik Clarence Irving Lewis a za knihu, kde byl prezentován první moderní systém modální logiky, je považován jeho *Přehled symbolické logiky* (*Survey of Symbolic Logic*). Lewisovým primárním cílem ovšem nebylo nabídnout teorii modálních výroků. Původně mu šlo o to, aby dal logikům k dispozici implikaci, která bude 'lepší' než ta klasická. Takže přesto, že modální logika vypadá jako *rozšíření* klasické logiky, její moderní verze se zrodila především z úsilí o *revizi* resp. *modifikaci* této logiky.

Podle Lewise není klasická logika tak, jak byla kodifikována v Russellově a Whiteheadově průkopnickém díle *Principia mathematica* (1910-1913), uspokojivá. Pokud má totiž logika sloužit jako obecná teorie odůvodňování, pak musí být schopna adekvátně reglementovat tvrzení, která hrají v rámci odůvodňování ústřední roli, tj. tvrzení tvaru *Jestliže A, pak B*. A způsob, jakým to činí klasická logika, vede, jak jsme viděli, k důsledkům, které se zdají být paradoxní. Formule jako $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ - pravda je implikována čímkoli, $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ – nepravda implikuje cokoli, jsou někdy označovány jako *paradoxy materiální implikace*.

Z těchto důvodů se Lewis pokusil zavést do logického jazyka nový symbol, který by umožnil reglementovat tvrzení o tom, že z jednoho výroku vyplývá druhý (či že jedna skutečnost má za důsledek jinou) adekvátněji, tj. ve větším souladu s tím, jak je skutečně používáme. Jde mu o to nabídnout takovou reglementaci, která bude respektovat už zmíněnou skutečnost, že v argumentaci, kterou bereme jako průkaznou, používáme podmínková tvrzení takřka výhradně tehdy, je-li mezi výroky, které jej tvoří, nějaká užší souvislost.

Lewis postupuje tak, že buduje kalkul, který v podobě axiomů shrnuje principy, které charakterizují logické vlastnosti onoho nového dvojmístného operátoru. Jako označení pro svou adekvátnější implikaci volí symbol $\strictif$, kterému říká *přísná implikace* (*strict implication*), což se do češtiny tradičně překládá jako *striktní implikace*. Jazyk jeho systému ovšem vychází z jazyka KVL, v němž je symbol $\rightarrow$ nahrazen už zmíněným symbolem $\strictif$.

Axiomy, ze kterých Lewis vychází, jsou následující:

1. $(A \wedge B) \strictif (B \wedge A)$
2. $(A \wedge B) \strictif A$
3. $A \strictif (A \wedge A)$
4. $((A \wedge B) \wedge C) \strictif (A \wedge (B \wedge C))$
5. $A \strictif \neg\neg A$
6. $((A \strictif B) \wedge (B \strictif C)) \strictif (A \strictif C)$

Tyto axiomy však podle Lewise nezachycují fungování striktní implikace vyčerpávajícím způsobem. Ovšem s formulováním dalších axiomů, které by mezeru zaplnily, měl Lewis potíže, které vyřešil tím, že si pomohl dalším operátorem zpoza hranic klasické logiky – totiž operátorem, který nejpřímočařeji odpovídá slovnímu obratu *je možné, že (aby)....* Pro tento operátor se používá symbol $\Diamond$. S jeho pomocí Lewis formuloval další dva axiomy, které jeho axiomatický systém zkompletovaly:

7. $\neg\Diamond A \strictif \neg A$
8. $((A \strictif B) \strictif (\neg\Diamond B \strictif \neg\Diamond A))$

Formulace tohoto systému jakožto axiomatického systému je dokončena pomocí pěti odvozovacích pravidel.

Lewis je přesvědčen, že operátor možnosti s operátorem striktní implikace úzce souvisí. Připomeňme, že podle Lewise nám jako pravdivé výroky tvaru $A \strictif B$ mají vyjít pouze ty, v nichž je mezi pravdivostní hodnotami výroků v antecedentu a konsekventu nějaká souvislost. To odpovídá faktu, že spojení *jestliže ..., pak ...* používáme ke spojení dvou výroků tehdy, když nejenže aktuálně nenastává situace, kdy první je pravdivý a druhý nepravdivý, ale když taková situace nastat *nemůže*.

Při tomto chápání se na podmínkové výroky vlastně díváme jako na výroky, které obsahují modální modifikátor. Výrok

V9 *Jestliže prší, pak je mokro*

je možno parafrázovat jako

V10 *Nemůže pršet a nebýt mokro.*

A Lewis soudí, že právě takto je třeba význam implikativních výroků skutečně chápat. Dochází tak vlastně k závěru, že podmínkové výroky jako je V9 jsou skrytými modálními výroky. Parafrázujeme-li V10 tak, aby se jeho struktura stala ještě zjevnější, dostaneme výrok

V11 *Není pravda, že je možné, aby pršelo a nebylo mokro*.

V něm rozpoznáváme vedle spojky *a* jeden klasický výrokový modifikátor – negaci, a jeden modální modifikátor – už zmíněný modifikátor *je možné, že (aby) ...*, pro jehož reglementaci už máme symbol ◊.

Pomocí jazyka Lewisovy logiky tak můžeme V9 alternativně reglementovat buď jako

VR9 $\boldsymbol{P} \prec\!\!\!\!\!\!\!\;\boldsymbol{-}\, \boldsymbol{M}$

nebo jako

VR9* $\neg\Diamond(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{M})$

Snadno nahlédneme, že krok k alternativní reglementaci, který jsme učinili, když jsme od VR9 přešli k VR9*, můžeme učinit pro každou formuli obsahující symbol pro striktní implikaci. To se samozřejmě týká i axiomů Lewisova systému. Ten se takovýmto krokem vlastně mění na systém, který spíše než logické chování běžného spojení *jestliže ..., pak ...* charakterizuje logické chování výrokového modifikátoru *je možné, že ...*. Jde tedy o systém aletické modální logiky.

Jaké místo má v tomto systému druhý ze základních aletických modifikátorů, modifikátor *je nutné, že ...*? Lewis vychází z předpokladu (o nějž se ve svých úvahách opíral už Aristotelés a který nezpochybňují ani jeho následovníci), že mezi oběma aletickými modalitami je podstatná významová (a potažmo logická) souvislost, která nám každý výrok utvořený pomocí jednoho z nich umožňuje parafrázovat pomocí toho druhého. Je totiž zřejmé, že výrok tvaru

Je nutné, že A

říká v podstatě totéž jako výrok

Není možné, že ne-A,

a obdobně výrok tvaru

Je možné, že A

lze beze změny významu parafrázovat výrokem

Není nutné, že ne-A

Na základě tohoto předpokladu můžeme do jazyka Lewisova logického systému doplnit nový symbol □, kterým reglementujeme modifikátor *je nutné, že ...* a jehož fungování můžeme definovat pomocí už zavedených symbolů:

$$\Box A =_{\text{def}} \neg\Diamond\neg A$$

Pokud bychom jako výchozí vzali modifikátor nutnosti, mohli bychom samozřejmě naopak definovat modifikátor možnosti

$$\Diamond A =_{\text{def}} \neg\Box\neg A$$

Vedle těchto dvou operátorů se ještě někdy zavádí symbol odpovídající modifikátoru *je nahodilé, zda (že) ...*. Platí přitom, že výrok A je nahodilý (kontingentní) tehdy, je-li pravda $\Diamond A$ a zároveň není pravda $\Box A$. Platí, že je-li určitý výrok kontingentní, je kontingentní i jeho negace.

Zavedení symbolu pro modifikátor nutnosti nám umožňuje jednodušší přepis formulí Lewisova systému logiky striktní implikace do jazyka modální logiky. Výše jsme viděli, že ekvivalentním vyjádřením striktní implikace

$$A \strictif B$$

je

$$\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$$

Protože, jak se dá snadno ukázat (nejjednodušeji sestrojením příslušných pravdivostních tabulek), je $A \wedge \neg B$ ekvivalentní $\neg(\neg A \vee B)$, je tato formule dále ekvivalentní formuli

$$\neg\Diamond\neg(\neg A \vee B)$$

Pokud v této formuli provedeme dvě úpravy, totiž přepíšeme-li $\neg\Diamond\neg$ jako □ a nahradíme-li $\neg A \vee B$ ekvivalentní formulí $A \rightarrow B$, dostáváme konečně

$$\Box(A \rightarrow B).$$

Fakt, že tato poslední formule je ekvivalentní striktní implikaci $A \strictif B$, je v souladu s výše zmíněnou intuicí, že spojení *jestliže ..., pak ...* používáme ke spojení dvou výroků tehdy, kdy nejenže aktuálně nenastává situace, kdy první je pravdivý a druhý nepravdivý, ale kdy je souvislost mezi jejich pravdivostními hodnotami *nutná* – to jest nejde o souvislost, která by závisela na nahodilém stavu věcí.

Do jazyka Lewisova systému se nám tímto způsobem vrací operátor materiální implikace, který se Lewis původně snažil eliminovat. Jeho argumentace byla totiž vedena přesvědčením, že materiální implikace neodpovídá žádnému slovu či sousloví přirozeného jazyka, jež bychom mohli označit jako logické, a musí tak být nahrazena operátorem lepším. Naše úvaha však ukazuje, že materiální implikace může být užitečná i tehdy, jsme-li vedeni snahou nabídnout implikaci adekvátnější: dovoluje nám totiž náš aparát zjednodušit tak, že budeme mít jenom jediný modální operátor (operátor nutnosti); a striktní implikaci získáme jako kombinaci tohoto operátoru s implikací klasickou.

Je jasné, že ať už se na formule systému, který Lewis předložil, díváme z té či oné strany a axiomy zapíšeme tím či oním způsobem, měla by každá konkretizace axiomů reglementovat intuitivně pravdivá tvrzení. Každý čtenář může posoudit, zda tento požadavek Lewisovy axiomy splňují. Samotná skutečnost, že systém úspěšně projde takovým testem, ovšem ještě není zárukou toho, že tento systém splní všechna s ním spojovaná očekávání. Charakterizujeme-li určitý logický symbol pomocí výčtu axiomů (spolu s určitým odvozovacím pravidlem nebo pravidly), nemusíme být schopni dohlédnout všech důsledků, které taková charakterizace přináší. Z tohoto důvodu si tudíž nemůžeme být jisti všemi logickými vlastnostmi takto charakterizovaného operátoru.

Lze Lewisův systém skutečně přijmout jako logickou teorii, která adekvátně zachycuje vztahy vyplývání mezi výroky utvořenými pomocí aletických modálních modifikátorů? Sám Lewis si nárok na to, že se mu podařilo vybudovat adekvátní modální logiku, nedělal. V dodatku ke knize *Symbolic logic*, kterou publikoval v roce 1932 spolu s C.H. Langfordem a v níž v propracovanější podobě prezentoval svoje výzkumy na poli modální logiky, resp. logiky striktní implikace, shrnuje velmi podstatné výsledky, které v návaznosti na jeho původní práci předložili další autoři (zejména M. Wajsberg, W.T. Parry a P. Henle). Současně předkládá pět odlišných systémů, které můžeme brát jako variantní zachycení logických vlastností aletických modálních operátorů. Tyto systémy, které označuje S1 – S5, se liší tím, jaké úsudky zahrnující modální operátory nutnosti a možnosti (resp. z alternativního pohledu striktní implikaci) prohlašují za správné.

Pluralita, která se tím otvírá, může jistě sloužit jako příhodný argument pro ty, kdo chtějí marginalizovat přínos systémů modální logiky. Na celou situaci se ovšem můžeme dívat i jinak. Pokud vycházíme z toho, že vyjádření, v nichž jsou modální modifikátory použity, potřebujeme užívat v kontextech, kde záleží na přesném vyjadřování, pak je samozřejmě důležité, jaký význam s takovými vyjádřeními spojujeme. To, že za adekvátní (v daném kontextu) reglementaci modálních modifikátorů přijmeme tu, kterou nabízí určitý systém modální logiky – řekněme systém S4 – nám vlastně umožní používat modální výroky v přesném a jednoznačném smyslu. Z tohoto pohledu je mnohost systémů modální logiky prostě důsledkem nejednoznačnosti některých výrazů, které v přirozeném jazyce fungují jako logické, a nabízí možnost, jak tuto nejednoznačnost odstranit, a tím zpřesnit naše vyjadřování.

Obecně lze za základ axiomatických systémů logik S1-S5 vzít nějakou axiomatizaci klasické výrokové logiky. V případě S2 k takové axiomatizaci přidáme axiomy:

A1 $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

A2 $\Box A \to A$

a doplníme odvozovací pravidlo

PR1 Z $\Box(A \to B)$ odvoď $\Box(\Box A \to \Box B)$.

Systém S4 se pak od S2 liší tím, že obsahuje navíc ještě jeden axiom – totiž

A3 $\Box A \to \Box\Box A$,

a namísto PR1 obsahuje odvozovací pravidlo tzv. *necesitace*, podle kterého před každé tvrzení, které jsme dokázali, můžeme přidat operátor nutnosti, tj.

PR2 Z A odvoď $\Box A$.

Systém S5 se pak od S4 liší pouze tím, že přidáme další axiom

A3' $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

(Vzhledem k tomu, že A3 je pak dokazatelný z ostatních axiomů, můžeme S5 úsporněji zadat i tak, že v S4 axiom A3 axiomem A3' nahradíme. Máme tedy před sebou tři logické systémy, které vymezují fungování aletických modálních operátorů, které se však do jisté míry liší v tom, jaké úsudky prohlašují za správné (a jaké formule jsou v nich dokazatelné). Každý z těchto systémů tedy přiřazuje aletickým modifikátorům poněkud jiný význam.

Do přelomu 50. a 60. let měla modální logika podobu různých axiomatických systémů, nebyla ale k dispozici možnost budovat tyto systémy sémanticky. To umožnila až sémantika modální logiky vybudovaná americkým logikem Saulem Kripkem. Tato sémantika je založena na pojmu možného světa. Možné světy, jak jsou využívány v rámci tzv. kripkovské sémantiky, je do jisté míry možné ztotožnit s možnými stavy světa. Obvykle obvykle nejsou chápány jako *světy* v běžném slova smyslu, které by měly nějaký časový rozměr (to jest nějakou historii), ale o stavy fixované k nějakému časovému okamžiku. (Světu v intuitivním smyslu tohoto slova by pak odpovídala spíše určitá posloupnost takto chápaných možných světů.) Mezi takto uchopenými možnými světy se pak zřejmě musí vyskytovat právě jeden, ve kterém jsou pravdivé právě ty výroky, které jsou pravdivé v tom světě, ve kterém žijeme. Ten tak reprezentuje náš *skutečný svět* (v daném okamžiku). Asi pod vlivem anglického úzu se takový svět také mnohdy označuje jako *aktuální*.

Právě nastíněné přiblížení toho, jak chápat pojem možného světa, není zdaleka neproblematické, a není ani jediné, které přichází v úvahu. Do jisté míry odpovídá představě zachycení (stavů) světa tak, jak jej nacházíme ve slavné knize Ludwiga Wittgensteina *Tractatus logico-philosophicus* (1922): Wittgenstein vycházel z představy, že vhodným zřetězením primitivních výrazů (jmen) vznikají entity odpovídající atomickým propozicím, a každá množina takových atomických propozic představuje jeden možný stav světa. V moderní modální logice se setkáváme i s různými jinými přístupy k chápání pojmu možného světa. Pro většinu úvah o možných světech, které potřebujeme v sémantice modální logiky, ovšem vystačíme s výše uvedenou relativně intuitivní představou možného světa jako jakéhokoli globálního uspořádání věcí, které je 'bezrozporně' myslitelné.

Je dobré si uvědomit, že přijetím této představy o tom, co to je možný svět, specifikujeme jeden z významů, který lze s aletickými modálními modifikátory spojovat. Je to vlastně jakési maximálně liberální pojetí, které ze nemožné prohlašuje pouze to, co je sporné, a vše, co není sporné, prohlašuje za možné. (Méně liberální pojetí může například prohlašovat za možné jenom to, co není v rozporu s našimi přírodními zákony.) Řekneme-li tedy, že je to, co je vyjadřováno výrokem *A*, možné, říkáme tím vlastně, že výrok *A* není sporný; a řekneme-li, že to je nutné, říkáme, že je sporný výrok *ne-A*.

Snadno nahlédneme, že toto pojetí možnosti a nutnosti s sebou nese určité logické důsledky. Položíme-li si otázku, zda je to, co je nutné, nutné nutně, povede nás to asi ke kladné odpovědi – záporná odpověď by totiž znamenala, že je možné, aby hranice mezi spornými a nespornými výroky nevedla tam, kde vede nyní, což je za předpokladu, že se nemění významy výroků, stěží představitelné. V rámci tohoto pojetí možnosti a nutnosti tedy budeme pravděpodobně náchylní přijmout úsudkovou formu

UF1 $\quad \dfrac{\Box\Box A}{\Box A}$

ale i

UF2 $\quad \dfrac{\Box A}{\Box\Box A}$

Výrazy $\Box\Box A$ a $\Box A$ se tak vlastně co do významu neliší.

Obdobně při tomto hraničním chápání modálních modifikátorů bude patrně platit

UF3 $\quad \dfrac{\Diamond\Box A}{\Box A.}$

tedy bude platit, že pouhá možnost, že je něco nutné, zaručuje, že to také nutné je. A vzhledem k tomu že očividně platí i

UF4 $\quad \dfrac{\Box A}{\Diamond\Box A,}$

se opět ukazuje, že formule $\Diamond\Box A$ a $\Box A$ se co do významu nemohou lišit.

Logikové ukázali, že mezi výše předvedenými systémy se nachází jeden, v němž se operátory chovají způsobem, který odpovídá právě nastíněné hraniční interpretaci modálních modifikátorů – je to S5. A je to právě tento systém, který můžeme opatřit nejjednodušší kripkovskou sémantikou. V rámci tohoto systému ztotožňujeme možnost prostě s pravdivostí v alespoň jednom možném světě a nutnost s pravdivostí ve všech světech.

Charakteristiky fungování klasických operátorů se mění jenom triviálně – tak, že naše dosavadní definice relativizujeme k možným světům:

(i) Výrok tvaru $\neg A$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je A v tomto možném světě nepravdivý

(ii) Výrok tvaru $A \wedge B$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je v tomto možném světě pravdivý jak výrok A, tak výrok B.

(iii) Výrok tvaru $A \vee B$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je v tomto možném světě pravdivý alespoň jeden z výroků A, B.

(iv) Výrok tvaru $A \rightarrow B$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je v tomto možném světě nepravdivý výrok A nebo je pravdivý výrok B.

Klíčové jsou ovšem charakteristiky chování aletických modálních operátorů, ve kterých – na rozdíl od těch předchozích – hrají možné světy netriviálnější úlohu:

(v) Výrok tvaru $\Box A$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je výrok A pravdivý v každém možném světě.

(vi) Výrok tvaru $\Diamond A$ je v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když je výrok A pravdivý alespoň v jednom možném světě.

Ztotožníme-li nyní designát (denotát) výroku s množinou možných světů, v nichž je tento výrok pravdivý, můžeme říci, že výrok jazyka modální logiky je *tautologií modální logiky* právě tehdy, když má formu, které interpretace přiřadí množinu všech možných světů (tedy když je pravdivý v každém možném světě).

Krok od této sémantiky ke kripkovské sémantice pro S5 je už jednoduchý – zbývá se oprostit od pevné soustavy možných světů a prohlásit za tautologie jen ty výroky, které platí v *jakékoli* množině možných světů; takové množině budeme říkat *logický prostor*. Lze dokázat, že výše uvedený axiomatický systém S5 je vzhledem k této sémantice korektní a úplný.

Vidíme, že symboly $\Box$ a $\Diamond$ fungují vlastně jako jakési kvantifikátory: $\Box A$ říká, že A je pravdivý pro *každý* možný svět, zatímco $\Diamond A$ říká, že existuje alespoň jeden možný svět, ve kterém je A pravdivý. $\Box$ tedy připomíná kvantifikátor $\forall$, který se však nevztahuje k univerzu individuí, ale k logickému prostoru možných světů, a $\Diamond$ analogicky připomíná kvantifikátor $\exists$. Modálních výroky tak lze v tomto smyslu převést na (nemodální) obecná resp. existenční tvrzení o možných světech.

Jak jsme již naznačili, systém S5 je obecně považován za systém, který adekvátně zachycuje logické chování aletických modifikátorů, které máme na mysli, když uvažujeme o *logické* možnosti ve smyslu prosté bezespornosti. Je ovšem zjevné, že aletické modifikátory, se kterými se setkáváme v přirozeném jazyce, zdaleka vždy tak jako □ a ◊ v S5 nefungují. Většina modálních výroků, které běžně používáme, váže tvrzení o možnosti resp. nutnosti nějakým způsobem na to, co platí (nebo si myslíme, že platí) v našem skutečném světě. Tak říkáme třeba

Není možné, aby planeta měla menší hmotnost než její měsíc,
Není možné, aby člověk přežil podchlazení na bod mrazu,
Není možné, aby Aristotelés žárlil na Kleopatru,
Není možné, aby FC Střížkov vyhrál první fotbalovou ligu.

Předností kripkovské sémantiky je, že otevírá prostor i pro explikaci významu takovýchto modálních výroků. Výchozí myšlenka je následující: Říkáme-li, že něco je či není možné či nutné, pak to říkáme v určitém kontextu, který ovlivňuje, jaké alternativy současného stavu světa bereme v úvahu. Obvykle bereme v úvahu jen ty alternativní světy, které jsou tomu našemu aktuálnímu nějakým způsobem podobné nebo se k němu nějak vztahují.

Běžná modální tvrzení tak není adekvátní explikovat jako obecná tvrzení o všech možných světech. V případě některých tvrzení např. patrně uvažujeme jen o těch světech, ve kterých platí stejné fyzikální zákony, jaké platí v aktuálním světě, zatímco v případě jiných jenom ty, kde platí určité biologické principy.

Tento fakt můžeme zachytit tak, že na logickém prostoru definujeme různé *vztahy dosažitelnosti*. Každý takový vztah můžeme vidět jako dvojmístnou (binární) relaci, spojující každý možný svět s právě těmi světy, které mu jsou v daném ohledu podobné, či které je možné v daném ohledu vidět jako nějaké jeho 'následníky' (třeba jako následující stádia jeho vývoje).

Právě tato relace dosažitelnosti hraje klíčovou roli v obecné variantě kripkovské sémantiky. V té jsou body (v) a (vi) upraveny do podoby:

(v)* Výrok tvaru □*A* je v daném světě pravdivý právě tehdy, když je *A* pravdivý v každém světě, který je z tohoto světa dosažitelný.

(vi)* Výrok tvaru ◊*A* je v daném světě pravdivý právě tehdy, když je *A* pravdivý v alespoň jednom světě, který je z tohoto světa dosažitelný.

Povšimněme si, že krok od (v) k (v)* (resp. od (vi) k (vi)*) sám o sobě ještě nutně neznamená krok k jiné sémantice. Záleží totiž na tom, jaká je povaha oné relace dosažitelnosti, o níž se ve (v)* a (vi)* hovoří. Pokud vezmeme extrémní příklad relace, při které je každý svět dosažitelný z každého jiného (říkejme jí relace *univerzální*), pak máme co do činění se sémantikou, která se od té původní vůbec neliší – dostaneme opět sémantiku, která odpovídá S5. Pokud je ovšem relace dosažitelnosti odlišná, můžeme dostat sémantiku pro jiné modální logiky, a tedy i pro jiné druhy modalit.

Právě definovaný obecný sémantický rámec nám dovoluje formulovat široké spektrum konkrétních kripkovských sémantik a za jejich pomoci reglementovat různé výroky vytvořené pomocí různých verzí aletických modálních modifikátorů. Zároveň nás svým způsobem vede k tomu, abychom zpřesnili to, co modálními tvrzeními říkáme.

Kripkovská sémantika nám tedy nabízí jistý způsob explikace toho, co vlastně modálními výroky tvrdíme: modální výrok podle ní můžeme *de facto* chápat jako (nemodální) tvrzení o možných světech, které jsou s naším světem spjaty specifickou relací dosažitelnosti – fyzikální dosažitelností, biologickou dosažitelností ap. Z logického pohledu je podstatné, že nám kripkovská sémantika nabízí možnost, jak různé verze modálních operátorů pozoruhodným způsobem klasifikovat podle vlastností relace dosažitelnosti, která jim odpovídá. Ukázalo se totiž, že odlišnostem v logickém chování možnosti a nutnosti, jak nachází výraz v různých axiomatických systémech modální logiky, odpovídají odlišnosti ve *formálních vlastnostech* různých relací dosažitelnosti.

Abychom toto tvrzení ilustrovali, vezměme některé z formálních vlastností, o kterých v případě dvojmístných relací běžně uvažujeme. Takovou vlastností je například *reflexivita*: relace dosažitelnosti je reflexivní, je-li každý svět dosažitelný sám ze sebe. Jinou vlastností tohoto druhu je *symetričnost* – skutečnost, že relace dosažitelnosti je vždy 'obousměrná'. V případě symetrické relace dosažitelnosti tedy pro každou dvojici světů w, w' platí, že je-li w' dosažitelný z w, pak je i w dosažitelný z w'. O tom, že je relace dosažitelnosti *tranzitivní*, hovoříme tehdy, když platí, že je-li nějaký svět dosažitelný z jiného 'oklikou' přes další světy, pak je z něj dosažitelný i přímo. Tranzitivita tedy znamená, že je-li z w dosažitelný w' a z w' je dosažitelný w'', pak je z w dosažitelný i w''.

Relaci, která je reflexivní, symetrická i tranzitivní, říkáme *ekvivalence*. Relace založené na sdílení nějakých – například fyzikálních či biologických – zákonů jsou typicky právě ekvivalencemi. A lze ukázat, že systém modální logiky, který je vybaven kripkovskou sémantikou omezující se na relace dosažitelnosti, které jsou ekvivalencemi, uděluje modálním operátorům ten význam, který jim je implicitně přiřazen axiomatickým systémem S5. To mj. znamená, že rozdíl mezi fyzikální a biologickou nutností není v tomto smyslu rozdílem, který ovlivňuje logické (formální) vlastnosti aletických modálních operátorů.

Lze ukázat, že právě uvedené formální vlastnosti relace dosažitelnosti v rámci kripkovské sémantiky přímo odpovídají určitým axiomům či teorémům, se kterými se různých kalkulech modální logiky setkáváme. Tak například reflexivitě relace dosažitelnosti odpovídá přirozeným způsobem axiom

$$\Box A \to A.$$

Sémantika, v níž je relace dosažitelnosti symetrická, odpovídá axiomatickým systémům, ve kterých je axiomem či teorémem formule

$$A \to \Box\Diamond A.$$

Tranzitivita relace dosažitelnosti pak je charakteristická pro sémantiky těch axiomatických systémů, ve kterých je axiomem či teorémem formule

$$\Box A \to \Box\Box A.$$

Ve výčtu podobných souvislostí by bylo možné pokračovat. Mezi axiomy (resp. teorémy) axiomatických systémů a formálními vlastnostmi relace dosažitelnosti sice nelze přímočarou korespondenci najít vždy, kripkovská sémantika však přesto představuje užitečný nástroj vyjasnění a uchopení významu modálních operátorů tak, jak jsou zadány v běžných systémech modální logiky.