

**Vyhodnocování způsobilosti
a výkonnosti výrobního procesu**

Jiří Michálek

CQR 2009

Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti výrobního procesu

Jiří Michálek

Centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě CQR

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě, elektronické či mechanické, včetně fotokopí, bez písemného souhlasu autora.

Tato publikace vznikla za podpory projektu 1M06047 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy.

Autor: RNDr. Jiří Michálek, CSc.

© 2009 Centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě

ÚTIA AV ČR v.v.i., Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8

ISBN: 978-80-903834-2-5

Název: Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti
výrobního procesu

Autor: RNDr. Jiří Michálek, CSc.

Odborná recenze: Ing. Josef Křepela

Náklad: 300 ks

Počet stran: 96

Formát: B5

Vydalo: Centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě CQR
Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i.

ISBN: 978-80-0903834-2-5

0 Úvod

Tato publikace vznikla v rámci projektu MŠMT ČR č. 1M06047 “**Výzkumné centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě CQR**” a její vznik je motivován dlouholetými zkušenostmi autora získanými během školení lidí z praxe v rámci jeho lektorské činnosti na půdě České společnosti pro jakost. Hodnocení způsobilosti a výkonnosti výrobních procesů je prováděno především u dodavatelů do automobilového průmyslu, kde řada metod aplikované matematické statistiky již zdomácněla a jsou využívány v současné době pomocí celé řady softwarů domácích i cizích. Bohužel ne vždycky jsou výsledky získané statistickými metodami interpretovány správným způsobem a není tomu ani jinak u ukazatelů způsobilosti a výkonnosti. Celá řada softwarů na základě naměřených dat vrátí pouze odhady těchto ukazatelů, aniž by se mnohdy ověřily předpoklady pro jejich správné použití a rovněž závěry postavené pouze na hodnotách odhadů mohou znamenat nebezpečí pro odběratele ve větším počtu neshodných výrobků nežli je požadováno a pro dodavatele to může znamenat naopak přísnější požadavky na přesnost výrobního procesu.

Tato publikace je především určena lidem z praxe, kteří provádějí hodnocení způsobilosti či výkonnosti výrobního procesu a se statistickými metodami jisté zkušenosti již mají, ale může též sloužit jako studijní materiál na vysokých školách technického zaměření, kde se vyučují statistické metody pro řízení jakosti. Svým obsahem se může zdát být příliš teoretická, např. zvláště část 7, věnovaná odvozením hustot rozdělení pravděpodobnosti pro jednotlivé odhady ukazatelů, ale bohužel pro správné pochopení jejich používání v praxi je nutno pracovat s některými nástroji matematické statistiky jako je konfidenční interval, statistický pokryvný interval apod. Pro lepší pochopení postupů pro vyhodnocování způsobilosti či výkonnosti procesu jsou v textu a v doplňku uvedeny příklady s konkrétními daty, na nichž jsou tyto postupy ilustrovány.

1 Základní pojmy a definice

Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti výrobního procesu je součástí statistického řízení procesu (SPC). Cílem statistického řízení neboli regulace procesu je dostat proces do stabilního stavu (statisticky zvládnutého stavu), kdy na proces působí pouze náhodné příčiny, které sice nenechávají proces v klidu, ale jejich vliv se projevuje v tom, že sledovaný jakostní znak lze chápat jako náhodnou veličinu s určitým typem rozdělení pravděpodobnosti, které je stabilní v čase. Toto rozdělení pravděpodobnosti lze pak použít pro predikci budoucího stavu procesu. Obvykle vhodné rozdělení pravděpodobnosti je závislé na parametrech, jejichž hodnoty většinou neznáme a je nutno je odhadnout z naměřených dat. Pod vlivem náhodných příčin výrobní proces vykazuje variabilitu, která je mu vlastní (inherentní) a kterou nelze z procesu odstranit. Lze pouze vhodnými zásahy do procesu snižovat její úroveň a dostat tak proces do stavu, kdy bude produkovat přijatelný podíl neshodných výrobků. Analýza regulačních diagramů dává signály o možném výskytu druhé kategorie příčin, které vyvolávají změny v chování výrobního procesu. Tyto příčiny se nazývají speciální či vymežitelné, protože je často dovedeme identifikovat na rozdíl od náhodných příčin, které rozpoznat neumíme. Vymežitelné příčiny vyvolávají změny v procesu, které se u měřitelných znaků jakosti na výrobku projevují posouváním parametru polohy či změnami v úrovni variability, a u neměřitelných (atributivních) znaků změnami v přítomnosti neshodných kusů či neshod. Tyto vymežitelné příčiny je nutno z procesu odstranit a nechat prostor pro působení pouze náhodných příčin, teprve proces nacházející se ve stabilním stavu můžeme vyhodnocovat z hlediska jeho způsobilosti. Bohužel ne vždy je možno všechny vymežitelné příčiny z procesu odstranit a učinit taková opatření, aby se jejich výskyt nemohl opakovat. Takové příčiny jako např. opotřebování nástroje či různé dávky materiálu na vstupu nelze z procesu vyloučit, jsou jeho trvalou složkou. Ale přesto lze i takové procesy regulovat, např. pomocí regulačních diagramů s rozšířenými mezemi, ale při vyhodnocování jejich způsobilosti a výkonnosti je nutno postupovat opatrně, protože v těchto případech se často setkáváme s nenormálně rozdělenými daty, kdy je třeba

hodnotit chování sledovaného jakostního znaku jinými postupy nežli u normálně rozdělených dat.

Centrování procesu a jeho variabilita významně ovlivňují výrobu přijatelného výrobku. Jestliže se parametr polohy posouvá od středu specifikačního rozmezí, zmenšuje se tím prostor pro úroveň kolísání. Posun v poloze, zvýšení úrovně variability či oba tyto faktory současně mohou vést k výrobě takových kusů, u nichž se hodnota jakostního znaku dostane mimo mezní hodnoty dané technickou specifikací. Pak se takový proces dostává do sporu s požadavky konstruktéra či zákazníka.

Analýza výrobního procesu pomocí ukazatelů způsobilosti a výkonnosti je velice mocným nástrojem v ruce obsluhy a majitele procesu.

K čemu analýza způsobilosti výrobního procesu může sloužit?

1. Základ pro zlepšování procesu
2. Poplašné zařízení pro hlídání procesu
3. Podklad pro zdůvodnění nákupu nového strojního zařízení
4. Certifikace pro zákazníka
5. Podklad pro novou konstrukci či návrh výrobku
6. Nástroj pro údržbu strojního zařízení
7. Motivace pro spolupracovníky

Určitě by se našly ještě další důvody, proč sledovat a vyhodnocovat způsobilost a výkonnost procesu. Nejdůležitějším přínosem je důkaz o způsobilosti procesu dle přání zákazníka či konstruktéra.

Ukazatele způsobilosti a výkonnosti se široce využívají po celém světě a jejich výhoda je v tom, že jedním bezrozměrným číslem lze snadno vyjádřit požadavek na chování daného jakostního znaku. Jsou či měly by být součástí kontraktu či výkresu, aby bylo naprosto

jasné, co zákazník či konstruktér vyžaduje. Jaké kroky jsou doporučeny při zavádění ukazatelů způsobilosti a jejich následné analýzy:

1. Zákazník definuje nominální či cílovou hodnotu jakostního znaku
2. Dále by zákazník měl definovat meze specifikace tak, aby výrobek byl funkční.
Měl by též přihlédnout k variabilitě výrobního procesu.
3. Výrobce analyzuje proces, který bude výrobek vyrábět a stanovit, zdali je schopen splnit zákaznickovy požadavky.
4. Zákazník a výrobce by se měli dohodnout na specifikačních mezích pro výrobu.
5. Na začátku produkce výrobce provede analýzu způsobilosti svého procesu vůči požadavkům zákazníka a ukáže numerickou analýzou na základě dat z procesu, že jeho proces je způsobilý. Pokud ne, musí hledat příčiny v procesu vedoucí ke zvýšené úrovni variability a tuto úroveň co nejvíce snížit.

Zadáním jednoho bezrozměrného čísla se vyjádří požadavek na chování výrobního procesu. Na druhou stranu je otázkou, zdali výrobní proces je schopen toto splnit. Je tedy nutné z procesu odebrat určitá data, ukazatele způsobilosti či výkonnosti vhodně na základě sebraných dat odhadnout a tyto odhady konfrontovat s požadovanými hodnotami ukazatelů. A to je práce pro statistické metody, a právě tato konfrontace a závěry z ní provedené činí v praxi největší potíže či omyly, protože často lidé v praxi nejsou dostatečně připraveni na správné používání metod matematické statistiky.

Inherentní variabilita procesu — ta část variability procesu, která je vyvolána náhodnými příčinami.

Variabilita uvnitř podskupin — ta část variability, která je vyvolána kolísáním uvnitř odebrané podskupiny kusů z procesu. Pokud je proces ve zvládnutém stavu, její úroveň je dobrým odhadem pro inherentní variabilitu.

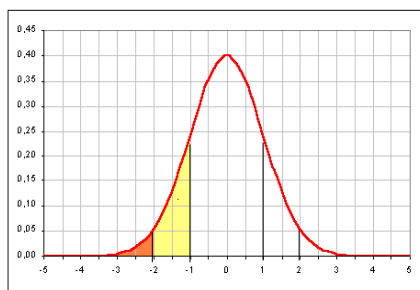
Variabilita mezi podskupinami — ta část variability, která je vyvolána kolísáním procesu mezi podskupinami. Pro proces statisticky zvládnutý by toto kolísání mělo být nulové (či alespoň zanedbatelné). Tato variabilita úzce souvisí se stabilitou procesu.

Celková (totální) variabilita — tato variabilita v sobě zahrnuje jak kolísání uvnitř podskupin, tak i mezi podskupinami. Pro procesy statisticky nezvládnuté je tato variabilita vyvolána přítomností vymezitelných příčin v procesu.

Variabilita uvnitř podskupin se vztahuje ke způsobilosti procesu, celková variabilita k jeho výkonnosti.

Jakým způsobem se úrovně jednotlivých typů variability procesu odhadují bude uvedeno a zdůvodněno v dalším.

ppm — míra neshodnosti (parts-per-million) — vyjadřuje počet neshodných kusů v miliónové sérii. Číslo 10^{-6} ppm pak vyjadřuje pravděpodobnost výskytu neshodného kusu.



V intervalu $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$
leží **68,26 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží
 $2 \cdot 15,87 \%$, t.j. **31,74 %**.

V intervalu $\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$
leží **95,44 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží
 $2 \cdot 2,28 \%$, t.j. **4,56 %**.

V intervalu $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$ leží **99,73 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží $2 \cdot 0,135 \%$, t.j. **0,27 %** (2 700 ppm).

V intervalu $\langle \mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma \rangle$ leží **99,994 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží $2 \cdot 0,003 \%$, t.j. **0,006 %** (60 ppm).

V intervalu $\langle \mu - 5\sigma, \mu + 5\sigma \rangle$ leží **99,99994 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží $2 \cdot 0,00003 \%$, t.j. **0,00006 %** (0,6 ppm).

V intervalu $\langle \mu - 6\sigma, \mu + 6\sigma \rangle$ leží **99,99999999 %** všech pozorování,
mimo tento interval leží $2 \cdot 0,00000001 \%$, t.j. **0,00000002 %** (0,002 ppm).

Obr. 1. Základní vlastnosti normálního rozdělení.

2 Definice ukazatelů způsobilosti a výkonnosti pro spojitě znaky jakosti

1. Příklad oboustranných mezních hodnot (specifikace)

Základní myšlenkou, na níž stojí definice ukazatelů způsobilosti a výkonnosti, je poměr mezi rozpětím mezi horní a dolní mezní hodnotou, tj. $USL - LSL$ a přirozenou variabilitou výrobního procesu, tedy sledovaného jakostního znaku, která se v případě normálně rozděleného jakostního znaku uvažuje jako šestinásobek odpovídající směrodatné odchylky, která je u normálního rozdělení též mírou úrovně variability jakostního znaku. Pokud se tato směrodatná odchylka vztahuje k úrovni inherentní variability, jedná se o ukazatele způsobilosti procesu C_p ; když se uvažovaná směrodatná odchylka vztahuje k celkové variabilitě procesu, jedná se o ukazatele výkonnosti P_p .

Tedy

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad P_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{TOT}}.$$

Protože platí, že $\sigma \leq \sigma_{TOT}$ a rovnost nastává pouze u procesu statisticky zvládnutého, platí

$$C_p \geq P_p.$$

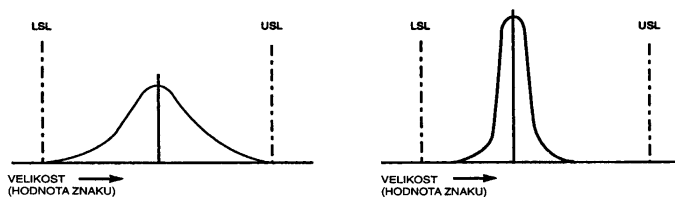
Je nutno zdůraznit, že výše uvedené definice obou ukazatelů jsou postaveny na předpokladu normality. To znamená, že tyto ukazatele nelze použít pro hodnocení způsobilosti a výkonnosti procesu u jakostních znaků, které nelze popsat normálním rozdělením. V těch případech je nutno použít jinou charakteristiku přirozené variability v chování jakostního znaku nežli je šestinásobek směrodatné odchylky.

Zavedení ukazatele výkonnosti P_p se setkalo s velkou kritikou zejména ze strany statistiků, protože pro jeho aplikace se nepředpokládá statisticky zvládnutý proces. Je pak napadán jeho smysl,

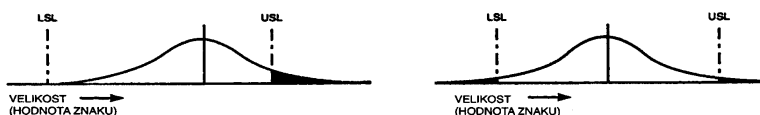
především z pohledu predikce procesu, když proces není stabilizován. Jeho zavedení bylo vyvoláno tou skutečností, že z dlouhodobějšího pohledu prakticky každý výrobní proces nebude dokonale stabilní, neboť mnohdy na proces působí specifické příčiny takového rázu, že je neumíme z procesu odbourat.

Aby ale použití ukazatele mělo smysl, je nutno se přesvědčit, že, i když proces nebude přesně statisticky zvládnutý, přesto lze data z něj sebraná považovat za pocházející z jediné normálně rozdělené populace se směrodatnou odchylkou σ_{TOT} . Pokud toto nebude splněno, ukazatel P_p ve výše uvedeném tvaru ztrácí smysl.

PROCESY ZPŮSOBILÉ SPLNIT SPECIFIKACE (PRAKTICKY VŠECHNY VÝROBKY NA VÝSTUPU JSOU UVNITŘ SPECIFIKACÍ) PŘI RŮZNÝCH ÚROVNÍCH KOLÍSÁNÍ:



PROCESY NEZPŮSOBILÉ SPLNIT SPECIFIKACE (NA VÝSTUPU JSOU VYRÁBĚNY VÝROBKY MIMO JEDNU NEBO OBĚ MEZNÍ HODNOTY):



SMĚRODATNÁ ODCHYLKA A ROZPĚTÍ (PRO DANÝ ROZSAH PODSKUPINY ČÍM JE PRŮMĚRNÉ ROZPĚTÍ R VĚTŠÍ, TÍM JE VĚTŠÍ SMĚRODATNÁ ODCHYLKA $\hat{\sigma}$):

Obr. 2. Vztah mezi variabilitou jakostního znaku a specifikacemi.

Co ukazatel C_p svou hodnotou vyjadřuje?

Tak především jeho stanovením se určuje úroveň inherentní variability vyjádřené ve velikosti směrodatné odchylky σ . Tak tedy, je-li $C_p = \frac{4}{3}$ ($\doteq 1,33$), znamená to, že parametr σ by neměl být větší nežli $1/8$ ze specifikačního rozpětí $USL - LSL$. Když bude požadavek na $C_p = \frac{5}{3}$ ($\doteq 1,67$), pak směrodatná odchylka musí být $1/10$ specifikačního rozpětí. Bude-li požadavek, že C_p má být roven 2, pak

směrodatná odchylka σ pro úroveň inherentní variability musí být 1/12 specifikačního rozpětí. Zadáním hodnoty C_p zadává zákazník či konstruktér požadavek na přesnost výrobního procesu. Bohužel se stává, že současná technologie není mnohdy s to zadaný požadavek splnit (např. u plastů).

Zcela analogická situace je u ukazatele P_p , kde se zadáním jeho hodnoty klade požadavek na úroveň variability měřené parametrem σ_{TOT} .

Druhým aspektem vyjádřeným v hodnotě ukazatele C_p je potenciální zastoupení neshodných kusů v produkci, pokud bude proces naprosto statisticky zvládnut a centrován na prostředek specifikačního rozpětí $T = \frac{\text{USL} + \text{LSL}}{2}$. Pak očekávaný podíl neshodných (nikoliv maximální) je vyjádřen číslem $1 - \Phi(3C_p)$, popřípadě v jednotkách ppm se jedná o očekávaný počet neshodných kusů $10^6(1 - \Phi(3C_p))$, $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$. Zadavatel hodnoty C_p by si měl uvědomit, že se jedná de facto o potenciální průměrný počet neshodných kusů v produkci. Stejná situace je u ukazatele P_p , pouze s tím rozdílem, že se zde nejedná o potenciální počet, ale o očekávaný reálný počet v produkci.

Tedy při $C_p = \frac{4}{3}$ jde o 64 ppm (při centrování na prostředek T to představuje 32 ppm vůči každé z mezních hodnot), při $C_p = \frac{5}{3}$ se jedná cca o 1 ppm vůči oběma mezním hodnotám. Z tohoto je ihned vidět, že dnešní požadavky na stav výrobního procesu mohou být hodně přísné.

Ukazatele C_p a P_p se nevztahují k parametru polohy. Proces tedy může vykazovat vysokou hodnotu C_p či P_p a může při tom vyrábět vysoké procento neshodných kusů. Problém je v tom, že proces, pokud nebude centrován, vždy zvyšuje podíl výskytu neshodných kusů. Tento problém řeší ukazatele C_{pk} a P_{pk}

$$C_{pk} = \min\left(\frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma}\right),$$

$$P_{pk} = \min\left(\frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma_{\text{TOT}}}, \frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma_{\text{TOT}}}\right).$$

Opět zavedení těchto ukazatelů vychází z předpokladu normálního rozdělení, μ je zde parametr polohy, tedy střední hodnota normál-

ního rozdělení. Z definice je vidět, že opět oba ukazatele mají smysl, když sledovaný jakostní znak lze popsat normálním rozdělením s parametry (μ, σ) , resp. (μ, σ_{TOT}) . Ihned je vidět, že vždy $C_{pk} \geq P_{pk}$ a $C_p \geq C_{pk}$, $P_p \geq P_{pk}$, přičemž $C_p = C_{pk}$ či $P_p = P_{pk}$ jedině tehdy, když proces je přesně centrován na prostředek specifikačního rozmezí.

Je nutné si uvědomit, že hodnota ukazatele C_p klade požadavek na úroveň inherentní variability, ukazatel C_{pk} otvírá prostor pro parametr μ . Pokud $C_p > C_{pk}$, pak existují dvě hodnoty μ_-, μ_+ mezi mezními hodnotami takové, že pro $\mu = \mu_-$ či $\mu = \mu_+$ je $C_{pk} = \frac{\mu_- - LSL}{3\sigma}$ a $C_{pk} = \frac{USL - \mu_+}{3\sigma}$ a pro tyto hodnoty parametru μ je C_{pk} roven požadované hodnotě. Pro jakékoliv $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ je odpovídající hodnota C_{pk} vždy větší. Tedy bude-li např. požadavek, aby $C_p = 1,33$ a $C_{pk} = 1,20$, pak $\sigma = 1/8(USL - LSL)$ a ze zadané hodnoty 1,20 pro C_{pk} snadno zjistíme, že

$$\mu_+ = USL - \frac{9}{20}(USL - LSL), \quad \mu_- = LSL + \frac{9}{20}(USL - LSL).$$

Pokud bude proces vzhledem k parametru polohy μ mezi těmito hodnotami $\mu_- + \mu_+$, pak bude $1,33 \geq C_{pk} > 1,20$.

Zcela podobná situace je u ukazatele P_{pk} s tím rozdílem, že se jedná o celkovou směrodatnou odchylku. Je opět nutné mít na paměti, že použití těchto vzorců pro všechny čtyři ukazatele má smysl jedině tehdy, když se jakostní znak chová jako normálně rozdělená náhodná veličina. Otázka normality dat by se měla řešit pomocí testů dobré shody aplikovaných na data, z nichž potřebujeme hodnotit způsobilost a výkonnost výrobního procesu.

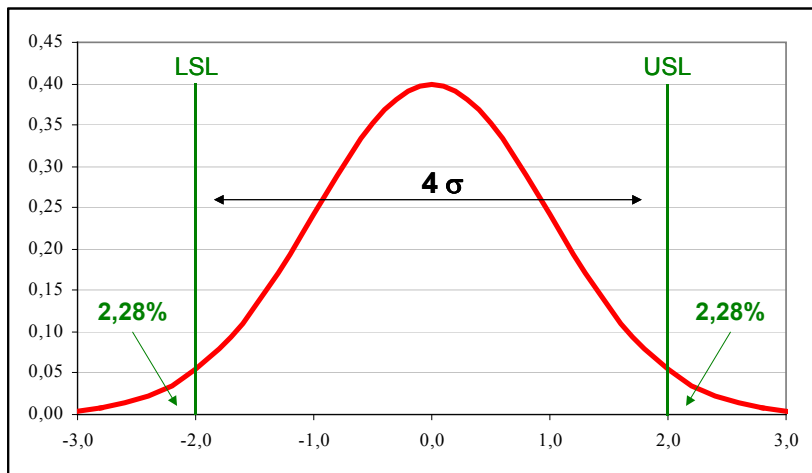
Zadáním hodnot pro C_p , C_{pk} , resp. P_p , P_{pk} ze strany zákazníka se tedy vymezí požadavky na sledovaný jakostní znak vůči technické specifikaci. Otázkou pak zůstává, zda-li je proces schopen tyto požadavky splnit.

2. Příklad jednostranných mezí

U celé řady jakostních znaků je zadána pouze jedna mezní hodnota, která buď nemá být překročena či naopak. Obvykle druhá mezní

$C_p < 1$ - proces není způsobilý

$$(USL - LSL) = 4\sigma; \quad C_p = 0,67$$



Obr. 3. Nezpůsobilý proces – $C_p < 1$.

hodnota je nahrazena přirozenou hranicí, např. nulou. V takovém případě ukazatelé C_p a P_p nemají smysl, protože ty vyžadují zadání obou mezních hodnot a nahrazení chybějící mezní hodnoty přirozenou mezí může být zcela nelogické (např. chceme, aby házivost byla co nejmenší),

Jakostní znak pouze s jednou mezní hodnotou lze ale vyhodnocovat pomocí ukazatele C_{pk} či P_{pk} . Pokud je zadána horní mez USL, lze použít část z ukazatele C_{pk} , a to zlomek obsahující pouze USL, tedy

$$C_{pkU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \quad \text{resp.} \quad P_{pkU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma_{TOT}}.$$

V případě zadání pouze dolní meze LSL se využije druhý zlomek v definici C_{pk} či P_{pk} , tedy

$$C_{pkL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \quad \text{resp.} \quad P_{pkL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}.$$

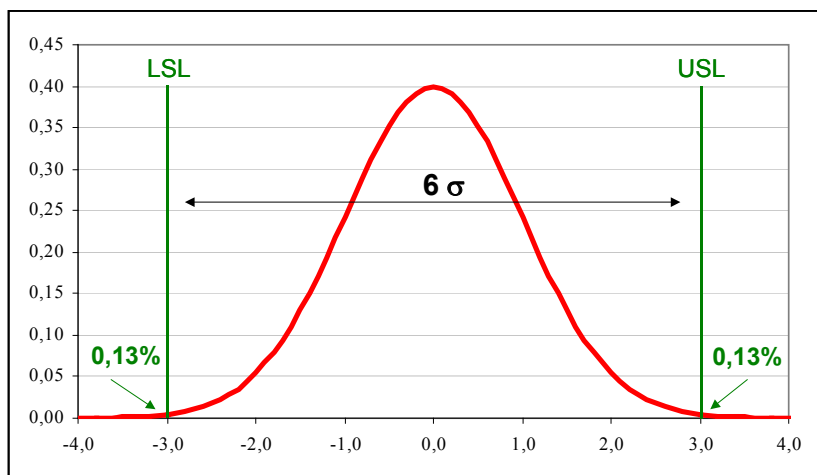
Opět je nutno zdůraznit, že aplikace těchto ukazatelů vychází z předpokladu splnění normality, což právě u těchto jednostranných případů nemusí být vždy splněno. Takové jakostní znaky jako je již zmíněná házivost či ovalita, rovinnost, kolmost, velikost úhlu, velikost trhací síly apod. nelze mnohdy popsat normálním rozdělením a formální používání výše uvedených vzorců nemusí vystihovat reálnou situaci s jakostním znakem. V těchto případech je nutno hodnotit způsobilost či výkonnost takového procesu použitím jiných vzorců pro C_{pk} a P_{pk} , které vycházejí z jiných modelů pro popis chování jakostního znaku (např. logaritmicko-normální či Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti). V případě zadání hodnoty pro C_{pk} v jednostranném případě, např. zadáním horní mezní hodnoty a C_{pkU} , nejsou jednoznačně určeny požadavky na parametry μ a σ , resp. μ a σ_{TOT} . Proto je nutné si uvědomit, že teprve určením hodnoty pro parametr μ je určena hodnota parametru σ a naopak. Problém je v tom, že u jednostranného případu obvykle není zadána jmenovitá či cílová hodnota, aby parametr μ byl tak určen jednoznačně. Pokud např. ze znalosti procesu známe či máme na základě historických dat spolehlivě odhadnut parametr σ či σ_{TOT} , lze toto použít pro určení polohy pro parametr μ . Je zřejmé, čím větší úroveň variability, tím větší odstup parametru μ od horní meze USL a naopak. Zcela stejná situace nastává při aplikaci C_{pkL} vůči dolní mezní hodnotě.

3 Odhady ukazatelů způsobilosti a výkonnosti

V této části se budeme věnovat ukazatelům způsobilosti a výkonnosti za předpokladu splnění normality dat. Případu s nenormálně rozdělenými daty bude věnována další část. Je nutné si uvědomit, že na jedné straně jsou požadované hodnoty ukazatelů od zákazníka či konstruktéra, a na druhé straně jsou jejich odhady vypočtené ze sebraných dat, které vykazují určitou míru variability, jejíž úroveň se odvíjí jednak od inherentní či totální variability procesu, počtu dat a organizace sběru dat. Vypočtený odhad je svou povahou náhodné číslo, jehož hodnota při jiných datech se vypočte jiná, i když se

$C_p = 1$ - proces je blízky způsobilosti

$$(USL - LSL) = 6\sigma; \quad C_p = 1,0$$



Obr. 4. Proces blízky způsobilosti – $C_p = 1$.

v procesu nic nemuselo změnit. Odhad ukazatelů se tedy chová jako náhodná veličina charakterizovaná svým rozdělením pravděpodobnosti, které závisí na typu odhadů parametrů μ a σ vystupujících ve vzorcích pro ukazatele způsobilosti a výkonnosti. Chování odhadů ukazatelů C_p , C_{pk} , P_p a P_{pk} odráží realitu v procesu, které je nutno konfrontovat se zadanými hodnotami ukazatelů, které byly stanoveny před tím, než se vlastní výroba rozeběhla.

V této práci je automaticky předpokládáno, že získaná měření jsou vzájemně nezávislá jak v podskupinách, tak i mezi podskupinami. Příklad závislých dat zde není řešen, protože pak je nutný zcela individuální přístup.

Ukazatele C_p a P_p v sobě obsahují parametr směrované odchylky σ , resp. σ_{TOT} . Abychom poznali, jakou úroveň variability vykazuje sledovaný jakostní znak, je nutné sebrat data z procesu, tj. změřit nějaké výrobky a z dat odhadly parametrů σ či σ_{TOT} spočítat. Aby tyto odhady byly věrohodné, je nutné mít proces pod kontrolou,

tzn. statisticky zvládnutý. Odhady parametrů σ a σ_{TOT} jsou silně závislé na organizaci sběru dat.

Pro odhad ukazatele C_p potřebujeme odhad parametru σ , tj. směrodatné odchyly vyjadřující úroveň inherentní variability. Pro získání tohoto odhadu potřebujeme mít data organizovaná do podskupin jako je tomu při Shewhartových regulačních diagramech. Inherentní variabilita je odhadována pomocí variability uvnitř podskupin. Ještě je nutné rozlišit dva případy, a to zda-li podskupiny obsahují alespoň 2 kusy, a nebo každá podskupina je složena pouze z jednoho měření. To je analogická situace jako při aplikaci regulačního diagramu pro individuální hodnoty. V tomto případě je nutné podskupiny uměle vytvořit, např. uvažovat dvě po sobě jdoucí měření za podskupinu o velikosti 2.

Jestliže je variabilita uvnitř podskupin odhadována pomocí výběrového rozpětí R , pak při uvažovaném počtu k podskupin odhadem pro parametr σ se uvažuje

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{d_2(n)} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i,$$

kde konstanta $d_2(n)$ závisí na velikosti podskupiny a plyne z rozdělení výběrových rozpětí (je tabelována např. v ČSN ISO normě č. 8258), R_i je výběrové rozpětí z i -té podskupiny. Zde je uvažována velikost podskupiny n stejná, pokud by se měnila, pak vzorec pro odhad bude

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{R_i}{d_2(n_i)}.$$

Takto organizovaná data máme na regulačním diagramu (\bar{x}, R) a lze jich využít i pro odhad inherentní variability. Ostatně Shewhartovy regulační meze jsou konstruovány na základě odhadu úrovně inherentní variability.

Když je variabilita uvnitř podskupin odhadována pomocí výběrové směrodatné odchyly s , počítané v každé podskupině, pak parametr σ lze odhadnout následovně:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{C_4(n_i)},$$

kde opět k je počet podskupin, n_i je velikost i -té podskupiny, konstanty $C_4(n_i)$ jsou tabelovány a vyplývají z rozdělení výběrových směrodatných odchylek (viz ČSN ISO 8258) a s_i je výběrová směrodatná odchylka v i -té podskupině, tedy

$$s_i = \left(\frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right)^{1/2},$$

kde x_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n_i$ jsou naměřené hodnoty znaku jakosti v i -té podskupině.

Je doporučeno pracovat s rozpětím R , pokud velikost podskupiny je menší (kolem 4–5). Pro větší velikosti podskupin se doporučuje pracovat s výběrovou směrodatnou odchylkou. Tato situace je např. u aplikace regulačního diagramu (\bar{x}, s) .

Obvykle se velikost podskupiny doporučuje konstantní, zjednodušuje to jednak výpočty a u aplikace regulačních diagramů je to vyžadováno.

Třetí možný odhad se nazývá sdružená výběrová směrodatná odchylka (pooled standard deviation), která se v praxi moc nepoužívá, ačkoliv v softwarech pro SPC bývá k dispozici (např. Minitab). Její definice je následující:

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k s_i^2 \right)^{1/2},$$

když velikost podskupiny je konstantní rovna n .

Odhad ukazatele C_p je pak ve všech třech případech

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}},$$

kde je použit některý ze tří uvedených odhadů inherentní směrodatné odchylky.

Pokud jsou podskupiny složeny pouze z individuálních hodnot, je nutno sáhnout k triku a podskupiny uměle vytvořit. Obvykle se to děje pomocí tzv. klouzavého rozpětí, což vlastně představuje

pohyblivé okno délky několika pozorování (nejčastěji délky 2), které se postupně pohybuje přes data.

Je zapotřebí se ale přesvědčit, že proces je skutečně ve stabilním stavu, např. použitím regulačního diagramu pro individuální hodnoty. Odhad úrovně inherentní variability má pak tvar:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{d_2(m)} \frac{1}{k - m + 1} \sum_{i=1}^{k-m+1} R_i(m),$$

kde m je délka klouzavého okna, $R_i(m)$ je výběrové rozpětí v i tem okně a konstanta $d_2(m)$ je tabelována. Nejobvyklejší případ je pro $m = 2$. Je nutné ale podotknout, že v případě použití klouzavého rozpětí vstupuje do hry časový faktor, protože mezi dvěma měřeními může být dosti velký časový odstup. Tento problém se neobjevuje při odběru větší velikosti podskupiny, kdy se odebírají kusy vycházející z procesu buď současně nebo téměř současně. Role podskupin o více nežli jednom pozorování vynikne tím více, když si uvědomíme, že odhadujeme variabilitu uvnitř podskupin, tj. mezi bezprostředně po sobě jdoucími výrobky, což znamená, že de facto proces nemusí být zvládnutý vzhledem k parametru polohy, ale musí být zvládnutý k úrovni variability. Tento fakt vyplývá z té skutečnosti, že ukazatel C_p v sobě parametr polohy neobsahuje. Protože obvykle u spojitých (tj. měřitelných) znaků jakosti je velikost podskupiny často malá (pod 8–10 kusů), nebývá ani v praxi problém s normalitou dat, protože data by měla být rozdělena normálně v každé podskupině zvlášť, tedy není nutné mít data normálně rozdělena jako celek.

Odhad způsobilosti u individuálně složených dat pomocí uměle vytvořených podskupin může v některých případech dosti zkreslit informaci o skutečném stavu procesu. Realističtější pohled na proces, resp. chování znaku jakosti, dává v tomto případě odhad výkonnosti procesu pomocí ukazatele P_p , kde úroveň variability je odhadována pomocí klasické výběrové směrodatné odchylky

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2},$$

kde je celkem n individuálních hodnot. Opět je nutno se přesvědčit, zdali se dají data chápat jako normálně rozdělená. Pokud je pro-

ces zvládnut a stabilní, ovlivňován pouze inherentní variabilitou, pak odhady ukazatelů C_p a P_p by se neměly příliš lišit, protože směrodatná odchylka odvozená od klouzavého rozpětí a klasická směrodatná odchylka by se neměly dramaticky lišit. Jestliže ale vstoupí do hry i variabilita mezi podskupinami, která je vyvolána tím, že každá individuální hodnota pochází z rozdělení s různou střední hodnotou, pak může nastat významný rozdíl mezi odhady \hat{C}_p a \hat{P}_p .

U ukazatele výkonnosti P_p potřebujeme odhadnout úroveň totální variability, tj. jak inherentní, tak i mezi podskupinami. Zde se používá jediného odhadu, a to výběrové celkové směrodatné odchylky, která nerespektuje rozdělení dat do podskupin. Odhad pro σ_{TOT} má tvar

$$\hat{\sigma}_{\text{TOT}} = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \right)^{1/2},$$

kde n_i je velikost i -té podskupiny a $\bar{\bar{x}}$ je celkový aritmetický průměr ze všech dat, kterých je dohromady $\sum_{i=1}^k n_i = N$. Odhad ukazatele P_p je pak dán jako

$$\hat{P}_p = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\hat{\sigma}_{\text{TOT}}}.$$

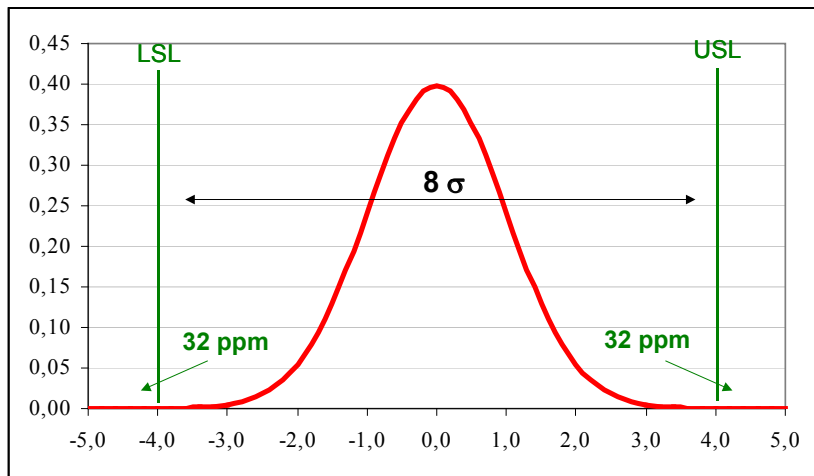
Odhad ukazatele P_p má smysl pouze tehdy, když všechna data se dají vysvětlit tím, že pocházejí z jedné základní populace s normálním rozdělením, i když může existovat variabilita mezi podskupinami vyvolaná nějakými vymezitelnými příčinami. Je nutno se přesvědčit, zda-li data projdou testem normality. Pokud test normality hypotézu o normálně rozdělených datech zamítne, ztrácí odhad ukazatele P_p založený na výše uvedeném tvaru smysl.

Pro odhad ukazatele C_{pk} potřebujeme odhadnout jak úroveň inherentní variability, tak i polohu procesu. Úroveň inherentní variability odhadujeme stejným postupem jako u ukazatelů C_p . Parametr polohy je odhaduje jako celkový aritmetický průměr ze všech dat, tedy

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i,$$

$C_p \geq 1,33$ - proces je způsobilý

$$(USL - LSL) = 8\sigma; \quad C_p = 1,33$$



Obr. 5. Proces způsobilý – $C_p = 1,33$.

kde \bar{x}_i je aritmetický průměr i -té podskupiny. Tedy odhad \hat{C}_{pk} má pak tvar

$$\hat{C}_{pk} = \min \left(\frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} \right).$$

Tento odhad je rovněž náhodná veličina, jejíž chování je nutno konfrontovat se zadanou hodnotou ukazatele C_{pk} pomocí metod matematické statistiky a rozhodnout, zda proces požadavek kladený na C_{pk} splňuje či nikoliv.

Zcela obdobá situace je u odhadu ukazatele P_{pk} . Parametr polohy μ se opět odhaduje pomocí celkového aritmetického průměru ze všech dat, tedy

$$\hat{P}_{pk} = \min \left(\frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}_{TOT}}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}_{TOT}} \right).$$

Jedna velice důležitá poznámka. Shewhartovy regulační diagramy, které se nejčastěji v praxi používají pro regulaci procesu, mají regulační meze odvozeny od odhadů inherentní variability (v případě

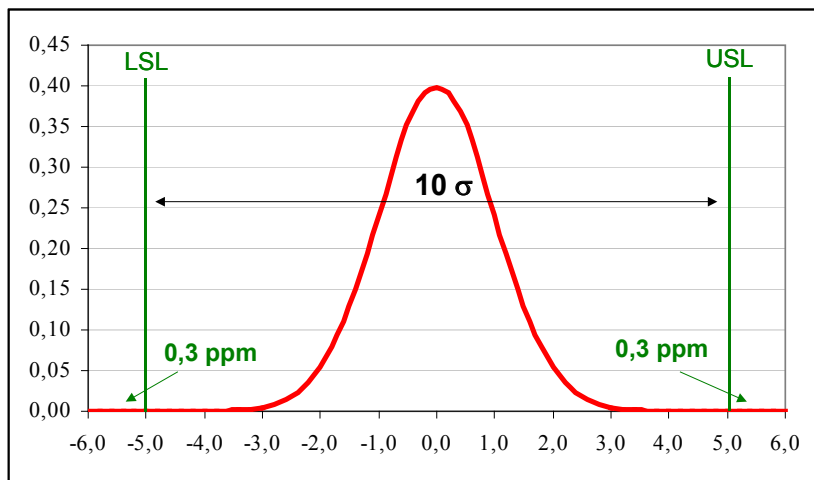
tzv. přirozených mezí) nebo přímo od stanovené směrodatné odchylky σ inherentní variability (v případě tzv. technických mezí). Pokud tedy proces není přesně pod kontrolou a existují případné vymezitelné příčiny v procesu, které nelze odstranit a je nutno s nimi počítat, nemusí být Shewhartovy regulační meze účinným nástrojem pro regulaci procesu, protože mohou být příliš úzké, což může vést k podstatnému zvýšení rizika falešných poplachů. Protože pak máme co dělat s celkovou variabilitou, nabízí se rozšíření původních mezí tím, že použijeme buď odhad $\hat{\sigma}_{TOT}$ či přímo požadovanou úroveň σ_{TOT} celkové variability (opět první případ pro přirozené meze, druhý případ pro technické meze). Lze najít i jiná doporučení, jak meze rozšířit, aby v sobě pojalý i variabilitu mezi podskupinami.

Takováto situace může vzniknout na základě požadavku na ukazatele C_p a C_{pk} , že $C_{pk} < C_p$. To znamená, že znak jakosti nemusí mít parametr polohy přesně v prostředku specifikačního rozmezí, ale otvírá se tím prostor pro parametr μ ve formě intervalu $\langle \mu_-, \mu_+ \rangle$, v němž se může parametr polohy μ libovolně pohybovat, aniž by se hodnota ukazatele C_{pk} zhoršila. Tím ale připouštíme, že chování parametru μ , a tím i jeho odhadů v rámci podskupin, nemusí být zcela statisticky zvládnuto a vstupuje do hry možná vymezitelná příčina, a to např. seřízení stroje či strojního zařízení. Z nerovnosti $C_{pk} < C_p$ tak plyne, že tento požadavek vede k nutnosti aplikace rozšířených regulačních mezí pro aritmetické průměry či individuální hodnoty (při jednoprvkových podskupinách), které je nutno rozšířit takovým způsobem, aby se vyrovnaly s prostorem $\langle \mu_-, \mu_+ \rangle$ pro parametr polohy. Regulační meze pro výběrové rozpětí či výběrovou směrodatnou odchylku musí být v původním tvaru, protože ty hlídají pouze variabilitu uvnitř podskupin. Je zajímavé, že tento fakt není respektován v metodologii Six Sigma, která připouští pohyb parametru polohy v intervalu $(T - 1,5\sigma; T + 1,5\sigma)$ při $\sigma = \frac{1}{12}(USL - LSL)$, což odpovídá hodnotám ukazatelů $C_p = 2$ a $C_{pk} = 1,5$. Ale tato skutečnost není promítnuta do konstrukce rozšířených regulačních mezí, které by se s možným pohybem parametru μ kolem hodnoty T vyrovnaly, aby nedocházelo zbytečně k falešným poplachům. Jinými slovy tato skutečnost znamená, že nastavení hodnoty parametru polohy μ kdekoliv v intervalu $\langle \mu_-, \mu_+ \rangle$ nevyvolá

snížení hodnoty ukazatele C_{pk} .

Z definice ukazatele C_{pk} plyne ještě jedna skutečnost, která též platí i pro jeho odhad \hat{C}_{pk} . Parametr polohy μ , pokud není přesně roven hodnotě $T = \frac{USL+LSL}{2}$, pak je buď $\mu > T$ či $\mu < T$. Pokud $\mu > T$, pak $C_{pk} = C_{pkU}$, je-li $\mu < T$, pak $C_{pk} = C_{pkL}$. Totéž platí i v případě odhadu. Je-li $\bar{x} > T$, pak $\hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pkU}$. Těto vlastnosti lze pak využít při testování způsobilosti procesu pomocí ukazatele C_{pk} a při konstrukci konfidenčních intervalů pro ukazatel C_{pk} .

$C_p \geq 1,67$ - proces je způsobilý
 $(USL - LSL) = 10 \sigma$, $C_p = 1,67$



Obr. 6. Proces způsobilý – $C_p = 1.67$.

4 Hodnocení způsobilosti a výkonnosti procesů

V této části si ukážeme, jak správně konfrontovat odhad ukazatele získaný z dat s požadovanou hodnotou, abychom zjistili, zda-li proces je vzhledem ke sledovanému znaku jakosti způsobilý či

nikoliv. K tomu, abychom získali odhad ukazatele, potřebujeme patričný odhad směrodatné odchylky a parametrů polohy. Nejdříve se budeme věnovat ukazatelům způsobilosti C_p a C_{pk} .

Z předchozího víme, že úroveň inherentní variability získáváme odhadováním variability uvnitř podskupin, a to

$$\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}, \quad \hat{\sigma}_S \equiv \frac{\bar{s}}{C_4(n)}, \quad \hat{\sigma}_I = \left(\frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right)^{1/2},$$

kde \bar{R} je průměrné rozpětí, \bar{s} je průměrná směrodatná odchylka, x_{ij} je j -té pozorování v i -té podskupině, \bar{x}_i je aritmetický průměr v i -té podskupině, k je počet odebraných podskupin a n je velikost podskupiny (tj. počet odebraných kusů do podskupiny). Parametr polohy se odhaduje nejčastěji jako celkový aritmetický průměr, tedy

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i.$$

Získané odhady ukazatelů C_p a C_{pk} jsou náhodné veličiny, které se řídí svým rozdělením pravděpodobnosti, jehož odvození na základě předpokladu, že sledovaný jakostní znak lze popsat normálním rozdělením, není zvláště u ukazatelů C_{pk} nikterak jednoduché a je nutno sáhnout ke vhodným aproximacím.

Získaný odhad \hat{C}_p či \hat{C}_{pk} je náhodné číslo, které nám samo o sobě neřekne nic o tom, jaká je skutečná způsobilost procesu, tj. jaká je skutečná hodnota ukazatelů C_p či C_{pk} . Teprve konstrukce tzv. konfidenčního intervalu pro C_p či C_{pk} odhalí pravdu o skutečné způsobilosti procesu. Konstrukce a délka konfidenčního intervalu závisí jednak na volbě odhadu inherentní směrodatné odchylky, na volbě úrovně spolehlivosti a na počtu dat, která máme k dispozici.

Na základě aproximací lze odvodit analytický tvar pro hustotu rozdělení pro případ odhadu \hat{C}_p na základě $\hat{\sigma}_R$ a $\hat{\sigma}_S$. Pro odhad $\hat{\sigma}_I$ lze odvodit přesný tvar hustoty pro odpovídající odhad \hat{C}_p . Odvození všech tří případů hustot je uvedeno v části 7.

Pro případ \hat{C}_p při použití odhadu $\hat{\sigma}_R$ a volbě hladiny spolehlivosti $1 - \alpha$ lze odpovídající konfidenční interval pro skutečnou hodnotu

ukazatele C_p aproximovat intervalem

$$\hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}} \right) < C_p < \hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}} \right),$$

který pak s pravděpodobností $1 - \alpha$ onu skutečnou hodnotu ukazatele C_p pokrývá. Konstanty α_n , β_n závisejí na velikosti podskupiny a jsou uvedeny níže v Tabulce 1, k je počet podskupin, $u_{\alpha/2}$ a $u_{1-\alpha/2}$ jsou odpovídající kvantily normálního rozdělení $N(0, 1)$.

Tabulka 1

n	α_n	β_n	n	α_n	β_n
2	1,128	0,853	11	3,173	0,787
3	1,693	0,888	12	3,258	0,778
4	2,059	0,880	13	3,336	0,770
5	2,326	0,864	14	3,407	0,762
6	2,534	0,848	15	3,472	0,755
7	2,704	0,833	16	3,532	0,749
8	2,847	0,820	17	3,588	0,743
9	2,970	0,808	18	3,640	0,738
10	3,078	0,797	19	3,689	0,733
			20	3,735	0,729

Pokud je odhad \hat{C}_p založen na odhadu směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_S$, pak konfidenční interval pokrývající skutečnou hodnotu ukazatele C_p s pravděpodobností $1 - \alpha$ má tvar

$$\hat{C}_p \left(1 + \frac{b_{n-1} u_{\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}} \right) < C_p < \hat{C}_p \left(1 + \frac{b_{n-1} u_{1-\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}} \right),$$

kde

$$a_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \doteq \sqrt{1 - \frac{1}{2(n-1)}},$$

$$b_{n-1} = \sqrt{1 - a_{n-1}^2} \doteq \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}},$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gama funkce. Např. pro $n = 5$ je podíl $b_{n-1}/a_{n-1} \doteq 0,3780$ a podíl $\beta_n/\alpha_n = 0,3715$. Z tohoto vyplývá, že se oba typy konfidenčních intervalů příliš lišit nebudou a vliv volby pro odhad inherentní směrodatné odchylky nebude mít velký dopad v praktickém použití.

V případě odhadu \hat{C}_p založeného na výběrové sdružené směrodatné odchylce $\hat{\sigma}_I$ lze konfidenční interval pro skutečnou hodnotu ukazatele C_p vyjádřit pomocí kvantilů χ^2 -rozdělení. Konfidenční interval má pak tvar

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2}^2(k(n-1))}{k(n-1)}} < C_p < \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(k(n-1))}{k(n-1)}},$$

kde $\chi_{\alpha/2}^2(k(n-1))$ a $\chi_{1-\alpha/2}^2(k(n-1))$ jsou odpovídající kvantily χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti.

Pro ilustraci porovnejme tvary všech tří konfidenčních intervalů na jednom příkladě: $n = 5$, $k = 25$, $\alpha = 0.05$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_R : & \quad 0,8544\hat{C}_p < C_p < 1,1456\hat{C}_p \\ \hat{\sigma}_S : & \quad 0,8518\hat{C}_p < C_p < 1,1482\hat{C}_p \\ \hat{\sigma}_I : & \quad 0,8615\hat{C}_p < C_p < 1,1382\hat{C}_p. \end{aligned}$$

Je vidět, že šířka konfidenčních intervalů je pro praktické účely téměř stejná, pro odhad $\hat{\sigma}_I$ vychází šířka intervalu nejkratší i v ostatních případech.

Co tedy můžeme na základě konfidenčního intervalu tvrdit: Vyjde-li např. že $\hat{C}_p = 1,45$ při velikosti podskupiny 5 a 25ti odebraných podskupinách při volbě $\alpha = 0,05$, pak můžeme s pravděpodobností 95 % tvrdit, že skutečná hodnota ukazatele C_p není horší nežli dolní hranice intervalu, tj. zde $0,8615 \cdot 1,45 \doteq 1,25$. a není lepší nežli horní hranice, která v tomto případě je 1,65. To znamená, že způsobilost procesu může být s pravděpodobností 95 % mezi hodnotami 1,25 a 1,65, pokud jsme pracovali s odhadem směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_I$. Pokud by se někomu zdálo toto rozmezí příliš široké, je jediná šance, a to uvažovat více podskupin. Je ale nutno mít na paměti, že během odběru podskupin proces musí být v ustáleném

stavu bez jakéhokoliv zásahu do procesu. Lepší informaci o hodnotě ukazatele C_p nelze z dat získat. Je to možná překvapivé, ale hodnota odhadu \hat{C}_p větší nežli požadovaná hodnota C_p obecně nezaručuje zákazníkovi, že proces splňuje požadovanou hodnotu C_p , a tím i očekávaný počet neshodných kusů. V našem ilustrativním příkladu hodnota odhadu \hat{C}_p je 1,45, a přesto může být například $C_p = 1,25$ či 1,27.

Pro ukazatele C_{pk} je konstrukce konfidenčního intervalu komplikovanější, protože odvození hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro \hat{C}_{pk} je hodně komplikované a vede na implicitní vyjádření. Z toho plyne, že meze konfidenčních intervalů lze počítat pouze numericky či pomocí vhodných aproximací. O odvození hustot pro \hat{C}_{pk} viz část 7.

Pro praktické použití konfidenčních intervalů pro ukazatel C_{pk} stačí následující aproximace použitelná pro všechny tři možné odhady směrodatné odchylky inherentní variability. Pro konfidenční úroveň $1 - \alpha$ je odpovídající konfidenční interval dobře aproximovatelný intervalem

$$\hat{C}_{pk} \left(1 + \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2k(n-1)}} \right) < C_{pk} < \hat{C}_{pk} \left(1 + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{2k(n-1)}} \right).$$

Použití konfidenčního intervalu budeme ilustrovat pomocí následujícího příkladu. Nechť $USL = 22,5$, $LSL = 21,5$. Máme 25 podskupin o rozsahu 5 kusů a z nich bylo vypočteno $\bar{\bar{x}} = 22,1$ a $\hat{\sigma}_R = 0,11$. Odhad ukazatele C_{pk} má pak hodnotu

$$\hat{C}_{pk} = \min\{1,212; 1,818\} = 1,212.$$

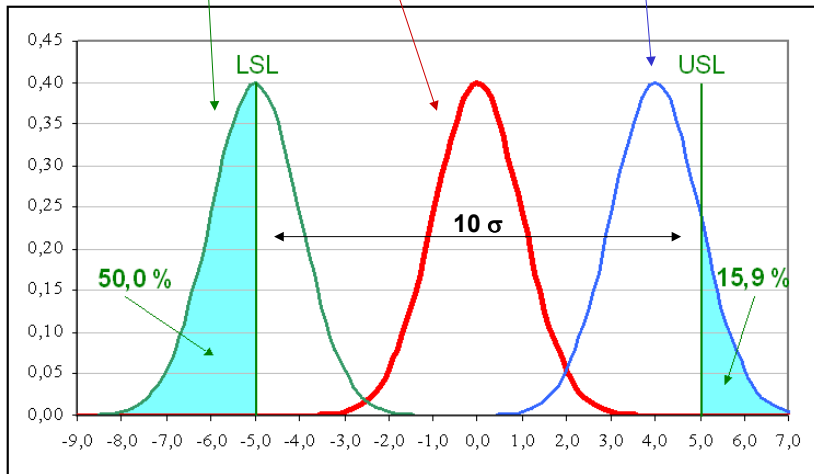
Zvolíme $\alpha = 0,05$ a $k(n-1) = 25 \cdot 4 = 100$, $u_{0,025} = -1,96$, $u_{0,975} = 1,96$. Pak

$$1,044 \doteq 1,212 \cdot 0,8614 < C_{pk} < 1,212 \cdot 1,1386 \doteq 1,38.$$

Lze tedy tvrdit, že s pravděpodobností 0,95 se skutečná hodnota ukazatele C_{pk} nachází uvnitř intervalu (1,044; 1,380).

$C_p = 1,67$ - způsobilé procesy, špatně centrované

$C_{pk} = 0$; $C_{pk} = 1,67$; $C_{pk} = 0,33$



Obr. 7. Vztah mezi C_p a C_{pk} .

Problémy při vyhodnocování způsobilosti výrobního procesu

V praxi se obvykle od výrobce požaduje, aby u sledovaného jakostního znaku, u něhož je zadán požadavek na úroveň ukazatele způsobilosti C_p , platila nerovnost

$$C_p \leq \hat{C}_p$$

resp.

$$C_{pk} \leq \hat{C}_{pk}$$

Analyzujeme tento požadavek z pohledu matematické statistiky. Představme si pro zjednodušení, že zákazník požaduje, aby $C_p = 1,33$, a aby tedy $\hat{C}_p \geq 1,33$. Současně bylo dohodnuto, že způsobilost procesu se bude vyhodnocovat na každé regulační kartě typu (\bar{x}, R) , která např. obsahuje 25 logických podskupin po 4 výrobcích v každé podskupině. Na základě vyhodnocení jedné regulační karty byl

získán odhad ukazatele C_p v hodnotě $\hat{C}_p = 1,42$. Tím byl splněn požadavek zákazníka, ale co to skutečně pro něho znamená?

Na základě počtu dat, tj. 100 pozorování celkem a bodovém odhadu $\hat{C}_p = 1,42$ zkonstruujeme konfidenční interval pro skutečnou hodnotu ukazatele C_p . Tento konfidenční interval ještě závisí na zvoleném riziku α , což je míra rizika, že konfidenční interval nepokryje skutečnou hodnotu ukazatele C_p . Zvolíme $\alpha = 0,03$. Když dosadíme do vzorečku pro konstrukci konfidenčního intervalu pro případ odhadu ukazatele \hat{C}_p pomocí výběrového rozpětí R , tedy

$$\hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}} \right) \leq C_p \leq \hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}} \right),$$

kde $\alpha_n = 2,059$, $\beta_n = 0,880$, $-u_{\alpha/2} = u_{1-\alpha/2} = 2,17$, $\sqrt{k} = 5$. Na základě toho lze tvrdit, že správná hodnota ukazatele C_p je s pravděpodobností 97% pokryta konfidenčním intervalem

$$C_p \in \langle 1,1566; 1,6834 \rangle.$$

Z tohoto výsledku je ihned vidět, že požadavek na splnění nerovnosti $C_p \leq \hat{C}_p$ zdaleka zákazníkovi nezaručuje, že proces je skutečně na úrovni požadované způsobilosti, např. v tomto příkladu by mělo být $C_p = 1,33$. Dále je nutno si uvědomit, že velikost konfidenčního intervalu silně závisí na počtu dat, která máme k dispozici.

Co vlastně znamená požadavek, že např. $C_p = 1,33$ je dolní hranice pro odhady \hat{C}_p tohoto ukazatele? Jestliže by jakostní znak skutečně vyhovoval podmínce na ukazatel C_p , pak lze s předem zadaným rizikem α pouze tvrdit, že hodnoty odhadu ukazatele \hat{C}_p se mohou s pravděpodobností $1 - \alpha$ objevit v intervalu (odvozeného snadno od konfidenčního intervalu)

$$C_p \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}} \right) \leq \hat{C}_p \leq C_p \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}} \right),$$

což v uvažovaném příkladě znamená $\hat{C}_p \in \langle 1,1219; 1,6329 \rangle$. Tomu je nutno rozumět tak, že sledovaný výrobní proces splňuje požadavek na $C_p = 1,33$, i když z vyhodnocení způsobilosti vyšlo, že

odhad $\hat{C}_p = 1,13$. Teprve když $\hat{C}_p < 1,1219$, lze s pravděpodobností 98,5% tvrdit, že proces je horší, nežli požaduje $C_p = 1,33$. Opět je nutno zdůraznit, že velikost tohoto statistického pokrývného intervalu pro odhady \hat{C}_p silně závisí na počtu dat. Je nutno mít na paměti, že požadovaná hodnota na C_p je, zhruba řečeno, mediánem pro odhady tohoto ukazatele. Lze tedy očekávat 50% hodnot odhadů \hat{C}_p pod C_p a naopak 50% hodnot odhadů \hat{C}_p nad požadovanou hodnotou C_p , pokud proces splňuje požadavek vyjádřený hodnotou ukazatele C_p .

Pokud tedy získaná hodnota odhadu \hat{C}_p leží uvnitř pokrývného intervalu odvozeného od požadované hodnoty ukazatele C_p , počtu dat a rizika α , není důvod s pravděpodobností $1 - \alpha$ pochybovat o tom, že proces požadavek kladený na C_p splňuje.

Jak tedy zajistit, aby byla splněna nerovnost $C_p \leq \hat{C}_p$ na každé regulační kartě? Pokud bychom vyžadovali, aby každá regulační karta toto splňovala, pak odpověď je, že 100%-tně toto nelze zajistit, ale lze s předem danou mírou rizika α . Aby tato nerovnost platila např. s 99%tní pravděpodobností, tedy s rizikem 1%, pak požadovaná hodnota C_p , např. již uvažovaných 1,33 musí být 1%-kvantilem pro odhady \hat{C}_p , tedy musí platit

$$1,33 = C_p \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha}}{\alpha_n \sqrt{k}}} \right).$$

Tento fakt při zadaném α , rozsahu podskupiny n a počtu podskupin k na kartě bude jedině s rizikem α splněn, když

$$C_p = 1,33 \left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha}}{\alpha_n \sqrt{k}} \right),$$

tedy v našem uvažovaném případě při $\alpha = 0,01$ máme $u_{1-\alpha} = 2,326$. Pak tedy skutečná hodnota ukazatele C_p nesmí být horší nežli hodnota 1,5944, což je samozřejmě daleko přísnější požadavek na sledovaný jakostní znak, nežli je $C_p = 1,33$. Např. pro směrodatnou odchylku σ sledovaného jakostního znaku to znamená, že zdaleka nestačí její velikost jedné osminy tolerančního rozpětí zajišťující hodnotu $C_p = 1,33$, ale její velikost nesmí být větší nežli

hodnota $(USL - LSL)/9, 5664$; tedy téměř jedna desetina tolerančního rozmezí, což je rozhodně větší požadavek na přesnost výroby nežli vyžaduje požadovaná hodnota pro $C_p = 1, 33$.

Zcela obdobná situace je s ukazatelem C_{pk} a jeho odhadem. O něco se ale komplikuje tím, že vstupuje do hry parametr polohy μ a jeho odhad aritmetický průměr z dat. Obvykle se lze v praxi setkat s požadavkem, aby $\hat{C}_{pk} \geq C_{pk}$, kde C_{pk} je nějaká stanovená hodnota. Rozebereme si opět, co to znamená pro výrobní proces. Z definice ukazatele C_{pk} ihned plyne, že splnění požadavku $\hat{C}_{pk} \geq C_{pk}$ bude platit, když zároveň

$$\frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}} \geq C_{pk}, \quad \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} \geq C_{pk}$$

tedy

$$(\star) \quad LSL + 3C_{pk}\hat{\sigma} \leq \bar{x} \leq USL - 3C_{pk}\hat{\sigma},$$

kde \bar{x} je celkový aritmetický průměr ze všech dat, $\hat{\sigma}$ je odhad směrodatné odchylky σ (např. ve tvaru $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}$). Protože opět nelze zaručit, aby tato nerovnost platila vždycky, je nutné požadovat její splnění s vysokou pravděpodobností, např. 95 %. Z požadavku na C_p , obvykle, jak již zmíněno dříve, aby

$$\hat{C}_p \geq C_p$$

plyne požadavek na odhad směrodatné odchylky $\hat{\sigma}$, totiž

$$\hat{\sigma} \leq \frac{USL - LSL}{6C_p} = \sigma_0$$

musí být splněn s vysokou pravděpodobností, např. 95 %. Protože stále mlčky předpokládáme, že jakostní znak, jehož se ukazatele C_p a C_{pk} týkají, lze popsat normálním rozdělením, odhady \bar{x} pro μ a $\hat{\sigma}$ pro σ lze považovat za stochasticky nezávislé. Abychom tedy zajistili splnění požadavku (\star) na \bar{x} , jsme nuceni požadovat, aby

$$LSL + 3C_{pk}\sigma_0 \leq \bar{x} \leq USL - 3C_{pk}\sigma_0$$

rovněž s vysokou pravděpodobností, protože s pravděpodobností 95 % bude interval $\langle \text{LSL} + 3C_{pk}\sigma_0; \text{USL} - 3C_{pk}\sigma_0 \rangle$ obsažen v intervalu $\langle \text{LSL} + 3C_{pk}\hat{\sigma}; \text{USL} - 3C_{pk}\hat{\sigma} \rangle$. Aritmetický průměr \bar{x} má rozdělení $N(\mu, \sigma_0^2, \sigma_0^2/kn)$, když budeme uvažovat největší možnou směrodatnou odchylku σ_0 pro sledovaný jakostní znak. Aby hodnota \bar{x} padla s vysokou pravděpodobností do intervalu $\langle \text{LSL} + 3C_{pk}\sigma_0; \text{USL} - 3C_{pk}\sigma_0 \rangle$, pak musí platit

$$\begin{aligned}\text{LSL} + 3C_{pk}\sigma_0 &= \frac{\sigma_0 u_{\alpha/2}}{\sqrt{kn}} + \mu \\ \text{USL} - 3C_{pk}\sigma_0 &= \frac{\sigma_0 u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{kn}} + \mu,\end{aligned}$$

kde α je zvolené riziko, $u_{\alpha/2}$ a $u_{1-\alpha/2}$ jsou odpovídající kvantily rozdělení $N(0, 1)$. Označme

$$\begin{aligned}\mu_- &= \text{LSL} + \sigma_0 \left(3C_{pk} - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{kn}} \right) \\ \mu_+ &= \text{USL} - \sigma_0 \left(3C_{pk} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{kn}} \right).\end{aligned}$$

Interval $\langle \mu_-, \mu_+ \rangle$ představuje prostor pro parametr polohy sledovaného jakostního znaku, kde se tento může libovolně vyskytovat, aniž by to s vysokou pravděpodobností $1 - \alpha$ narušilo požadovanou nerovnost $\hat{C}_{pk} \geq C_{pk}$.

Jak pak takový proces regulovat? Klasicky zkonstruované regulační diagramy Shewhartova typu jsou pak příliš úzké, neboť regulační diagram pro parametr polohy μ vyžaduje, aby tento byl v čase konstantní. Zde ale je povoleno, aby $\mu \in \langle \mu_-, \mu_+ \rangle$ a tato libovůle se musí promítnout i do konstrukce regulačních mezí pro aritmetické průměry z podskupin, které parametr polohy hlídají. Je nutno ale uvažovat dvě možnosti konstrukce regulačních diagramů: přirozené a technické regulační meze. Přirozené meze jsou počítány z dat, technické meze jsou počítány ze specifikací na sledovaný jakostní znak. Co se týče přirozených mezí, jejich konstrukce se změní, neboť jsou odvozeny od chování dat. Díky tomu, že parametr polohy se může libovolně měnit v rozmezí $\langle \mu_-, \mu_+ \rangle$, data pak vykazují jak inherentní variabilitu uvnitř podskupin, tak i variabilitu mezi podskupinami. Tento rys variability se musí promítnout do jejich konstrukce a regulační meze pro aritmetické průměry se musí rozšířit

oproti klasickým regulačním mezím, které jsou odvozeny pouze od úrovně inherentní variability odhadované pouze na základě informace v podskupinách. Tyto meze se nemohou proto vyrovnat s větší úrovní variability a jejich používání by vedlo k podstatně zvýšenému počtu falešných poplachů. Co se týče regulačních mezí pro rozpětí R , tyto zůstávají beze změny, neboť ty hlídají pouze úroveň inherentní variability. Konstrukce rozšířených mezí může být založena na odhadu tzv. totální směrodatné odchylky, která nerespektuje rozdělení dat do podskupin, nebo může být využit odhad inherentní variability např. $\bar{R}/d_2(n)$, $\bar{s}/C_4(n)$ a k tomu přidán odhad variability mezi aritmetickými průměry podskupin založený např. na klouzavém rozpětí mezi aritmetickými průměry. Jsou možné další přístupy, vše záleží na povaze sledovaného procesu a jakostního znaku. Technické meze je nutno taktéž modifikovat, protože parametr polohy μ nemusí být konstantní v čase. Pro ujasnění, uvažujme regulační diagram (\bar{x}, R) . Regulační meze pro R je nutno nastavit tak, aby centrální přímka byla

$$CL(R) = \sigma_0 \cdot d_2(n),$$

kde n je velikost podskupiny, a horní a dolní regulační meze musí být

$$\begin{aligned} LCL(R) &= D_1(n) \sigma_0, \\ UCL(R) &= D_2(n) \sigma_0, \end{aligned}$$

(konstanty $d_2(n)$, $D_1(n)$ a $D_2(n)$ jsou tabelovány).

Pro regulační diagram aritmetických průměrů je nutno centrální přímku nastavit na cílovou hodnotu (zde se předpokládá střed tolerančního rozpětí) a regulační meze následovně:

$$\begin{aligned} LCL(\bar{x}) &= T - A(n) \sigma_0 - \frac{\mu_+ - \mu_-}{2}, \\ UCL(\bar{x}) &= T + A(n) \sigma_0 + \frac{\mu_+ + \mu_-}{2}, \end{aligned}$$

T je cílová hodnota (zde $\frac{UCL+LCL}{2}$), $A(n)$ je opět tabelováno.

Takto nastavené technické rozšířené meze zajistí, aby proces byl stabilní s tím, že $\hat{C}_p \geq C_p$ a $\hat{C}_{pk} \geq C_{pk}$ s vysokou pravděpodobností.

Příklad: Je vedena regulační karta (\bar{x}, R) pro 25 podskupin o pěti kusech v každé podskupině. Požadavek na sledovaný jakostní znak je: $\hat{C}_p \geq 1,67$ a $\hat{C}_{pk} \geq 1,33$. Jak se s tímto požadavkem vyrovnat?

Zvolme riziko $\alpha = 2\%$, se kterým zajistíme splnění obou nerovností.

Pro parametr σ to znamená, že jeho odhad $\hat{\sigma}$ nesmí být s pravděpodobností 98 % horší nežli 1 desetina tolerančního rozpětí $USL - LSL$, tedy

$$\hat{\sigma} \leq \frac{USL - LSL}{10} = \sigma_0.$$

Abychom tento požadavek splnili s pravděpodobností 98 %, je nutné při 25 podskupinách po 5ti kusech dosáhnout požadované úrovně variability, tedy úrovně směrodatné odchylky σ jakostního znaku tak, aby

$$1,67 = C_p \frac{1}{1 + \frac{\beta_5 u_{0,98}}{\alpha_5 \sqrt{125}}} = C_p \cdot 0,9361$$

$\alpha_5 = 2,325$, $\beta_5 = 0,864$, $u_{0,98} = 2,054$. Z toho plyne, že proces musí splňovat požadavek $C_p = 1,7840$. Jinými slovy to znamená, že směrodatná odchylka se musí téměř $11 \times$ vejít do specifikačního rozmezí, přesně

$$\sigma_0 = \frac{USL - LSL}{10,704}.$$

Odtud již snadno zjistíme, že pro požadavek $\hat{C}_{pk} \geq 1,33$ musí být s pravděpodobností 98 % parametr polohy μ v intervalu

$$\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_- &= LSL + \frac{USL - LSL}{10,704} \left(3 \cdot 1,33 + 2,326 \cdot \frac{1}{\sqrt{125}} \right) = \\ &= LSL + (USL - LSL) \cdot 0,3931 \end{aligned}$$

$$\mu_+ = USL - (USL - LSL) \cdot 0,3931.$$

Pro lepší představivost to znamená, že parametr μ se může pohybovat kolem středu specifikačního rozmezí v rozsahu

$$T \pm \frac{USL - LSL}{2} (1 - \omega)$$

kde $\omega = 0,7862$ v našem uvažovaném případě.

Prověříme na simulovaných datech. Nechť $USL = 10$, $LSL = 0$, pak $T = 5$. Požadavek na nejhorší možnou směrodatnou odchylku σ_0 je tedy

$$\sigma_0 \doteq \frac{10}{10,704} \doteq 0,9342.$$

Krajní hodnoty pro parametr polohy jsou pak

$$\begin{aligned}\mu_- &= 3,931, \\ \mu_+ &= 6,069.\end{aligned}$$

Z vygenerovaných dat byly určeny hodnoty odhadů ukazatelů C_p a C_{pk} :

$$\hat{C}_p \doteq 1,84, \quad \hat{C}_{pk} \doteq 1,33.$$

Testování způsobilosti a výkonnosti výrobního procesu

Samozřejmě nás zajímá, zdali sledovaný znak jakosti splňuje požadavky na něj kladené a vyjádřené v řeči ukazatelů způsobilosti a výkonnosti. Objevuje se tak otázka, zdali výrobní proces je způsobilý či nikoliv.

V řeči matematické statistiky to znamená stanovit hypotézu, např. že ukazatel C_p je nejméně na úrovni 1,33 proti alternativní hypotéze, že tento požadavek není splněn. Abychom mohli rozhodnout, potřebujeme z procesu odebrat data, ta zpracovat a buď hypotézu nezamítnout či se přiklonit k alternativní hypotéze. Protože vždycky máme k dispozici pouze dílčí informaci, můžeme se dopustit chyby. Jeden typ chyby znamená, že hypotézu zamítneme, i když ona platí. Této chybě se říká chyba 1. druhu a pravděpodobnost jejího výskytu se obvykle nazývá riziko chyby 1. druhu a značí se α . Druhý typ chyby znamená, že naopak hypotéza se nezamítá, i když ona neplatí. Jedná se o chybu 2. druhu a odpovídající riziko se značí β . Bohužel obecně nelze navrhnout takový postup, aby obě chyby byly minimální. Postupuje se tak, že se a priori zvolí horní úroveň pro riziko 1. druhu, tzv. hladina významnosti a hledá se

takový postup, který dává přijatelné riziko 2. druhu β , neboli co největší hodnotu $1 - \beta$, což je pravděpodobnost zamítnutí hypotézy, pokud neplatí (tzv. síla testu).

Test je založen na konstrukci statistických pokryvných intervalů pro odhady ukazatelů způsobilosti či výkonnosti. Pokud bude platit hypotéza, že $C_p \geq C_0$ (např. $C_0 = 1,33$), pak statistický pokryvný interval pro odhad \hat{C}_p má dolní hranici ve tvaru

$$\hat{C}_p \geq \frac{C_p}{\left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha}}{\alpha_n \sqrt{k}}\right)},$$

pokud odhadujeme C_p pomocí $\hat{\sigma}_R$. Analogicky vypadá dolní hranice pro $\hat{\sigma}_S$ či $\hat{\sigma}_I$:

$$\hat{C}_p \geq \frac{C_p}{1 + \frac{b_{n-1} u_{1-\alpha}}{a_{n-1} \sqrt{k}}},$$

resp.

$$\hat{C}_p \geq C_p \cdot \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{1-\alpha}^2(k(n-1))}},$$

kde $u_{1-\alpha}$ je příslušný kvantil rozdělení $N(0, 1)$, $\chi_{1-\alpha}^2(k(n-1))$ je kvantil χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti. Všechny hranice mají stejný tvar vůči hodnotě ukazatele C_p , čím je C_p menší, tím je nižší i dolní hranice statistického pokryvného intervalu. Nejnižší hranice je tedy pro $C_p = C_0$. Pokud tedy odhad \hat{C}_p bude větší nežli dolní hranice s $C_p = C_0$, nemáme důvod zamítnat způsobilost procesu. Pokud hodnota odhadu \hat{C}_p bude pod dolní hranicí, pak hypotézu o způsobilosti zamítáme.

Použití testu ukážeme na příkladu. Máme 25 podskupin pro pět kusů, požadujeme, aby $C_p \geq 1,33$, riziko 1. druhu zvolíme $\alpha = 0,05$. Pak při odhadu založeném na $\hat{\sigma}_R$ máme dolní hranici pro \hat{C}_p pro nezamítnutí hypotézy

$$\hat{C}_p \geq \frac{1,33}{1 + \frac{0,864 \cdot 1,64}{2,326 \cdot \sqrt{25}}} = 1,1856.$$

Pokud tedy odhad \hat{C}_p bude minimálně roven 1,1856, není důvod pochybovat o způsobilosti výrobního procesu. Obdobný výsledek se získá při použití odhadů směrodatných odchylek $\hat{\sigma}_S$ a $\hat{\sigma}_I$.

V dalším kroku budeme testovat chování jakostního znaku z pohledu ukazatele C_{pk} . Postup je analogický jako u ukazatele C_p . Máme hypotézu, že $C_{pk} \geq C_1$, kde hodnota C_1 je stanovena. Alternativní hypotéza je pak $C_{pk} < C_1$, což označí nevyhovující stav procesu. Test je opět založen na dolní hranici pokryvného intervalu pro odhad \hat{C}_{pk} . Zde použijeme téže aproximace pro všechny tři případy odhadů směrodatné odchylky, protože implicitní vyjádření hustot rozdělení pravděpodobnosti odhadů \hat{C}_{pk} je nepoužitelné. Hypotéza o způsobilosti se nezamítne, když odhad \hat{C}_{pk} splňuje nerovnost

$$\hat{C}_{pk} \geq \frac{C_1}{\left(1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2k(n-1)}}\right)}.$$

Pokud hodnota \hat{C}_{pk} bude menší, pak hypotéza o způsobilosti se zamítá na hladině významnosti α .

Pro ilustraci opět příklad. Z 25ti podskupin o rozsahu $n = 5$ byl vypočten odhad $\bar{x} = 22,1$ a směrodatná odchylka $\hat{\sigma}_I = 0,11$. Pak vůči specifikaci LSL = 21,5 a USL = 22,5 máme odhad $\hat{C}_{pk} = 1,212$. Požadavek je, aby $C_{pk} \geq 1,20$, tedy $C_1 = 1,20$. Bude proces způsobilý či nikoliv? Dolní hranice při hladině $\alpha = 0,05$ je rovna

$$\frac{C_1}{\left(1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2k(n-1)}}\right)} = \frac{1,20}{1 + \frac{1,64}{\sqrt{200}}} \doteq 1,0753.$$

To znamená, že nemáme důvod zamítnout způsobilost procesu vůči ukazateli C_{pk} na hladině významnosti 0,05.

Pokud jde o výkonnost procesu, postup je zcela analogický. Odhad ukazatele P_p je založen na odhadu totální směrodatné odchylky a za předpokladu, že data bez ohledu na dělení do podskupin lze považovat za normálně rozdělená, můžeme testovat výkonnost procesu. Hypotéza je, že $P_p \geq P_0$. Tato hypotéza se nezamítne, když odhad \hat{P}_p bude splňovat nerovnost

$$\hat{P}_p \geq P_0 \sqrt{\frac{kn - 1}{\chi_{1-\alpha}^2(kn - 1)}},$$

k je počet podskupin o rozsahu n a $\chi^2_{(1-\alpha)}(kn - 1)$ je příslušný kvantil χ^2 -rozdělení o $kn - 1$ stupních volnosti.

Je-li zadán požadavek na minimální hodnotu ukazatele P_{pk} (pokud má jeho uvažování smysl), pak hypotéza, že $P_{pk} \geq P_1$ se nezamítne, když odhad \hat{P}_{pk} bude splňovat nerovnost

$$\hat{P}_{pk} \geq \frac{P_1}{1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2(kn-1)}}}.$$

5 Vliv počtu dat na odhady \hat{C}_p , \hat{C}_{pk}

Obecně samozřejmě platí, čím více dat, tím lépe odhadneme skutečnost o chování sledovaného jakostního znaku. Ze vzorců pro konfidenční intervaly pro ukazatele C_p a C_{pk} je ihned vidět, čím více dat, tím kratší konfidenční interval a tím lépe zjistíme skutečnou hodnotu C_p a C_{pk} . Naopak snižováním rizika α se konfidenční interval natahuje. Protože obvykle se velikost logické podskupiny nemění, lze získat lepší informaci jediné větším počtem logických podskupin. To v sobě ale skrývá jedno nebezpečí. Na odběr většího počtu podskupin potřebujeme delší čas, a tím se zvyšuje riziko, že zvládnutý proces se může dostat pod vliv nějaké vymezené příčiny, která se objevila během odběru podskupin a jejím vlivem se změnilo i chování jakostního znaku. Z tohoto důvodu by bylo dobré vědět, jak počet odebraných podskupin ovlivňuje chování odhadů \hat{C}_p a \hat{C}_{pk} .

Samozřejmě se naskytá ihned otázka, kolik je zapotřebí odebrat minimálně podskupin, aby bylo možno s předem zadanou pravděpodobností detekovat požadovanou úroveň ukazatele C_p , resp. C_{pk} . Požadavek $C_p = 1$ obvykle znamená nezpůsobilost procesu, a my bychom např. chtěli znát, kolik podskupin je nutno odebrat, abychom detekovali stav procesu s $C_p \geq 1,33$ (pokud je to pravda) s pravděpodobností např. 90%. Máme tedy zadány dvě hodnoty C_0, C_1 , kde $C_0 < C_1$ (výše bylo $C_0 = 1$ a $C_1 = 1,33$) a chceme vědět, kolik podskupin musíme mít k dispozici, abychom s pravděpodobností $1 - \beta$ (výše bylo $\beta = 0,1$) měli šanci deteko-

vat stav procesu s $C_p = C_1$, pokud tento stav je skutečně reálný. Vycházíme tedy z představy, že $C_p = C_0$, ale chceme si být téměř jisti (s pravděpodobností $1 - \beta$), že $C_p = C_1$, pokud tomu tak skutečně je.

V prvním kroku musíme představu $C_p = C_0$ vyloučit, což znamená, že odhad ukazatele \hat{C}_p musí splňovat nerovnost

$$\hat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_\alpha^2(k(n-1))}},$$

kde k je počet podskupin, n je rozsah podskupiny a $\chi_\alpha^2(k(n-1))$ je kvantil χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti. Odkud tato nerovnost plyne? Kdyby byla skutečnost taková, že $C_p = C_0$, pak naměřené hodnoty odhadu ukazatele \hat{C}_p musí být s pravděpodobností $1 - \alpha$ pod hodnotou

$$C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_\alpha^2(k(n-1))}}.$$

(Zde jsme uvažovali použití výběrové směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_I$ pro odhad C_p . Zcela analogicky lze použít i odhady $\hat{\sigma}_R$ či $\hat{\sigma}_S$ s odpovídajícími hranicemi pro pokryvné intervaly.)

Pokud bude platit, že $C_p = C_1$, pak odhad \hat{C}_p musí být s pravděpodobností $1 - \beta$ nad hranicí

$$\hat{C}_p > C_1 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{1-\beta}^2(k(n-1))}}$$

tzn. že s pravděpodobností β musí být

$$\hat{C}_p \leq C_1 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{1-\beta}^2(k(n-1))}}.$$

Porovnáním obou případů získáváme nerovnost

$$C_1 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{1-\beta}^2(k(n-1))}} \geq C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_\alpha^2(k(n-1))}},$$

tedy v krajním případě

$$\frac{C_1}{C_0} = \sqrt{\frac{\chi_{1-\beta}^2(k(n-1))}{\chi_{\alpha}^2(k(n-1))}},$$

při volbě $\alpha = \beta$ tak dostáváme přibližný vzorec pro jednoznačně určený minimální počet pozorování, která je nutno provést, abychom zajistili s pravděpodobností $1 - \beta$ detekci stavu $C_p = C_1$, pokud je tento stav reálný.

Postup doplníme příkladem. Sledovaný jakostní znak by měl splňovat požadavek s $C_p = 1,33$. My ale chceme detekovat stav s $C_p = 1,67$ s pravděpodobností 0,95, pokud se v tomto stavu chování jakostního znaku bude nacházet. Kolik pozorování musíme zajistit, abychom mohli stav s $C_p = 1,67$ s takovou pravděpodobností zachytit. Vyjděme z podílu C_1/C_0 , tedy

$$\frac{C_1}{C_0} \doteq 1,26 = \sqrt{\frac{\chi_{0,95}^2(k(n-1))}{\chi_{0,05}^2(k(n-1))}}.$$

Tedy musíme najít takový stupeň volnosti $N = k(n-1)$ pro χ^2 -rozdělení, aby

$$\frac{\chi_{0,95}^2(N)}{\chi_{0,05}^2(N)} \doteq 1,26^2 \doteq 1,5876.$$

Odpovídající N je nutno hledat zkusmo, níže je uvedena pro zjednodušení Tabulka 2. Když zvolíme $N = 100$, pak máme, že

$$\frac{\chi_{0,95}^2(100)}{\chi_{0,05}^2(100)} \doteq \frac{124,34}{77,93} \doteq 1,5955.$$

Z toho ihned plyne, že např. při $n = 5$ kusů v podskupině je zapotřebí odebrat nejméně 20 podskupin.

Aby tento stav s $C_1 = 1,67$ byl s pravděpodobností 0,95 nezamítnut, je nutné, aby

$$\hat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{\alpha}^2(k(n-1))}} \doteq 1,33 \cdot \sqrt{\frac{100}{77,93}} \doteq 1,51.$$

Pokud tedy bude splněna nerovnost $\hat{C}_p \geq 1,51$, pak lze s pravděpodobností 0,95 tvrdit, že proces není horší nežli $C_p = 1,67$.

Tabulka 2. Minimální počet měření
pro zajištění požadované pravděpodobnosti detekce.

N	$\alpha = \beta = 0,05$ C_1/C_0	$\alpha = \beta = 0,01$ C_1/C_0	N	$\alpha = \beta = 0,05$ C_1/C_0	$\alpha = \beta = 0,01$ C_1/C_0
10	2,24	3,22	90	1,28	1,42
20	1,73	2,17	100	1,26	1,39
30	1,55	1,87	120	1,24	1,35
40	1,46	1,71	140	1,22	1,32
50	1,40	1,61	160	1,20	1,30
60	1,36	1,54	180	1,19	1,28
70	1,33	1,49	200	1,17	1,26
80	1,30	1,45			

Jak tabulku používat?

Potřebujeme zjistit, kolik měření minimálně musíme udělat, abychom detekovali proces s $C_p = 1,33$ na úrovni $1 - \beta = 0,99$, když na úrovni $C_p = 1$ je považován za nezpůsobilý. Jedná se tedy o potvrzení způsobilosti na úrovni $C_p = 1,33$, pokud samozřejmě tato je realitou.

Zde máme $C_0 = 1$, $C_1 = 1,33$, pak $C_1/C_0 = 1,33$ a v tabulce pro $\alpha = \beta = 0,01$ najdeme, že odpovídající počet měření by měl být asi 140. Pokud bychom riziko zvětšili na $\alpha = \beta = 0,05$, pak by stačilo 70 pozorování. Pak způsobilost procesu na úrovni $C_p = 1,33$ bude s pravděpodobností 0,99 potvrzena, když

$$\hat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{140}{\chi_{0,01}^2(140)}} \doteq 1,1605.$$

Jestliže bychom zvolili rizika $\alpha = \beta = 0,05$, pak způsobilost procesu bude potvrzena s pravděpodobností 0,95, když

$$\hat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{70}{\chi_{0,05}^2(70)}} \doteq 1,1632.$$

Z toho je vidět, že volba rizik α, β příliš hranici pro přijetí způsobilosti na základě odhadu \hat{C}_p neovlivňuje.

Pokud bychom pro konstrukci odhadu \hat{C}_p použili odhady směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_R$ či $\hat{\sigma}_S$, situace se změní pouze nepatrně a lze i v těchto případech použít Tabulku 2.

Co se týče ukazatele C_{pk} , je situace vzhledem ke komplikovaným tvarům hustoty rozdělení pravděpodobnosti jejich odhadů daleko složitější. Pro praktické použití lze doporučit, že minimální počet měření nutný pro rozhodnutí týkající se ukazatele C_p rozhodně nebude větší nežli v případě rozhodování týkající se ukazatele C_{pk} .

Když vyjdeme ze vzorců pro konfidenční intervaly pro ukazatele C_{pk} , tj.

$$\hat{C}_{pk} \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{2k(n-1)}} \right) < C_{pk} < \hat{C}_{pk} \left(1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2k(n-1)}} \right)$$

a budeme postupovat stejně jako u ukazatele C_p , dojdeme k přibližnému minimálnímu počtu N měření, který bude zajišťovat detekci stavu procesu s $C_{pk} = C_1$ na hladině pravděpodobnosti $1 - \beta$, pokud je pravdivou, když odhad \hat{C}_{pk} bude splňovat nerovnost ($C_{pk} = C_0$ je předpokládaný stav),

$$\hat{C}_{pk} > C_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{2k(n-1)}} \right)},$$

totiž

$$N = k(n-1) \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{(C_0 + C_1) u_{1-\alpha}}{C_1 - C_0} \right]^2.$$

Pro $\alpha = 0,05$ a $C_0 = 1$, $C_1 = 1,33$ nám tento vzorec dává hodnotu $N \doteq 67$, což je ve velice dobré shodě s hodnotou pro C_p z Tabulky 2.

6 Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti s nenormálně rozdělenými daty

Doposud bylo stále předpokládáno, že získaná data pro odhady ukazatelů C_p , C_{pk} , P_p a P_{pk} lze popsat normálním rozdělením, pro-

tože vzorce pro tyto ukazatele jsou založeny na předpokladu normality. V praxi se ale můžeme setkat se souborem dat, který nelze popsat normálním rozdělením, testy dobré shody toto rozdělení vyloučí. Co dělat v takovém případě?

Rozhodně se nevyplatí ignorovat předpoklad normality a formálně spočítat odhady ukazatelů způsobilosti či výkonnosti jakoby data byla normálně rozložena.

V některých případech se z různých důvodů, např. fyzikální podstaty věci, nedá sledovaný jakostní znak normálním rozdělením popsat. Často se jedná o ovalitu, házivost, kolmost, rovinnost, velikost úhlu apod., kde nelze normální rozdělení použít. Zde lze aplikovat často jiné modely, jako např. logaritmicko-normální rozdělení, Weibullovo rozdělení, překlopené normální rozdělení apod. Je ale nutné si ověřit, že onen daný typ rozdělení pravděpodobnosti se u tohoto jakostního znaku objevuje stále, je prostě charakteristickým rysem jeho chování.

Předpokládejme tedy, že jakostní znak lze popsat rozdělením pravděpodobnosti s jistou hustotou pravděpodobnosti. Jak pak definovat odpovídající C_p , C_{pk} , P_p a P_{pk} ? Nejdříve se ujasníme, že v případě nenormálně rozdělených dat ukazatele C_p a C_{pk} ztrácejí smysl. Je to způsobeno tím, že tyto ukazatele využívají směrodatnou odchylku inherentní variability. I když data budou sbírána ve formě podskupin, odhady směrodatné odchylky v rámci podskupin založené na R či s ztrácejí u nenormálních rozdělení smysl, protože směrodatná odchylka u těchto nenormálních rozdělení nemá tu vlastnost jako směrodatná odchylka u normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, totiž, že interval $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$, tedy délky 6σ pokrývá hodnoty normálně rozdělené náhodné veličiny s pravděpodobností 0,9973. Tento interval musí být u nenormálních rozdělení nahrazen něčím jiným. Zde se nabízí tzv. kvantilové rozpětí $q(0,9987) - q(0,00135)$, kde $q(0,9987)$ je horní kvantil a $q(0,00135)$ je dolní kvantil odvozený od hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Pak ukazatel výkonnosti P_p je definován jako

$$P_p = \frac{USL - LSL}{q(0,9987) - q(0,00135)},$$

protože toto kvantilové rozpětí pokrývá hodnoty jakostního znaku

popsatelného pomocí hustoty s pravděpodobností 0,9973 a má vlastně stejnou vlastnost jako 6σ u normálního rozdělení.

Ukazatel P_{pk} je definován pomocí mediánu, což je zobecnění zahrnující v sobě i případ normálního rozdělení.

$$P_{pk} = \min \left(\frac{USL - Me}{q(0,9987) - Me}, \frac{Me - LSL}{Me - q(0,00135)} \right).$$

Při odhadování těchto ukazatelů na základě sebraných dat se ale potýkáme s velkým problémem, a to získání odhadů pro kvantilové rozpětí. Jednak musíme ignorovat uspořádání dat do podskupin, protože je potřebujeme uspořádat podle velikosti pro získání odhadů výše zmíněných kvantilů a odhadu mediánu, ale hlavně ony kvantily odpovídají buď hodně velké pravděpodobnosti či hodně malé a odhady těchto kvantilů budou velice nestabilní. Schůdnější cesta je nejdříve z dat odhadnout parametry hustoty a teprve potom udělat odhady oněch kvantilů, což mnohé statistické softwary umožňují.

Další doporučení vychází z možnosti vhodné transformace původních dat na nová data již normálně rozdělená. Současně se provede i transformace specifikačních mezí a výkonnost procesu se vyhodnocuje pomocí nových dat a tvarů ukazatelů založených na normalitě. Ani v tomto případě nemají smysl ukazatele způsobilosti C_p a C_{pk} , protože transformací dat se obvykle naruší zachování shodnosti úrovně inherentní variability uvnitř podskupin, která je zaručena zvládnutím procesu, jeho stabilitou. Transformace, které se v praxi nejčastěji používají (Box–Coxova transformace, Johnsonova třída transformací, Pearsonovy křivky) jsou silně nelineární. Hodnocení způsobilosti na základě podskupin by mělo smysl jedině tehdy, kdyby transformované podskupiny opět vykazovaly rovnost úrovně variability, což je možné ověřit aplikací některých z testů na rovnost rozptylů, jako je např. Bartlettův či Leveneův test. Tento případ přichází v úvahu obecně snad pouze u Box–Coxovy transformace, která je poměrně jednoduchá:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} && \text{pro } \alpha \in (-5; 5), \alpha \neq 0 \\ T(x) &= \ln x && \text{pro } \alpha = 0. \end{aligned}$$

Může ale nastat situace, že vhodná transformace není nalezena a

data odolávají normalitě dále. Pak nejspíše data byla sebrána z různých zdrojů či při měnících se podmínkách v procesu nebo byla nějak upravována či cenzorována. Přítomnost různých zdrojů či měnících se podmínek vede obvykle ke směsím normálních rozdělení, které mohou či nemusí být rozložitelné na jednotlivé podsoubory dat, které lze již normálním rozdělením popsat. Jedná se o tzv. stratifikaci dat. Obvykle se tato stratifikace dat provádí podle různých příznaků, které vykazuje výrobní proces. Tato situace nejčastěji nastává u výrobních procesů, na které působí různé vymezitelné, tedy identifikovatelné příčiny, které nelze či neumíme z procesu odstranit (např. variabilita vstupního materiálu, vliv prostředí, opotřebenosti nástroje apod.). V těchto případech je nutno postupovat velice opatrně, doporučuje se spolupráce se statistikem a navržený postup by měl být projednán samozřejmě s odběratelem.

7 Hustoty pro \hat{C}_p , \hat{C}_{pk} , \hat{P}_p a \hat{P}_{pk}

Ukazatel způsobilosti C_p vyjadřuje potencionální výkon procesu, pokud by tento byl přesně centrován, tj. parametr μ sledovaného jakostního znaku je roven prostředku tolerančního rozmezí. Parametr σ stojící ve jmenovateli zlomku definujícího hodnotu ukazatele C_p , se týká tzv. inherentní variability procesu vztahující se ke kolísání jakostního znaku od jednoho výrobku k druhému v rámci logické podskupiny. Lze tedy tuto úroveň variability chápat jako úroveň okamžité variability v okamžiku odběru logické podskupiny, která je vyvolána pouze náhodnými příčinami. Tato hodnota parametru σ je v praxi odhadována jednou ze tří možností:

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{\sigma} &= \frac{\bar{R}}{d_2(n)}, & \text{b) } \hat{\sigma} &= \frac{\bar{s}}{C_4(n)}, \\ \text{c) } \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} \end{aligned}$$

kde \bar{R} je průměrné rozpětí, \bar{s} je průměrná směrodatná odchylka a případ c) je tzv. sdružená směrodatná odchylka (pooled standard deviation). Číslo k je počet logických podskupin, číslo n je

rozsah v podskupině. Zde je nutno uvažovat $n > 1$. Příklad $n = 1$ je zcela specifický a řeší se obvykle uměle vytvořenými podskupinami rozsahu 2 pomocí klouzavého rozpětí (tedy případ pro $n = 2$).

Z uvedených vzorců pro možné odhady inherentní variability je vidět, že skutečně je využita variabilita pouze uvnitř podskupin. To znamená, že pro získání spolehlivého odhadu pro parametr σ není nutné, aby sledovaný proces byl zvládnut z hlediska parametru polohy sledovaného jakostního znaku, ale byl zvládnut, tedy stabilní, vzhledem k úrovni variability uvnitř podskupin, což lze pohlídat regulačními diagramy pro výběrové rozpětí R či výběrovou směrodatnou odchylku s .

Protože velikost n logické podskupiny lze očekávat poměrně malou (obvykle $n \doteq 4; 5$), pak předpoklad normality kladený na chování jakostního znaku uvnitř podskupiny lze považovat z praktického hlediska za téměř vždy splnitelný, pokud nebudou v rámci podskupin podezřele odlehle hodnoty. Pro spolehlivý odhad ukazatele C_p lze totiž předpokládat, že každá podskupina je vlastně náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$, kde parametr μ_i se může libovolně měnit v čase. Stabilitu v parametru σ lze též ověřovat F -testem či jiným testem pro rovnost rozptylů (např. Leveneův test).

Je zřejmé, že odhad $\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}}$ je náhodná veličina, která má rozdělení pravděpodobnosti závislé na volbě odhadu $\hat{\sigma}$. Odvodíme jednotlivé hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro všechny tři případy volby odhadu $\hat{\sigma}$. ($P\{\cdot\}$ značí pravděpodobnost náhodného jevu popsaného uvnitř závorek)

Odhad založený na $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}$ vychází z chování průměrného rozpětí \bar{R} , které má rozdělení pravděpodobnosti aproximovatelné vztahem se standardním normálním rozdělením $N(0, 1)$, totiž

$$\frac{\bar{R} - \alpha_n \sigma}{\beta_n \sigma} \sqrt{k} \sim N(0, 1),$$

kde α_n, β_n jsou konstanty závislé na velikosti podskupiny a jejich hodnoty pro $n = 2 - 20$ uvádí Tabulka 1.

Na základě tohoto faktu již snadno odvodíme aproximaci pro

hustotu rozdělení pro odhad \hat{C}_p :

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\hat{C}_p}{C_p} > \lambda\right\} &= P\left\{\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} > \lambda\right\} = P\left\{\frac{\bar{R}}{\sigma} > \frac{\alpha_n}{\lambda}\right\} = \\ &= P\left\{\left(\frac{\bar{R}}{\sigma} - \alpha_n\right) \frac{\sqrt{k}}{\beta_n} < \alpha_n \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{\sqrt{k}}{\beta_n}\right\} \doteq \Phi\left(\alpha_n \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{\sqrt{k}}{\beta_n}\right), \end{aligned}$$

když $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$. Pak tedy

$$P\left\{\frac{\hat{C}_p}{C_p} < x\right\} \doteq 1 - \Phi\left(\alpha_n \left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{\sqrt{k}}{\beta_n}\right)$$

pro $x > 0$. Pro $x \leq 0$ položíme tuto pravděpodobnost rovnu nule. Po derivování výše uvedeného vztahu získáme vzorec pro aproximaci hustoty pravděpodobnosti pro podíl \hat{C}_p/C_p :

$$f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k}{2} \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 \frac{\alpha_n \sqrt{k}}{x^2 \beta_n}$$

pro $x > 0$. Jinak je $f(x) = 0$.

Výše uvedené vztahy lze snadno využít pro získání aproximačních konfidenčních intervalů pro hodnotu ukazatele C_p a rovněž tak pro aproximační pokryvné intervaly pro hodnoty odhadu \hat{C}_p . Necht' α je zvolené riziko, $1 - \alpha$ je pak úroveň konfidence. Pak konfidenční interval pro ukazatele C_p lze aproximovat intervalem tvaru

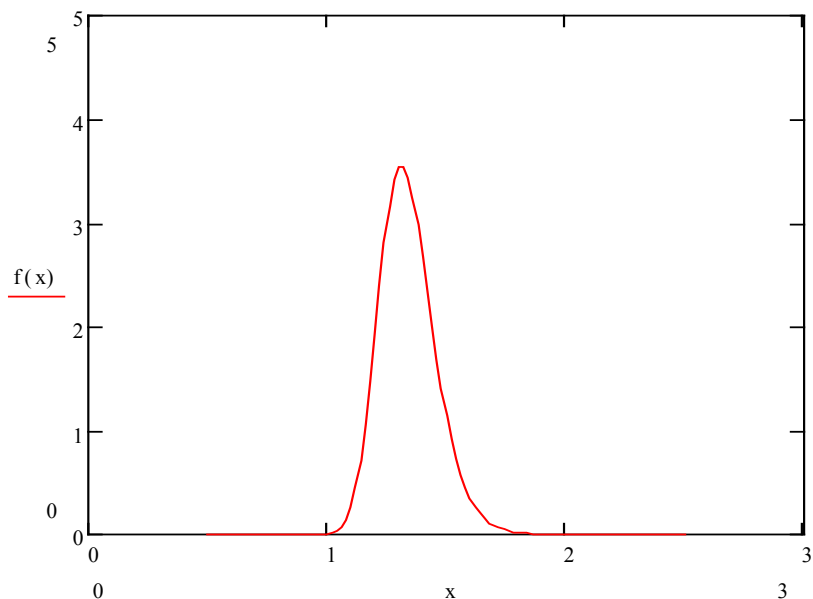
$$\hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}\right) < C_p < \hat{C}_p \left(1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}\right),$$

kde $u_{\alpha/2}$ a $u_{1-\alpha/2}$ jsou příslušné kvantily rozdělení $N(0, 1)$.

Naopak statistický pokryvný interval pro hodnoty odhadu \hat{C}_p lze aproximovat intervalem tvaru

$$C_p \frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{1-\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}} < \hat{C}_p < C_p \frac{1}{1 + \frac{\beta_n u_{\alpha/2}}{\alpha_n \sqrt{k}}}.$$

Tvrzení vyplývající z uvedených vztahů a platící s mírou konfidence $1 - \alpha$ lze doložit následujícími příklady. Necht' $n = 5$, $k = 25$



Obr. 8. Hustota odhadu \hat{C}_p pro $k = 25$, $n = 4$ a $C_p = 1,33$ založená na $\hat{\sigma}_R$.

a $\alpha = 0,05$. Pak lze s pravděpodobností 0,95 tvrdit, že bude-li např. $\hat{C}_p = 1,45$, pak skutečná hodnota ukazatele C_p se může pohybovat v rozmezí $1,22 < C_p < 1,68$. Naopak, bude-li $C_p = 1,33$, pak za stejného počtu dat a jejich rozdělení do 25 podskupin jsou hodnoty odhadu ukazatele \hat{C}_p v intervalu $1,1454 < \hat{C}_p < 1,5308$ s pravděpodobností 0,95. Tento fakt je nutno mít na paměti. Znamená totiž tu skutečnost, že, je-li sledovaný jakostní znak na úrovni $C_p = 1,33$, což odpovídá hodnotě 64 ppm, pak přesto může odhad \hat{C}_p této hodnoty být horší nežli $C_p = 1,33$, aniž by to znamenalo zhoršení výkonu výrobního procesu. Naopak z konfidenčního intervalu pro skutečnou hodnotu ukazatele C_p v našem příkladu vyplývá, že i když odhad \hat{C}_p je roven 1,45, což je rozhodně větší nežli hodnota $C_p = 1,33$, že proces má výkon na úrovni $C_p = 1,33$. Faktem je, že proces ve skutečnosti nemá horší C_p , nežli je dolní hranice konfidenčního intervalu, což je zde přibližně 1,22.

Jestliže budeme používat odhad $\hat{\sigma} = \bar{s}/C_4(n)$, pak situace je obdobná předchozí s odhadem založeném na \bar{R} . Nechť s_i je výběrová směrodatná odchylka z i -té podskupiny o rozsahu n . Za předpokladu, že jakostní znak lze popsat normálním rozdělením, má veličina $s_i^2(n-1)/\sigma^2$ χ^2 -rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti. Pak tedy veličina $\frac{s_i\sqrt{n-1}}{\sigma}$ má χ^1 -rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti, a platí pro střední hodnotu a rozptyl

$$\begin{aligned} E\{s_i\} &= a_{n-1} \sigma \\ D\{s_i\} &= b_{n-1}^2 \sigma^2, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \doteq \sqrt{1 - \frac{1}{2(n-1)}} \\ b_{n-1}^2 &= 1 - a_{n-1}^2 \doteq \frac{1}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Protože \bar{s} je aritmetický průměr z s_1, s_2, \dots, s_k , pak na základě centrální limitní věty lze tvrdit, že pro k dostatečně velká ($k \geq 20$) lze rozdělení náhodné veličiny \bar{s} aproximovat normálním rozdělením, se střední hodnotou $a_{n-1}\sigma$ a rozptylem $b_{n-1}^2\sigma^2/k$. Na základě těchto faktů lze pak odvodit distribuční funkci pro podíl \hat{C}_p/C_p v případě odhadu $\hat{\sigma} = \bar{s}/C_4(n)$. Platí

$$P\left\{\frac{\hat{C}_p}{C_p} < x\right\} = P\left\{\frac{a_{n-1}}{x} \leq \frac{\bar{s}}{\sigma}\right\} \doteq 1 - \Phi\left(\frac{a_{n-1}\sqrt{k}}{b_{n-1}}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right),$$

kde opět $\Phi(\cdot)$ je distribuce $N(0, 1)$. Derivováním vůči x lze získat analytický tvar přibližné hustoty pro podíl \hat{C}_p/C_p :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a_{n-1}^2}{2b_{n-1}^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\right\} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \sqrt{k} \frac{1}{x^2}$$

pro $x > 0$. Pro $x \leq 0$ položíme $g(x)=0$.

Na základě tvaru pro distribuční funkci pro podíl \hat{C}_p/C_p lze odvodit zcela analogicky jako v případě odhadu $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2(n)$ konfidenční interval pro skutečnou hodnotu ukazatele C_p a statistický

pokryvný interval pro hodnoty odhadu \hat{C}_p . Konfidenční interval pro C_p má tvar

$$\hat{C}_p \left(1 + \frac{b_{n-1} u_{\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}} \right) < C_p < \hat{C}_p \left(1 + \frac{b_{n-1} u_{1-\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}} \right)$$

a statistický pokryvný interval pro \hat{C}_p má tvar

$$C_p \frac{1}{1 + \frac{b_{n-1} u_{1-\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}}} < \hat{C}_p < C_p \frac{1}{1 + \frac{b_{n-1} u_{\alpha/2}}{a_{n-1} \sqrt{k}}}$$

na hladině konfidence $1 - \alpha$.

Pro porovnání spočítáme konfidenční interval a pokryvný statistický interval na základě stejných údajů jako u odhadu $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2(n)$. Při hodnotě $\hat{C}_p = 1,45$, $n = 5$ a $k = 25$ spočteme koeficienty a_{n-1} , b_{n-1} :

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)}} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma(5/2) \doteq 0,94 \\ b_{n-1}^2 &= 1 - a_{n-1}^2 \doteq 0,1164 \Rightarrow b_{n-1} = 0,3412. \end{aligned}$$

Odtud konfidenční interval s úrovní konfidence 95 % je

$$1,2216 < C_p < 1,6784,$$

a statistický pokryvný interval pro hodnoty odhadu \hat{C}_p je

$$0,8639 C_p < \hat{C}_p < 1,1869 C_p,$$

tedy při $C_p = 1,33$ je

$$1,1490 < \hat{C}_p < 1,5785.$$

Při srovnání s výsledky založenými na odhadu $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2(5)$ je vidět, že intervaly se od sebe příliš neliší, ani v případě konfidenčních nebo pokryvných intervalů.

V třetím případě odhadu \hat{C}_p založeném na sdružené směrodatné odchylce je situace odlišná, neboť zde lze založit odvozené odpovídající hustoty pravděpodobnosti odhadu \hat{C}_p přímo na χ^2 -distribuci. Z tvaru sdružené směrodatné odchylky ihned plyne, že veličina

$$\frac{(\hat{\sigma})^2 k(n-1)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

ná za předpokladu normality a nezávislosti v podskupinách χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti. Odtud již snadno plyne, že

$$P \left\{ \frac{\hat{C}_p}{C_p} < x \right\} = P \left\{ \chi^2(k(n-1)) < \frac{k(n-1)}{x^2} \right\}$$

kde $\chi^2(k(n-1))$ je veličina mající χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti. Označme $q = k(n-1)$. Pak lze hustotu rozdělení pravděpodobnosti pro veličinu \hat{C}_p/C_p napsat ve tvaru

$$h(x) = \frac{C_p^q q^{q/2}}{2^{q/2-1} \Gamma(q/2)} \exp \left\{ -\frac{C_p^2 q}{2x^2} \right\} \frac{1}{x^{q+1}}.$$

Co se týče vlastností odhadu \hat{C}_p , lze v tomto případě sdružené směrodatné odchylky dokázat, že

$$E\{\hat{C}_p\} = C_p \sqrt{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}$$

a

$$D\{\hat{C}_p\} = C_p^2 \left(1 + \frac{2}{q-2} - \frac{\frac{q}{2}}{\Gamma^2\left(\frac{q}{2}\right)} \Gamma^2\left(\frac{\frac{q}{2}-1}{2}\right) \right).$$

Z tohoto plyne, že jednak odhad \hat{C}_p je asymptoticky nestranný, neboť z vlastnosti Γ -funkce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \sqrt{n} = 1$$

vyplývá, že

$$\lim_{q \rightarrow \infty} E\{\hat{C}_p\} = C_p,$$

a jednak, že

$$\lim_{q \rightarrow \infty} D\{\hat{C}_p\} = 0.$$

Z toho plyne, že odhad \hat{C}_p je i konzistentním odhadem parametru C_p . U předchozích odhadů založených na \bar{R} či \bar{s} situace s vlastnostmi příslušných odhadů \hat{C}_p není tak zřejmá, protože striktně vzato u těchto odhadů neexistují střední hodnoty pro \hat{C}_p . Aby $s \rightarrow \infty$ samozřejmě stačí zvyšovat počet uvažovaných podskupin, tedy $k \rightarrow \infty$ při pevném rozsahu podskupiny n .

Konfidenční interval pro skutečnou hodnotu ukazatele C_p má tvar založený na kvantilech χ^2 -rozdělení, totiž

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2}^2(k(n-1))}{k(n-1)}} < C_p < \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(k(n-1))}{k(n-1)}}.$$

Pokryvný statistický interval pro hodnoty odhadu \hat{C}_p lze vyjádřit obdobně jako

$$C_p \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{1-\alpha/2}^2(k(n-1))}} < \hat{C}_p < C_p \sqrt{\frac{k(n-1)}{\chi_{\alpha/2}^2(k(n-1))}}.$$

Zde $\chi_{\alpha/2}^2(k(n-1))$ a $\chi_{1-\alpha/2}^2(k(n-1))$ jsou příslušné kvantily χ^2 rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti.

Srovnáme opět pomocí příkladu konkrétní tvar těchto intervalů s předchozími výsledky. Tedy máme $\hat{C}_p = 1,45$, $n = 5$, $k = 25$. Pak při $\alpha = 0,05$ je

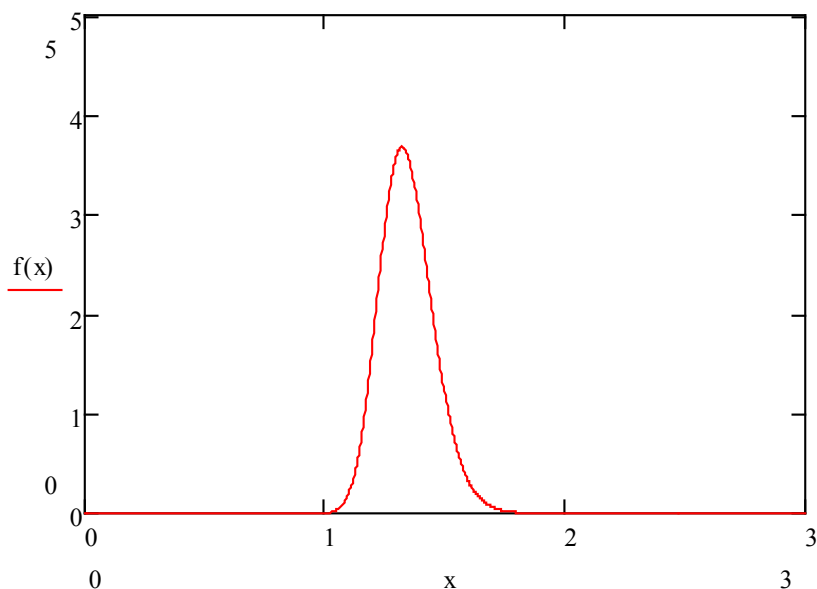
$$\chi_{0,025}^2(100) = 71,82, \quad \chi_{0,975}^2(100) = 129,56,$$

tedy konfidenční interval na úrovni konfidence 0,95 je

$$1,23 < C_p < 1,65.$$

Analogicky statistický pokryvný interval pro hodnoty \hat{C}_p má se stejnou úrovní konfidence při $C_p = 1,33$ tvar

$$1,17 < \hat{C}_p < 1,57.$$



Obr. 9. Hustota odhadu \hat{C}_p pro $k = 25$, $n = 4$ a $C_p = 1,33$ založená na “pooled standard deviation” $\hat{\sigma}_I$.

Opět je vidět, že získané intervaly jsou srovnatelné s předchozími výsledky týkající se odhadů \hat{C}_p založených na \bar{R} či \bar{s} .

Odvození hustot rozdělení pravděpodobnosti pro odhady ukazatelů způsobilosti C_p a C_{pk} silně závisejí na volbě odhadu směrodatné odchylky σ normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, protože vzorce pro ukazatele C_p a C_{pk} vycházejí z předpokladu, že sledovaný jakostní znak spojitého charakteru lze popsat normálním rozdělením. Abychom mohli tyto ukazatele odhadnout a porovnat s požadovanými hodnotami pro C_p a C_{pk} (např. z technické dokumentace či na základě požadavků zákazníka), je nutné mít výrobní proces pod kontrolou, tzn. parametry μ a σ normálního rozdělení by měly být konstantní v čase. Takovému stavu výrobního procesu říkáme, že je proces statisticky zvládnutý neboli pod kontrolou. Tento stav lze dosáhnout pouze tehdy, když na proces působí pouze náhodné příčiny. Pokud by na proces působila nějaká speciální příčina, kterou nelze z procesu odstranit (např. opotřebování nástroje, vliv vstupního ma-

teriálu), pak je nutno obvykle hodnotit způsobilost procesu jinak a nepoužívat výše zmíněné ukazatele C_p a C_{pk} .

Abychom dostali proces pod kontrolu, nejlepším nástrojem jsou klasické regulační diagramy (\bar{x}, R) , (\bar{x}, s) , (Med, R) , (x_i, MR) . Odhady ukazatelů C_p a C_{pk} vycházejí ze vzorců pro C_p a C_{pk} , totiž

$$C_p = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\sigma}, \quad \hat{C}_p = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\hat{\sigma}}$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma}, \frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma}\right), \quad \hat{C}_{pk} = \left(\frac{\hat{\mu} - \text{LSL}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\text{USL} - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}}\right),$$

kde $\hat{\mu}$ je obvykle aritmetický průměr ze všech dat organizovaných v podskupinách, $\hat{\sigma}$ je vhodný odhad pro parametr σ obvykle úzce související s použitým typem regulačního diagramu.

Právě proto, aby odhady \bar{x} a $\hat{\sigma}$ byly věrohodné, je nutné mít proces ve statisticky zvládnutém, tedy stabilním stavu. Je nutné si uvědomit, že odhady \bar{x} a $\hat{\sigma}$ spočítáme vždy z jakýchkoliv dat, ale informace v nich obsažená se nemusí vztahovat na hodnoty parametrů μ a σ , a tím pádem odhady \hat{C}_p a \hat{C}_{pk} pak de facto nic neřekají o způsobilosti procesu, tedy o míře neshodných produktů procesem produkováných. Aby hodnota odhadu \hat{C}_p a \hat{C}_{pk} vyjadřovala realitu procesu, je právě nutné se přesvědčit, že navržená data lze popsat normálním rozdělením a proces je stabilní.

Budeme předpokládat, že data z procesu jsou získávána ve formě podskupin o rozsahu n , kde $n \geq 2$. Příklad individuálních hodnot, tj. $n = 1$, bude řešen jako zvláštní případ.

Parametr σ lze odhadnout třemi způsoby:

$$\text{a) } \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}, \quad \text{b) } \hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{C_4(n)},$$

$$\text{c) } \hat{\sigma} = \left(\frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right)^{1/2},$$

když

$$\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i, \quad \bar{s} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i,$$

přičemž x_{ij} je j -té pozorování ($j = 1, 2, \dots, n$) v i -té podskupině ($i = 1, 2, \dots, k$),

$$R = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij},$$

$$s_i = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right)^{1/2}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Pro odhad ukazatele C_{pk} potřebujeme ještě odhad parametru μ , který je nejčastěji ve formě

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij}.$$

Co se týče ukazatele C_{pk} , je nutno si uvědomit, že ze vzorce $C_{pk} = \min(C_{pkU}, C_{pkL})$, kde

$$C_{pkU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} \quad C_{pkL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma},$$

ihned plyne, že $C_{pk} = C_p$ právě tehdy, když $\mu = T = \frac{USL+LSL}{2}$, jinak je vždy $C_{pk} < C_p$ a dále, že $C_{pk} = C_{pkU}$ právě tehdy, když $\mu > T$ a $C_{pk} = C_{pkL}$ právě tehdy, když $\mu < T$. Pokud tedy je dán požadavek, že $C_{pk} = C_p$, pak to znamená požadavek na centrovanost procesu vůči tolerančnímu rozmezí. Pokud bude požadavek slabší, tj. $C_{pk} < C_p$, pak není jednoznačně určeno, kde má být parametr polohy μ umístěn v $\langle LSL, USL \rangle$, zda-li nalevo od T či napravo od T . Pokud tedy bude $\mu < T$, pak stačí sledovat C_{pkL} , pro $\mu > T$ se jedná o C_{pkU} .

Obdobná situace je i v případě odhadů \hat{C}_p a \hat{C}_{pk} . Je zřejmé, že $\hat{C}_p = \hat{C}_{pk}$ s pravděpodobností 0 a s pravděpodobností 1 je pak $\hat{C}_{pk} < \hat{C}_p$ při stejném použití odhadu $\hat{\sigma}$ pro směrodatnou odchylku σ . Jestliže bude $\bar{\bar{x}} < T$, pak $\hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pkL}$ a pro $\bar{\bar{x}} > T$ je $\hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pkU}$. Čili podstatným náhodným jevem je $\{\bar{\bar{x}} < T\}$, resp. $\{\bar{\bar{x}} > T\}$. Toto lze zapsat následovně ve formě podmínky:

$$P \left\{ \hat{C}_{pk} < \lambda \mid \bar{\bar{x}} < T \right\} = P \left\{ \hat{C}_{pkL} < \lambda \mid \bar{\bar{x}} < T \right\}$$

$$P \left\{ \hat{C}_{pk} < \lambda \mid \bar{\bar{x}} > T \right\} = P \left\{ \hat{C}_{pkU} < \lambda \mid \bar{\bar{x}} > T \right\}.$$

Z této úvahy vyplývá, že pokud bude $\bar{x} < T$, pak odhadujeme C_{pk} pomocí \hat{C}_{pkL} , pokud $\bar{x} > T$, pak ukazatel C_{pk} je odhadován pomocí \hat{C}_{pkU} .

Vyjděme z vyjádření pravděpodobnosti, že hodnota ukazatele \hat{C}_{pk} je větší nežli x , tedy

$$P \left\{ \min \left(\frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} \right) > x \right\} = H(x).$$

To ale znamená, že současně musí být $\frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}} > x$, $\frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} > x$. Bude-li tedy $\hat{\sigma} > 0$, pak musí platit nerovnost

$$LSL + 3x\hat{\sigma} < \bar{x} < USL - 3x\hat{\sigma},$$

pro $\hat{\sigma} < 0$ musí platit opačná nerovnost

$$USL - 3x\hat{\sigma} < \bar{x} < LSL + 3x\hat{\sigma}.$$

Protože vycházíme z předpokladu, že odhady \bar{x} a $\hat{\sigma}$ vycházejí z normálního rozdělení, a jsou tedy nezávislé, lze psát:

$$\begin{aligned} H(x) = & \int_{-\infty}^0 \left(\int_{USL-3xs}^{LSL+3xs} f_{\bar{x}}(u) du \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds + \\ & + \int_0^{\infty} \left(\int_{LSL+3xs}^{USL-3xs} f_{\bar{x}}(u) du \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds, \end{aligned}$$

kde $f_{\bar{x}}(\cdot)$ a $g_{\hat{\sigma}}(\cdot)$ jsou hustoty pro \bar{x} a $\hat{\sigma}$. Aby ovšem integrační meze byly správně stanoveny, je nutné pro $\hat{\sigma} > 0$, aby

$$LSL + 3x\hat{\sigma} \leq USL - 3x\hat{\sigma} \Leftrightarrow \frac{USL - LSL}{6} \geq x\hat{\sigma}$$

a pro $\hat{\sigma} < 0$

$$USL - 3x\hat{\sigma} \leq LSL + 3x\hat{\sigma} \Leftrightarrow \frac{USL - LSL}{6} \leq x\hat{\sigma}.$$

Je nutno rozlišit všechny 4 případy kombinací znamení pro x a $\hat{\sigma}$. Výsledkem je, že pro $x > 0$ je

$$H(x) = \int_0^{\frac{USL-LSL}{6x}} \left(\int_{LSL+3xs}^{USL-3xs} f_{\bar{x}}(u) du \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds$$

a pro $x < 0$ je

$$H(x) = \int_0^\infty \left(\int_{\text{LSL}+3xs}^{\text{USL}-3xs} f_{\bar{x}}(u) du \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds + \\ + \int_{-\infty}^{\frac{\text{USL}-\text{LSL}}{6x}} \left(\int_{\text{USL}-3xs}^{\text{LSL}+3xs} f_{\bar{x}}(u) du \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds.$$

Pak distribuční funkce pro odhad \hat{C}_{pk} má tvar

$$F_{\hat{C}_{pk}}(x) = 1 - H(x)$$

a pro $x = 0$ je

$$F_{\hat{C}_{pk}}(0) = 1 - P\{\text{LSL} < \bar{x} < \text{USL}\} \int_0^\infty g_{\hat{\sigma}}(s) ds.$$

Jako funkce $g_{\hat{\sigma}}(\cdot)$ může sloužit jednak hustota pro výběrovou směrodatnou odchylku $\hat{\sigma}$, která je odvozena od rozdělení χ^2 o $k(n-1)$ stupních volnosti, která má náhodná veličina $k(n-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$, kde σ^2 je požadovaný rozptyl sledovaného jakostního znaku. Pak hustota pro $\hat{\sigma}$ má tvar:

$$g_{\hat{\sigma}}(s) = \frac{2sk(n-1)}{\sigma^2} f_{\chi^2} \left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} \right) \quad \text{pro } s > 0, \\ g_{\hat{\sigma}}(s) = 0 \quad \text{pro } s \leq 0,$$

kde $f_{\chi^2}(\cdot)$ je hustota χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti (k je počet podskupin, n je rozsah podskupiny).

Jestliže budeme směrodatnou odchylku σ odhadovat pomocí \bar{R} či \bar{s} , pak je nutno rozdělení pro odhad $\hat{\sigma}$ počítat jinak. V těchto případech je rozdělení odhadu $\hat{\sigma}$ založeno na aproximaci vycházející z asymptotického chování \bar{R} či \bar{s} . Platí totiž, že

$$\frac{\bar{R} - \alpha_n \sigma}{\beta_n \sigma} \sqrt{k} \sim N(0, 1),$$

kde α_n, β_n závisejí na rozsahu podskupiny. Obdobně platí, že

$$\frac{\bar{s} - a_{n-1} \sigma}{b_{n-1} \sigma} \sqrt{k} \sim N(0, 1),$$

kde opět a_{n-1} , b_{n-1} závisejí na rozsahu podskupiny. Z tohoto plyne, že za odhad parametru σ lze uvažovat veličiny

$$\frac{\bar{R}}{\alpha_n}, \quad \frac{\bar{s}}{a_{n-1}},$$

tedy

$$\frac{\bar{R}}{\alpha_n} \sim N\left(\sigma, \frac{\beta_n^2 \sigma^2}{\alpha_n^2 k}\right); \quad \frac{\bar{s}}{a_{n-1}} \sim N\left(\sigma, \frac{b_{n-1}^2 \sigma^2}{a_{n-1}^2 k}\right).$$

V těchto případech lze tedy za hustotu $g_{\hat{\sigma}}(\cdot)$ vzít buď $N\left(\sigma, \frac{\beta_n^2 \sigma^2}{\alpha_n^2 k}\right)$ či $N\left(\sigma, \frac{b_{n-1}^2 \sigma^2}{a_{n-1}^2 k}\right)$ podle typu odhadu.

Odvození hustoty pro \hat{C}_{pk} :

Odvození hustoty je provedeno pomocí vzorce pro derivování integrálu dle parametru. Zapišeme odvozenou distribuční funkci symbolicky ve tvaru

$$F(x) = 1 - \int_0^{B(x)} \varphi(s, x) g_{\hat{\sigma}}(s) ds,$$

kde x je parametr. Pak

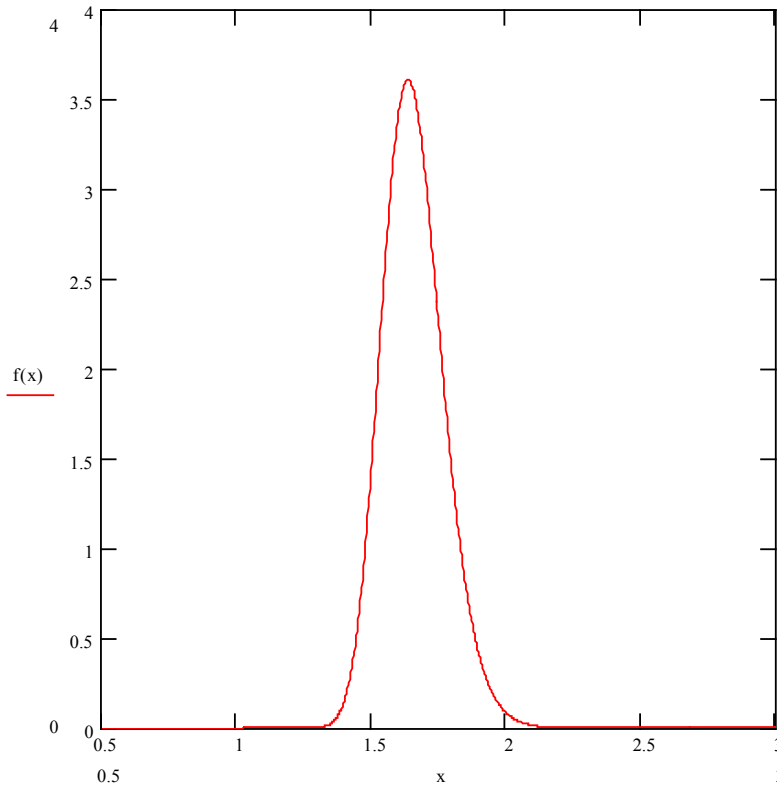
$$f(x) = F'(x) = - \left(\int_0^{B(x)} \frac{\partial \varphi(s, x)}{\partial x} g_{\hat{\sigma}}(s) ds + \varphi(B(x), x) B'(x) \right),$$

kde $B(x) = \frac{T_2 - T_1}{6x}$ pro $x > 0$, (USL = T_2 , LSL = T_1)

$$\varphi(s, x) = \frac{\sqrt{kn}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T_1+3sx}^{T_2-3sx} e^{-\frac{kn}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du.$$

Odtud snadno

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{T_2 - T_1}{6x^2} \\ \frac{\partial \varphi(s, x)}{\partial x} &= -\frac{3s\sqrt{kn}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{kn}{2}\left(\frac{T_2-3sx-\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{kn}{2}\left(\frac{T_1+3sx-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) \\ \varphi(B(x), x) &= \frac{\sqrt{kn}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{T_1+T_2}{2}}^{\frac{T_1+T_2}{2}} e^{-\frac{kn}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = 0. \end{aligned}$$



Obr. 10. Hustota odhadu \hat{C}_{pk} založená na $\hat{\sigma}_R$ pro $k = 25$, $n = 6$ a $C_p = 1,67$ při správném centrování procesu ($C_{pk} = 1,67$).

Tedy odvozená hustota má tvar:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{k'n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{T_2-T_1}{6x}} s \left(e^{-\frac{kn}{2} \left(\frac{T_2-3sx-\mu}{\sigma} \right)^2} + e^{-\frac{kn}{2} \left(\frac{T_1+3sx-\mu}{\sigma} \right)^2} \right) g_{\hat{\sigma}}(s) ds$$

pro $x > 0$. Pro $x < 0$ je $f(x) \doteq 0$. Složky ukazatele C_{pk} , a to C_{pkU} a C_{pkL} jsou ve tvaru hustoty zastoupeny, protože

$$\frac{T_2 - 3sx - \mu}{\sigma} = 3 \frac{T_2 - \mu}{3\sigma} - \frac{3sx}{\sigma} = 3C_{pkU} - 3\frac{sx}{\sigma}.$$

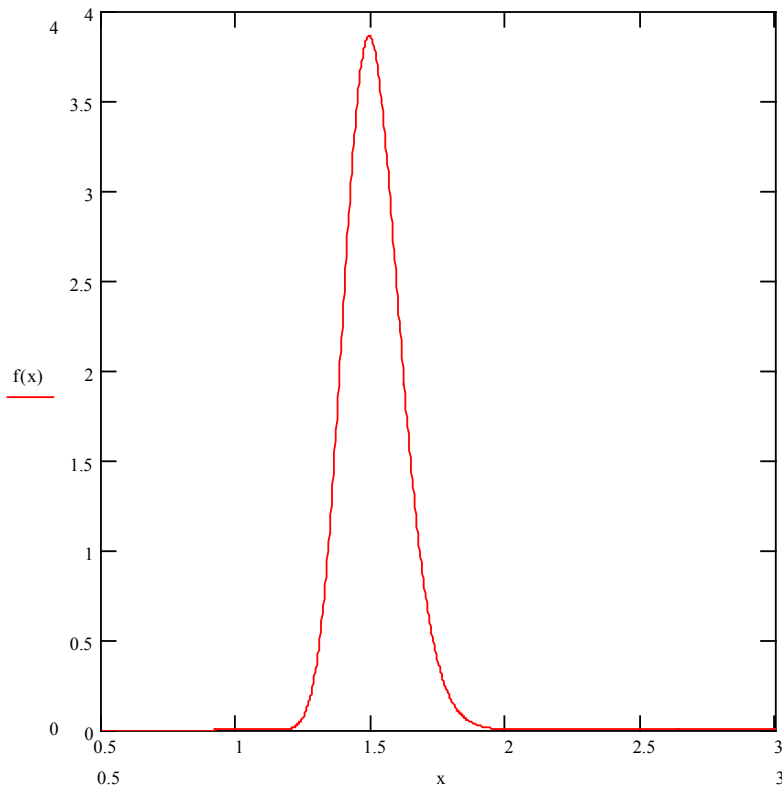
Obdobně pro $\frac{T_1+3sx-\mu}{\sigma} = \frac{3sx}{\sigma} - 3C_{pkL}$.

Vhodným dosazením za hustotu $g_{\hat{\sigma}}(\cdot)$ získáme všechny 3 možnosti hustot pro odhad \hat{C}_{pk} .

Pokud bude proces přesně centrováný, pak $C_{pkU} = C_{pkL} = C_p$ a hustota $f(\cdot)$ má jednodušší tvar:

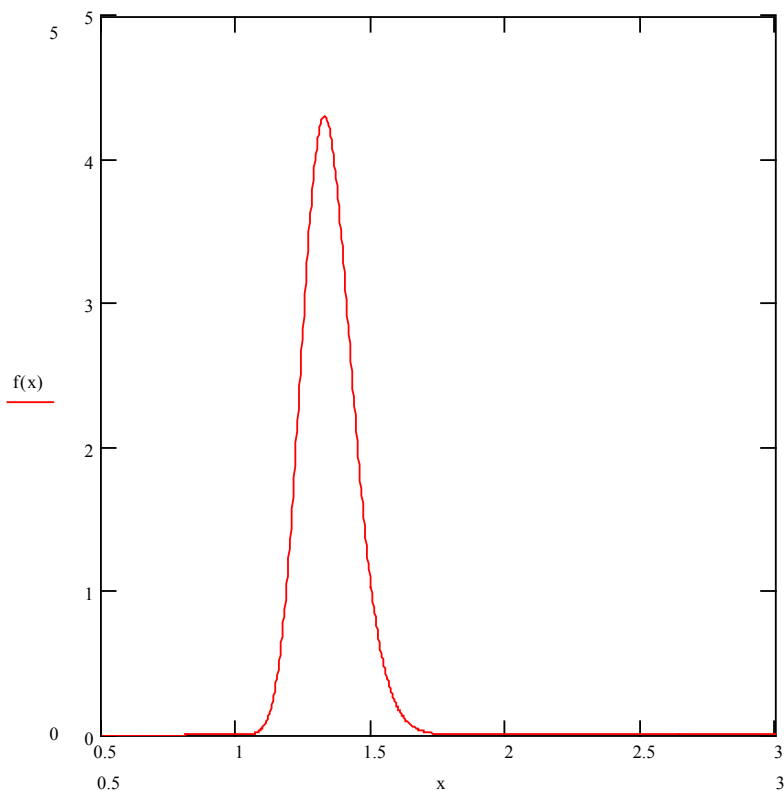
$$f(x) = \frac{6\sqrt{kn}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{T_2-T_1}{6x}} s e^{-\frac{kn}{2}(3(C_{pk}-\frac{sx}{\sigma}))^2} g_{\hat{\sigma}}(s) ds.$$

Odvození hustot pro \hat{C}_{pk} ukazuje jejich komplikovaný tvar a hledání patřičných kvantilů je prakticky možné pouze numerickou cestou.



Obr. 11. Hustota odhadu \hat{C}_{pk} založená na $\hat{\sigma}_R$ pro $k = 25$, $n = 6$, $C_p = 1,67$ a $C_{pk} = 0,9 C_p$.

Odvození hustoty pro \hat{P}_p a \hat{P}_{pk}



Obr. 12. Hustota odhadu \hat{C}_{pk} založená na $\hat{\sigma}_R$ pro $k = 25$, $n = 6$, $C_p = 1,67$ a $C_{pk} = 0,8 C_p$.

Je nutno si uvědomit, za jaké situace mají ukazatelé P_p a P_{pk} smysl. Vyjděme z definice těchto ukazatelů. Jejich tvar je analogický tvaru ukazatelů C_p a C_{pk} s tím podstatným rozdílem, že v jejich definici vystupuje namísto inherentní (okamžité) směrodatné odchyly tzv. totální směrodatná odchyly:

$$P_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{TOT}}, \quad P_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma_{TOT}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{TOT}}\right).$$

Tato směrodatná odchyly obsahuje v sobě jak příspěvek inherentní směrodatné odchyly, tak i příspěvek možné směrodatné odchyly variability mezi odebíranými podskupinami. Odhad této směrodat-

né odchylky je dán vzorcem

$$\hat{\sigma}_{\text{TOT}} = \left(\frac{1}{kn - 1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 \right)^{1/2},$$

když x_{ij} je j -té pozorování v i -té logické podskupině, \bar{x} je celkový aritmetický průměr ze všech pozorování. Tento odhad nese informaci o úrovni variability, jako kdyby všechna pozorování pocházela z jedné základní populace nerespекující rozdělení dat do podskupin. Z toho také vyplývá, kdy takový odhad má smysl, aby nesl skutečně informaci o úrovni variability. Je to možné jedině tehdy, když skutečně lze všechna data považovat za pocházející z jediné základní populace, která by právě vzhledem ke vzorci pro P_p měla být popsána normálním rozdělením s parametrem σ_{TOT} . Před použitím ukazatele P_p bychom se měli přesvědčit, zdali se skutečně jedná o normální rozdělení nějakým testem na normalitu dat. Obecně je faktem to, že data pocházející z jediné logické podskupiny mohou pocházet z jiné základní produkce nežli data z jiné logické podskupiny. Tato situace může nastat např. tehdy, když parametr polohy nebude konstantní v čase, ale bude vykazovat třeba trend či se bude náhodně pohybovat v nějakém rozmezí kolem cílové hodnoty. Máme tedy obecně co do činění se směsí rozdělení pravděpodobnosti z jednotlivých logických podskupin. Když tato data smícháme dohromady, buď je můžeme celkově popsat normálním rozdělením či nikoliv. Ukazatel P_p má smysl ve tvaru uvedeném výše pouze tehdy, když normální rozdělení není testem na normalitu vyloučeno. Pokud je možno navíc data stratifikovat podle nějakých příznaků, lze předpokládat, že dojde k rozdělení dat do několika podmnožin s tím, že každá podmnožina pochází z jiného základního souboru. Pak je možno předpokládat, že bude přesnější pro hodnocení výkonnosti takového procesu hodnotit každou podmnožinu zvlášť a uvažovat nejhorší případy vyhodnocení.

Největší slabinou zavedení ukazatele P_p je ta skutečnost, že na základě něho nelze nic říci o budoucím chování výrobního procesu. S tímto úzce souvisí i aplikace ukazatele P_{pk} . Jeho užití mlčky, ale důrazně vyžaduje, aby opět všechna data bez ohledu na dělení do logických podskupin, se dala popsat normálním rozdělením $N(\mu, \sigma_{\text{TOT}}^2)$, kde μ je parametr polohy. Opět zde je otevřená otázka,

zdali celkový aritmetický průměr \bar{x} skutečně odhaduje “rozumně” případný parametr polohy. Je nutné si uvědomit, že parametr μ může být de facto fiktivní a nemít nic společného s posazením procesu vůči cílové hodnotě, protože parametry polohy vzaté pouze v každé logické podskupině se mohou během odběru podskupin v čase měnit.

Vyjděme ze vzorce pro odhad \hat{P}_p . Za předpokladu normality a nezávislosti dat $\{x_{ij}\}$ jak v podskupinách, tak i mezi podskupinami víme, že součet

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{(x_{ij} - \bar{x})^2}{\sigma_{\text{TOT}}^2}$$

má χ^2 -rozdělení o $kn - 1$ stupních volnosti. Pak tedy veličina

$$\frac{s_{\text{TOT}}^2(kn - 1)}{\sigma_{\text{TOT}}^2}$$

má rovněž χ^2 -rozdělení o $kn - 1$ stupních volnosti. Pak, jak snadno vidět (pro $x > 0$)

$$\begin{aligned} P\{\hat{P}_p < x\} &= P\left\{\frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6s_{\text{TOT}}} < x\right\} = \\ &= P\left\{\frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6x} < s_{\text{TOT}}\right\} = \\ &= 1 - P\left\{s_{\text{TOT}} < \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6x}\right\} = \\ &= 1 - P\left\{\frac{s_{\text{TOT}}^2(kn - 1)}{\sigma_{\text{TOT}}^2} < \frac{(\text{USL} - \text{LSL})^2}{36x^2\sigma_{\text{TOT}}^2}\right\} = \\ &= 1 - \int_0^{\frac{(\text{USL} - \text{LSL})^2}{36x^2\sigma_{\text{TOT}}^2}} f_{\chi^2}(u) du = \int_{P_p^2/x^2}^{\infty} f_{\chi^2}(u) du, \end{aligned}$$

kde $f_{\chi^2}(\cdot)$ je hustota rozdělení χ^2 o $(kn - 1)$ stupních volnosti.

Derivováním výše uvedeného vztahu získáme hustotu pravděpodobnosti pro odhad \hat{P}_p :

$$\begin{aligned} g(x) &= f_{\chi^2}\left(\frac{(\text{USL} - \text{LSL})^2}{36x^2\sigma_{\text{TOT}}^2}\right) \cdot \frac{(\text{USL} - \text{LSL})^2}{36\sigma_{\text{TOT}}^2} \cdot (2x^{-3}) = \\ &= 2f_{\chi^2}\left(\frac{P_p^2}{x^2}\right) \cdot P_p^2 \cdot \frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

kde P_p je požadovaná hodnota ukazatele výkonnosti.

Z tvaru distribuční funkce $G(x) = P\{\hat{P}_p < x\}$ zjistíme kvantily rozdělení pro \hat{P}_p . Hledáme x_α tak, aby $G(x_\alpha) = \alpha$. Z výrazů pro $G(\cdot)$ snadno vidíme, že

$$x_\alpha = \frac{P_p}{\sqrt{\chi_{1-\alpha}^2(kn-1)}},$$

kde $\chi_{1-\alpha}^2(kn-1)$ je $(1-\alpha)$ %-tní kvantil χ^2 -rozdělení o $(kn-1)$ stupních volnosti. Odtud již snadno vidíme, že pokryvný interval pro hodnoty \hat{P}_p s mírou spolehlivosti $1-2\alpha$ má tvar

$$\frac{P_p}{\sqrt{\chi_{1-\alpha}^2(kn-1)}} < \hat{P}_p < \frac{P_p}{\sqrt{\chi_\alpha^2(kn-1)}},$$

při $0 < \alpha < 0,5$.

Konfidenční interval s mírou spolehlivosti $1-2\alpha$ má pak tvar:

$$\hat{P}_p \sqrt{\chi_\alpha^2(kn-1)} < P_p < \hat{P}_p \sqrt{\chi_{1-\alpha}^2(kn-1)}.$$

Je nutno si uvědomit, že pokud zadáme požadavek na hodnotu ukazatele P_p , je tím dán automaticky požadavek na hodnotu totální směrodatné odchylky σ_{TOT} . Tato směrodatná odchylka může být využita pro konstrukci tzv. rozšířených regulačních mezí, ve kterých by se měly pohybovat aritmetické průměry z podskupin.

Pokud by rozdělení dat sebraných do jednoho výběru bez respektování podskupin nebylo normální, pak nelze výše uvedený postup aplikovat. V tom případě je nejspíše nutno data transformovat na nová data s přibližně normálním rozdělením a pak použít standardní postup. Problém zůstává, pokud původní data nelze popsat jednovrcholovým rozdělením, což může v praxi nastat v parametru polohy (různé nastavení výrobního procesu, různý vstupní materiál apod.).

Co se týče ukazatele P_{pk} , vzhledem k jeho definici je jasné, že tento ukazatel má smysl pouze tehdy, když lze celkově data poskládaná do podskupin popsat jediným rozdělením $N(\mu, \sigma_{TOT}^2)$,

Tato situace např. nastává, když parametr polohy μ_i v i -té podskupině lze chápat jako hodnotu náhodné veličiny normálně rozdělené $N(\mu, d^2)$ a tedy j -té pozorování v i -té podskupině lze vyjádřit jako součet dvou veličin

$$x_{ij} = \mu_i + e_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

kde μ_i je hodnota náhodné veličiny z rozdělení $N(\mu, d^2)$, e_{ij} jsou náhodné chyby vytvářející inherentní variabilitu s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Pak rozdělení veličiny x_{ij} je opět normální $N(\mu, \sigma_{\text{TOT}}^2)$, kde

$$\sigma_{\text{TOT}}^2 = \sigma^2 + d^2.$$

Nutno podotknout, že veličiny $\{x_{ij}\}$ nejsou vzájemně nezávislé, pouze podmíněně nezávislé, i za předpokladu, že $\{\mu_i\}_{i=1}^k$ a $\{e_{ij}\}_{j=1, \dots, n}^{i=1, 2, \dots, k}$ jsou nezávislé. Takovýto předpoklad je v praxi přijatelný.

Pak tedy

$$P_{pk} = \min \left(\frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma_{\text{TOT}}}, \frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma_{\text{TOT}}} \right)$$

a jeho odhad má smysl díky platnosti modelu $N(\mu, \sigma_{\text{TOT}}^2)$, tedy

$$\hat{P}_{pk} = \min \left(\frac{\text{USL} - \bar{x}}{3s_{\text{TOT}}}, \frac{\mu - \bar{x}}{3s_{\text{TOT}}} \right),$$

kde

$$\bar{x} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad s_{\text{TOT}}^2 = \frac{1}{kn-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2.$$

Odvození hustoty rozdělení pro \hat{P}_{pk} vychází z toho, že opět \bar{x} a s_{TOT} jsou vzájemně nezávislé, \bar{x} má rozdělení $N(\mu, \frac{\sigma_{\text{TOT}}^2}{kn})$ a rozdělení s_{TOT} je odvozeno od rozdělení χ^2 , a bylo odvozeno již dříve u ukazatele P_p .

Označme

$$\mu = \frac{\text{USL} + \text{LSL}}{2} + \delta,$$

pak hustota rozdělení pravděpodobnosti pro odhad s_{TOT} má tvar

$$g(z) = 2z \frac{kn - 1}{\sigma_{\text{TOT}}^2} \cdot f_{\chi^2}^{(kn-1)} \left(z^2 \frac{kn - 1}{\sigma_{\text{TOT}}^2} \right).$$

Pak distribuční funkce pro \hat{P}_{pk} má tvar:

$$F_{\hat{P}_{pk}}(x) = 1 - \int_0^{\frac{\text{USL}-\text{LSL}}{6x}} (f_{\text{NORM}}(\text{USL} - 3xz) - f_{\text{NORM}}(\text{LSL} + 3xz)) g(z) dz$$

pro $x > 0$, kde $f_{\text{NORM}}(\cdot)$ je hustota rozdělení $N(\mu, \frac{\sigma_{\text{TOT}}^2}{kn})$. Pro $x \leq 0$ je $F(x) = 0$. Hodnoty příslušných kvantilů lze bohužel získat pouze numericky řešením rovnice

$$F(x) - \gamma = 0,$$

kde γ je hodnota pravděpodobnosti k uvažovanému kvantilu. Rovněž odvození tvaru pro hustotu pravděpodobnosti pro \hat{P}_{pk} lze získat pouze numericky a zobrazit tak přibližný tvar hustoty.

Pro praktické použití lze pracovat s aproximacemi pro konfidenční interval ukazatele výkonnosti P_{pk} obdobnými jako pro ukazatel C_{pk} :

$$\hat{P}_{pk} \left(1 + \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2(N-1)}} \right) < P_{pk} < \hat{P}_{pk} \left(1 + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{2(N-1)}} \right),$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$ jsou příslušné kvantily rozdělení $N(0, 1)$ a N je celkový počet pozorování, tedy $N = k \cdot n$, kde k je počet podskupin a n je rozsah podskupiny.

8 Způsobilst měřidla, způsobilst strojního zařízení, předběžná a dlouhodobá způsobilst procesu

Způsobilst měřidla

Jedná se o postup pro ověřování vhodnosti měřícího zařízení. Měření se provádí opakovaně na etalonu s předepsaným rozměrem T , opakování má být nejméně 20, doporučuje se rozsah 20–50 opakovaných

měření etalonu. Výsledky jsou zaznamenávány v časové souslednosti měření a vede se regulační diagram pro individuální hodnoty I-MR, kterým se posuzuje stabilita měření. Způsobnost měření lze hodnotit dvěma způsoby, které jsou neporovnatelné. Záleží na povaze měření a jakostního znaku, jakým způsobem bude způsobnost měření posuzována.

- a) Odhad ukazatele způsobnosti založený na mezních hodnotách sledovaného jakostního znaku:

$$\hat{C}_g = 0,15(\text{USL} - \text{LSL})/6s_g,$$

$$\hat{C}_{gk} = \min\left(\frac{\bar{x} - (T - 0,075\Delta)}{3s_g}, \frac{(T + 0,075\Delta) - \bar{x}}{3s_g}\right)$$

kde $\Delta = \text{USL} - \text{LSL}$, \bar{x} je aritmetický průměr z naměřených hodnot, s_g je výběrová směrodatná odchylka z naměřených dat.

- b) Odhad ukazatele způsobnosti založený na celkové variabilitě procesu:

$$\hat{C}_g = 0,15\hat{\sigma}_{\text{TOT}}/s_g,$$

$$\hat{C}_{gk} = \min\left(\frac{\bar{x} - (T - 0,045\hat{\sigma}_{\text{TOT}})}{3s_g}, \frac{(T + 0,045\hat{\sigma}_{\text{TOT}}) - \bar{x}}{3s_g}\right)$$

kde $\hat{\sigma}_{\text{TOT}}$ je výběrová směrodatná odchylka celkové variability výrobního procesu získaná např. při vedení regulačních diagramů.

Samozřejmě se nabízí otázka, který ukazatel použít a proč. Závisí zcela na uživateli, jakým způsobem bude způsobnost měření hodnotit, ale správně by měl vycházet z obou přístupů a řídit se dle horšího výsledku.

Způsobnost strojního zařízení (krátkodobá způsobnost)

Tuto formu způsobnosti by měl grantovat výrobce strojního zařízení a měla by se provádět při přejímání strojního zařízení. Jedná se

o posouzení vhodnosti stroje, protože jeho způsobilost by měla být rozhodně lepší nežli požadovaná úroveň způsobilosti výrobního procesu. Vyhodnocení způsobilosti se provede na 50ti po sobě jdoucích vyrobených kusech, které proměří jeden člověk velice dobře obeznámený s měřidlem a způsobem měření. Výsledky se opět zaznamenávají v časové souslednosti nejlépe přímo do regulačního diagramu pro individuální hodnoty a otestuje se tvar rozdělení pravděpodobnosti (nejčastěji normální rozdělení). Odhadne se ukazatel výkonnosti P_p a požadovaná hodnota P_p by měla být v konfidenčním intervalu

$$0,75\hat{P}_p < P_p < 1,26\hat{P}_p,$$

který je nastaven na 50 pozorování a konfidenční úroveň 99 %. Tento přístup vychází z metodiky VDA.

Předběžná způsobilost (odhad dlouhodobé způsobilosti)

Obvykle se provádí před rozjetím sériové výroby. Doporučuje se odběr 25 podskupin po 5ti kusech (nejméně 20 podskupin po 3 kusech). Z dat se vede regulační diagram, ověří se stabilita procesu a tvar rozdělení pravděpodobnosti. Stanoví se konfidenční intervaly pro ukazatele C_p a P_p pomocí získaných bodových odhadů \hat{C}_p a \hat{P}_p na hladině spolehlivosti 99 %:

$$0,82\hat{C}_p < C_p < 1,18\hat{C}_p$$

$$0,82\hat{P}_p < P_p < 1,18\hat{P}_p$$

a současně je požadováno, aby $\hat{C}_p \geq 1,67$, $\hat{P}_p \geq 1,67$. Výpočet konfidenčních intervalů vychází ze 100 stupňů volnosti. Pokud data nemají charakter podskupin a jsou individuální, je nutno postup upravit a dohodnout se s odběratelem na společném postupu.

Dlouhodobé vyšetřování způsobilosti

Proces se sleduje po dobu několika dní, např. po dobu 20ti dní za reálných podmínek sériové výroby. Z procesu se odebírá cca 5 pod-

skupin po 5ti výrobcích denně při stejných kontrolních intervalech. Proces se řídí pomocí regulačních diagramů, stanovují se odhady ukazatelů C_p , C_{pk} , P_p a P_{pk} a konfrontují se s požadovanými hodnotami těchto ukazatelů.

Dohoda mezi odběratelem a dodavatelem

Každé vyšetřování způsobilosti a výkonnosti procesu by mělo být založeno předem na dohodě mezi oběma subjekty. Mělo by být dohodnuto, jak bude organizován sběr dat (velikost podskupiny, délka kontrolního intervalu, specifikace, typ regulačních diagramů). Dále by se mělo dohodnout, jak bude odhadována úroveň variability, které ukazatele budou sledovány a na jaké konfidenční úrovni, jak často se bude provádět vyhodnocování. Tyto dohodnuté aspekty jsou nutné pro předcházení nedorozumění při vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti procesu.

9 Příklad jednostranných specifikačních mezí

Pokud je zadána pouze jedna specifikační mez, tak ukazatelé C_p a P_p ztrácejí smysl. Jakostní znak lze hodnotit pak pomocí C_{pkU} či C_{pkL} , nebo P_{pkU} či P_{pkL} podle toho, která mez je stanovena. Pro jednoduchost uvažujme, že je dána dolní mez LSL. Sledovaný jakostní znak lze popsat normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, σ je směrodatná odchylka inherentní variability. Přejeme si, aby hodnoty jakostního znaku se s malou pravděpodobností α dostaly pod LSL, tedy pravděpodobnost toho, že $X < \text{LSL}$ byla rovna α , X označuje jakostní znak. Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$C_{pkL} \geq \frac{1}{3} u_{1-\alpha},$$

kde $u_{1-\alpha}$ je odpovídající kvantil normálního rozdělení $N(0, 1)$. Tedy např. při požadavku, aby $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$, což odpovídá očekávanému počtu neshodných pod LSL, tedy 50 ppm, pak musí být požadované

C_{pkL} minimálně $\frac{1}{3} u_{1-5 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{3} \cdot 3,89 \doteq 1,297$. Tedy pro praxi bude dostačující, aby $C_{pkL} = 1,30$.

Je nutné si uvědomit, že zadáním hodnoty pro C_{pkL} není stanovena jednoznačně požadovaná úroveň pro σ ani pro parametr polohy μ . Jak bude nastaveno σ a pak od toho odvozeno nastavení μ či naopak závisí na výrobci, protože bud'

$$\sigma = \frac{\mu - LSL}{3C_{pkL}} \quad \text{či} \quad \mu = LSL + 3\sigma C_{pkL}.$$

Analogická situace vzniká při ukazateli P_{pkL} , kde ovšem σ je směrodatná odchylka totální variability.

Nyní ale chceme, aby odhad \hat{C}_{pkL} byl s velkou pravděpodobností $1 - \alpha$ větší nežli požadovaná hodnota C_{pkL} , tedy

$$\hat{C}_{pkL} = \frac{\bar{\bar{x}} - LSL}{3\hat{\sigma}} \geq C_{pkL}.$$

V řeči matematické statistiky to znamená, že požadovaná hodnota C_{pkL} musí být 100 α %-tní kvantil pro rozdělení pravděpodobnosti odhadu \hat{C}_{pkL} . Proto musíme znát tvar hustoty pro odhad \hat{C}_{pkL} . Tento odhad je podílem (za předpokladu normality jakostního znaku) dvou nezávislých náhodných veličin $\frac{\bar{\bar{x}} - LSL}{3}$ a $\hat{\sigma}$, kde pro $\hat{\sigma}$ máme již uvedené ony 3 možnosti:

$$\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}, \quad \hat{\sigma}_S = \frac{\bar{s}}{C_4(n)}, \quad \hat{\sigma}_I = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i^2}.$$

V případě $\hat{\sigma}_R$ či $\hat{\sigma}_S$ se využije aproximace pomocí normálního rozdělení, u $\hat{\sigma}_I$ se použije χ^2 -rozdělení o $k(n-1)$ stupních volnosti.

Obecný vzorec pro hustotu podílu dvou nezávislých náhodných veličin X a Y je

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f_X(xz) f_Y(z) dz, \quad \text{máme} \quad X = \frac{\bar{\bar{x}} - LSL}{3}, \quad Y = \hat{\sigma}_R,$$

zde X má normální rozdělení $N\left(\frac{\mu - LSL}{3}, \frac{\sigma^2}{9kn}\right)$ a Y má přibližně normální rozdělení $N\left(\sigma, \frac{\beta_n^2 \sigma^2}{k\alpha_n^2}\right)$.

Označme pro C_{pkL} $\mu - \text{LSL} = \delta$, pak při zadání hodnoty pro C_{pkL} lze napsat explicitní tvar aproximativní hustoty pro odhad \hat{C}_{pkL} založený na R takto:

Označme

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{k}{2} \left(9nx^2 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \right), \\ b(x) &= k \left(9n C_{pkL} x + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \right), \end{aligned}$$

pak hustota pro \hat{C}_{pkL} (při zadaném C_{pkL}) je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3\alpha_n k \sqrt{n}}{2\pi\beta_n} \exp \left\{ -\frac{k}{2} \left(9nC_{pkL}^2 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{a(x)} + \frac{b(x)\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}(x)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{b^2(x)}{4a(x)} \right\} \left\{ 2\Phi \left(\frac{b(x)}{\sqrt{2a(x)}} \right) - 1 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení $N(0, 1)$. Zadání hodnoty pouze pro ukazatel C_{pkL} nestačí, protože tím není dána jednoznačně směrodatná odchylka σ ani parametr polohy μ , a tím parametr posunutí $\delta = \mu - \text{LSL}$.

I když je znám explicitní tvar hustoty pro C_{pkL} , je komplikovaný a nalezení kvantilů vede k numerickému řešení. Pokud by inherentní variabilita byla odhadována pomocí $\hat{\sigma}_S$, pak se tvar hustoty změní pouze v koeficientech α_n, β_n . Místo nich se objeví koeficienty a_{n-1}, b_{n-1} , které vystupují ve tvaru hustoty pro \hat{C}_p , když směrodatná odchylka σ je odhadována pomocí $\hat{\sigma}_S$.

Je-li zadána hodnota pro C_{pkL} , pak ze vztahu $3C_{pkL} = \frac{\delta}{\sigma}$ je jasné, jak lze parametry $\mu = \delta + \text{LSL}$ a σ volit při zachování požadavku na C_{pkL} . Jde tedy o nastavení procesu a v úvahu mohou přijít i důvody ekonomické.

Tedy pro zajištění požadavku, aby $\hat{C}_{pkL} \geq C_{pkL}^0$ s velkou pravděpodobností $1 - \alpha$ musíme obvykle mít k dispozici spolehlivý odhad pro inherentní variabilitu, tedy buď $\hat{\sigma}_R, \hat{\sigma}_S$ či $\hat{\sigma}_I$. Tuto hodnotu získáme např. z dlouhodobějšího sledování procesu pomocí regulačních diagramů a za splnění stability procesu. Pak splnění výše uvedené nerovnosti je jen otázkou pro nastavení parametru polohy μ .

Dolní hranici statistického pokrývání intervalu určíme pomocí již použité aproximace v případě \hat{C}_{pk} , tedy

$$\hat{C}_{pkL} \geq C_{pkL} \frac{1}{1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2k(n-1)}}} = C_{pkL}^0,$$

což dává požadavek na parametr μ ve tvaru minimální možné odchylky δ_0

$$\delta_0 = \mu - \text{LSL} = 3\hat{\sigma} C_{pkL}^0 \left(1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2k(n-1)}} \right),$$

kde $\hat{\sigma}$ je spolehlivý odhad úrovně inherentní variability. Z tohoto plyne, že parametr polohy μ musí být udržen nad minimální vzdáleností δ_0 napravo od LSL co nejbližší ke středu specifikačního rozmezí.

Zcela obdobně se situace řeší při zadání horní specifikace USL.

Velice často je případ jednostranných specifikací spojen s individuálními daty. Každá podskupina je pak charakterizována pouze jediným měřením. Pak se obvykle pracuje s klouzavým rozpětím obvykle délky 2, takže pak $n = 2$.

10 Hodnocení způsobilosti atributivních znaků

Nechť p je pravděpodobnost výskytu neshodného produktu v dávce. Relativní četnost je pak nejlepším bodovým odhadem této pravděpodobnosti, od její hodnoty se též odvozuje i konfidenční interval pokrývající se zadanou pravděpodobností skutečnou hodnotu p . Vychází se z předpokladu, že proces je zvládnut a řízen např. pomocí regulačního diagramu.

S touto pravděpodobností p lze spojit jednoznačným způsobem hodnotu ukazatele výkonnosti procesu, a to

$$p = 2\Phi(-3P_p) \Leftrightarrow p/2 = \Phi(-3P_p)$$

na základě představy, že výrobek je neshodný s pravděpodobností p , když rozměr na něm padne mimo tolerance, $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$.

Příklad. Dávka má $k = 1365$ kontrolních kusů, $n = 0, 1, 2, \dots$ je počet objevených neshodných kusů. Naopak tedy máme, že

$$\begin{aligned} -3P_p &= \Phi^{-1}(p/2) \\ P_p &= -\frac{1}{3}\Phi^{-1}(p/2) \\ P_p &= -\frac{1}{3}u_{p/2}, \end{aligned}$$

kde $u_{p/2}$ je odpovídající kvantil rozdělení $N(0, 1)$.

Tento předpis slouží tedy k přenesení konfidenčního intervalu pro p na konfidenční interval pro P_p (n je počet nalezených neshodných kusů).

Konfidenční interval pro parametr p binomického rozdělení při k pokusech a n výskytech neshodného kusu má tvar (spolehlivost $1 - 2\alpha$) (pro $\alpha = 0, 025$)

$$\left\langle \frac{n}{n + (k - n + 1) F_{1-\alpha}(r_1, r_2)}; \frac{(n + 1) F_{1-\alpha}(r_3, r_4)}{k - n + (n + 1) F_{1-\alpha}(r_3, r_4)} \right\rangle,$$

$$r_1 = 2(k - n + 1), r_2 = 2n, r_3 = 2(n + 1), r_4 = 2(k - n).$$

Tedy pro $k = 1365$

$$\begin{aligned} \langle 0, 000000; 0, 002699 \rangle & n = 0 \\ \langle 0, 000019; 0, 004075 \rangle & n = 1 \\ \langle 0, 000177; 0, 005283 \rangle & n = 2 \\ \langle 0, 000453; 0, 006409 \rangle & n = 3 \\ \langle 0, 000799; 0, 007486 \rangle & n = 4 \\ \langle 0, 001190; 0, 008527 \rangle & n = 5. \end{aligned}$$

Těmto hodnotám konfidenčních intervalů pro p odpovídají konfidenční intervaly pro ukazatele P_p následovně:

$$n = 0 \quad \langle 1, 00000; \text{není} \rangle$$

$n = 1$	$\langle 0, 95743; 1, 42544 \rangle$
$n = 2$	$\langle 0, 92975; 1, 24992 \rangle$
$n = 3$	$\langle 0, 90870; 1, 16904 \rangle$
$n = 4$	$\langle 0, 89147; 1, 11771 \rangle$
$n = 5$	$\langle 0, 87682; 1, 08042 \rangle$.

Z tohoto plyne, že při kontrole 1365ti kusů a při nenalezení žádného neshodného kusu lze tvrdit, že výkonnost procesu není horší nežli $P_p = 1$. Naopak při nalezení např. 5ti kusů neshodných lze tvrdit, že výkonnost procesu není lepší nežli cca $P_p = 1$.

Aby tedy výkonnost procesu byla srovnatelná s požadavkem např. $P_p \geq 1,33$, bylo by nutné překontrolovat skupinu výrobků o rozsahu cca 46 000 ks a žádný by nesměl být neshodný. Tento postup je samozřejmě v praxi nepoužitelný. Zde opět se dokazuje nevýhodnost hodnotit proces pomocí atributivních znaků, pokud je samozřejmě možnost jakostní znaky též měřit a ne pouze srovnávat.

Konstrukce přejímacího plánu pro neshodné kusy

Máme zajistit způsobilost výroby a navrhnout statistický test při hypotéze, že přijatelný podíl neshodných kusů $p_1 = 0,000064$ ($P_p = 1,33$) proti alternativě $p_2 = 0,0027$ ($P_p = 1$) při $\alpha = 0,05$ a síle testu $1 - \beta = 0,90$. Kolik je zapotřebí odebrat kusů?

Pro zajistění potřebné síly testu zjistíme např. pomocí softwaru Minitab (viz nástroj Power and Sample Size for 1 Proportion) rozsah podskupiny o 914 kusech. Nyní uvažujme, že z této podskupiny zjistíme počet neshodných $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Zjistíme, že pro $n = 0$ či 1 je p -hodnota větší nežli zvolené $\alpha = 0,05$, což znamená, že při nalezení dvou či více neshodných kusů se hypotéza $p_1 = 0,000064$ zamítá ve prospěch alternativy $p_2 = 0,0027$ s pravděpodobností 0,90.

Tak jako byl analyzován problém s neshodnými kusy, lze postupovat i v případě neshod, když na jednom výrobku je možno objevit více vad či defektů. V tomto případě výpočty jsou založeny na Poissonově rozdělení s parametrem λ , který představuje střední hodnotu výskytu neshod. Nejlepším bodovým odhadem parametru

λ je pak zjištěný počet neshod v kontrolované skupině. Konfidenční interval pokrývající s pravděpodobností $1 - 2\alpha$ skutečnou hodnotu parametru λ má tvar

$$\frac{1}{2}\chi_{\alpha}^2(r_1) < \lambda < \frac{1}{2}\chi_{1-\alpha}^2(r_2),$$

kde α je zvolené riziko, $r_1 = 2x_0$, $r_2 = 2(x_0 + 1)$ a x_0 je zjištěný počet neshod.

V případě, když máme k dispozici počty neshod z více kontrol, např. $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}$, kde m je počet kontrolovaných dávek, pak konfidenční interval pro parametr λ má tvar:

$$\frac{1}{2m}\chi_{\alpha}^2(r_3) < \lambda < \frac{1}{2m}\chi_{1-\alpha}^2(r_4),$$

kde $r_3 = 2m\bar{x}_0$ a $r_4 = 2(m\bar{x}_0 + 1)$, přičemž $\bar{x}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i}$.

Budeme interpretovat λ jako $n \cdot p$, kde p je pravděpodobnost výskytu neshody a n je maximálně možný počet neshod na jednotku. V konkrétním případě potenciační počet neshod bude fixován a měnit budeme parametr λ , a tím budeme měnit i odpovídající konfidenční meze a pravděpodobnost výskytu neshody. Toto se přímo promítne do konfidenčních mezí pro parametr ukazatele výkonnosti procesu podle vzorce

$$p = 2\Phi(-3P_p).$$

Pro ilustraci uvažujme následující příklad. Kontrolujeme 40 jednotek, které obsahují stejný počet součástí pro výrobu televizorů a na nich bylo zjištěno celkem 740 závad. To znamená, že odhad očekávaného počtu neshod na jednu jednotku je $740/40 = 18,5$. Z tohoto bodového odhadu odvodíme konfidenční meze na hladině konfidence $\alpha = 95\%$, tedy

$$17,19 < \lambda < 19,88$$

s pravděpodobností 0,95.

Nyní si představme, že celkový možný počet neshod při kontrole 40 jednotek je 4000, tedy $n = 4000$ a při $\lambda = np$ máme pak odhad pro pravděpodobnost výskytu jedné neshody

$$\hat{p} = \frac{\hat{\lambda}}{n} = \frac{18,5}{4000} = 0,0046.$$

Při použití konfidenčních mezí získáme, že pravděpodobnost p leží s úrovní konfidence 95 % v intervalu

$$0,0043 < p < 0,050.$$

Odtud již snadno pomocí vztahu $P_p = -\frac{1}{3}\Phi^{-1}\left(\frac{\lambda}{2n}\right)$ získáme

$$-\frac{1}{3}\Phi^{-1}(0,0021) > P_p > -\frac{1}{3}\Phi^{-1}(0,0025)$$

$$0,9358 < P_p < 0,9558.$$

Protože výkonnost procesu není uspokojivá, neboť ukazatel P_p je s pravděpodobností 97,5 % pouze lepší nežli 0,9358 a my bychom chtěli, aby P_p byl alespoň 1, je nutné výrobu zlepšit a pak maximální počet případných neshod by musel být

$$P_p > 1 \iff -\frac{1}{3}\Phi^{-1}(x) = 1,$$

tedy $x = \Phi(-3) \Rightarrow x = -0,00135$. Pak pravděpodobnost výskytu neshody nesmí být horší nežli 0,0027. Tomu odpovídá při celkovém počtu možných neshod 4000 očekávaný počet neshod na jednotku

$$\lambda = 4000 \cdot 0,0027 = 10,8.$$

Z toho plyne, že maximální přijatelný počet neshod zjištěných při kontrole 40 jednotek by neměl převýšit počet 432 neshod, aby bylo možno říci, že proces pracuje s výkonností nejméně $P_p = 1$.

11 Testování stability procesu

Předpokladem uplatnění Shewhartových regulačních diagramů pro monitorování a hodnocení způsobilosti je statisticky zvládnutý proces a normální rozdělení pravděpodobnosti sledovaného znaku jakosti. To znamená, že studovaná náhodná veličina (znak jakosti) se

v čase nemění. Nemění se tvar jejího rozdělení ani jeho parametry – střední hodnota (nastavení procesu) a rozptyl (variabilita procesu) Pokud tomu tak není, riziko planého poplachu, tj. riziko, že se výběrová charakteristika, použitá pro sledování procesu, náhodně vyskytne mimo jednu z regulačních mezí, může výrazně převýšit hodnotu 0,00135. Při dodržení předpokladu statisticky zvládnutého procesu se tak tedy může stát v průměru jednou ze 740 kontrolních podskupin. Pokud proces není schopen pracovat ve statisticky zvládnutém stavu, tj. mění se v čase např. parametr polohy procesu, potom se výběrové body musí vyskytnout častěji mimo Shewhartovy regulační meze. Obsluha potom bude zbytečně hledat příčinu, kterou by měla odstranit. Cyklus identifikovat zvláštní příčinu variability, odstranit ji a přijmout takové opatření, aby se nemohla opakovat, bude neúspěšný, zbytečný.

Ověření, že proces je statisticky zvládnut a tedy stabilní, předpokládá ověřit hypotézu, že všechny vybrané podskupiny pocházejí ze základních normálně rozdělených souborů se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem. Pokud tato hypotéza neplatí, nelze uvažovat Shewhartovy regulační diagramy a je třeba použít modifikované, rozšířené regulační meze.

Ověření normality je zabudováno prakticky do každého softwaru podporujícího SPC. Snadno se dá připravit a provést např. Kolmogorovův test normality v Excelu. Dále se budeme zabývat dvěma testy rovnosti rozptylů a testem rovnosti středních hodnot.

Test rovnosti rozptylů

A) Bartlettův test

Uvažujeme k podskupin rozsahu n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) jednotek. Chceme ověřit, že všechny podskupiny, ve kterých vypočítáme rozptyly s_i^2 , pocházejí ze základních souborů, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$. Předpokládá se normalita dat.

Budeme testovat hypotézu

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2.$$

Stanovíme společný empirický rozptyl s^2 jako odhad σ^2 :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i s_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i},$$

kde $f_i = n_i - 1$ a s_i^2 ($i=1,2,\dots,k$) jsou výběrové rozptyly podskupin. Položíme $f = \sum_{i=1}^k f_i$.

M. S. Bartlett ukázal, že

$$-\frac{1}{c} \sum_{i=1}^k f_i \ln \frac{s_i^2}{s^2},$$

kde

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right)$$

má pro ($f_i > 2$) přibližně χ^2 -rozložení s $k-1$ stupni volnosti. Výše uvedený výraz lze pro výpočet upravit následujícím způsobem

$$\chi^2 \cong \frac{2,3026}{c} \left(f \log s^2 - \sum_{i=1}^k f_i \log s_i^2 \right),$$

označíme $SSD_i = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$ a položíme

$$\log s_i^2 = \log SSD_i - \log f_i.$$

Uvažujme speciální případ, kdy $f_1 = f_2 = \dots = f_k = f_0$, položíme $f = \sum_i f_i = k f_0$ a dostaneme

$$\chi^2 \cong \frac{2,3026}{c} k f_0 \left(\log s^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log s_i^2 \right),$$

kde

$$c = 1 + \frac{k+1}{3k f_0}.$$

Jestliže do uvedeného výrazu dosadíme k hodnot napozorovaných rozptylů podskupin a odpovídající hodnotu s^2 , dostaneme hodnotu statistiky χ^2 , kterou porovnáme s kvantilem $\chi_{1-\alpha}^2$ pro

$k = 1$ stupňů volnosti. α je zvolená hladina významnosti. Pokud vypočítaná statistika χ^2 překročí kvantil $\chi_{0,95}^2$, zamítneme testovanou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Uvedený test můžeme doplnit podrobným vyšetřením k hodnot rozptylů podskupin s_i^2 . Pokud by rozptyl σ^2 byl znám, lze k vypočítaným k hodnotám

$$\chi_i^2 = \frac{f_i s_i^2}{\sigma^2} = \frac{\text{SSD}_i}{\sigma^2}$$

stanovit odpovídající hodnotu distribuční funkce χ^2 -rozdělení. Je-li teoretická hodnota σ^2 není známa, nahradíme ji hodnotou s^2 , takže hodnoty χ_i^2 nahradíme nepravými hodnotami

$$\chi_i^2 = \frac{f_i s_i^2}{s^2} = \frac{\text{SSD}_i}{s^2}.$$

Pokud $f = \sum f_i$ je velké ve srovnání s f_1, f_2, \dots, f_k , je rozdělení χ_i^2 přibližně rovno rozdělení χ^2 .

Pro každou hodnotu χ_i^2 můžeme stanovit p -hodnotu distribuční funkce χ^2 -rozdělení, tj. pravděpodobnost, s jakou se může vyskytnout uvažovaná statistika větší nebo rovna χ_i^2 .

B) Cochranův test

Uvažujeme k podskupin stejného rozsahu n jednotek. Chceme ověřit, že všechny podskupiny, ve kterých jsou vypočítané rozptyly s_i^2 ($i = 1, 2, \dots, k$), pocházejí ze základních souborů, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$.

Označíme $s_{(k)}^2 = \max\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2\}$.

Uvažujeme statistiku

$$G = \frac{s_{(k)}^2}{\sum_{j=1}^k s_j^2},$$

kterou můžeme použít jako testovou statistiku pro test hypotézy

$$H_0 : \sigma_j^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

proti alternativní hypotéze

$$H_1 : \sigma_j^2 \neq \sigma_h^2 \quad (j, h = 1, 2, \dots, k; j \neq h),$$

nebo k posouzení, zda $s_{(k)}^2$ je odlehlé pozorování.

Její $(1 - \alpha)$ -kvantil má tvar

$$G_{1-\alpha}(k, \nu) = \frac{F_{1-\alpha}(\nu, (k-1)\nu)}{(k-1) + F_{1-\alpha}(\nu, (k-1)\nu)},$$

kde $\nu = n-1$, k je počet podskupin, α je zvolená hladina významnosti a $F_p(\nu_1, \nu_2)$ je p -kvantil F -rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti.

Hypotéza H_0 se zamítá na hladině významnosti α nebo $s_{(k)}^2$ se považuje za odlehlé, jestliže

$$G \geq G_{1-\alpha}(k, \nu).$$

Když platí hypotéza $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$, potom pro každé k , ν a α platí

$$\alpha(1 - \alpha/2) < P\{G \geq G_{1-\alpha}(k, \nu)\} \leq \alpha.$$

Test rovnosti k středních hodnot

Uvažujeme k podskupin rozsahu $n_i \geq 2$ jednotek ($i = 1, 2, \dots, k$). Chceme ověřit, že všech k podskupin pochází ze stejného, normálně rozděleného, základního souboru $N(\mu, \sigma^2)$.

Jestliže platí hypotéza

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu,$$

potom

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}, \quad f = k-1,$$

je jeden z odhadů rozptylu σ^2 , založený na variabilitě mezi podskupinami, na rozdíl od odhadu s_1^2 , založeného na variabilitě uvnitř podskupin:

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^k n_i - k}, \quad f = \sum_{i=1}^k n_i - k.$$

Rozptyl s_2^2 odhaduje variabilitu základního souboru z variability výběrových průměrů okolo celkového průměru. Je založen na vztahu $\sigma_{\bar{x}_i}^2 = \sigma^2 / n_i$, s_i^2 vychází z variability individuálních hodnot okolo odpovídajících výběrových průměrů podskupin.

Pokud by všechna pozorování (všechny podskupiny) pocházela ze stejného základního souboru, potom by měly být oba výběrové rozptyly přibližně stejné.

Rozptyl s_1^2 je nezávislý na $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, s_2^2 má rozdělení se střední hodnotou σ^2 jen když $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$. Proto můžeme hypotézu o rovnosti středních hodnot testovat pomocí testové statistiky

$$F \left(k - 1; \sum_{i=1}^k n_i - k \right) = \frac{s_2^2}{s_1^2},$$

která má F -rozdělení o $\nu_1 = k - 1$ a $\nu_2 = \sum_{i=1}^k n_i - k$ vstupních volnosti, protože, pokud platí hypotéza o rovnosti středních hodnot, jsou veličiny s_1^2 , s_2^2 vzájemně nezávislé.

Jestliže hypotéza $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ neplatí, potom střední hodnota $E\{s_2^2\}$ je rovna σ^2 plus určitá hodnota závisící na rozdílu středních hodnot souborů. Dá se ukázat, že

$$E\{s_2^2\} = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\mu_i - \bar{\mu})^2,$$

kde $\bar{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i$.

Pouze, když platí hypotéza $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, má rozptyl s_2^2 rozdělení χ^2 s $k - 1$ stupni volnosti a se střední hodnotou σ^2 . Pokud hypotéza neplatí, je $E\{s_2^2\}$ větší než σ^2 , a proto se hypotéza zamítá, když s_2^2 je statisticky významně větší než s_1^2 .

Výpočty je možno sestavit do tabulky:

Tabulka 1. Analýza rozptylu pro k podskupin.

Variabilita	SSD	ν	s^2	$E\{s^2\}$	Testová statistika
Mezi podskupinami	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$	$\nu_1 = k - 1$	s_2^2	$\sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\mu_i - \bar{\mu})^2$	$F = s_2^2 / s_1^2$
Uvnitř podskupin	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$\nu_2 = \sum_{i=1}^k n_i - k$	s_1^2	σ^2	
Celková	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$	$\sum_{i=1}^k n_i - 1$			

Pokud testová statistika $F(\nu_1, \nu_2)$ není významná, tj. $F(\nu_1, \nu_2) < F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$, kde $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ je $(1-\alpha)$ -kvantil F -rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti, můžeme vypočítat “společný” odhad celkového rozptylu σ^2 na základě výrazu

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2}{\sum_{i=1}^k n_i - 1}, \quad \nu = \sum_{i=1}^k n_i - 1.$$

Po dosazení s_0 do výrazu

$$t = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{s_0 / \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i}}, \quad \nu = \sum_{i=1}^k n_i - 1$$

můžeme stanovit konfidenční interval pro μ .

Můžeme provést detailní analýzu odchylky každé jednotlivé střední hodnoty od celkové střední hodnoty. Můžeme rozepsat podíl rozptylů

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}}{s_1 / \sqrt{n_i}} \right)^2.$$

Vypočítáme k sčítanců tvaru

$$\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}}{s_1 / \sqrt{n_i}} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k$$

a analyzujeme variabilitu v jejich znaménkách a v jejich velikosti.

Pokud test hypotézy vyjde pozitivně, nemáme důvod zamítnout testovanou hypotézu, potom veličiny

$$u_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}}{\sigma / \sqrt{n_i}} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k$$

jsou nezávislé a mají rozdělení $N(0, 1)$.

Pokud test hypotézy $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ je zamítnut, můžeme stanovit konfidenční meze pro jednotlivé střední hodnoty pomocí t -rozdělení, jelikož statistika

$$t = \frac{\bar{x}_i - \mu_i}{s_1 / \sqrt{n_i}}$$

má t -rozdělení o $\nu = n_i - 1$ stupních volnosti.

Podobně, chceme-li porovnat dvě podskupiny, použijeme statistiku

$$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j - (\mu_i - \mu_j)}{s_1 \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}},$$

která má t -rozdělení o $\nu = n_i + n_j - 2$ stupních volnosti.

Pro každou vypočítanou hodnotu t můžeme stanovit p -hodnotu, doplnění hodnoty distribuční funkce t -rozdělení do 1, tj. pravděpodobnost, s jakou se může vyskytnout uvažovaná statistika větší nebo rovna $t(\nu)$.

Statistická přejímka měření a výkonnost procesu

Při přejímce měření na základě výběru rozsahu n z dávky obsahující N kusů rozhodujeme o tom, zdali se dávka přijme či zamítne. Spočítají se z dat x_1, x_2, \dots, x_n statistiky \bar{x} a s a následně veličiny

$$Q_L = \frac{\bar{x} - \text{LSL}}{s}, \quad Q_U = \frac{\text{USL} - \bar{x}}{s}.$$

Podle hodnoty zvolené úrovně AQL se pak volí konstanta k (viz norma ČSN ISO 3951-3) a dávka se přijímá, když

$$\min(Q_L, Q_U) > k.$$

Všimněme si, že $\frac{1}{3} \min(Q_L, Q_U) = \hat{P}_{pk}$. Tedy dávka se přijímá, když

$$3\hat{P}_{pk} > k,$$

tedy

$$\hat{P}_{pk} > \frac{k}{3}.$$

Pro odhad ukazatele výkonnosti \hat{P}_{pk} máme pokryvný interval ve tvaru

$$P_{pk} q(n-1, \alpha) < \hat{P}_{pk} < P_{pk} q(n-1, 1-\alpha).$$

kde hranice $q(n-1, \alpha)$, $q(n-1, 1-\alpha)$ jsou odvozeny od hranic konfidenčního intervalu pro P_{pk} , tj.

$$q(n-1, \alpha) = \frac{1}{1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2(n-1)}}},$$

$$q(n-1, 1-\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{2(n-1)}}}.$$

Tento interval pokrývá hodnoty \hat{P}_{pk} s pravděpodobností $1 - 2\alpha$. Tedy, aby se dávka nezamítla, musí být

$$\frac{k}{3} \leq P_{pk} q(n-1, \alpha),$$

tedy

$$P_{pk} \geq \frac{k}{3q(n-1, \alpha)}.$$

Když bude výkonnost procesu menší, pak je šance dávku zamítnout, neboť pak $\hat{P}_{pk} \leq \frac{k}{3}$, tedy

$$\frac{k}{3} \geq P_{pk} q(n-1, 1-\alpha),$$

tedy

$$P_{pk} \leq \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{q(n-1, 1-\alpha)}.$$

Bude-li tedy P_{pk} menší nežli tato hranice, pak s vysokou pravděpodobností dávku zamítneme.

Příklad. Máme dávku 5 000 ks, při kontrolní úrovni II podle pásma L máme 75 ks vybrat, tedy $n = 75$ a spočítáme Q_U, Q_L a porovnáme s $k = 2,66$ pro $AQL = 1,1\%$ neshodných kusů v dávce. Tedy porovnáme \hat{P}_{pk} s hodnotou $2,66/3 \doteq 0,886$.

Při $\alpha = 0,025$ máme

$$\begin{aligned} q(74, 0,025) &= 0,862 \\ q(74, 0,975) &= 1,191. \end{aligned}$$

Pro přijetí dávky musí být

$$P_{pk} \geq 0,886 \cdot \frac{1}{0,862} \doteq 1.$$

Pro zamítnutí dávky u obou Q_U i Q_L pak stačí

$$P_{pk} \leq 0,886 \cdot \frac{1}{1,191} \doteq 0,7440.$$

Rovněž lze využít odhady výběrové směrodatné odchyly (MSSD) (při s -plánu) či směrodatné odchyly (při σ -plánu) (MPSD) pro odhadování minimální hodnoty ukazatele P_p , která by dávala šanci, že dávka bude přijata. Při nižší hodnotě P_p se dávka zamítá. Tedy např. u s -plánu výše uvažovaném je hodnota maximální hodnoty pro s rovna ($AQL = 0,11\%$) $0,168 \cdot (USL - LSL)$, tedy

$$s \leq 0,168 \cdot (USL - LSL).$$

Protože

$$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6s},$$

čili

$$s = \frac{USL - LSL}{6\hat{P}_p} \leq 0,168 \cdot (USL - LSL),$$

z toho plyne, že \hat{P}_p musí být větší nežli

$$\frac{1}{6 \cdot 0,168} = \frac{1}{1,008} \doteq 1.$$

Pokud tedy $\hat{P}_p < 1$, pak dávka se tímto přijímacím plánem zamítne.

Obdobná situace je u σ -plánů a u hodnoty ukazatele P_p .

Dodatek — řešené příklady

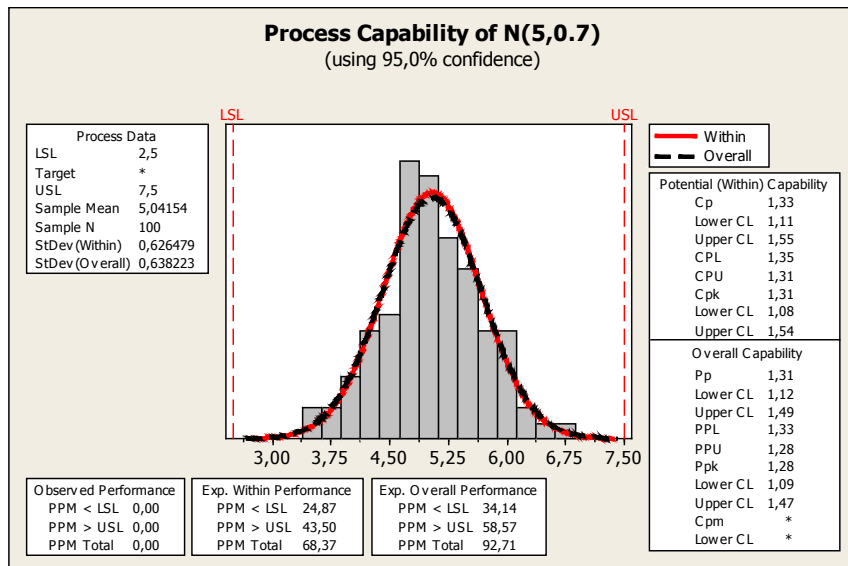
Příklad 1.

Jedná se o celkem 100 hodnot měření znaku jakosti, které je organizované v 25 podskupinách po 4 vzorcích. Data jsou normálně rozdělena, $USL = 7,5$, $LSL = 2,5$. Z obrázku, který nám vrací Minitab, je vidět, že prakticky není rozdíl mezi bodovými odhady ukazatelů C_p a P_p , protože $\hat{C}_p = 1,33$ a $\hat{P}_p = 1,31$. To znamená, že variabilita uvnitř podskupin a celková variabilita se neliší, úroveň variability mezi podskupinami je zanedbatelná. Protože $\hat{C}_{pk} \doteq \hat{C}_p$, proces je velice dobře centrován a lze tedy tvrdit, že je stochasticky zvládnut a lze tedy zodpovědně vyhodnotit jeho způsobilost a výkonnost, které se v tomto případě neliší. Lze potvrdit, že s pravděpodobností 0,975 hodnota ukazatele C_p není horší nežli 1,11 a není lepší nežli hodnota 1,55. Co se týče hodnoty ukazatele C_{pk} , tato se s pravděpodobností 0,95 pohybuje mezi hodnotami 1,08 až 1,54.

Současně nám dává obrázek i odpověď na odhad počtu neshodných kusů nad či pod tolerančním rozmezím. Lze tedy očekávat, že nad USL bude kolem 58–59 neshodných výrobků, pod dolní hranici LSL asi 34 kusů samozřejmě z miliónu výrobků. Tato informace bývá pro některé zákazníky daleko určující a zajímavější nežli vlastní hodnoty odhadů ukazatelů C_p či P_p .

Příklad 2.

Zde máme k dispozici celkem 125 dat, která jsou ve 25 podskupinách po 5ti pozorováních. Data nepocházejí z jedné základní populace, protože každá podskupina má jinou střední hodnotu, které jsou náhodně rozděleny. Tuto situaci je možno si v praxi vysvětlit takovou zjištělou příčinou, jakou je např. vliv vstupního materiálu, který nelze z procesu odstranit. Celkově ale proces je pod kontrolou, neboť projev vlivu vstupního materiálu je stabilní. Jako celek lze data popsat jako normálně rozdělená s $USL = 7,5$ a $LSL = 2,5$. Striktně vzato, správně by proces neměl být považován za zvládnutý,

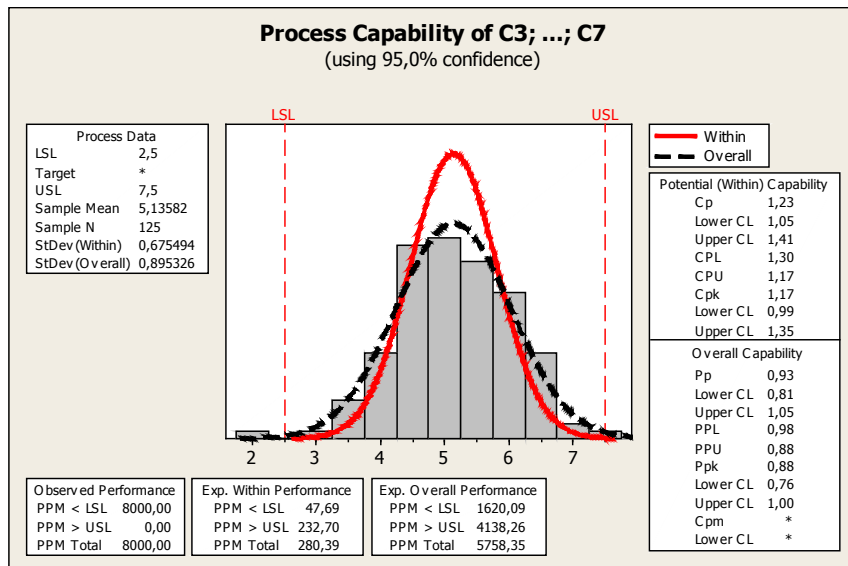


Obr. 13. Stochasticky zvládnutý proces.

protože analýza rozptylu (ANOVA) třeba odhalí, že podskupiny nemají stejnou střední hodnotu. Takový proces potom není možno regulovat či monitorovat pomocí klasických regulačních diagramů, které počítají regulační meze pro aritmetické průměry na základě odhadu směrodatné odchylky pro variabilitu pouze uvnitř podskupin (StDev(Within)) a nerespektují přítomnost variability i mezi podskupinami, kterou sem vnáší právě náhodné chování středních hodnot v podskupinách.

Tento fakt je ihned vidět i na obrázku, kde odhad směrodatné odchylky variability uvnitř podskupin je pouze 0,675494, kdežto celková směrodatná odchylka má odhad roven 0,895326. Z toho vyplývá i rozdíl mezi odhady ukazatelů výkonnosti a způsobilosti, kde $\hat{C}_p = 1,23$ a $\hat{P}_p = 0,93$. Pokud data lze považovat jako celek za normálně rozdělená, a to lze zde udělat, pak můžeme hodnotit výkonnost procesu pomocí P_p a P_{pk} . Hodnotit způsobilost procesu zde prakticky nemá smysl právě pro nahodilost v chování středních hodnot podskupin, která je statisticky významná (viz Obr. 14).

Výkonnost procesu zde s pravděpodobností 0,975 není horší nežli 0,81, proces není ideálně centrován v tom smyslu, že více



Obř. 14. Podskupiny mají řůznř střednř hodnoty.

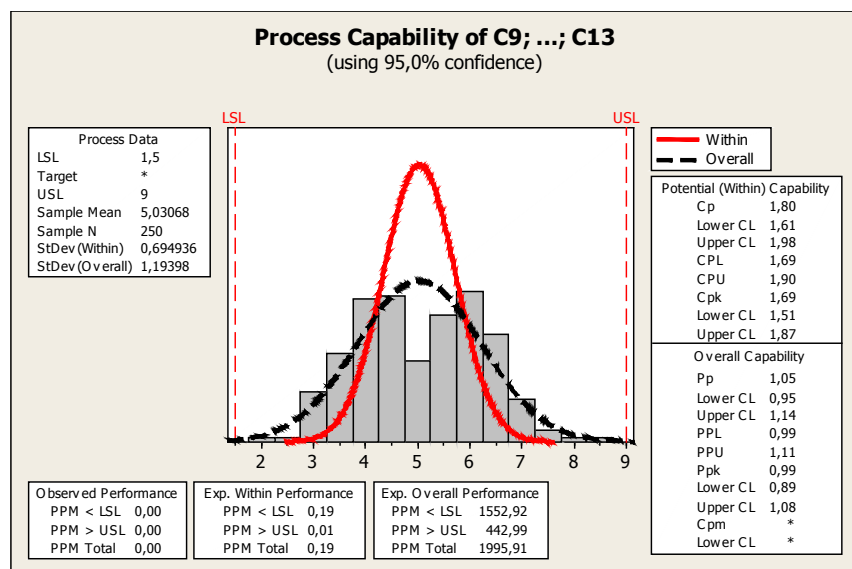
střednř hodnot podskupiny je směrem k USL (vidno z rozdřlu mezi PPL a PPU). Lze očkřvat, ře nad USL bude kolem 4100 ppm a pod LCL 1600 ppm, očkř potvrzuje posunutř procesů vřči středu tolerančního rozmezř.

Poznřmka: Značení $PPL = \hat{P}_{pkL}$, $PPU = \hat{P}_{pkU}$ je pouřito i v dalřich přřkladech.

Přřklad 3.

V tomto přřpadu data jsou přvodnř ze dvou normálních rozdřlenř, jak napovřdř i histogram, kterř je dvouvrcholovř. Celkovř data nelze vysvřtřit normálním rozdřlenřm, a proto je zavřdřjřcř hodnotit zpřsobilost procesu břřnř pomocř ukazatelů C_p ři C_{pk} , dokonce i ukazatel vřkonnosti P_p ři P_{pk} zde ztrřcř smysl. I kdřř nřm Minitab vrřtř odhady těchto ukazatelů, nřnř sprřvnř na nich stavřt informaci o stavu procesu, neboť nejsou splnřny předpoklady o normalitě dat. Ani jakřkoliv transformace dat nepomůře přřvř kvřli

dvouvrchovému rozdělení dat (viz Obr. 15).



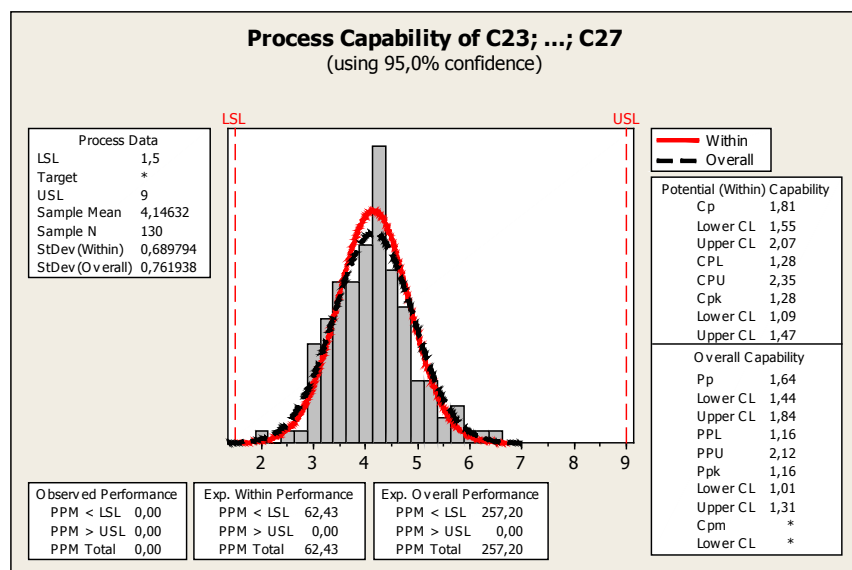
Obr. 15. Data pocházejí ze dvou zdrojů.

Jak tedy hodnotit výkonnost procesu v takovém případě? Pokud víme, čím je způsobeno rozdělení dat do více podmnožin (tzv. stratifikace), zde do dvou, je situace mnohem jednodušší, než když nevíme data podle příznaků zpětně stratifikovat. Příznakem může být různé nastavení stroje (různý parametr polohy) či výrobky z jiné dávky apod. Obvykle lze očekávat, že data v rámci takto definovaných podmnožin budou normálně rozdělena a lze tak hodnotit způsobilost a výkonnost každé takové podmnožiny zvlášť a jako celkovou výkonnost uvažovat minimální hodnotu z odhadů PPU a minimální hodnotu z odhadů PPL. Celková výkonnost procesu pak bude minimum z takto získaných dvou odhadů. Zcela analogicky by bylo možno postupovat při větším počtu stratifikovaných podmnožin.

Z níže uvedených obrázků je vidět, že data lze rozdělit do dvou podmnožin. V rámci první podmnožiny máme, že odhad PPL = 1,16 a odhad PPU = 2,12 a s pravděpodobností 0,95 se skutečná výkonnost procesu pohybuje mezi 1,01 a 1,31.

U druhé podmnožiny dat je odhad PPL = 1,98 a odhad PPU =

1,33. Konfidenční interval pro skutečnou hodnotu ukazatele P_{pk} je $\langle 1,15; 1,50 \rangle$.



Obr. 15a. Vyhodnocení dat z 1. zdroje.

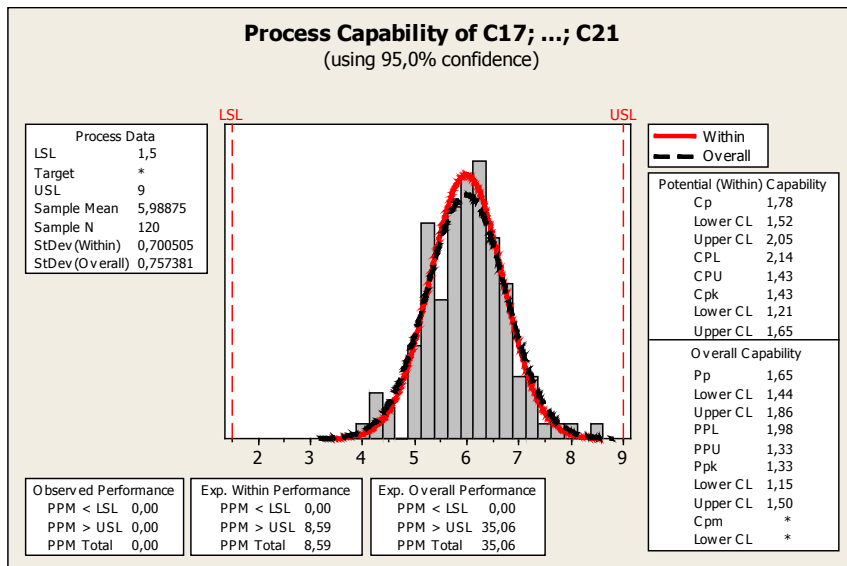
Když tyto informace dáme dohromady, lze tvrdit, že při celkovém hodnocení výkonnosti procesu bude odhad $PPL = 1,16$, odhad $PPU = 1,33$ a konfidenční interval pro P_{pk} lze brát jako sloučení obou konfidenčních intervalů pro jednotlivé podmnožiny dat, tedy s pravděpodobností alespoň 0,95 bude

$$1,01 < P_{pk} < 1,50.$$

Co se týče počtu neshodných kusů při tomto stavu výrobního procesu, odhady jsou následující:

$$\begin{aligned} 257 \text{ ppm} &< \text{LSL} \\ 35 \text{ ppm} &> \text{USL}. \end{aligned}$$

Jestliže neumíme zpětně data stratifikovat, pak je situace těžší a musíme spíše experimentálně odhadnout z průběhu měření, kde jednotlivé podmnožiny hledat a jak vznikaly. Zde může pomoci informace získaná při sběru dat (např. operátor, směna, dávka, přerušení výroby, vliv seřizovače apod.).



Obr. 15b. Vyhodnocení dat z 2. zdroje.

Příklad 4.

V tomto příkladu se projevuje vliv trendu na průběh dat v čase. Tento jev se často objevuje z vlivu opotřebování nástroje při zpracování výrobku. Tento jev pak úzce souvisí s okamžiky výměny nástroje a proces pak má téměř periodický průběh (viz Obr. 16).

Z obrázku je vidět, že celkově lze data považovat za normálně rozdělená, i když každá podskupina má vlivem trendu jinou střední hodnotu. Toto je především vidět na rozdílu mezi odhadem inherentní variability pomocí R , $\hat{\sigma}_R = 0,702253$ a odhadem celkové směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_{TOT} = 0,783869$. Proto se významně liší i odhady \hat{C}_p a \hat{P}_p . Hodnotit způsobilost pomocí C_p ztrácí smysl, protože střední hodnota není konstantní, má cenu uvažovat pouze výkonnost procesu. To lze, neboť celkově lze data považovat za normálně rozdělená. Pak tedy máme, že s pravděpodobností 0,95 je

$$1,26 < P_p < 1,50$$

$$1,17 < P_{pk} < 1,42.$$

(Zde LSL = 2,5; USL = 9,0.)

Může se samozřejmě stát, že vliv trendu bude tak významný, že z celkového pohledu nebude možno považovat data za normálně rozdělená, ale dostaneme de facto spojitou směs normálních rozdělení. Jak pak hodnotit výkonnost procesu? Nabízí se několik možností.

- a) Pokud je relativně dost dat k dispozici, lze uvažovat několik podskupin na začátku trendu a na konci trendu (aby v každé části bylo k dispozici minimálně 30–40 dat), data otestovat v každé části na normalitu a pak provést hodnocení výkonnosti procesu v každé části a celkově uvažovat horší případ.
- b) Vysvětlit celkově data nějakým vhodným typem rozdělení pravděpodobnosti, odhadnout příslušné kvantily pro $\alpha = 0,00135$ a $\alpha = 0,99865$, a dále použít vzorec pro P_p v případě nenormálního rozdělení

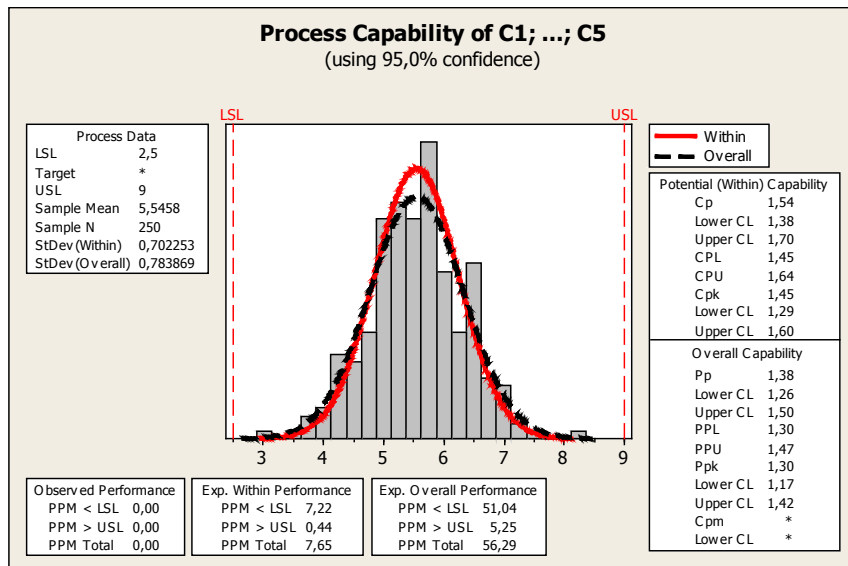
$$P_p = \frac{USL - LSL}{q(0,99865) - q(0,00135)},$$

kde příslušné kvantily $q(0,99865)$ a $q(0,00135)$ se nahradí jejich odhady. Tento přístup je ale velice citlivý na počet dat a kvalitu odhadů parametrů s nalezením typu rozdělení pravděpodobnosti.

- c) Využít Box–Coxovy či Johnsonovy transformace dat na data normálně rozdělená. Tento postup např. velice dobře umožňuje Minitab. Problémem pak může ale být, že software vhodnou transformaci nenajde či nelze použít, např. protože specifikační meze leží mimo definiční obor uvažované transformace.

Příklad 5.

Je k dispozici 200 údajů ve 40 podskupinách po pěti, data evidentně nevyhovují normálnímu rozdělení. Přirozenou mezí je nula, horní specifikace USL byla stanovena na hodnotu 5. Data např. mohou pocházet z měření ovality, velikosti síly nutné na roztržení spoje, měření rovinnosti apod.



Obr. 16. Data pod vlivem mírného trendu.

Byl učiněn pokus data vysvětlit logaritmicke-normálním rozdělením, které testem dobré shody prošlo. Pomocí softwaru Minitab byly metodou maximální věrohodnosti odhadnuty parametry log-normálního rozdělení a tyto dosazeny do vzorce pro hustotu tohoto rozdělení. Opět Minitab vrátí příslušné odhady kvantilů $q(0,00135)$ a $q(0,99865)$. Dospěli jsme k hodnotám

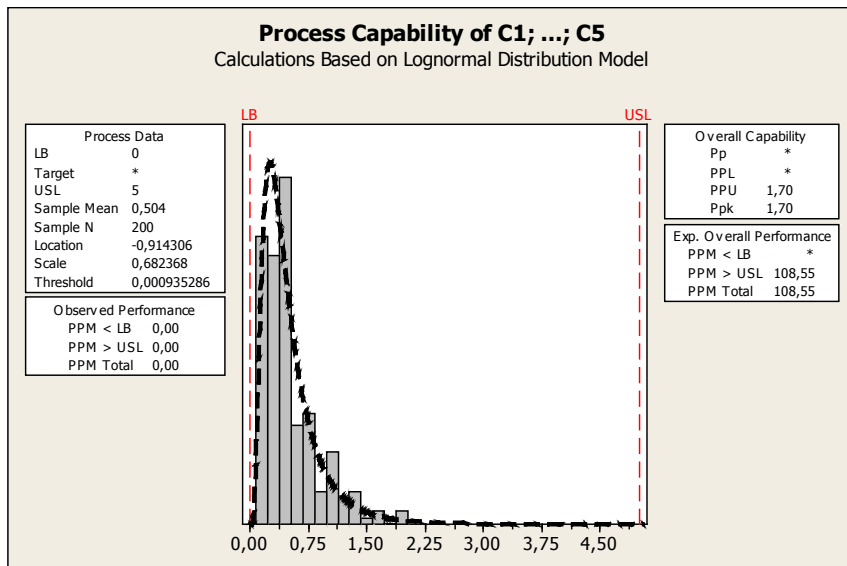
$$\begin{aligned}\hat{q}(0,00135) &= 0,05175 \\ \hat{q}(0,99865) &= 3,10432 \\ \hat{q}(0,5) &= 0,4.\end{aligned}$$

Pak odhad ukazatele P_{pk} má smysl pouze vůči horní mezi $USL = 5$, tedy

$$PPU = \frac{USL - \hat{q}(0,5)}{\hat{q}(0,99865) \cdot \hat{q}(0,5)} = 1,70.$$

Bohužel v tomto případě je velice komplikované pořídit konfidenční meze pro P_{pk} , proto software Minitab toto nenabízí a vrací pouze bodový odhad ukazatele P_{pk} .

Kdyby nenormalita dat nebyla respektována a odhad ukazatele C_p resp. P_p se provedl formálně, výsledek bude silně nadsazen,



Obr. 17. Aplikace modelu log-normálního rozdělení.

$$\hat{P}_p > 4,0.$$

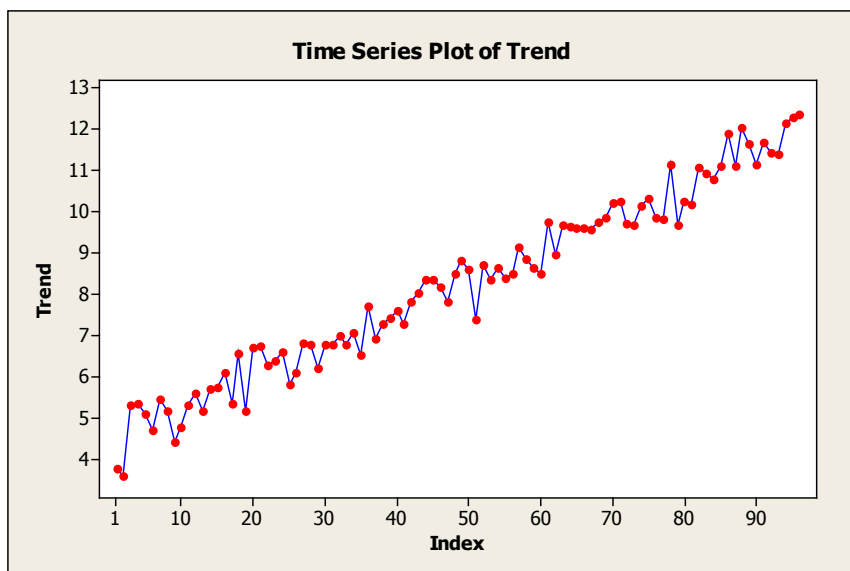
Příklad 6

V tomto příkladu jsou k dispozici data (celkem 96) organizovaná po 4 v podskupině s evidentním trendem, jehož vliv se projevuje v tom, že celkově data nelze popsat normálním rozdělením. Jedná se o směs normálních rozdělení, která mají střední hodnotu pod vlivem určité příčiny vyvolávající trend, ale se stálou úrovní inherentní variability. Výsledně lze data popsat jako směs normálních rozdělení, ostatní pokusy s log-normálním, Weibullovým, gama-rozdělením apod. selhávají.

Jestliže budeme ignorovat fakt o nenormalitě, ale přesto bychom vyhodnocovali způsobilost procesu jakoby data byla normálně rozdělena, dostaneme výsledek, který rozhodně neodpovídá realitě. Odhad ukazatele C_p vychází z $\hat{C}_p = 3,63$, kdežto odhad ukazatele P_p , který zde také nemá smysl, je-li založen na odhadu celkové směrodatné odchylky, má hodnotu $\hat{P}_p = 0,75$. Na druhou stranu je

nutno říci, že odhad \hat{P}_p je daleko blíže realitě, nežli odhad \hat{C}_p .

Když použijeme nástroj transformace dat, pak situace opět nebude uspokojivě řešena, protože sice najdeme vhodnou Johnsonovu transformaci, ale lze počítat pouze výkonnost vůči jedné specifikaci, protože hodnota druhé specifikační meze je mimo definiční obor nalezené transformace. Johnsonova transformace se snaží převést data na data s rozdělením $N(0, 1)$. Zde tedy (viz obrázek) máme pouze jednostranný odhad $\hat{P}_{pkU} = 0,97$. Vzhledem k symetričnosti rozdělení dat by bylo možné jako aproximaci toto uvažovat pro odhad P_{pk} i P_p . Původní specifikační meze pro znak jakosti jsou $LSL = 3$, $USL = 13$.



Obr. 18. Data pod vlivem silného trendu.

Box–Coxova transformace nabídne nejlepší hodnotu jejího exponentu rovnou 1, což znamená data ponechat původní. Je fakt, že některé testy dobré shody (např. Kolmogorov–Smirnov) normalitu na 5 %-tní hladině významnosti nezamítnou. Pak získáme odhad výkonnosti procesu na úrovni $\hat{P}_p = 0,75$ s dolní mezí konfidenčního intervalu rovnou hodnotě 0,62.

Protože v tomto příkladu nelze provést stratifikaci dat, můžeme

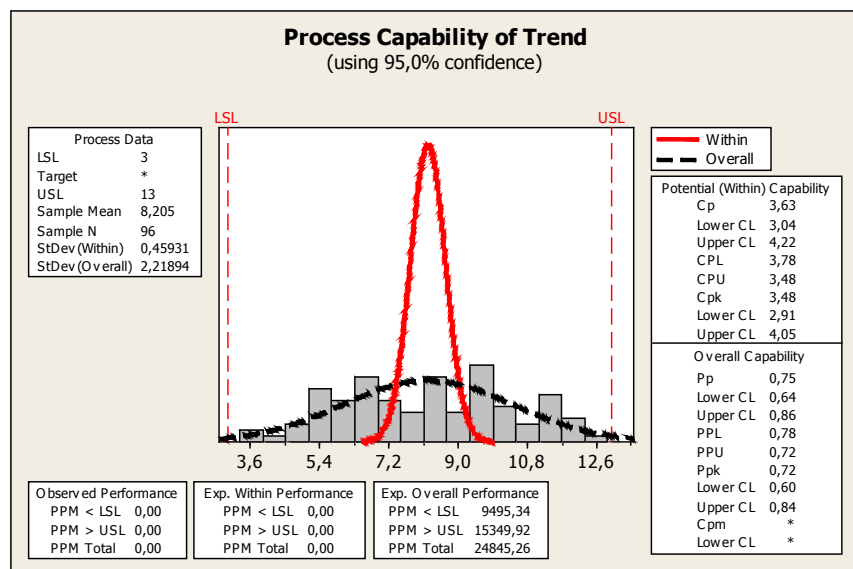
výkonnost procesu ocenit tak, že data rozdělíme např. na 3 skupiny. První skupina bude obsahovat podskupiny 1–8, druhá podskupiny 9–16, a třetí 17–24. U obou krajních podskupin vyhodnotíme výkonnost extra a získané odhady pro P_p a P_{pk} porovnáme. U podskupin 1–8 máme následující odhady pro P_p a P_{pk} :

$$\hat{P}_p = 1,86, \quad \hat{P}_{pk} = 1,02,$$

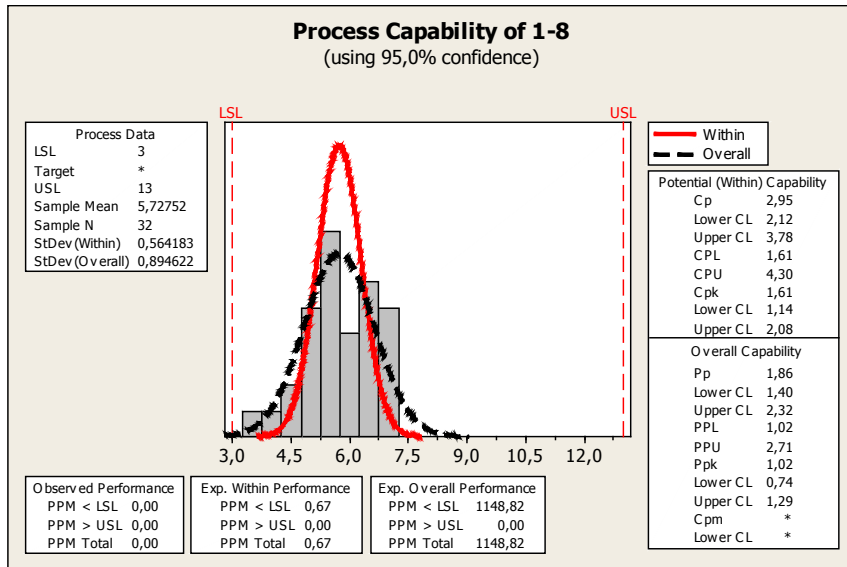
kde nás především zajímá odhad PPL vůči dolní mezi i s příslušnou dolní konfidenční mezí 0,74.

U podskupin 17–24 získáváme odhady $\hat{P}_p = 1,84$ a $\hat{P}_{pk} = 0,84$. Zde nás zajímá hlavně chování procesu vůči USL, tedy odhad PPU = 0,84 s dolní konfidenční mezí 0,60.

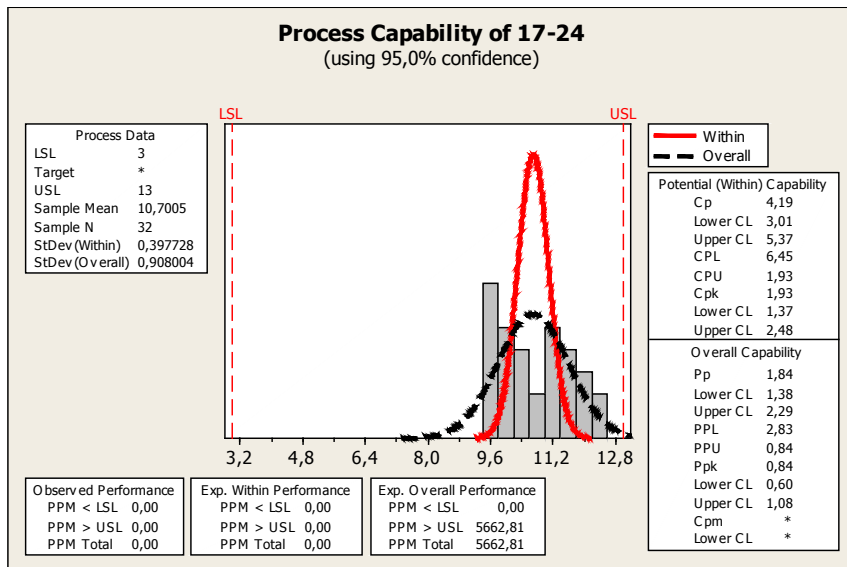
Celkově lze tedy na základě srovnání obou skupin říci, že u procesu lze očekávat s pravděpodobností 95 % jeho výkonnost lepší nežli je $P_{pk} \geq 0,60$. Vliv prostředních podskupin 9–16 lze vzhledem k úrovni variability (viz odhad \hat{C}_p) na výskyt neshodného výrobku prakticky vyloučit.



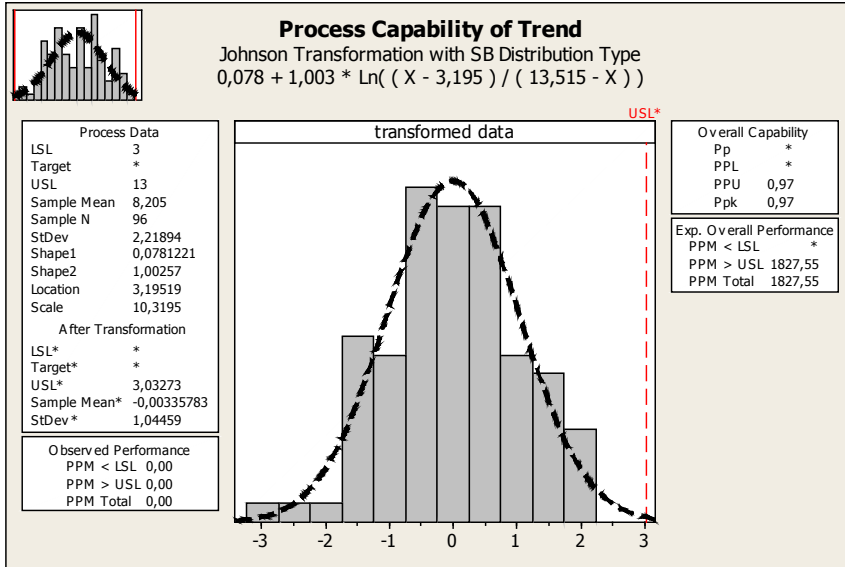
Obr. 18a. Vyhodnocení dat pomocí modelu normálního rozdělení.



Obr. 18b. Vyhodnocení 1. třetiny dat.



Obr. 18c. Vyhodnocení 3. třetiny dat.



Obr. 18d. Vyhodnocení výkonnosti pomocí Johnsonovy transformace.

Použitá literatura

- [1] A. Hald: Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, London, 1952.
- [2] V. Horálek, J. Křepela: Statistické řízení procesů SPC, učební texty ČSJ, vydání 4, Praha 2002.
- [3] V. Jarník: Integrální počet II. Nakladatelství ČSAV, Praha 1955.
- [3] S. Kotz, C.R. Lovelace: Process Capability Indices in Theory and Practice, Arnold, London 1998.
- [4] J. Michálek: Odhady koeficientů způsobilosti a jejich odhady, Výzkumná zpráva č. 2016, ÚTIA AV ČR, červen 2001.
- [5] J. Michálek: Statistické testy koeficientů způsobilosti, Výzkumná zpráva č. 2154, ÚTIA AV ČR, prosinec 2005.
- [6] J. Michálek: Maximálně věrohodné odhady ukazatelů způsobilosti a jejich vlastnosti, Výzkumná zpráva č. 2202, ÚTIA AV ČR, říjen 2007.
- [7] ČSN ISO 3951: Statistické přejímky měřením, ÚNM, Praha 2007.
- [7] ČSN ISO 8258: Shewhartovy regulační diagramy, ÚNM, Praha 1994.
- [8] QS-9000: Statistická regulace procesů (SPC), 2. vydání, Daimler Chrysler, Ford Motor and General Motors Corporation, český překlad ČSJ, Praha 2006.
- [9] VDA 4.1. Management jakosti v automobilovém průmyslu. Zabezpečení jakosti pro sériovou výrobu, ČSJ 1996, str. 85–115.

Použitý software

- [1] Minitab 15, English Version, Academic Licence.
- [2] Mathcad 14.0, Academic Licence.

Obsah

0	Úvod	1
1	Základní pojmy a definice	2
2	Definice ukazatelů způsobilosti a výkonnosti pro spojité znaky jakosti	6
3	Odhady ukazatelů způsobilosti a výkonnosti	11
4	Hodnocení způsobilosti a výkonnosti procesů	19
5	Vliv počtu dat na odhady \hat{C}_p , \hat{C}_{pk}	34
6	Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti s nenormálně rozdělenými daty	38
7	Hustoty pro \hat{C}_p , \hat{C}_{pk} , \hat{P}_p a \hat{P}_{pk}	41
8	Způsobilost měřidla, způsobilost strojního zařízení, předběžná a dlouhodobá způsobilost procesu	62
9	Případ jednostranných specifikačních mezí	65
10	Hodnocení způsobilosti atributivních znaků	68
11	Testování stability procesu	72