VÝZKUMNÁ ZPRÁVA Z-1428/08

ÚSTAV TERMOMECHANIKY
AV ČR, v.v.i.

ODVOZENÍ DISPERZNÍCH VZTAHŮ PRO ANIZOTROPNÍ TLUSTÉ DESKY V SYSTÉMU MAPLE

OLGA ČERVENÁ, PETR HORA

Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Dolejškova 5, 182 00 Praha 8
http://www.it.cas.cz/

Obsah

Seznam obrázků

1 Disperzní křivky v anizotropních deskách

1.1 Úvod

Na začátku uvedeme krátký souhrn rovnic elastodynamiky ([13]–[20]), na které budeme navazovat v dalším výkladu.

$$
\begin{aligned}
&\text{Pohybové rovnice:} && \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} && \leftrightarrow && T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \\
&\text{Konstitutivní vztahy:} && \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} && \leftrightarrow && T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}, \\
&\text{Vztahy výchylky-deformace:} && \mathbf{S} = \frac{1}{2}\{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}}\} && \leftrightarrow && S_{kl} = \frac{1}{2}\{u_{k,l} + u_{l,k}\},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor napětí druhého řádu, $\mathbf{S}$ je tenzor deformací druhého řádu, $\mathbf{C}$ je tenzor elastických modulů čtvrtého řádu, $\mathbf{u}$ je vektor výchylek a ρ je hustota materiálu.

Napětí přes libovolný povrch s normálou $\mathbf{n}$ je dáno: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \leftrightarrow T_{ij} n_j$. Obecně, napětí a výchylky musí být na rozhraní spojité.

Tenzor napětí $\mathbf{T}$ je symetrický, tj. $T_{ij} = T_{ji}$. Tenzor deformací $\mathbf{S}$ je taktéž symetrický, tj. $S_{kl} = S_{lk}$. Tenzor elastických modulů $\mathbf{C}$ má navíc *hlavní* symetrii, tj. $C_{ijkl} = C_{klij}$. Důsledkem těchto symetrií je existence maximálně 21 nezávislých elastických konstant pro nejanizotropnější materiál. Se zvětšující se úrovní symetrie materiálu počet nezávislých elastických konstant klesá, např. 3 pro kubické krystaly a pouze 2 pro izotropní materiály.

Zkrácený zápis

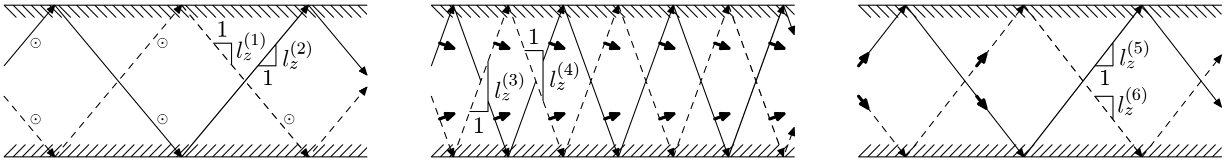
Pro výpočetní účely je často jednodušší uvažovat 6 nezávislých složek tenzoru napětí a deformací uspořádaných do vektorového tvaru:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= [T_{11} \quad T_{22} \quad T_{33} \quad T_{23} = T_{32} \quad T_{31} = T_{13} \quad T_{12} = T_{21}]^T, \\
\mathbf{S} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad 2S_{23} = 2S_{32} \quad 2S_{31} = 2S_{13} \quad 2S_{12} = 2S_{21}]^T,
\end{aligned}
$$

kde jsme použili inženýrskou definici příčných deformací (proto ten činitel 2 u některých členů). Dále budeme používat velké dolní indexy k označení zkráceného zápisu. Tedy

$$
\begin{aligned}
&\{ij = 11 \rightarrow I = 1; \quad ij = 22 \rightarrow I = 2; \quad ij = 33 \rightarrow I = 3; \\
&ij = 23 \vee 32 \rightarrow I = 4; \quad ij = 31 \vee 13 \rightarrow I = 5; \quad ij = 12 \vee 21 \rightarrow I = 6\}.
\end{aligned}
$$

Někdy je nutné přecházet tam a zpět mezi reprezentací tenzorovou (matice řádu 3) a reprezentací vektorovou (vektor o délce 6). Např. pro získání složek napětí a deformací v jiných souřadných soustavách je jednodušší použít maticovou (tenzorovou) reprezentaci, ale jinak je téměř vždy výhodnější používat zkráceného zápisu.



Obrázek 1.1: Parciální vlny v nekonečné izotropní desce: a) SH, b) SV, c) P.

Konstitutivní vztahy ve zkráceném zápisu přejdou na

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T_I} = \mathbf{C_{IJ}S_J}.$$

1.2 Metoda parciálních vln

Ke studiu šíření napěťových vln v izotropních deskách se používají dvě analytické metody: metoda založená na potenciálech s následnou separací proměnných a novější metoda parciálních vln, u které se řešení skládá z jednoduchých vln exponenciálního typu, které putují mezi okraji desky, viz obr. 1.1 (SH-příčná horizontální, SV-příčná vertikální, P-podélná). Tato druhá metoda vede k řešení rychleji a přináší lepší náhled do fyzikální povahy vlnového šíření.

Při řešení problému šíření vln v anizotropních deskách máme výběr analytické metody zjednodušen. Lze totiž použít pouze metodu parciálních vln.

Pro obecné anizotropní médium jsou parciální vlny odvozeny z Christoffelovy rovnice, viz [3]

$$\left(k_{iIC_{IJ}}k_{Jj} - \rho\omega^2\delta_{ij}\right)u_j = 0, \tag{1.2}$$

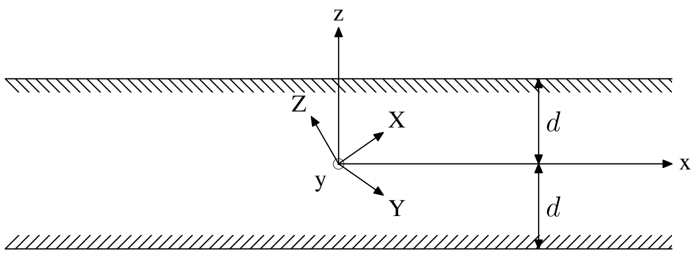
která byla odvozena z předpokládaného řešení ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right], \text{ kde } \quad \boldsymbol{u}_0 = \hat{x}\alpha_x + \hat{y}\alpha_y + \hat{z}\alpha_z \tag{1.3}$$

v pohybové rovnici pro anizotropní prostředí. Ve vztahu (1.2) se předpokládá sčítání přes opakující se indexy a je užito obvyklé značení indexů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = x, y, z$ a $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J} = xx, yy, zz, yz, xz, xy$. Matice k_{iI} je

$$k_{iI} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & k_z & k_y \\ 0 & k_y & 0 & k_z & 0 & k_x \\ 0 & 0 & k_z & k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

a k_{Jj} je její transpozicí. Materiálové vlastnosti desky jsou popsány hustotou ρ a elastickými konstantami c_{IJ}.



Obrázek 1.2: Materiálové osy X, Y, Z libovolně orientované k osám anizotropní desky x, y, z.

Základní princip metody parciálních vln spočívá v jejich vazbě na ostatní vlny přes odrazy na okrajích desky. Vyplývá to ze skutečnosti, že každá parciální vlna na obr. 1.1 nebo v anizotropním problému znázorněném na obr. 1.2 musí mít stejnou hodnotu k_x. To je $k_x = k = \omega/v$, kde v je fázová rychlost vlny v desce. Rovnice (1.3) pak přejde na tvar

$$u_j = \alpha_j \exp\left[ik(x + l_z z)\right], \tag{1.5}$$

s $j = x, y, z$ a $l_z = k_z/k_x$ pro každé parciální vlnové řešení.

Substitucí vztahu (1.5) do (1.2) získáme soustavu tří homogenních lineárních rovnic pro α_x, α_y a α_z, kde jsou koeficienty funkcemi ρ, c_{IJ} a $\omega/k = v$. Netriviální řešení existuje, pouze pokud je determinant soustavy nulový. To vede na polynom šestého řádu pro l_z, který má šest reálných nebo komplexně sdružených kořenů $l_z^{(n)}$, $n = 1, \ldots 6$. Parciální vlnové řešení definované těmito kořeny odpovídá třem dopadajícím a třem odraženým vlnám, viz obr. 1.1 pro izotropní desku. V anizotropní desce se obvykle parciální vlny neseparují na čistě horizontálně a vertikálně polarizované. K tomu dochází pouze při speciální orientaci materiálu a desky.

Vztahy pro parciální vlny jsou nyní

$$u_j = \sum_{n=1}^{6} C_n \, \alpha_j^{(n)} \exp\left[ik(x + l_z^{(n)} z)\right], \quad (j = x, y, z). \tag{1.6}$$

V dalším kroku se vyšetřuje vazba mezi parciálními vlnami na okraji desky. Pro volný povrch desky je třeba splnit následující okrajové podmínky

$$T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0, \tag{1.7}$$

na každém povrchu desky, $z = \pm d$ viz obr. 1.2.

Substitucí vztahů (1.6) do okrajových podmínek (1.7) dostaneme soustavu šesti homogenních lineárních rovnic, ve kterých jsou koeficienty C_n funkcemi ρ, c_{IJ}, $\omega/k = v$ a kd. Opět netriviální řešení existuje, pouze pokud determinant soustavy je roven nule, což určuje disperzní vztah mezi ω a k.

1.3 Izotropní deska

Disperzní vztahy pro izotropní desku lze rozdělit do tří samostatných rovnic, jak je uvedeno v [1], [16] a [5].

SH-módy

$$(N\pi)^2 = (2d\omega/c_2)^2 - (2dk)^2, \tag{1.8}$$

kde N je přirozené číslo včetně nuly a c_2 je fázová rychlost příčných vln.
Symetrické (dilatační) módy:

$$4\,\delta\,\beta\,\sinh\left(kd\,\delta\right)\,\cosh\left(kd\,\beta\right)-\left(\frac{v^2}{c_2^2}-2\right)^2\,\sinh\left(kd\,\beta\right)\,\cosh\left(kd\,\delta\right)=0, \tag{1.9}$$

kde $\delta=\sqrt{1-\frac{v^2}{c_1^2}}$, $\beta=\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2^2}}$, k je vlnové číslo, d je polovina tloušťky desky, v je fázová rychlost, c_1 rychlost podélných a c_2 rychlost příčných vln.
Antisymetrické (ohybové) módy:

$$4\,\delta\,\beta\,\sinh\left(kd\,\beta\right)\,\cosh\left(kd\,\delta\right)-\left(\frac{v^2}{c_2^2}-2\right)^2\,\sinh\left(kd\,\delta\right)\,\cosh\left(kd\,\beta\right)=0. \tag{1.10}$$

1.3.1 Mindlinova metoda oddělených módů

Pro snažší pochopení chování symetrických a antisymetrických módů vyvinul Mindlin [17] metodu oddělených módů, která spočívá v zavedení speciálních okrajových podmínek

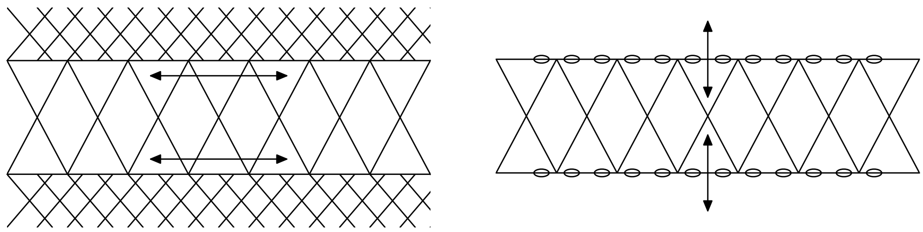
$$T_{xz}=0,\quad u_z=0 \tag{1.11}$$

nebo

$$T_{zz}=0,\quad u_x=0. \tag{1.12}$$

Tyto okrajové podmínky nelze realizovat v praxi, ale lze je simulovat „namazanými tuhými poloprostory“ (viz obr. 1.3 vlevo) a „mikroskopickým řetízkem“ (viz obr. 1.3 vpravo). Pro tyto speciální okrajové podmínky degenerují symetrické a antisymetrické módy do oddělených SV-módů, popsaných vztahem (1.8), a oddělených P-módů, popsaných následujícím vztahem

$$(M\pi)^2=(2d\omega/v_L)^2-(2dk)^2. \tag{1.13}$$

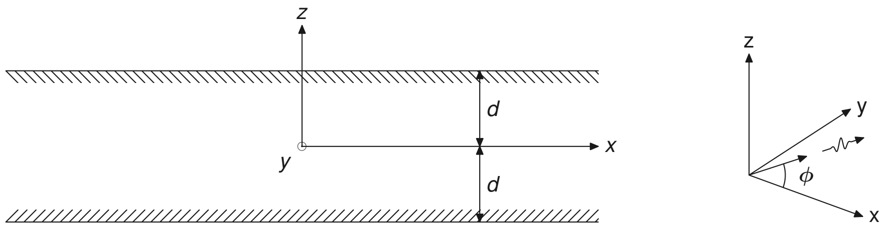


Obrázek 1.3: Modely Mindlinových okrajových podmínek.

Mindlinovy disperzní křivky jsou spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy izotropní desky zakresleny v obr. 4.1.

1.4 Kubická deska

Disperzní chování v anizotropních deskách závisí na směru šíření. Uvažujeme desku s anizotropií orientací (001) a vyšetřujeme šíření v rovině desky. Směr šíření je dán úhlem ϕ mezi osou x a vlnovým vektorem viz obr.1.4. Nejdříve zaměříme na směry šíření v rovinách symetrie krystalu. Pro kubickou desku jsou to směry šíření [100] a [110], (tj. $\phi=0°$ a $\phi=45°$).



Obrázek 1.4: Deska s anizotropií orientací (001) a směr šíření v rovině desky.

1.4.1 směr šíření $\phi = 0°$

V tomto případě se Christoffelova rovnice (1.2) redukuje na

$$\begin{pmatrix} c_{11} + c_{44}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 & 0 & (c_{12}+c_{44})\, l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44}\,(1 + l_z^{(n)^2}) - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12}+c_{44})\, l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \tag{1.14}$$

kde $\alpha_x^{(n)}, \alpha_y^{(n)}$ a $\alpha_z^{(n)}$ jsou složky polarizace n-té parciální vlny. Determinant soustavy se rozdělí na

$$c_{44}\,(1 + l_z^{(n)^2}) - \rho v^2 = 0 \tag{1.15}$$

a

$$(c_{11} + c_{44}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2)(c_{44} + c_{11}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2) - (c_{12}+c_{44})^2\, l_z^{(n)^2} = 0. \tag{1.16}$$

SH-módy
Uvažujme první dva kořeny $l_z^{(n)}$ rovnice (1.15), které spojíme s $n = 5, 6$. Odpovídající parciální vlny

$$SH \begin{cases} l_z^{(5)} = \sqrt{(\rho v^2/c_{44}) - 1}, & \alpha^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(6)} = -l_z^{(5)}, & \alpha^{(6)} = \alpha^{(5)}, \end{cases} \tag{1.17}$$

kde $v = \omega/k$, jsou horizontálně polarizované. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$\sin\left(2\, l_z^{(5)} kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.18}$$

Jedná se o čistě SH-módy stejně jako v izotropním případě.

Symetrické a antisymetrické módy
Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ rovnice (1.16)

$$l_z^{(n)^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A}}{2\, c_{11} c_{44}}, \tag{1.19}$$

kde

$$A = 4\, c_{11} c_{44} (c_{11} - \rho v^2)(c_{44} - \rho v^2) \quad \text{a} \quad B = (c_{11} - \rho v^2)\, c_{11} + (c_{44} - \rho v^2)\, c_{44} - (c_{12} + c_{44})^2,$$

vedou na zbývající parciální vlny typu P a SV. Znaménko plus vede na kvazipříčné vlny ($n = 1, 2$) a znaménko mínus na kvazipodélné vlny ($n = 3, 4$):

$$SV \begin{cases} l_z^{(1)} = \sqrt{\dfrac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{2\, c_{11} c_{44}}}, & \alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} \\ \alpha_y^{(1)} \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12} + c_{44})\, l_z^{(1)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{44}\, l_z^{(1)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix}, \\ & \\ l_z^{(2)} = -l_z^{(1)}, & \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(1)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.20}$$

$$P \begin{cases} l_z^{(3)} = \sqrt{\dfrac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{2\, c_{11} c_{44}}}, & \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(3)} \\ \alpha_y^{(3)} \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12} + c_{44})\, l_z^{(3)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{44}\, l_z^{(3)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix}, \\ & \\ l_z^{(4)} = -l_z^{(3)}, & \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(3)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Vztahy jsou odvozeny pomocí systému pro symbolické výpočty Maple. Rovnice (1.14) až (1.21) jsou odvozeny v souboru `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Okrajové podmínky $T_{xz} = T_{zz} = 0$ jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)} kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)} kd\right)} = \frac{\left(c_{12}\, \alpha_x^{(1)} + c_{11}\, \alpha_z^{(1)}\, l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\, l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{12}\, \alpha_x^{(3)} + c_{11}\, \alpha_z^{(3)}\, l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\, l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \tag{1.22}$$

nebo

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)} kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)} kd\right)} = \frac{\left(c_{12}\, \alpha_x^{(3)} + c_{11}\, \alpha_z^{(3)}\, l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\, l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)}{\left(c_{12}\, \alpha_x^{(1)} + c_{11}\, \alpha_z^{(1)}\, l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\, l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}. \tag{1.23}$$

Rovnice (1.22) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.23) závislost pro antisymetrické módy.

Mindlinovy okrajové podmínky (1.11) resp. (1.12) jsou splněny, pokud platí

$$\sin\left(2\, l_z^{(1)} kd\right) = 0 \tag{1.24}$$

nebo

$$\sin\left(2\, l_z^{(3)} kd\right) = 0. \tag{1.25}$$

Tyto disperzní závislosti (1.18) a (1.22) až (1.25) byly odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2. Disperzní křivky pro SH módy, symetrické a antisymetrické módy v kubické desce jsou pro směr šíření $\phi = 0$ zakresleny spolu s Mindlinovými disperzními křivkami v obr. 4.2.

1.4.2 směr šíření $\phi = 45°$

V případě, kdy má deska s kubickou anizotropií orientaci (001) a vyšetřujeme směr šíření [110], tj. $\phi = 45°$, se Christoffelova rovnice redukuje na

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11}+c_{12}) + c_{44}(1+l_z^{(n)^2}) - \rho v^2 & 0 & (c_{12}+c_{44})l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44}l_z^{(n)^2} + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12}+c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44}+c_{11}l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0. \tag{1.26}$$

Determinant soustavy se rozdělí na

$$\left(\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12}) + c_{44}(1+l_z^{(n)^2}) - \rho v^2\right)\left(c_{44} + c_{11}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2\right) - (c_{12}+c_{44})^2\, l_z^{(n)^2} = 0 \tag{1.27}$$

a

$$c_{44}l_z^{(n)^2} + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) - \rho v^2 = 0. \tag{1.28}$$

SH-módy
Dva kořeny $l_z^{(n)}$ $(n = 5, 6)$ rovnice (1.28)

$$SH \begin{cases} l_z^{(5)} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}(c_{12}-c_{11}) + \rho v^2}{c_{44}}}, & \alpha^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(6)} = -l_z^{(5)}, & \alpha^{(6)} = \alpha^{(5)}, \end{cases} \tag{1.29}$$

odpovídají parciálním vlnám pro horizontálně polarizované módy. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$\sin\left(2\, l_z^{(5)} kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.30}$$

Opět se jedná se o čistě SH-módy stejně jako v předchozím případě.

Symetrické a antisymetrické módy
Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ rovnice (1.27)

$$l_z^{(n)^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A}, \tag{1.31}$$

kde

$$\begin{aligned} &A = 2c_{11}c_{44}, \\ &B = -2\,(c_{11}+c_{44})\ \rho v^2 + (c_{11} - 2\,c_{12})\ (c_{12} + 2\,c_{44}) + c_{11}^2 \quad \text{a} \\ &C = \left(c_{4,4} - \rho\, v^2\right)\left(c_{1,1} + c_{1,2} + 2(c_{4,4} - \rho\, v^2)\right), \end{aligned}$$

vedou na zbývající parciální vlny typu P a SV. Znaménko plus vede na kvazipříčné vlny $(n = 1, 2)$ a znaménko mínus na kvazipodélné vlny $(n = 3, 4)$:

$$SV\begin{cases} l_z^{(1)} = \sqrt{\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4\,A\,C}}{2\,A}}, & \alpha^{(1)} = \begin{pmatrix}\alpha_x^{(1)}\\ \alpha_y^{(1)}\\ \alpha_z^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12}+c_{44})l_z^{(1)}\\ 0\\ \frac{1}{2}\,(c_{11}+c_{12})+c_{44}(1+l_z^{(1)^2})-\rho v^2\end{pmatrix},\\ l_z^{(2)} = -l_z^{(1)}, & \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix}-\alpha_x^{(1)}\\ 0\\ \alpha_z^{(1)}\end{pmatrix},\end{cases} \tag{1.32}$$

$$P\begin{cases} l_z^{(3)} = \sqrt{\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4\,A\,C}}{2\,A}}, & \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix}\alpha_x^{(3)}\\ \alpha_y^{(3)}\\ \alpha_z^{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12}+c_{44})l_z^{(3)}\\ 0\\ \frac{1}{2}\,(c_{11}+c_{12})+c_{44}(1+l_z^{(3)^2})-\rho v^2\end{pmatrix},\\ l_z^{(4)} = -l_z^{(3)}, & \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix}-\alpha_x^{(3)}\\ 0\\ \alpha_z^{(3)}\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{1.33}$$

Rovnice (1.26) až (1.33) jsou odvozeny v souboru `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{12}\,\alpha_x^{(1)} + c_{11}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{12}\,\alpha_x^{(3)} + c_{11}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \tag{1.34}$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{12}\,\alpha_x^{(3)} + c_{11}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)}{\left(c_{12}\,\alpha_x^{(1)} + c_{11}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}. \tag{1.35}$$

Rovnice (1.34) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.35) závislost pro antisymetrické módy.

Mindlinovy okrajové podmínky (1.11) resp. (1.12) jsou splněny, pokud platí

$$\sin\left(2\,l_z^{(1)}kd\right) = 0 \tag{1.36}$$

nebo

$$\sin\left(2\,l_z^{(3)}kd\right) = 0. \tag{1.37}$$

Disperzní závislosti (1.30) a (1.34) až (1.37) byly odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2. Mindlinovy oddělené módy jsou spolu s disperzními křivkami pro symetrické, antisymetrické a SH módy desky s kubickou anizotropií a směr šíření $\phi = 45$ zakresleny v obr. 4.13.

1.4.3 směr šíření $0 < \phi < 45^\circ$

Uvažujeme opět desku s kubickou anizotropií a orientací (001) a vyšetřujeme obecný směr šíření v rovině desky jak je znázorněno na obr. 1.4.

Christoffelova rovnice má v tomto případě tvar

$$\begin{pmatrix} K_A + c_{11} + c_{44} l_z^{(n)^2} - \rho v^2 & K_B & (c_{12}+c_{44}) l_z^{(n)} \\ K_B & \left(l_z^{(n)^2}+1\right) c_{44} - K_A - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12}+c_{44}) l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11} l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \tag{1.38}$$

kde

$$\begin{aligned} K_A &= -\,2\sin^2\phi\,\cos^2\phi\,\left(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}\right), \\ K_B &= \left(1 - 2\cos^2\phi\right)\,\left(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}\right)\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

V tomto případě se už nevyskytují SH-módy, ale pouze symetrické a antisymetrické módy. Determinant soustavy vede následující bikubickou rovnici:

$$A\,l_z^6 + B\,l_z^4 + C\,l_z^2 + D = 0, \tag{1.39}$$

kde

$$\begin{aligned} A =& c_{11}\,c_{44}^2, \\ B =& (c_{11} - 2\,c_{12})\;c_{44}^2 + \left(c_{11}^2 - c_{12}^2 - (c_{44} + 2\,c_{11})\;\rho v^2\right)\;c_{44}, \\ C =& (2\,c_{44} + c_{11})\;\rho^2\,v^4 - c_{11}\;\left(K_A^2 + K_B^2\right) + \left(c_{12}^2 - c_{11}^2\right)\;\left(K_A + \rho\,v^2 - c_{44}\right) \\ &+ (c_{44} + c_{11})\left(K_A - 2\,\rho\,v^2\right)\;c_{44} + 2\,c_{12}\,c_{44}\;\left(K_A + \rho\,v^2\right) + c_{44}^2\;(c_{11} - 2\,c_{12}), \\ D =& -\,\rho^3\,v^6 + \rho^2\,v^4\;(2\,c_{44} + c_{11}) + \left(\rho\,v^2 - c_{44}\right)\;\left(K_A\;(K_A + c_{11} - c_{44}) + K_B^2\right) \\ &- \rho\,v^2\,c_{44}\;(2\,c_{11} + c_{44}) + c_{11}\,c_{44}^2. \end{aligned}$$

Tvary rovnic (1.38) a (1.39) jsou odvozeny v `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1. Tato rovnice je dále řešena numericky v Matlabu, [15].

Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$C_A\,\mathrm{cotg}\left(l_z^{(1)}kd\right) + C_B\mathrm{cotg}\left(l_z^{(3)}kd\right) + C_C\mathrm{cotg}\left(l_z^{(5)}kd\right) = 0 \tag{1.40}$$

nebo

$$C_A\,\mathrm{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right) + C_B\mathrm{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right) + C_C\mathrm{tg}\left(l_z^{(5)}kd\right) = 0 \tag{1.41}$$

kde

$$\begin{aligned} C_A &= \left(c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)} + c_{12}\right)\left[\alpha_y^{(5)}l_z^{(5)}\left(\alpha_z^{(3)} + l_z^{(3)}\right) - \alpha_y^{(3)}l_z^{(3)}\left(l_z^{(5)} + \alpha_z^{(5)}\right)\right], \\ C_B &= \left(c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)} + c_{12}\right)\left[\alpha_y^{(1)}l_z^{(1)}\left(\alpha_z^{(5)} + l_z^{(5)}\right) - \alpha_y^{(5)}l_z^{(5)}\left(l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)\right], \\ C_C &= \left(c_{11}\alpha_z^{(5)}l_z^{(5)} + c_{12}\right)\left[\alpha_y^{(3)}l_z^{(3)}\left(\alpha_z^{(1)} + l_z^{(1)}\right) - \alpha_y^{(1)}l_z^{(1)}\left(l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)\right] \quad \text{a} \\ \alpha_y^{(n)} &= \frac{K_B}{K_A + \rho v^2 - \left(l_z^{(n)^2} + 1\right) c_{44}}, \qquad \alpha_z^{(n)} = \frac{(c_{12}+c_{44}) l_z^{(n)}}{\rho v^2 - c_{44} - c_{11} l_z^{(n)^2}} \qquad \text{pro } n \;= 1{,}3{,}5. \end{aligned}$$

Rovnice (1.40) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.41) závislost pro antisymetrické módy. Disperzní závislosti byly odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2 a tvary polarizací parciálních vln α_y a α_z v `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Mindlinovy okrajové podmínky $T_{xz} = 0, \quad u_z = 0$ nebo $T_{zz} = 0, \quad u_x = 0$ lze pro kubickou desku použít při $\phi = 0°$ a $\phi = 45°$. Tedy pouze v případě, kdy sagitální rovina tvoří rovinu symetrie krystalu a lze tedy oddělit SH-módy. Pro obecný úhel šíření, kdy nelze oddělit SH-módy, jsme k získání oddělených módů museli doplnit první dvojici výše uvedených okrajových podmínek o podmínku $T_{yz} = 0$ a druhou dvojici o podmínku $u_y = 0$. Takto doplněné podmínky jsou splněny, pokud platí

$$\sin\left(2\, l_z^{(n)} kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \quad n = 1, 3, 5 \quad \text{a} \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.42}$$

Tyto disperzní závislosti jsou odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2. Zobecněné Mindlinovy oddělené módy spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy desky s kubickou anizotropií a směry šíření $\phi = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 44°$ jsou zakresleny v obr.4.3–4.12.

1.5 Ortotropní deska

Nyní budeme vyšetřovat desku ortotropní anizotropií. Opět se nejdříve zaměříme na směry šíření v rovinách symetrie krystalu, tj. pro ortotropní desku směry šíření [100] a [010], (tj. $\phi = 0°$ a $\phi = 90°$).

1.5.1 směr šíření $\phi = 0°$

V tomto případě se Christoffelova rovnice (1.2) redukuje na

$$\begin{pmatrix} c_{11} + c_{55}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 & 0 & (c_{13} + c_{55})\, l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44}\, l_z^{(n)^2} + c_{66} - \rho v^2 & 0 \\ (c_{13} + c_{55})\, l_z^{(n)} & 0 & c_{55} + c_{33}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0. \tag{1.43}$$

Determinant soustavy se rozdělí na

$$c_{44}\, l_z^{(n)^2} + c_{66} - \rho v^2 = 0 \tag{1.44}$$

a

$$(c_{11} + c_{55}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2)(c_{55} + c_{33}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2) - (c_{13} + c_{55})^2\, l_z^{(n)^2} = 0. \tag{1.45}$$

SH-módy

Uvažujme první dva kořeny $l_z^{(n)}$ rovnice (1.44), které spojíme s $n = 5, 6$. Odpovídající parciální vlny

$$SH \begin{cases} l_z^{(5)} = \sqrt{\dfrac{\rho v^2 - c_{66}}{c_{44}}}, & \alpha^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(6)} = -l_z^{(5)}, & \alpha^{(6)} = \alpha^{(5)} \end{cases} \tag{1.46}$$

jsou horizontálně polarizované. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$\sin\left(2\,l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.47}$$

Jedná se o čistě SH-módy.

Symetrické a antisymetrické módy
Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ rovnice (1.45)

$$l_z^{(n)^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A}}{2\,c_{33}c_{55}}, \tag{1.48}$$

kde

$$A = 4\,c_{33}c_{55}(c_{11} - \rho v^2)(c_{55} - \rho v^2) \quad \text{a} \quad B = (c_{11} - \rho v^2)c_{33} + (c_{55} - \rho v^2)c_{55} - (c_{13} + c_{55})^2,$$

vedou na zbývající parciální vlny typu P a SV. Znaménko plus vede na kvazipříčné vlny $(n = 1, 2)$ a znaménko mínus na kvazipodélné vlny $(n = 3, 4)$:

$$SV \begin{cases} l_z^{(1)} = \sqrt{\dfrac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{2\,c_{33}c_{55}}}, & \alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} \\ \alpha_y^{(1)} \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{13} + c_{55})l_z^{(1)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{55}l_z^{(1)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(2)} = -l_z^{(1)}, & \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(1)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.49}$$

$$P \begin{cases} l_z^{(3)} = \sqrt{\dfrac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{2\,c_{33}c_{55}}}, & \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(3)} \\ \alpha_y^{(3)} \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{13} + c_{55})l_z^{(3)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{55}l_z^{(3)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(4)} = -l_z^{(3)}, & \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(3)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.50}$$

Rovnice (1.43) až (1.50) jsou odvozeny v souboru `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Okrajové podmínky $T_{xz} = T_{zz} = 0$ jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{13}\,\alpha_x^{(1)} + c_{33}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{13}\,\alpha_x^{(3)} + c_{33}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \tag{1.51}$$

nebo

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{13}\,\alpha_x^{(3)} + c_{33}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)}{\left(c_{13}\,\alpha_x^{(1)} + c_{33}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}. \tag{1.52}$$

Rovnice (1.51) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.52) závislost pro antisymetrické módy.

Mindlinovy okrajové podmínky (1.11) resp. (1.12) jsou splněny, pokud platí

$$\sin\left(2\, l_z^{(n)} kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \quad n = 1, 3 \quad \text{a} \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.53}$$

Rovnice (1.53) pro $n = 1$ představuje disperzní závislost pro oddělené SV-módy a pro $n = 3$ závislost pro oddělené P-módy. V souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2, jsou odvozeny disperzní závislosti (1.47) a (1.51) až (1.53).

Mindlinovy disperzní křivky jsou spolu s disperzními křivkami pro SH módy, symetrické a antisymetrické módy desky s ortotropní anizotropií zakresleny v obr. 4.14.

1.5.2 směr šíření $\phi = 90°$

V tomto případě se Christoffelova rovnice (1.2) redukuje na

$$\begin{pmatrix} c_{22} + c_{44}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 & 0 & (c_{23} + c_{44})\, l_z^{(n)} \\ 0 & c_{55}\, l_z^{(n)^2} + c_{66} - \rho v^2 & 0 \\ (c_{23} + c_{44})\, l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{33}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0. \tag{1.54}$$

Determinant soustavy se rozdělí na

$$c_{55}\, l_z^{(n)^2} + c_{66} - \rho v^2 = 0 \tag{1.55}$$

a

$$(c_{22} + c_{44}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2)(c_{44} + c_{33}\, l_z^{(n)^2} - \rho v^2) - (c_{23} + c_{44})^2\, l_z^{(n)^2} = 0. \tag{1.56}$$

SH-módy

Uvažujme první dva kořeny $l_z^{(n)}$ rovnice (1.55), které spojíme s $n = 5, 6$. Odpovídající parciální vlny

$$SH \begin{cases} l_z^{(5)} = \sqrt{\dfrac{\rho v^2 - c_{66}}{c_{55}}}, & \alpha^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\[2ex] l_z^{(6)} = -l_z^{(5)}, & \alpha^{(6)} = \alpha^{(5)}, \end{cases} \tag{1.57}$$

jsou horizontálně polarizované. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$\sin\left(2\, l_z^{(5)} kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.58}$$

Jedná se opět o čistě SH-módy.

Symetrické a antisymetrické módy

Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ rovnice (1.56)

$$l_z^{(n)^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A}}{2\, c_{33} c_{44}}, \tag{1.59}$$

kde

$$A = 4\,c_{33}c_{44}(c_{22}-\rho v^2)(c_{44}-\rho v^2) \quad \text{a} \quad B = (c_{22}-\rho v^2)c_{33} + (c_{44}-\rho v^2)c_{44} - (c_{23}+c_{44})^2,$$

vedou na zbývající parciální vlny typu P a SV. Znaménko plus vede na kvazipříčné vlny ($n = 1,2$) a znaménko mínus na kvazipodélné vlny ($n = 3,4$):

$$SV \begin{cases} l_z^{(1)} = \sqrt{\dfrac{-B+\sqrt{B^2-A}}{2\,c_{33}c_{44}}}, & \alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} \\ \alpha_y^{(1)} \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{23}+c_{44})l_z^{(1)} \\ 0 \\ c_{22}+c_{44}l_z^{(1)^2}-\rho v^2 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(2)} = -l_z^{(1)}, & \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(1)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.60}$$

$$P \begin{cases} l_z^{(3)} = \sqrt{\dfrac{-B-\sqrt{B^2-A}}{2\,c_{33}c_{44}}}, & \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(3)} \\ \alpha_y^{(3)} \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{23}+c_{44})l_z^{(3)} \\ 0 \\ c_{22}+c_{44}l_z^{(3)^2}-\rho v^2 \end{pmatrix}, \\ l_z^{(4)} = -l_z^{(3)}, & \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(3)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.61}$$

Rovnice (1.54) až (1.61) jsou odvozeny v souboru `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Okrajové podmínky $T_{xz} = T_{zz} = 0$ jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{23}\,\alpha_x^{(1)} + c_{33}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{23}\,\alpha_x^{(3)} + c_{33}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \tag{1.62}$$

nebo

$$\frac{\tan\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\tan\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \frac{\left(c_{23}\,\alpha_x^{(3)} + c_{33}\,\alpha_z^{(3)}\,l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}\,l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)}{\left(c_{23}\,\alpha_x^{(1)} + c_{33}\,\alpha_z^{(1)}\,l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}\,l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}. \tag{1.63}$$

Rovnice (1.62) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.63) závislost pro antisymetrické módy.

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin\left(2\,l_z^{(n)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro} \quad n = 1,3 \quad \text{a} \quad N = 0,1,2,\ldots \tag{1.64}$$

Rovnice (1.64) pro $n = 1$ představuje disperzní závislost pro oddělené SV-módy a pro $n = 3$ závislost pro oddělené P-módy. Disperzní závislosti (1.58) a (1.62) až (1.64) byly odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2.

Mindlinovy disperzní křivky spolu s disperzními křivkami pro SH módy, symetrické a antisymetrické módy desky s ortotropní anizotropií pro směr šíření $\phi = 90°$ jsou zakresleny v obr. 4.34.

1.5.3 směr šíření $0 < \phi < 90^\circ$

Uvažujeme opět desku s ortotropní anizotropií a orientací (001) a vyšetřujeme obecný směr šíření v rovině desky, jak je znázorněno na obr.1.4.

Christoffelova rovnice má v tomto případě tvar

$$\begin{pmatrix} g_9\, l_z^2 + g_{10} & g_5\, l_z^2 + g_7 & g_6\, l_z \\ g_5\, l_z^2 + g_7 & g_1\, l_z^2 + g_3 & g_4\, l_z \\ g_6\, l_z & g_4\, l_z & g_8\, l_z^2 + g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \tag{1.65}$$

kde

$$\begin{aligned}
g_1 =& \sin^2\phi\, c_{55} + \cos^2\phi\, c_{44}, \\
g_2 =& \sin^2\phi\, c_{44} + \cos^2\phi\, c_{55} - \rho\, v^2, \\
g_3 =& \sin^2\phi \cos^2\phi\, (c_{11} - 2\, c_{12} + c_{22} - 4\, c_{66}) + c_{66} - \rho\, v^2, \\
g_4 =& \sin\phi \cos\phi\, (c_{23} - c_{13} + c_{44} - c_{55})\,, \\
g_5 =& \sin\phi \cos\phi\, (c_{44} - c_{55})\,, \\
g_6 =& \sin^2\phi\ (c_{23} + c_{44}) + \cos^2\phi\ (c_{13} + c_{55})\,, \\
g_7 =& \sin\phi \cos\phi\, \left(\sin^2\phi\, (c_{22} - c_{12} - 2\, c_{66}) - \cos^2\phi\, (c_{11} - c_{12} - 2\, c_{66})\right), \\
g_8 =& c_{33}, \\
g_9 =& \sin^2\phi\, c_{44} + \cos^2\phi\, c_{55}, \\
g_{10} =& \sin^4\phi\, c_{22} + \cos^4\phi\, c_{11} + 2\ (c_{12} + 2\, c_{66})\ \sin^2\phi\ \cos^2\phi - \rho\, v^2.
\end{aligned}$$

V tomto případě se už nevyskytují SH-módy, ale pouze symetrické a antisymetrické módy. Determinant soustavy vede následující bikubickou rovnici:

$$A\, l_z^6 + B\, l_z^4 + C\, l_z^2 + D = 0, \tag{1.66}$$

kde

$$\begin{aligned}
A =& p_4\, p_5, \\
B =& (p_2\, p_5 + p_4\, p_6 - p_5\, q_1,)\sin^2\phi + (p_1\, p_4 + p_5\, p_6 - p_4\, q_2)\cos^2\phi - (p_4 + p_4\, p_5 + p_5)\,\chi^2 \\
C =& p_4\, p_5\, r_1 + p_6\, r_2 + \sin^2\phi \cos^2\phi\ (q_3 - p_1\, q_1 - p_2\, q_2 + 2\, p_3\, q_4) + \chi^2\, r_3, \\
D =& r_4 + \left(r_5 + \left(S_{2-21} + S_{2-45} - \chi^2 + p_6\right)\chi^2\right)\ \chi^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 =& 2\ (p_3 + 2\, p_6)\sin^2\phi\ \cos^2\phi + S_{4-21} - \chi^2, \\
r_2 =& S_{4-21} - q_1\ \sin^4\phi + 2\ (q_4 - p_3)\sin^2\phi\ \cos^2\phi - q_2\ \cos^4\phi - (S_{2-45} + 1)\,\chi^2, \\
r_3 =& (q_1 - p_2\, p_5)\sin^2\phi + (q_2 - p_1\, p_4)\cos^2\phi - S_{2-21} + (p_4 + p_5 + 1)\,\chi^2, \\
r_4 =& \left(p_6\, S_{4-21} - (2\, p_3\, p_6 - q_3)\sin^2\phi\ \cos^2\phi\right) S_{2-45}, \\
r_5 =& (2\, p_3\, p_6 - q_3)\sin^2\phi\ \cos^2\phi - S_{2-21}\, S_{2-45} - p_6\,(S_{4-21} + S_{2-45})\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= c_{11}/c_{33}, & p_5 &= c_{55}/c_{33}, & q_1 &= (2\,p_4 + p_8)\,p_8, & S_{4-21} &= p_2\ \sin^4\phi + p_1\ \cos^4\phi,\\
p_2 &= c_{22}/c_{33}, & p_6 &= c_{66}/c_{33}, & q_2 &= (2\,p_5 + p_7)\,p_7, & S_{2-21} &= p_2\ \sin^2\phi + p_1\ \cos^2\phi,\\
p_3 &= c_{12}/c_{33}, & p_7 &= c_{13}/c_{33}, & q_3 &= p_1\,p_2 - p_3^2 & S_{2-45} &= p_4\ \sin^2\phi + p_5\ \cos^2\phi,\\
p_4 &= c_{44}/c_{33}, & p_8 &= c_{23}/c_{33}, & q_4 &= p_4\,p_7 + p_5\,p_8 + p_7\,p_8, & \chi^2 &= \rho\,\omega^2/c_{33}.
\end{aligned}
$$

Tvary rovnic (1.65) a (1.66) jsou odvozeny v `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1. Rovnice (1.66) je pak dále řešena numericky v Matlabu, [15].

Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$C_A\,\mathrm{cotg}\left(l_z^{(1)} kd\right) + C_B\mathrm{cotg}\left(l_z^{(3)} kd\right) + C_C\mathrm{cotg}\left(l_z^{(5)} kd\right) = 0 \tag{1.67}$$

nebo

$$C_A\,\mathrm{tg}\left(l_z^{(1)} kd\right) + C_B\mathrm{tg}\left(l_z^{(3)} kd\right) + C_C\mathrm{tg}\left(l_z^{(5)} kd\right) = 0 \tag{1.68}$$

kde

$$
\begin{aligned}
C_A &= \left(D_x^{(1)} D_y^{(3)} - D_x^{(3)} D_y^{(1)}\right) \left[D_z^{(5)} + \left(E_x^{(5)} - E_y^{(5)}\right) \cos\phi\ (c_{13} - c_{23})\right]\ c_{44}c_{55},\\
C_B &= \left(D_x^{(5)} D_y^{(1)} - D_x^{(1)} D_y^{(5)}\right) \left[D_z^{(3)} + \left(E_x^{(3)} - E_y^{(3)}\right) \cos\phi\ (c_{13} - c_{23})\right]\ c_{44}c_{55},\\
C_C &= \left(D_x^{(3)} D_y^{(5)} - D_x^{(5)} D_y^{(3)}\right) \left[D_z^{(1)} + \left(E_x^{(1)} - E_y^{(1)}\right) \cos\phi\ (c_{13} - c_{23})\right]\ c_{44}c_{55},
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
D_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)}\, l_z^{(n)} + \alpha_z^{(n)},\\
D_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)}\, l_z^{(n)},\\
D_z^{(n)} &= \alpha_z^{(n)}\, l_z^{(n)}\, c_{33} + \alpha_x^{(n)}\, c_{23},\\
E_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)}\ \cos\phi,\\
E_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)}\ \sin\phi,\\
\alpha_x^{(n)} &= g_1\,g_8\,l_z^{(n)^4} + (g_1\,g_2 + g_3\,g_8 - g_4^2)\ l_z^{(n)^2} + g_2\,g_3,\\
\alpha_y^{(n)} &= -g_5\,g_8\,l_z^{(n)^4} + (g_4\,g_6 - g_7\,g_8 - g_2\,g_5)\ l_z^{(n)^2} - g_2\,g_7,\\
\alpha_z^{(n)} &= \Big((g_4\,g_5 - g_1\,g_6)\ l_z^{(n)^2} - (g_3\,g_6 - g_4\,g_7)\Big)\ l_z^{(n)},
\end{aligned}
\right\}\quad \text{pro}\quad n = 1, 3, 5,
$$

a hodnoty g_1 až g_8 jsou stejné jako v rovnici (1.65).

Rovnice (1.67) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (1.68) závislost pro antisymetrické módy. Disperzní závislosti byly odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2 a tvary polarizací parciálních vln α_y a α_z v `Christoffel_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.1.

Mindlinovy okrajové podmínky $T_{xz} = 0,\quad u_z = 0$ nebo $T_{zz} = 0,\quad u_x = 0$ lze pro ortotropní desku použít při $\phi = 0°$ a $\phi = 90°$. Pro obecný úhel šíření, kdy nelze oddělit SH-módy, jsme k získání oddělených módů museli doplnit první dvojici výše uvedených okrajových podmínek o podmínku $T_{yz} = 0$ a druhou dvojici o podmínku $u_y = 0$. Takto doplněné podmínky jsou splněny, pokud platí

$$\sin\left(2\,l_z^{(n)} kd\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \qquad \text{pro}\quad n = 1, 3, 5 \quad \text{a}\quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.69}$$

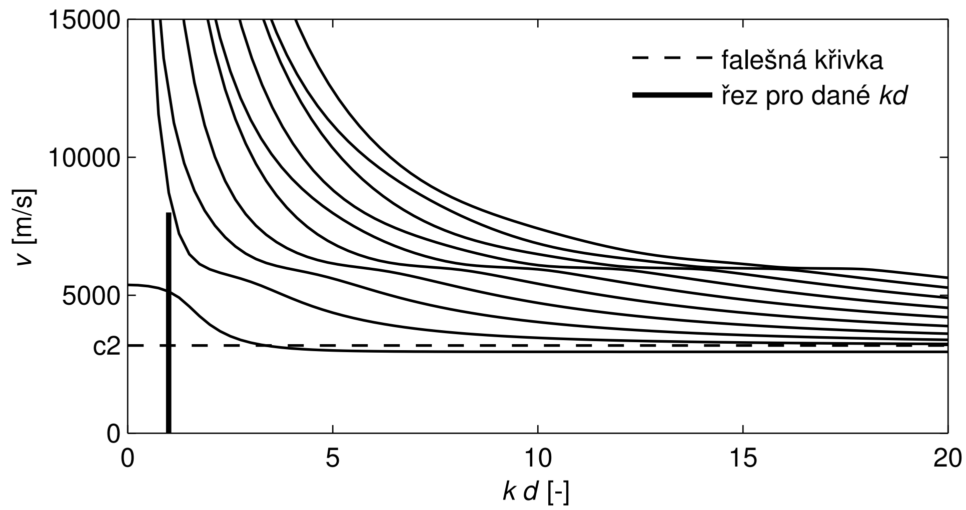
Tyto disperzní závislosti jsou odvozeny v souboru `dc_cubic_ortho.mw`, viz kapitola 3.2.

2 Interpretace falešných kořenů

Při numerických výpočtech disperzních závislostí tlustých desek pro ortotropní materiály jsme narazili na problém s výskytem falešných disperzních křivek. V následujících kapitolách provedeme interpretaci tohoto jevu a ukážeme si, proč se nejedná o skutečné disperzní křivky. Jelikož se podobné chování vyskytuje i u disperzních křivek pro izotropní tlustou desku, začneme analýzou disperze v izotropních deskách.

2.1 Izotropní deska

Disperzní závislosti v izotropní desce jsou dány vztahy (1.9) a (1.10). Průběh disperzních větví pro symetrické resp. antisymetrické módy je znázorněn na obr. 2.1 resp. obr. 2.3, Poissonovo číslo je 0.3.



Obrázek 2.1: Disperzní křivky pro symetrické módy izotropní desky

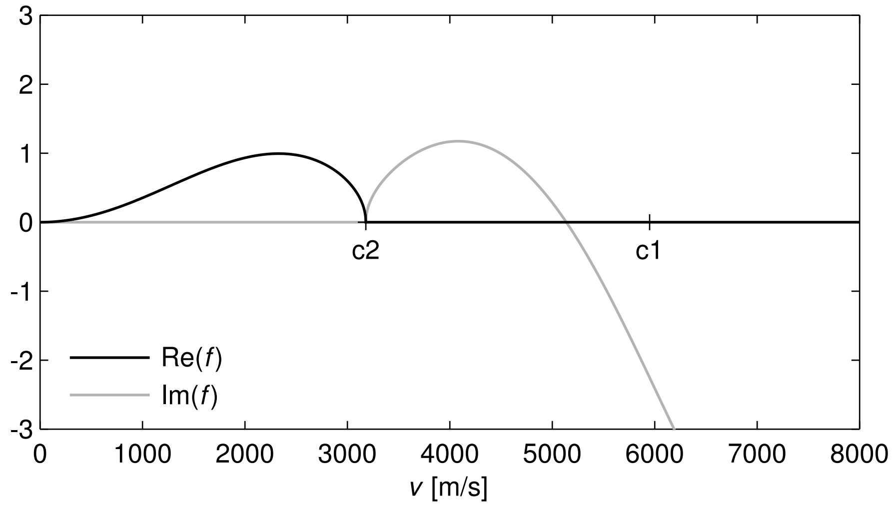
Po dosazení za δ a β do vztahu (1.9) je zřejmé, že kořenem by pro symetrické módy měla být i rychlost c_2. Na obr. 2.2 je vynesena levá strana rovnice (1.9) v závislosti na fázové rychlosti v v řezu zobrazeném na obr. 2.1. Že se nejedná o skutečný kořen disperzní závislosti, se lze přesvědčit výpočtem odpovídajících výchylek.

Výchylky ve směru osy x pro symetrické módy jsou dány vztahy:

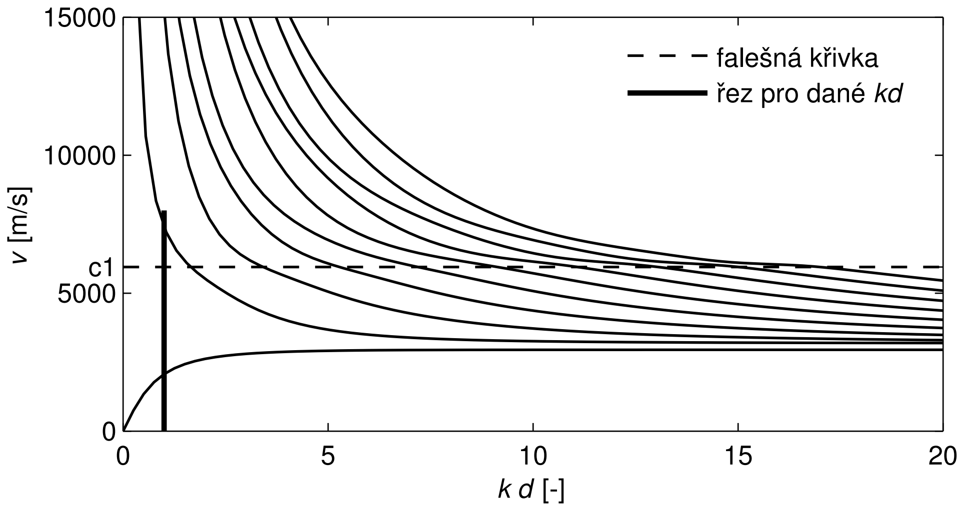
$$u_x = \frac{i\, c_2^2}{k\, v^2} \left[\left(\frac{v^2}{c_2^2} - 2 \right) \sinh(kd\,\beta) \cosh(kz\,\delta) + 2\,\beta\,\delta\, \sinh(kd\,\delta)\, \cosh(kz\,\beta) \right], \tag{2.1}$$

výchylky ve směru osy z

$$u_z = \frac{\delta\, c_2^2}{k\, v^2} \left[\left(\frac{v^2}{c_2^2} - 2 \right) \sinh(kd\,\beta) \sinh(kz\,\delta) + 2\, \sinh(kd\,\delta)\, \sinh(kz\,\beta) \right]. \tag{2.2}$$



Obrázek 2.2: Průběh funkce (1.9) pro symetrické módy.



Obrázek 2.3: Disperzní křivky pro antismetrické módy izotropní desky

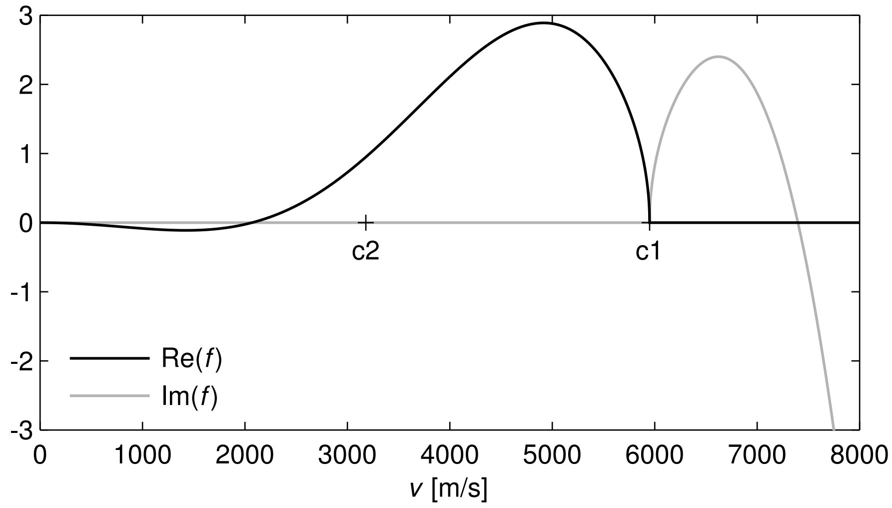
Dosadíme-li do těchto vztahů $v = c_2$, vyjdou nám výchylky nulové a nejedná se tudíž o skutečnou disperzní křivku.

Obdobně pro antisymetrické módy po dosazení za δ a β do vztahu (1.10) je zřejmé, že kořenem by měla být tentokrát rychlost c_1. Na obr. 2.4 je vynesena levá strana rovnice (1.10) v závislosti na fázové rychlosti v v řezu zobrazeném na obr. 2.3. Že se nejedná o skutečný kořen disperzní závislosti, se lze opět přesvědčit výpočtem odpovídajících výchylek:

$$u_x = \frac{i\,c_2^2}{kv^2}\left[\left(\frac{v^2}{c_2^2}-2\right)\cosh(kd\,\beta)\sinh(kz\,\delta)+2\beta\,\delta\cosh(kd\,\delta)\sinh(kz\,\beta)\right], \tag{2.3}$$

$$u_z = \frac{\delta\,c_2^2}{kv^2}\left[\left(\frac{v^2}{c_2^2}-2\right)\cosh(kd\,\beta)\cosh(kz\,\delta)+2\cosh(kd\,\delta)\cosh(kz\,\beta)\right]. \tag{2.4}$$

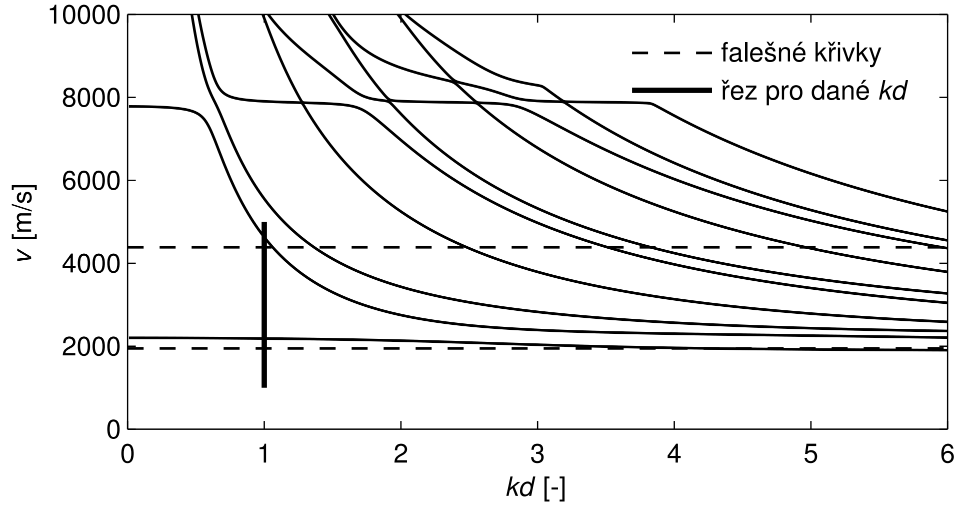
Dosadíme-li do těchto vztahů $v = c_1$, vyjdou nám výchylky nulové a nejedná se tudíž o skutečnou disperzní křivku. Při numerickém hledání kořenů nám tyto falešné křivky nedělají problémy, neboť neprotínají nulu.



Obrázek 2.4: Průběh funkce (1.10) pro antismetrické módy

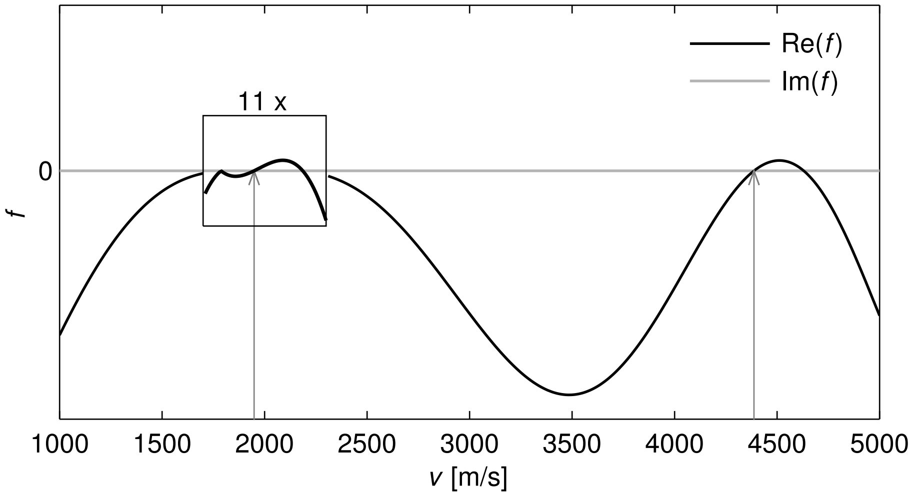
2.2 Ortotropní deska

Disperzní vztahy pro obecný úhel šíření ϕ v ortotropní desce jsou dány vztahy (1.67) a (1.68).



Obrázek 2.5: Disperzní křivky pro symetrické módy v ortotropní desce a směr šíření 30°

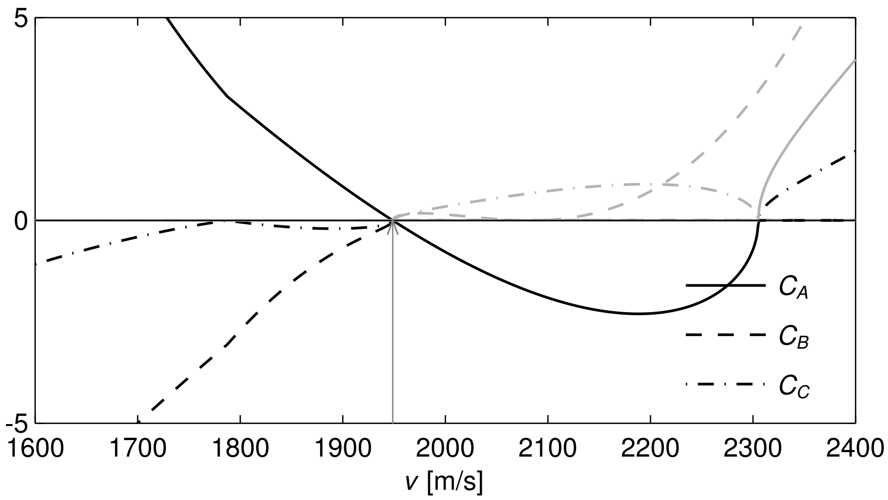
Průběh vypočtených disperzních větví pro směr šíření $\phi = 30°$ pro symetrické módy ortotropní desky je znázorněn na obr. 2.5. Materiál použitý pro výpočty (uhlíkový kompozit) měl následující parametry: $c_{11} = 128.2$ GPa, $c_{22} = c_{33} = 14.95$ GPa, $c_{44} = 3.81$ GPa, $c_{55} = c_{66} = 6.73$ GPa, $c_{12} = c_{13} = 6.9$ GPa, $c_{23} = 7.33$ GPa a $\rho = 1580$ kg/m^3, [20]. Na tomto obrázku je zajímavý především výskyt dvou bezdisperzních křivek (vykresleny čárkovaně). Tyto křivky se kříží s ostatními, což je v rozporu s teorií. Jelikož nás zajímala příčina jejich vzniku, vykreslili jsme si do obr. 2.6 levou stranu rovnice (1.67); šipkami je zvýrazněna poloha falešných kořenů. Z obrázku je vidět, že na rozdíl od případu izotropní desky, kde se funkce nuly dotkla, zde ji protíná. Proto numerický program bez problémů průsečík s nulou detekoval jako platný kořen disperzní křivky. Museli jsme proto hledat nějakou jinou metodu jak odstranit tyto falešné kořeny. Vykreslili jsme si tedy v jejich okolí průběhy proměnných C_A, C_B a C_C z rovnice (1.67),



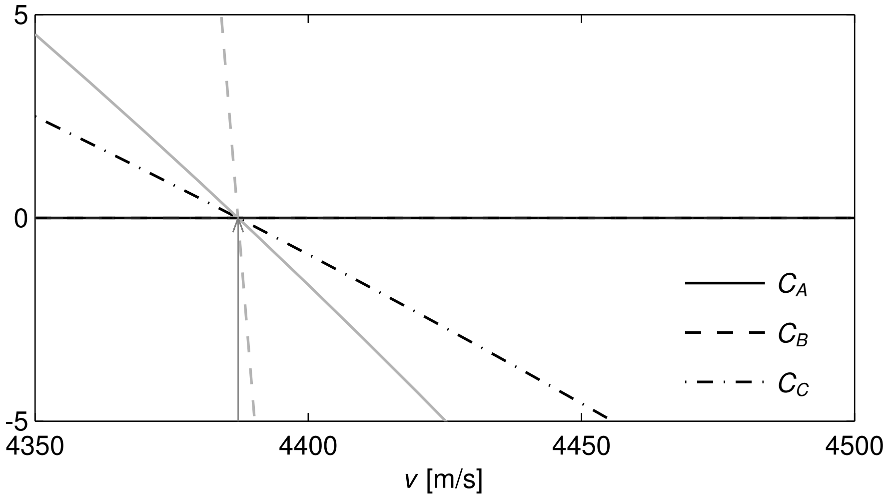
Obrázek 2.6: Průběh funkce (1.67) pro symetrické módy pro ortotropní desku pro $\phi = 30°$

viz obr. 2.7 a 2.8 (reálná část je vykreslena černě, imaginární šedě). Z obrázků je patrné, že v místech falešných kořenů jsou všechny tři proměnné C_A, C_B i C_C rovny nule a proto je splněna rovnice (1.67). Z těchto důvodů byl program doplněn o zachytávání falešných kořenů, které je založeno na detekci nulovosti proměnných C_A, C_B a C_C. Následnou analýzou jsme zjistili, že výchylky pro symetrické módy v těchto falešných kořenech jsou nulové.

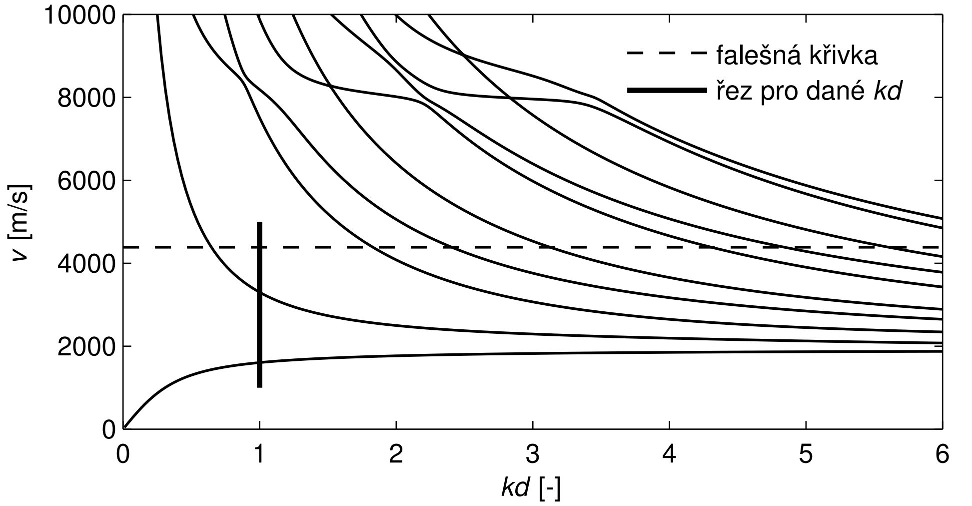
Průběh vypočtených disperzních větví pro antisymetrické módy ortotropní desky pro směr šíření $\phi = 30°$ je znázorněn na obr. 2.9. Na tomto obrázku se vyskytuje pouze jedna bezdisperzní křivka. Tato křivka se opět kříží s ostatními. Na obr. 2.10 je vykreslena levá strana rovnice (1.68). Z obrázku je opět vidět, že zde funkce nulovou hodnotu protíná. Stejně jako v případě symetrických módů je tento falešný kořen způsoben nulovostí všech tří proměnných C_A, C_B a C_C, viz obr. 2.8. Následnou analýzou jsme zjistili, že i výchylky pro antisymetrické módy v tomto falešném kořenu jsou nulové.



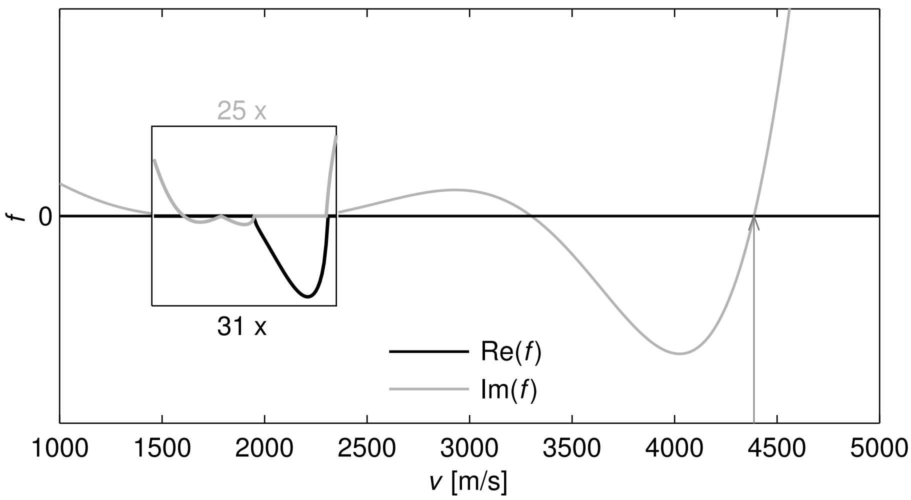
Obrázek 2.7: Průběhy parametrů C_A, C_B, C_C pro ortotropní desku pro $\phi = 30°$



Obrázek 2.8: Průběhy parametrů C_A, C_B, C_C pro ortotropní desku pro $\phi = 30°$



Obrázek 2.9: Disperzní křivky pro antisymetrické módy v ortotropní desce a směr šíření 30°



Obrázek 2.10: Průběh funkce (1.68) pro antisymetrické módy pro ortotropní desku pro $\phi = 30°$

3 Výpisy programů - Maple

3.1 Christoffel_cubic_ortho.mw

V tomto souboru je odvozen tvar Christoffely rovnice, tvary jejích kořenů a polarizací parciálních vln pro kubickou a ortotropní desku. Tento soubor je vytvořen systémem pro symbolické výpočty Maple, [14]

Pro kubickou desku a směr šíření $\phi = 0°$ jsou to rovnice (1.14) až (1.21), směr šíření $\phi = 45°$ rovnice (1.26) až (1.33) a pro obecný směr šíření rovnice (1.38) a (1.39).

V případě ortotropní desky jsou zde odvozeny pro směr šíření $\phi = 0°$ rovnice (1.43) až (1.50), směr šíření $\phi = 90°$ rovnice (1.54) až (1.61) a pro obecný směr šíření rovnice (1.65) a (1.66).

Determinant charakteristické rovnice vede na bikubickou rovnici pro **lz**.
Nalezení koeficientů této bikubické rovnice. Ty budou dále použity ve funkcích **Fortho_fi.m**

```
> restart;

> #material:= cubic;
  material:= ortotropic;
  smer:=phi;
  #smer:=0;    # (100)
  #smer:=Pi/4; # (110) - cubic
  #smer:=Pi/2; # (010) - ortotropic
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$material := cubic$ $smer := \phi$	$material := cubic$ $smer := 0$	$material := cubic$ $smer := \frac{1}{4}\pi$
$material := ortotropic$ $smer := \phi$	$material := ortotropic$ $smer := 0$	$material := ortotropic$ $smer := \frac{1}{2}\pi$

Vytvoření Christoffelovy matice ve shodě s článkem [21]:

```
> with(LinearAlgebra):
> Kmat := <<kx,  0,  0>|
          < 0, ky,  0>|
          < 0,  0, kz>|
          < 0, kz, ky>|
          <kz,  0, kx>|
          <ky, kx,  0>>:
> ky :=0: kz := kx*lz: kx := 1:
```

Tenzor elastických modulů

```
> if material = cubic then
    dd := <<c[1,1], c[1,2], c[1,2],      0,      0,      0>|
          <c[1,2], c[1,1], c[1,2],      0,      0,      0>|
          <c[1,2], c[1,2], c[1,1],      0,      0,      0>|
          <     0,      0,      0, c[4,4],      0,      0>|
          <     0,      0,      0,      0, c[4,4],      0>|
          <     0,      0,      0,      0,      0, c[4,4]>>:
  else
    dd := <<c[1,1], c[1,2], c[1,3],      0,      0,      0>|
          <c[1,2], c[2,2], c[2,3],      0,      0,      0>|
          <c[1,3], c[2,3], c[3,3],      0,      0,      0>|
          <     0,      0,      0, c[4,4],      0,      0>|
          <     0,      0,      0,      0, c[5,5],      0>|
          <     0,      0,      0,      0,      0, c[6,6]>>:
  end if:
```

Matice transformace soustavy souřadnic dle [2] (str. 294 - šestirozměrný prostor).

```
> aLU := Transpose(<<a[1,1]^2, a[1,2]^2, a[1,3]^2>|
                    <a[2,1]^2, a[2,2]^2, a[2,3]^2>|
                    <a[3,1]^2, a[3,2]^2, a[3,3]^2>>):
  aRU := 2*Transpose(<<a[1,2]*a[1,3], a[1,3]*a[1,1], a[1,1]*a[1,2]>|
                      <a[2,2]*a[2,3], a[2,3]*a[2,1], a[2,1]*a[2,2]>|
                      <a[3,2]*a[3,3], a[3,3]*a[3,1], a[3,1]*a[3,2]>>):
  aLB := Transpose(<<a[2,1]*a[3,1], a[2,2]*a[3,2], a[2,3]*a[3,3]>|
                    <a[3,1]*a[1,1], a[3,2]*a[1,2], a[3,3]*a[1,3]>|
                    <a[1,1]*a[2,1], a[1,2]*a[2,2], a[1,3]*a[2,3]>>):
  aRB := Transpose(
        <<a[2,2]*a[3,3]+a[2,3]*a[3,2], a[2,1]*a[3,3]+a[2,3]*a[3,1],
          a[2,2]*a[3,1]+a[2,1]*a[3,2]>|
         <a[1,2]*a[3,3]+a[1,3]*a[3,2], a[1,3]*a[3,1]+a[1,1]*a[3,3],
          a[1,1]*a[3,2]+a[3,1]*a[1,2]>|
         <a[1,2]*a[2,3]+a[1,3]*a[2,2], a[1,3]*a[2,1]+a[1,1]*a[2,3],
          a[1,1]*a[2,2]+a[1,2]*a[2,1]>>):
  aa := <<aLU, aLB>|<aRU, aRB>>:
```

Rotace okolo osy **z**.

```
> a := <<cos(f), -sin(f), 0>|
        <sin(f),  cos(f), 0>|
        <     0,       0, 1>>:
```

Rotovaná matice

```
> d_rot := Multiply(Multiply(aa,dd),Transpose(aa)):
  d_rot := Map(simplify,d_rot): f:=smer:
```

Charakteristická rovnice : Christoffelova matice - $rho * v^2$

```
> ChM := Multiply(Multiply(Kmat,d_rot),Transpose(Kmat))
        -Multiply(rho*v^2,IdentityMatrix(3)):
```

ChM.
Pro směr ϕ předpokládáme ChM v následujícím tvaru: (pořadí g je takové, aby odpovídalo publikacím [7], [8] a [12])

```
> material:=material; smer:=smer;
  if smer = phi then
    if material = cubic then
      K_a:=factor(select(has,ChM[1,1],cos));
      ChM := algsubs(K_a=K_A,ChM):
      K_b:=(ChM[1,2]);
      ChM := subs(K_b=K_B,ChM);
      print('ChM'=ChM);
      print(K_A=simplify(K_a));
      print(K_B=simplify(K_b));
    else
      N:=<<lz^2*g[9]+g[10]  |lz^2*g[5]+g[7]|lz*g[6]       >,
          <lz^2*g[5]+g[7]   |lz^2*g[1]+g[3]|lz*g[4]       >,
```

```
        <lz*g[6]          |lz*g[4]        |lz^2*g[8]+g[2]>>;
      print('N'=N);
    end if;
  else ChM:=ChM;
  end if;
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material := cubic$$

$$smer := \phi$$

$$ChM := \begin{bmatrix} K\_A + c_{1,1} + lz^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & K\_B & lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} \\ K\_B & -K\_A - \rho\, v^2 + \left(lz^2 + 1\right)\, c_{4,4} & 0 \\ lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} & 0 & lz^2\, c_{1,1} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{bmatrix}$$

$$K\_A = -2\, (-c_{1,2} - 2\, c_{4,4} + c_{1,1})\, \sin(\phi)^2\, \cos(\phi)^2$$

$$K\_B = -\left(2\, \cos(\phi)^2 - 1\right)\, cos(\phi)\, (-c_{1,2} - 2\, c_{4,4} + c_{1,1})\, \sin(\phi)$$

* nebo:

$$material := cubic$$

$$smer := 0$$

$$ChM := \begin{bmatrix} c_{1,1} + lz^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & 0 & lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} \\ 0 & lz^2\, c_{4,4} + c_{4,4} - \rho\, v^2 & 0 \\ lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} & 0 & lz^2\, c_{1,1} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{bmatrix}$$

* nebo:

$$material := cubic$$

$$smer := \frac{1}{4}\, \pi$$

$$ChM := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, c_{1,1} + \frac{1}{2}\, c_{1,2} + c_{4,4} + lz^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & 0 & lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} \\ 0 & lz^2\, c_{4,4} + \frac{1}{2}\, c_{1,1} - \frac{1}{2}\, c_{1,2} - \rho\, v^2 & 0 \\ lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} & 0 & lz^2\, c_{1,1} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{bmatrix}$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$

$$smer := \phi$$

$$N := \begin{bmatrix} lz^2\, g_9 + g_{10} & lz^2\, g_5 + g_7 & lz\, g_6 \\ lz^2\, g_5 + g_7 & lz^2\, g_1 + g_3 & lz\, g_4 \\ lz\, g_6 & lz\, g_4 & lz^2\, g_8 + g_2 \end{bmatrix}$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$

$$smer := 0$$

$$ChM := \begin{bmatrix} c_{1,1} + lz^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2 & 0 & lz\, c_{1,3} + lz\, c_{5,5} \\ 0 & lz^2\, c_{4,4} + c_{6,6} - \rho\, v^2 & 0 \\ lz\, c_{1,3} + lz\, c_{5,5} & 0 & lz^2\, c_{3,3} + c_{5,5} - \rho\, v^2 \end{bmatrix}$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$

$$smer := \frac{1}{2}\pi$$

$$ChM := \begin{bmatrix} c_{2,2} + lz^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & 0 & lz\, c_{2,3} + lz\, c_{4,4} \\ 0 & lz^2\, c_{5,5} + c_{6,6} - \rho\, v^2 & 0 \\ lz\, c_{2,3} + lz\, c_{4,4} & 0 & lz^2\, c_{3,3} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{bmatrix}$$

Součin Christofellovy matice s vektorem α

```
> Alpha:=Vector(3,symbol=alpha):
  if material = ortotropic and smer = phi then
    ChM_alpha:=(Multiply(N,Alpha)):
  else
    ChM_alpha:=(Multiply(ChM,Alpha)):
  end if:
```

Řešení Christoffelovy rovnice - nalezení tvaru pro α.

```
> material:=material; smer:=smer;
  eq:=Equate(ChM_alpha,Vector(3)):
  if material = cubic then
    if smer = phi then
      alpha[1]:=1:
      alpha[2]:=solve( eq[2],alpha[2]):
      alpha[3]:=solve( eq[3],alpha[3]):
      for i in [1,3,5] do
        alpha1[1,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[1]);
```

```
      alpha1[2,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[2]);
      alpha1[3,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[3]);
    end do:
  else
    alpha[1]:=-denom(solve( eq[1],alpha[3]));
    alpha[2]:=solve( eq[2],alpha[2]);
    alpha[3]:=solve( eq[1],alpha[3]);
    if smer = Pi/4 then
      alpha[1]:=factor(alpha[1]/2);
      alpha[3]:=expand(alpha[3]/2);
    end if;
    for i in [1,3] do
      alpha1[1,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[1]);
      alpha1[2,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[2]);
      alpha1[3,i]:=subs(lz=lz[i],Alpha[3]);
    end do:
    alpha1[1,5]:=0; alpha1[2,5]:=1; alpha1[3,5]:=0;
  end if:
elif smer = phi then # material=ortotropic
  alpha[1]:=1:
  alpha[3]:=solve(eq[2],alpha[3]):
  alpha[2]:=solve(eq[3],alpha[2]):
  alpha[3]:=simplify(alpha[3]):
  Alpha:=Map(sort,Alpha*denom(alpha[2]),lz):
  for i in [1,3,5] do
    alpha1[1,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[1]),lz[i]^2);
    alpha1[2,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[2]),lz[i]^2);
    alpha1[3,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[3]),lz[i]^2);
  end do:
else
  alpha[1]:=-denom(solve(eq[1],alpha[3]));
  alpha[2]:=solve(eq[2],alpha[2]);
  alpha[3]:=solve(eq[1],alpha[3]);
  for i in [1,3] do
    alpha1[1,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[1]),lz[i]^2);
    alpha1[2,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[2]),lz[i]^2);
    alpha1[3,i]:=collect(subs(lz=lz[i],Alpha[3]),lz[i]^2);
  end do:
  alpha1[1,5]:=0; alpha1[2,5]:=1; alpha1[3,5]:=0;
end if:
if smer = phi then
  for i from 1 to 3 do
    for j in [1,3,5] do
      print(alpha[i,j]=alpha1[i,j]);
    end do:
  end do:
else
  for j in [1,3,5] do
```

```
      for i from 1 to 3 do
        print(alpha[i,j]=alpha1[i,j]);
      end do:
    end do:
  end if;
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material := cubic$$

$$smer := \phi$$

$$\alpha_{1,1} = 1$$

$$\alpha_{1,3} = 1$$

$$\alpha_{1,5} = 1$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{K\_B}{-lz_1^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{K\_B}{-lz_3^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{2,5} = \frac{K\_B}{-lz_5^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,1} = \frac{lz_1\, (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_1^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,3} = \frac{lz_3\, (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_3^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,5} = \frac{lz_5\, (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_5^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

* nebo:

$$material := cubic$$

$$smer := 0$$

$$\alpha_{1,1} = -lz_1\, (c_{1,2} + c_{4,4})$$

$$\alpha_{2,1} = 0$$

$$\alpha_{3,1} = c_{1,1} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$

$$\alpha_{1,3} = -lz_3\, (c_{1,2} + c_{4,4})$$

$$\alpha_{2,3} = 0$$

$$\alpha_{3,3} = c_{1,1} + lz_3^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$

$$\alpha_{1,5} = 0$$

$$\alpha_{2,5} = 1$$

$$\alpha_{3,5} = 0$$

* nebo:

$$material := cubic$$
$$smer := \frac{1}{4}\,\pi$$
$$\alpha_{1,1} = -lz_1\,\left(c_{1,2} + c_{4,4}\right)$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = \frac{1}{2}\,c_{1,1} + \frac{1}{2}\,c_{1,2} + c_{4,4} + lz_1^2\,c_{4,4} - \rho\,v^2$$
$$\alpha_{1,3} = -lz_3\,\left(c_{1,2} + c_{4,4}\right)$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$
$$\alpha_{3,3} = \frac{1}{2}\,c_{1,1} + \frac{1}{2}\,c_{1,2} + c_{4,4} + lz_3^2\,c_{4,4} - \rho\,v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$
$$\alpha_{3,5} = 0$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$
$$smer := \phi$$
$$\alpha_{1,1} = g_8\,g_1 lz_1^4 + \left(-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1\right) lz_1^2 + g_2\,g_3$$
$$\alpha_{1,3} = g_8\,g_1 lz_3^4 + \left(-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1\right) lz_3^2 + g_2\,g_3$$
$$\alpha_{1,5} = g_8\,g_1 lz_5^4 + \left(-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1\right) lz_5^2 + g_2\,g_3$$
$$\alpha_{2,1} = -g_8\,g_5 lz_1^4 + \left(g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5\right) lz_1^2 - g_2\,g_7$$
$$\alpha_{2,3} = -g_8\,g_5 lz_3^4 + \left(g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5\right) lz_3^2 - g_2\,g_7$$
$$\alpha_{2,5} = -g_8\,g_5 lz_5^4 + \left(g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5\right) lz_5^2 - g_2\,g_7$$
$$\alpha_{3,1} = \left(g_5\,g_4 - g_1\,g_6\right) lz_1^3 + \left(g_7\,g_4 - g_3\,g_6\right)\,lz_1$$
$$\alpha_{3,3} = \left(g_5\,g_4 - g_1\,g_6\right) lz_3^3 + \left(g_7\,g_4 - g_3\,g_6\right)\,lz_3$$
$$\alpha_{3,5} = \left(g_5\,g_4 - g_1\,g_6\right) lz_5^3 + \left(g_7\,g_4 - g_3\,g_6\right)\,lz_5$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$
$$smer := 0$$
$$\alpha_{1,1} = \left(-c_{1,3} - c_{5,5}\right)\,lz_1$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = c_{1,1} + lz_1^2\,c_{5,5} - \rho\,v^2$$
$$\alpha_{1,3} = \left(-c_{1,3} - c_{5,5}\right)\,lz_3$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$

$$\alpha_{3,3} = c_{1,1} + lz_3^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$
$$\alpha_{3,5} = 0$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$
$$smer := \frac{1}{2}\,\pi$$
$$\alpha_{1,1} = \left(-c_{2,3} - c_{4,4}\right)\, lz_1$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = c_{2,2} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,3} = \left(-c_{2,3} - c_{4,4}\right)\, lz_3$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$
$$\alpha_{3,3} = c_{2,2} + lz_3^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$
$$\alpha_{3,5} = 0$$

Pro i ={2,4,6} platí lz[i]=-lz[i-1] $\Rightarrow$
pro směr ϕ: α[1,i]= α[1,i-1], α[2,i]= α[2,i-1], α[3,i]= -α[3,i-1],
a pro směry **0**, $\pi/4$ a $\pi/2$: α[1,i]= -α[1,i-1], α[2,i]= α[2,i-1], α[3,i]= α[3,i-1].
Tyto substituce jsou použity v **dc_cubic_ortho.mw** při odvozování disperzních vztahů.
Koeficienty α budou použity v Matlabu v **cubic_fi.m** a **ortho_fi.m**
Pro směry **0**, $\pi/4$ a $\pi/2$ rozklad ChM na dvě submatice **M1**, **M2** $\Rightarrow$ (anti-)symetrické módy a SH módy; poslední člen součinu **ChM_alpha** je roven determinantu submatice **M1** a ten musí být nulový. Pro směr ϕ je čitatel prvního členu součinu **ChM_alpha** je roven determinantu matice (**ChM** nebo **N**) a ten musí být nulový.

```
> if smer <> phi then
    M1 := SubMatrix(ChM,[1,3],[1,3]):
    M2 := SubMatrix(ChM,[2],[2]):
    sd1:= Determinant(M1):
    sd2:= Determinant(M2):
    if material = cubic then
      ChM_alpha[3]:=simplify(ChM_alpha[3]-sd1):
    else
      ChM_alpha[3]:=simplify(numer(ChM_alpha[3])-sd1):
    end if:
  else
    if material = cubic then
```

```
      det:=factor(Determinant(ChM));
      ChM_alpha[1]:=simplify(numer(ChM_alpha[1])-det):
    else
      ChM_alpha[1]:=simplify(numer(ChM_alpha[1])-Determinant(N)):
    end if:
  end if:
  simplify(ChM_alpha);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Určení hodnot g_1 až g_{10} pro ortotropní materiál a směr ϕ

```
> if material = ortotropic and smer = phi then
    c11 :=ChM[1,1]:
    g[9]:=coeff(c11,lz,2): A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
    for i in op(g[9]) do
      if has(i,c[4,4]) then A[1]:=A[1],i ;
      else A[2]:=A[2],i; end if
    end do:
    g9a  :=simplify(add(i,i=[A[1]]))+add(i,i=[A[2]]):
    g[9] :=g9a:
    g[10]:=coeff(c11,lz,0):
    for i from 1 to 4 do A[i]:=NULL: end do:
    for i in op(g[10]) do
      if   has(i,c[1,1]) then A[1]:=A[1],i ;
      elif has(i,c[2,2]) then A[2]:=A[2],i ;
      elif has(i,rho)    then A[3]:=A[3],i ;
      else A[4]:=A[4],i; end if
    end do:
    g10a:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+simplify(add(i,i=[A[2]]))
         +simplify(add(i,i=[A[4]]))+A[3]:
    g[10]:=g10a:
    #*************************************************************
    c12 :=ChM[1,2]:
    g[5]:=coeff(c12,lz,2):
    g[7]:=coeff(c12,lz,0):
    g7a :=algsubs(c[1,2]+2*c[6,6]-c[1,1]=pom,g[7]):
    A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
    for i in op(g7a)do
      if has(i,pom) then A[1]:=A[1],i ;
      else A[2]:=A[2],i; end if
    end do:
    g7b:=A[1]: g7c:=simplify(mul(i,i=[A[2]])):
    A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
    for i in op(g7b) do
      if has(i,pom) then A[1]:=A[1],i;
      else A[2]:=A[2],i; end if
    end do:
```

```
g7d :=factor(add(i,i=[A[1]]))+simplify(add(i,i=[A[2]])):
pom :=c[1,2]+2*c[6,6]-c[1,1]:
g7e :=g7d*g7c:
g[7]:=g7e:
#**************************************************************
c13 :=ChM[1,3]:

g[6]:=coeff(c13,lz,1):
for i from 1 to 3 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(g[6]) do
  if   has(i,c[2,3]) then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,c[4,4]) then A[2]:=A[2],i;
  else A[3]:=A[3],i; end if
end do:
g6a:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+simplify(add(i,i=[A[2]]))+add(i,i=[A[3]]):
A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
for i in op(g6a) do
  if has(i,sin) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
g6b:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+simplify(add(i,i=[A[2]])):
g[6]:=g6b:
#**************************************************************
c22 :=ChM[2,2]:
g[1]:=coeff(c22,lz,2):A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
for i in op(g[1]) do
  if has(i,c[5,5]) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
g[1]:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+add(i,i=[A[2]]):
g[3]:=coeff(c22,lz,0): A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
for i in op(g[3]) do
  if has(i,cos) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
g[3]:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+simplify(add(i,i=[A[2]])):
#**************************************************************
c23 :=ChM[2,3]:
g[4]:=coeff(c23,lz,1):
g[4]:=factor(g[4]):
#**************************************************************
c33 :=ChM[3,3]:
g[8]:=coeff(c33,lz,2):
g[2]:=coeff(c33,lz,0):A[1]:=NULL: A[2]:=NULL:
for i in op(g[2]) do
  if has(i,c[4,4]) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2], i; end if
end do:
```

```
    g[2]:=simplify(add(i,i=[A[1]]))+add(i,i=[A[2]]):
    print(simplify(N-ChM));
  end if:
```

* pro ortotropní materiál a směr ϕ se zde zobrazí:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V [7], [8] a [12] je uveden tvar g[7] následovně:

```
> if smer = phi then
    g_7:= sin(phi)*cos(phi)*
    (c[1,2]-c[2,2]+2*c[6,6]+cos(phi)^2*(c[1,1]-2*c[1,2]+c[2,2]-4*c[6,6]));
    simplify(g_7+g[7]);
  end if;
```

* pro ortotropní materiál a směr ϕ se zde zobrazí:

$$g\_7 := \sin(\phi)\,\cos(\phi)\,\left(c_{1,2} - c_{2,2} + 2\,c_{6,6} + (c_{1,1} - 2\,c_{1,2} - 4\,c_{6,6} + c_{2,2})\,\cos(\phi)^2\right)$$

$$0$$

Tedy g_7 = -g[7] $\Rightarrow$ α[2,n] a α[3,n] pro n= 1,3,5 se v [7], [8] a [12] od zdejšího vyjádření liší znaménkem u g_7.

```
> printlevel:=2:
  if material = ortotropic and smer = phi then
    for i from 1 to 10 do g[i]:=g[i] end do;
  end if;
```

* pro ortotropní materiál a směr ϕ se zde zobrazí:

$$g_1 := \cos(\phi)^2\, c_{4,4} + \sin(\phi)^2\, c_{5,5}$$

$$g_2 := \sin(\phi)^2\, c_{4,4} + \cos(\phi)^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2$$

$$g_3 := \sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(c_{1,1} - 2\,c_{1,2} - 4\,c_{6,6} + c_{2,2}) + c_{6,6} - \rho\, v^2$$

$$g_4 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,(c_{2,3} - c_{1,3} + c_{4,4} - c_{5,5})$$

$$g_5 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,(c_{4,4} - c_{5,5})$$

$$g_6 := \sin(\phi)^2\,(c_{2,3} + c_{4,4}) + \cos(\phi)^2\,(c_{1,3} - c_{5,5})$$

$$g_7 := -\left(-\cos(\phi)^2\,(-c_{1,1} + c_{1,2} + 2\,c_{6,6}) + \sin(\phi)^2\,(c_{1,2} + 2\,c_{6,6} - c_{2,2})\right)\cos(\phi)\,\sin(\phi)$$

$$g_8 := c_{3,3}$$

$$g_9 := \sin(\phi)^2\, c_{4,4} + \cos(\phi)^2\, c_{5,5}$$

$$g_{10} := \cos(\phi)^4\, c_{1,1} + c_{2,2}\,\sin(\phi)^4 + 2\,(c_{1,2} + 2\,c_{6,6})\,\cos(\phi)^2\,\sin(\phi)^2 - \rho\, v^2$$

Po úpravách dostáváme následující tvary, ty jsou použity v Matlabu v **ortho_fi.m**

```
> if material = ortotropic and smer = phi then
    g[3]:=algsubs(c[1,1]-2*c[1,2]+c[2,2]-4*c[6,6]=Lambda[5],g[3]);
    g[4]:=algsubs(c[4,4]-c[5,5]=Lambda[1],g[4]):
    g[4]:=factor(algsubs(c[1,3]-c[2,3]=Lambda[2],g[4]));
    g[5]:=algsubs(c[4,4]-c[5,5]=Lambda[1],g[5]);
    g[7]:=algsubs(c[1,2]+2*c[6,6]-c[1,1]=Lambda[3],g[7]):
    g[7]:=algsubs(c[1,2]+2*c[6,6]-c[2,2]=Lambda[4],g[7]);
  end if:
  if material = ortotropic and smer = phi then
    for i in {3,4,5,7} do g[i]:=g[i] end do;
    Lambda[1]:=c[4,4]-c[5,5];
    Lambda[2]:=c[1,3]-c[2,3];
    Lambda[5]:= -(Lambda[3]+Lambda[4]);
    Lambda[3]:=c[1,2]+2*c[6,6]-c[1,1];
    Lambda[4]:=c[1,2]+2*c[6,6]-c[2,2];
  end if;
```

* pro ortotropní materiál a směr ϕ se zde zobrazí:

$$g_3 := \sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,\Lambda_5 + c_{6,6} - \rho\,v^2$$
$$g_4 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,\left(-\Lambda_2 + \Lambda_1\right)$$
$$g_5 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,\Lambda_1$$
$$g_7 := -\cos(\phi)\,\sin(\phi)\,\left(\sin(\phi)^2\,\Lambda_4 - \cos(\phi)^2\,\Lambda_3\right)$$
$$\Lambda_1 := c_{4,4} - c_{5,5}$$
$$\Lambda_2 := c_{1,3} - c_{2,3}$$
$$\Lambda_5 := -\Lambda_3 - \Lambda_4$$
$$\Lambda_3 := -c_{1,1} + c_{1,2} + 2\,c_{6,6}$$
$$\Lambda_4 := c_{1,2} - c_{2,2} + 2\,c_{6,6}$$

Řešení charakteristické rovnice $\Rightarrow$ výpočet determinantu
Pro směry **0**, $\pi/4$ a $\pi/2$ rozklad ChM na dvě submatice $\Rightarrow$ (anti-)symetrické módy a SH módy
1. subdeterminant $=$ 0 $\rightarrow$ symetrické a antisymetrické módy

```
> if smer <> phi then
    d4:=coeff(sd1,lz,4);
    d2:=coeff(sd1,lz,2);
    d0:=coeff(sd1,lz,0);
    print('material'=material);
    print('smer'=smer); print(M1=0);
    if material = cubic then
      if smer = 0 then
        B[1]:=select(has,d2,{c[1,1],rho});
        B[2]:=remove(has,d2,{c[1,1],rho});
        B[1]:=factor(select(has,B[1],c[1,1]))
             +factor(remove(has,B[1],c[1,1])+c[4,4]^2);
```

```
      B[2]:=factor(B[2]-c[4,4]^2);
      print(lz^2=(-B+sqrt(B^2-A))/2/d4);
      print(lz^2=(-B-sqrt(B^2-A))/2/d4);
      a:=factor(4*d0*d4);
      b:=B[1]+B[2];
      print(A=a);
      print(B=b);
    else
      d4:=2*d4; d2:=2*d2;  d0:=2*d0;
      B[1]:=select(has,d2,rho);
      B[2]:=remove(has,d2,{c[1,1]^2,rho});
      B[3]:=select(has,d2,c[1,1]^2);
      print(lz^2=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/2/A);
      print(lz^2=(-B-sqrt(B^2-4*A*C))/2/A);
      a:=d4;
      b:=factor(B[1])+factor(B[2])+B[3];
      c_print:=factor(d0));
      print(A=a);
      print(B=b);
      print(C=c_print);
    end if;
    print(simplify(d2-b));
  else  #ortotropic
    for i from 1 to 3 do  A[i]:=NULL:  end do:
    for i in op(d2) do
      if   has(i,c[3,3]) then A[1]:=A[1],i ;
      elif has(i,v)      then A[2]:=A[2],i ;
      else A[3]:=A[3],i; end if:
    end do:
    B[1]:=factor(add(i,i=[A[1]]));
    if smer=0 then
      B[2]:=factor(add(i,i=[A[2]])+c[5,5]^2);
      B[3]:=factor(add(i,i=[A[3]])-c[5,5]^2);
    else
      B[2]:=factor(add(i,i=[A[2]])+c[4,4]^2);
      B[3]:=factor(add(i,i=[A[3]])-c[4,4]^2);
    end if;
    print(lz^2=(-B+sqrt(B^2-A))/2/d4);
    print(lz^2=(-B-sqrt(B^2-A))/2/d4);
    a:=4*d4*factor(d0);
    b:=B[1]+B[2]+B[3];
    print(A=a);
    print(B=b);
  end if:
else
  det := factor(Determinant(ChM)):
end if:
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material = cubic$$

$$smer = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} c_{1,1} + lz^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} \\ lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} & lz^2\, c_{1,1} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{array}\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{1,1}\, c_{4,4}}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{1,1}\, c_{4,4}}$$

$$A = 4\, \left(-c_{4,4} + \rho\, v^2\right)\, \left(-c_{1,1} + \rho\, v^2\right)\, c_{1,1}\, c_{4,4}$$

$$B = -c_{1,1}\, \left(-c_{1,1} + \rho\, v^2\right) - c_{4,4}\, \left(-c_{4,4} + \rho\, v^2\right) - \left(c_{1,2} + c_{4,4}\right)^2$$

$$0$$

* nebo:

$$material = cubic$$

$$smer = \frac{1}{4}\, \pi$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\, c_{1,1} + \frac{1}{2}\, c_{1,2} + c_{4,4} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2 & lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} \\ lz\, c_{1,2} + lz\, c_{4,4} & lz^2\, c_{1,1} + c_{4,4} - \rho\, v^2 \end{array}\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4\, A\, C}}{A}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4\, A\, C}}{A}$$

$$A = 2\, c_{1,1}\, c_{4,4}$$

$$B = -2\, v^2\, \rho\, \left(c_{4,4} + c_{1,1}\right) + \left(c_{1,2} + 2\, c_{4,4}\right)\, \left(c_{1,1} - 2\, c_{1,2}\right) + c_{1,1}^2$$

$$C = \left(-c_{4,4} + \rho\, v^2\right)\, \left(2\, \rho\, v^2 - c_{1,1} - c_{1,2} - 2\, c_{4,4}\right)$$

$$0$$

* nebo:

$$material = ortotropic$$

$$smer = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} c_{1,1} + lz^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2 & lz\, c_{1,3} + lz\, c_{5,5} \\ lz\, c_{1,3} + lz\, c_{5,5} & lz^2\, c_{3,3} + c_{5,5} - \rho\, v^2 \end{array}\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{5,5}\, c_{3,3}}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{5,5}\, c_{3,3}}$$

$$A = 4\,c_{5,5}\,c_{3,3}\,\left(-c_{1,1} + \rho\,v^2\right)\,\left(-c_{5,5} + \rho\,v^2\right)$$

$$B = -c_{3,3}\,\left(-c_{1,1} + \rho\,v^2\right) - c_{5,5}\,\left(-c_{5,5} + \rho\,v^2\right) - \left(c_{1,3} + c_{5,5}\right)^2$$

* nebo:

$$material = ortotropic$$

$$smer = \frac{1}{2}\,\pi$$

$$\begin{bmatrix} c_{2,2} + lz^2\,c_{4,4} - \rho\,v^2 & lz\,c_{2,3} + lz\,c_{4,4} \\ lz\,c_{2,3} + lz\,c_{4,4} & lz^2\,c_{3,3} + c_{4,4} - \rho\,v^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{4,4}\,c_{3,3}}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{4,4}\,c_{3,3}}$$

$$A = 4\,c_{4,4}\,c_{3,3}\,\left(-c_{4,4} + \rho\,v^2\right)\,\left(-c_{2,2} + \rho\,v^2\right)$$

$$B = -c_{3,3}\,\left(-c_{2,2} + \rho\,v^2\right) - c_{4,4}\,\left(-c_{4,4} + \rho\,v^2\right) - \left(c_{2,3} + c_{4,4}\right)^2$$

2. subdeterminant $= 0 \rightarrow$ SH módy

```
> if smer <> phi then
    print('material'=material);
    print('smer'=smer);
    print(M2=0);
    if material = cubic and smer = 0 then
      print(expand(isolate(Determinant(M2)=0,lz^2)));
    else
       print(isolate(Determinant(M2)=0,lz^2));
    end if;
  end if;
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material = cubic$$

$$smer = 0$$

$$\left[lz^2\,c_{4,4} + c_{4,4} - \rho\,v^2\right] = 0$$

$$lz^2 = -1 + \frac{\rho\,v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material = cubic$$

$$smer = \frac{1}{4}\,\pi$$

$$\left[lz_1^2\, c_{4,4} + \frac{1}{2}\, c_{1,1} - \frac{1}{2}\, c_{1,2} - \rho\, v^2\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{-\frac{1}{2}\, c_{1,1} + \frac{1}{2}\, c_{1,2} + \rho\, v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material = ortotropic$$

$$smer = 0$$

$$\left[lz^2\, c_{4,4} + c_{6,6} - \rho\, v^2\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{-c_{6,6} + \rho\, v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material = ortotropic$$

$$smer = \frac{1}{2}\,\pi$$

$$\left[lz^2\, c_{5,5} + c_{6,6} - \rho\, v^2\right] = 0$$

$$lz^2 = \frac{-c_{6,6} + \rho\, v^2}{c_{5,5}}$$

Řešení pro směr ϕ: determinant = 0 $\rightarrow$ symetrické a antisymetrické módy
Ze vzniklé bikubické rovnice získáme členy u koeficientu 6., 4., 2. a 0-tého řádu.
V následujícím použijeme tyto substituce (pro ortotropní materiál):
p[1]:=c[1,1]/c[3,3]: p[2]:=c[2,2]/c[3,3]: p[3]:=c[1,2]/c[3,3]: p[4]:=c[4,4]/c[3,3]:
p[5]:=c[5,5]/c[3,3]: p[6]:=c[6,6]/c[3,3]: p[7]:=c[1,3]/c[3,3]: p[8]:=c[2,3]/c[3,3]:

```
> if smer = phi then
  print('material'=material);
  print('smer'=smer);
  print(A*lz^6+B*lz^4+C*lz^2+D=0);
  if material = cubic then
    unprotect(D);
    K_6 := coeff(det,lz,6):
    K_4 := factor(coeff(det,lz,4));
    K_2 := coeff(det,lz,2):
    K_0 := coeff(det,lz,0):
    #*********************************************************
    A[1]:=select(has,K_4,rho); A[2]:=remove(has,K_4,rho);
    A[3]:=factor(select(has,remove(has,A[1],rho),c[4,4]));
    A[4]:=factor(select(has,A[1],rho));
    A[5]:=remove(has,A[1],{rho,c[4,4]});
    B:=add(-A[i],i =3..5)*(-A[2]);
    #*********************************************************
    A[1]:=factor(select(has,K_2,rho^2));
    A[2]:=factor(select(has,K_2,{K_A^2,K_B^2}));
```

```
  A[3]:=factor(select(has,K_2,{c[1,2]^2,c[1,1]^2})):
  A[3]:=simplify(remove(has,A[3],K_A))*select(has,A[3],K_A);
  A[4]:=remove(has,K_2,{rho^2,K_A^2,K_B^2,c[1,2]^2,c[1,1]^2}):
  A[5]:=select(has,A[4],{K_A,rho}):
  A[5]:=factor(remove(has,A[5],c[1,2]))+factor(select(has,A[5],c[1,2]));
  A[6]:=factor(remove(has,A[4],{K_A,rho}));
  C:=add(A[i],i in {1,5,3,2,6});
  #**********************************************************
  A[1]:=select(has,K_0,v^6):
  A[2]:=factor(select(has,K_0,v^4)):
  A[3]:=factor(select(has,K_0,{K_A,K_B})):
  A[3]:=(factor(select(has,(select(has,A[3],K_A),K_A)))
        +remove(has,(select(has,A[3],K_A),K_A)))*remove(has,A[3],K_A):
  A[4]:=remove(has,K_0,{v^6,v^4,K_A,K_B}):
  A[4]:=factor(select(has,A[4],rho))+factor(remove(has,A[4],rho)):
  D:=add(A[i], i=1..4);
  print('A'=K_6);
  print('B'=B);
  print('C'=C);
  print('D'=D);
else # material = ortotropic
  aC_6:= simplify(coeff(det,lz,6)/c[3,3]^3):
  C_6 := algsubs(c[4,4]/c[3,3]=p[4],aC_6):
  C_6 := algsubs(c[5,5]/c[3,3]=p[5],C_6);
  print('A'=C_6);
  #***************************************************************
  C_4:= expand(simplify(coeff(det,lz,4)/c[3,3]^3)):
  C_4:=expand(algsubs(c[1,1]/c[3,3]=p[1],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[2,2]/c[3,3]=p[2],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[4,4]/c[3,3]=p[4],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[5,5]/c[3,3]=p[5],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[6,6]/c[3,3]=p[6],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[1,3]/c[3,3]=p[7],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(c[2,3]/c[3,3]=p[8],C_4)):
  C_4:=expand(algsubs(rho*v^2/c[3,3]=chi^2,C_4)):
  for i from 1 to 3 do A[i]:=NULL: end do:
  for i in op(C_4) do
    if   has(i,chi) then A[1]:=A[1],i ;
    elif has(i,cos) then A[2]:=A[2],i ;
    else A[3]:=A[3],i; end if
  end do:
  for j from 1 to 3 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
  r_chi:=factor(B[1]): r_c:=B[2]/cos(phi)^2+B[3]: r_s:=B[3]:
  for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
  for i in op(r_c) do
    if has(i,{p[1],p[6]}) then A[1]:=A[1],i;
    else A[2]:=A[2],i; end if
  end do:
```

```
for j from 1 to 2 do B[j]:=factor(add(i,i=[A[j]])) end do:
r_c:=(B[1]+B[2])*cos(phi)^2:
for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(r_s) do
  if has(i,{p[2],p[6]}) then A[1]:=A[1],i;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
for j from 1 to 2 do B[j]:=factor(add(i,i=[A[j]])) end do:
r_s:=(B[1]+B[2])*sin(phi)^2:
q1:=p[8]*(p[8]+2*p[4]); q2:=p[7]*(p[7]+2*p[5]);
print('q[1]'=q1); print('q[2]'=q2);
r_4s:=subs(p[8]+2*p[4]=qq[1],r_s): r_4s:=algsubs(p[8]*qq[1]=q[1],r_4s):
r_4c:=subs(p[7]+2*p[5]=qq[2],r_c): r_4c:=algsubs(p[7]*qq[2]=q[2],r_4c):
C4:=r_4s+r_4c+r_chi;
print('B'=C4);
B_4:=eval(C4,[q[1]=q1,q[2]=q2]):
C_4:=B_4:
#***************************************************************
C_2:=expand(simplify(coeff(det,lz,2)/c[3,3]^3)):
C_2:=expand(algsubs(c[1,1]/c[3,3]=p[1],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[2,2]/c[3,3]=p[2],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[1,2]/c[3,3]=p[3],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[4,4]/c[3,3]=p[4],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[5,5]/c[3,3]=p[5],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[6,6]/c[3,3]=p[6],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[1,3]/c[3,3]=p[7],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(c[2,3]/c[3,3]=p[8],C_2)):
C_2:=expand(algsubs(rho*v^2/c[3,3]=chi^2,C_2)):
for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C_2) do
  if has(i,p[5]) then
    if has(i,p[4]) then A[1]:=A[1],i ;else A[2]:=A[2], i end if
  else A[2]:=A[2], i; end if
end do:
for j from 1 to 2 do B[j]:=add(i,i=[A[j]]) end do:
C2_p[5]p[4]:=factor(B[1])/p[5]/p[4]: C2_b:=B[2]:
for i from 1 to 5 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C2_p[5]p[4]) do
  if   has(i,p[1]) then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,p[2]) then A[2]:=A[2],i ;
  elif has(i,p[3]) then A[3]:=A[3],i ;
  elif has(i,p[6]) then A[4]:=A[4],i ;
  else A[5]:=A[5],i; end if
end do:
for j from 1 to 5 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
print('S_4_21'=B[1]+B[2]);
r_1:=factor(B[3]+B[4])+S_4_21+B[5]:
#***************************************************************
```

```
for i from 1 to 3 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C2_b) do
  if   has(i,p[6]) then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,chi)then A[2]:=A[2],i ;
  else A[3]:=A[3],i; end if
end do:
for j from 1 to 3 do B[j]:=factor(add(i,i=[A[j]])) end do:
C2_p[6]:=B[1]/p[6]: C2_chi:=B[2]/chi^2:
C2_sc:=simplify(B[3]/sin(phi)^2/cos(phi)^2):
for i from 1 to 9 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C2_p[6]) do
  if has(i,chi) then
    if has(i,p[4]) then A[1]:=A[1],i ; else A[2]:=A[2], i;end if
  elif has(i,p[8]) then
     if has(i/p[8]/sin(phi)^2,{p[4],p[8]})then A[3]:=A[3],i;
    else A[4]:=A[4],i;end if
  elif has(i,p[1]) then A[5]:=A[5],i ;
  elif has(i,p[4]) then A[6]:=A[6],i ;
  elif has(i,p[2]) then A[7]:=A[7],i ;
  elif has(i,p[7]) then A[8]:=A[8],i ;
  else A[9]:=A[9],i; end if
end do:
for j from 1 to 9 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
B[421]:=B[5]+B[7]:  #S_4_21 =B[421];
B[245]:=p[4]*sin(phi)^2+cos(phi)^2*p[5]: #S_2_45 =B[245];
q4:=p[5]*p[8]+p[7]*p[8]+p[4]*p[7];
print('S_2_45'=B[245]); print('q4'=q4);
r_2a:=subs(p[8]+2*p[4]=qq[1],B[3]): r_2a:=algsubs(p[8]*qq[1]=q[1],r_2a):
r_2b:=subs(p[7]+2*p[5]=qq[2],B[8]): r_2b:=algsubs(p[7]*qq[2]=q[2],r_2b):
r_2c:=algsubs(p[5]*p[8]+p[7]*p[8]+p[4]*p[7]=q[4],factor(B[4]+B[6]+B[9])):
r_2d:=algsubs(p[4]*sin(phi)^2+cos(phi)^2*p[5]=S_2_45,factor(B[1]+B[2])):
r_2:=S_4_21+r_2a+r_2c+r_2b+r_2d:
#****************************************************************
for i from 1 to 5 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C2_sc) do
  if has(i,p[1]) then
    if   has(i,p[8])  then A[1]:=A[1],i ; else A[2]:=A[2],i ;end if
    elif has(i,p[2])  then A[3]:=A[3],i ;
    elif has(i,p[3]^2)then A[4]:=A[4],i ;
    else A[5]:=A[5],i ;
  end if
end do:
for j from 1 to 5 do B[j]:=factor(add(i,i=[A[j]])) end do:
q3:=B[2]+B[4];
print('q[3]'=q3);
r_a:=subs(p[8]+2*p[4]=qq[1],B[1]): r_sc_a:=algsubs(p[8]*qq[1]=q[1],r_a):
r_b:=subs(p[7]+2*p[5]=qq[2],B[3]): r_sc_b:=algsubs(p[7]*qq[2]=q[2],r_b):
r_sc_c:=algsubs(p[5]*p[8]+p[7]*p[8]+p[4]*p[7]=q[4],B[5]):
```

```
r_sc:=(q[3]+r_sc_a+r_sc_b+r_sc_c):
#***************************************************************
C2_chi:
for i from 1 to 7 do  A[i]:=NULL:  end do:
for i in op(C2_chi) do
  if   has(i,chi)then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,p[7]) then A[2]:=A[2],i ;
  elif has(i,p[8]) then A[3]:=A[3],i ;
  elif has(i,p[4]) then A[4]:=A[4],i ;
  elif has(i,p[5]) then A[5]:=A[5],i ;
  elif has(i,p[1]) then A[6]:=A[6],i ;
  else A[7]:=A[7],i ;
  end if
end do:
for j from 1 to 7 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
B[221]:=-(B[6]+B[7]): #S_2_21 =B[221];
print('S_2_21'=B[221]);
r_3a:=subs(p[8]+2*p[4]=qq[1],B[3]): r_3a:=algsubs(p[8]*qq[1]=q[1],r_3a):
r_3b:=subs(p[7]+2*p[5]=qq[2],B[2]): r_3b:=algsubs(p[7]*qq[2]=q[2],r_3b):
r_3 :=collect(r_3a+B[5],sin(phi)^2)+collect(r_3b+B[4],cos(phi)^2)
     -S_2_21+factor(B[1]):
#***************************************************************
C2:=r1*p[4]*p[5]+p[6]*r2+r[sc]*sin(phi)^2*cos(phi)^2+r3*chi^2;
print('C'=C2); print('r[1]'=r_1); print('r[2]'=r_2);
print('r[3]'=r_3); print('r[sc]'=r_sc);
r[1]:=r_1; r[2]:=r_2; r[3]:=r_3; r[sc]:=r_sc;
B_2:=eval(C2,[S_4_21 =B[421],S_2_21 =B[221],S_2_45 =B[245],
              q[1]=q1,q[2]=q2,q[3]=q3,q[4]=q4]):
C_2:=B_2:
#***************************************************************
C_0:=expand(simplify(coeff(det,lz,0)/c[3,3]^3)):
C_0:=expand(algsubs(c[1,1]/c[3,3]=p[1],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[2,2]/c[3,3]=p[2],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[1,2]/c[3,3]=p[3],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[4,4]/c[3,3]=p[4],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[5,5]/c[3,3]=p[5],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[6,6]/c[3,3]=p[6],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[1,3]/c[3,3]=p[7],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(c[2,3]/c[3,3]=p[8],C_0)):
C_0:=expand(algsubs(rho*v^2/c[3,3]=chi^2,C_0)):
for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C_0) do
  if has(i,chi) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
for j from 1 to 2 do B[j]:=add(i,i=[A[j]]) end do:
C0_chi:=factor(B[1])/chi^2:
C0_b  :=simplify(factor(B[2])/(cos(phi)^2*p[5]+sin(phi)^2*p[4])):
```

```
for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C0_b) do
  if has(i,p[6]) then A[1]:=A[1],i ;
  else A[2]:=A[2],i; end if
end do:
for j from 1 to 2 do B[j]:=add(i,i=[A[j]]) end do:
C0_p[6]:=factor(B[1]/p[6]):
C0_c :=simplify(factor(B[2])/(p[1]*p[2]-p[3]^2))*(p[1]*p[2]-p[3]^2):
for i from 1 to 3 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C0_p[6]) do
  if   has(i,p[3]) then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,p[1]) then A[2]:=A[2],i ;
  else A[3]:=A[3],i; end if
end do:
for j from 1 to 3 do B[j]:=add(i,i=[A[j]]) end do:
C0_63:=simplify(B[1]/p[3])*p[3]: C0_61:=factor(B[2]/p[1])*p[1]:
C0_62:=simplify(B[3]/p[2])*p[2]:
B[421]:=C0_61+C0_62: S_4_21 =B[421]:
r_4a:=algsubs(p[1]*p[2]-p[3]^2=q[3],factor(p[6]*C0_63+C0_c)):
C0_d:=p[6]*S_4_21+r_4a:
r_4:=C0_d*S_2_45:
#***************************************************************
C0_chi:
for i from 1 to 7 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C0_chi) do
  if   has(i,chi)then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,p[3]) then A[2]:=A[2],i ;
  elif has(i,p[6]) then A[3]:=A[3],i ;
  elif has(i,p[4]) then A[4]:=A[4],i ;
  elif has(i,p[5]) then A[5]:=A[5],i
  else A[6]:=A[6],i; end if
end do:
for j from 1 to 6 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
C0_chi2:=factor(B[1])/chi^2:
r_5a:=algsubs(p[1]*p[2]-p[3]^2=q[3],factor(B[2]+factor(B[6]))):
r_5b:=algsubs(sin(phi)^2*p[2]+cos(phi)^2*p[1]=S_2_21,factor(B[4]+B[5])):
r_5b:=simplify(algsubs(sin(phi)^2*p[4]+cos(phi)^2*p[5]=S_2_45,r_5b)):
r_a :=r_5a+r_5b:
C0_e:=factor(B[3]):
for i from 1 to 3 do A[i]:=NULL: end do:
for i in op(C0_e/p[6]) do
  if   has(i,p[4]) then A[1]:=A[1],i ;
  elif has(i,p[2]) then A[2]:=A[2],i ;
  else A[3]:=A[3],i; end if
end do:
for j from 1 to 3 do B[j]:=simplify(add(i,i=[A[j]])) end do:
r_5c:=algsubs(sin(phi)^4*p[2]+cos(phi)^4*p[1]=S_4_21,B[2]+expand(B[3])):
r_5c:=simplify(algsubs(sin(phi)^2*p[4]+cos(phi)^2*p[5]=S_2_45,r_5c+B[1])):
```

```
    r_5 :=r_a+p[6]*r_5c:
    #***************************************************************
    for i from 1 to 2 do A[i]:=NULL: end do:
    for i in op(C0_chi2) do
      if has(i,{p[4],p[2]}) then A[1]:=A[1],i ;
      else A[2]:=A[2],i; end if
    end do:
    for j from 1 to 2 do B[j]:=add(i,i=[A[j]]) end do:
    r_chi:=algsubs(sin(phi)^2*p[2]+cos(phi)^2*p[1]=S_2_21,
                   expand(simplify(B[1])+collect(B[2],cos))):
    r_chi:=algsubs(sin(phi)^2*p[4]+cos(phi)^2*p[5]=S_2_45,r_chi):
    #***************************************************************
    C0:=r4+(r5+r_chi*chi^2)*chi^2;
    print('D'=C0); print('r[4]'=r_4); print('r[5]'=r_5);
    r[4]:=r_4; r[5]:=r_5;
    B_0:=eval(C0,[S_4_21 =B[421],S_2_21 =B[221],S_2_45 =B[245],q[3]=q3]):
    C_0:=B_0:
  end if: end if:
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material = cubic$$
$$smer := \phi$$

$$A\,lz^6 + B\,lz^4 + C\,lz^2 + D = 0$$

$$A = c_{1,1}\,c_{4,4}^2$$

$$B = -\left(-c_{4,4}\,\left(-2\,c_{1,2} + c_{1,1}\right) + \rho\,v^2\,\left(2\,c_{1,1} + c_{4,4}\right) + c_{1,2}^2 - c_{1,1}^2\right)\,c_{4,4}$$

$$C = \rho^2\,v^4\,\left(2\,c_{4,4} + c_{1,1}\right) - c_{1,1}\,\left(K\_B^2 + K\_A^2\right) + \left(-c_{1,2}^2 + c_{1,1}^2\right)\,\left(-\rho\,v^2 - K\_A + c_{4,4}\right)$$
$$-c_{4,4}\,\left(2\,\rho\,v^2 - K\_A\right)\,\left(c_{1,1} + c_{4,4}\right) + 2\,c_{4,4}\,c_{1,2}\,\left(K\_A + \rho\,v^2\right) + c_{4,4}^2\,\left(-2\,c_{1,2} + c_{1,1}\right)$$

$$D = -\rho^3\,v^6 + \rho^2\,v^4\,\left(2\,c_{4,4} + c_{1,1}\right) + \left(K\_A\,\left(-K\_A + c_{4,4} - c_{1,1}\right) - K\_B^2\right)\,\left(c_{4,4} - \rho\,v^2\right)$$
$$-c_{4,4}\,\rho\,v^2\,\left(2\,c_{1,1} + c_{4,4}\right) + c_{1,1}\,c_{4,4}^2$$

* nebo:

$$material = ortotropic$$
$$smer = \phi$$

$$A\,lz^6 + B\,lz^4 + C\,lz^2 + D = 0$$

$$A = p_4\,p_5$$

$$q_1 = p_8\,\left(p_8 + 2\,p_4\right)$$

$$q_2 = p_7\,\left(2\,p_5 + p_7\right)$$

$$B = \sin(\phi)^2\,\left(p_2\,p_5 + p_4\,p_6 - p_5\,q_1\right) + \cos(\phi)^2\,\left(p_5\,p_6 + p_1\,p_4 - p_4\,q_2\right) - \chi^2\,\left(p_4 + p_5 + p_4\,p_5\right)$$

$$S\_4\_21 = \cos(\phi)^4\,p_1 + p_2\,\sin(\phi)^4$$

$$S\_2\_45 = p_4\,\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2\,p_5$$
$$q_4 = p_5\,p_8 + p_7\,p_8 + p_4\,p_7$$
$$q_3 = p_1\,p_2 - p_3^2$$
$$S\_2\_21 = \cos(\phi)^2\,p_1 + p_2\,\sin(\phi)^2$$
$$C = r_1\,p_4\,p_5 + p_6\,r_2 + r_{sc}\,\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2 + r_3\,\chi^2$$
$$r_1 = 2\,\cos(\phi)^2\,\sin(\phi)^2\,(p_3 + 2\,p_6) + S\_4\_21 - \chi^2$$
$$r_2 = S\_4\_21 - \sin(\phi)^4\,q_1 + 2\,\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(q_4 - p_3) - \cos(\phi)^4\,q_2 - \chi^2\,(1 + S\_2\_45)$$
$$r_3 = (q_1 - p_2\,p_5)\,\sin(\phi)^2 + (q_2 - p_1\,p_4)\,\cos(\phi)^2 - S\_2\_21 + \chi^2\,(1 + p_4 + p_5)$$
$$r_{sc} = q_3 - p_1\,q_1 - p_2\,q_2 + 2\,p_3\,q_4$$
$$D = r_4 + (r_5 + (S\_2\_21 + S\_2\_45 + p_6 - \chi^2)\,\chi^2)\,\chi^2$$
$$r_4 = (p_6\,S\_4\_21 - \sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(2\,p_3\,p_6 - q_3))\,S\_2\_45$$
$$r_5 = \sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(2\,p_3\,p_6 - q_3) - S\_2\_45\,S\_2\_21 + p_6\,(-S\_4\_21 - S\_2\_45)$$

Rovnice je řešena v matlabu numericky a s následujícími tvary koeficientů:

```
> printlevel:=2:
  if material = ortotropic and smer = phi then
    A_4:=p[5]*(cos(phi)^2*(p[6]-2*p[4]*p[7])
              +sin(phi)^2*(p[2]-p[8]^2-2*p[4]*p[8])-chi^2*(1+p[4]))
        +p[4]*(cos(phi)^2*(p[1]-p[7]^2)+sin(phi)^2*p[6]-chi^2):
    a_1:=p[4]*p[5]*(cos(phi)^4*p[1]+sin(phi)^4*p[2]
                   +2*sin(phi)^2*cos(phi)^2*(p[3]+2*p[6])-chi^2):
    a_2:=p[6]*p[8]*(-sin(phi)^4*(2*p[4]+p[8])
         +2*sin(phi)^2*cos(phi)^2*(p[5]+p[7])):
    a_3:=sin(phi)^2*cos(phi)^2*(2*(p[3]+p[6])*p[4]*p[7]
        +2*(p[5]+p[7])*p[3]*p[8]+p[1]*p[2]-p[1]*p[8]^2
            -2*p[3]*p[6]-p[2]*p[7]^2-p[3]^2):
    a_4:=sin(phi)^2
        *(-(2*cos(phi)^2*p[7]+chi^2)*p[2]*p[5]
          -2*(cos(phi)^2*p[1]-chi^2)*p[4]*p[8]
          + sin(phi)^2*p[2]*p[6]+chi^2*(p[8]^2-p[4]*p[6]-p[2])):
    a_5:=cos(phi)^2*(-(cos(phi)^2*p[6]-chi^2)*p[7]*(p[7]+2*p[5])
        -(1+p[4])*p[1]*chi^2+p[1]*p[6]*cos(phi)^2):
    a_6:=chi^2*(-cos(phi)^2*p[5]*p[6]-p[6]+chi^2*(p[4]+p[5]+1)):
    A_2:=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6:
    e_1:=sin(phi)^2*cos(phi)^2
        *(-2*sin(phi)^2*p[3]*p[4]*p[6]
          +(cos(phi)^2*p[6]+sin(phi)^2*p[2]-chi^2)*p[1]*p[4]
          -2*(cos(phi)^2*p[5]-chi^2)*p[3]*p[6]
          -(cos(phi)^2*p[5]+sin(phi)^2*p[4]-chi^2)*p[3]^2):
    e_2:=sin(phi)^2
        *(sin(phi)^2*(sin(phi)^2*p[4]
         +cos(phi)^2*p[5]-chi^2)*p[2]*p[6]
```

```
      +(chi^2-sin(phi)^2*p[2]-p[6])*p[4]*chi^2
      -(cos(phi)^2*(p[1]+p[5])-chi^2)*p[2]*chi^2):
  e_3:=cos(phi)^2
     *(cos(phi)^2*(sin(phi)^2*p[2]+cos(phi)^2*p[6]-chi^2)*p[1]*p[5]
     +(chi^2-p[6])*p[5]*chi^2+(chi^2-cos(phi)^2*p[6])*p[1]*chi^2):
  e_4:=-chi^4*(chi^2-p[6]):
  A_0:=e_1+e_2+e_3+e_4:
  print(simplify(C_4-A_4));
  print(simplify(C_2-A_2));
  print(simplify(C_0-A_0));
end if:
```

* pro ortotropní materiál a směr ϕ se zde zobrazí:

$$0$$
$$0$$
$$0$$

```
> printlevel:=1:
  material:=material; smer:=smer;
  if smer = phi then
    if material =ortotropic then
      for i from 1 to 10 do
        g_tmp[i]:=g[i];r_tmp[i]:=r[i];
        unassign('g[i]'): unassign('r[i]'):
      end do:
      rsc:=r[sc]: unassign('r[sc]'):
    end if:
    for i from 1 to 3 do
      for j in [1,3,5] do
        print(alpha[i,j]=alpha1[i,j]);
      end do:
    end do:
    if material =cubic then
      print('K_A'=simplify(K_a));
      print('K_B'=simplify(K_b));
      print('symetricke_a_antisymetricke_mody');
      print('A*lz^6+B*lz^4+C*lz^2+D=0');
      print('A'=K_6);
      print('B'=B);
      print('C'=C);
      print('D'=D);
    else
      print('kde');
      for i from 1 to 10 do
        print(g[i]=g_tmp[i]);
      end do:
      print('symetricke_a_antisymetricke_mody');
```

```
    print('A*lz^6+B*lz^4+C*lz^2+D=0');
    print('kde');
    print('A'=C_6);
    print('B'=C4);
    print('C'=C2);
    print('D'=C0);
    print('q[1]'=q1); print('q[2]'=q2); print('q[3]'=q3); print('q[4]'=q4);
    for i from 1 to 5 do
      print(r[i]=r_tmp[i]);
    end do:
    print('r[sc]'= rsc);
    print('S_2_21'=B[221]); print('S_2_45'=B[245]); print('S_4_21'=B[421]);
  end if:
else
  for j in [1,3,5] do
    for i from 1 to 3 do
      print(alpha[i,j]=alpha1[i,j]);
    end do:

  end do:
end if:
if smer <> phi then
  if material = cubic and smer = Pi/4 then
    print(symetricke_a_antisymetricke_mody);
    print(lz^2=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/2/A);
    print(lz^2=(-B-sqrt(B^2-4*A*C))/2/A);
    print(kde);
    print(A=a);
    print(B=b);
    print(C=c_print);
  else
    print(symetricke_a_antisymetricke_mody);
    print(lz^2=(-B+sqrt(B^2-A))/2/d4);
    print(lz^2=(-B-sqrt(B^2-A))/2/d4);
    print(kde);
    print(A=a); print(B=b);
  end if:
  print(SH_mody);
  if material = cubic and smer = 0 then
    print(expand(isolate(Determinant(M2)=0,lz^2)));
  else
     print(isolate(Determinant(M2)=0,lz^2));
  end if:
end if:
if material=ortotropic and smer = phi then
  p[1]:=c[1,1]/c[3,3]: p[2]:=c[2,2]/c[3,3]:
  p[3]:=c[1,2]/c[3,3]: p[4]:=c[4,4]/c[3,3]:
  p[5]:=c[5,5]/c[3,3]: p[6]:=c[6,6]/c[3,3]:
```

```
    p[7]:=c[1,3]/c[3,3]: p[8]:=c[2,3]/c[3,3]:
    chi:=sqrt(rho*v^2/c[3,3]):
    simplify(lz^6*C_6+lz^4*C_4+lz^2*C_2+C_0-det/c[3,3]^3);
  end if:
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$material := cubic$$

$$smer := \phi$$

$$\alpha_{1,1} = 1$$

$$\alpha_{1,3} = 1$$

$$\alpha_{1,5} = 1$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{K\_B}{-lz_1^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{K\_B}{-lz_3^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{2,5} = \frac{K\_B}{-lz_5^2\, c_{4,4} - c_{4,4} + K\_A + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,1} = \frac{lz_1\ (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_1^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,3} = \frac{lz_3\ (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_3^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

$$\alpha_{3,5} = \frac{lz_5\ (c_{1,2} + c_{4,4})}{-lz_5^2\, c_{1,1} - c_{4,4} + \rho\, v^2}$$

$$K\_A = -2\ (-c_{1,2} - 2\, c_{4,4} + c_{1,1})\ \sin(\phi)^2\ \cos(\phi)^2$$

$$K\_B = -\,(2\ \cos(\phi)^2 - 1)\ cos(\phi)\ (-c_{1,2} - 2\, c_{4,4} + c_{1,1})\ \sin(\phi)$$

$$symetricke\_a\_antisymetricke\_mody$$

$$A\, lz^6 + B\, lz^4 + C\, lz^2 + D = 0$$

$$A = c_{1,1}\, c_{4,4}^2$$

$$B = -\left(-c_{4,4}\ (-2\, c_{1,2} + c_{1,1}) + \rho\, v^2\ (2\, c_{1,1} + c_{4,4}) + c_{1,2}^2 - c_{1,1}^2\right)\ c_{4,4}$$

$$C = \rho^2\, v^4\ (2\, c_{4,4} + c_{1,1}) - c_{1,1}\ (K\_B^2 + K\_A^2) + \left(-c_{1,2}^2 + c_{1,1}^2\right)\ (-\rho\, v^2 - K\_A + c_{4,4})$$
$$-c_{4,4}\ (2\, \rho\, v^2 - K\_A)\ (c_{1,1} + c_{4,4}) + 2\, c_{4,4}\, c_{1,2}\ (K\_A + \rho\, v^2) + c_{4,4}^2\ (-2\, c_{1,2} + c_{1,1})$$

$$D = -\rho^3\, v^6 + \rho^2\, v^4\ (2\, c_{4,4} + c_{1,1}) + (K\_A\ (-K\_A + c_{4,4} - c_{1,1}) - K\_B^2)\ (c_{4,4} - \rho\, v^2)$$
$$-c_{4,4}\, \rho\, v^2\ (2\, c_{1,1} + c_{4,4}) + c_{1,1}\, c_{4,4}^2$$

* nebo:

$$material := cubic$$
$$smer := 0$$
$$\alpha_{1,1} = -lz_1\ (c_{1,2} + c_{4,4})$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = c_{1,1} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,3} = -lz_3\ (c_{1,2} + c_{4,4})$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$
$$\alpha_{3,3} = c_{1,1} + lz_3^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$
$$\alpha_{3,5} = 0$$
$$symetricke\_a\_antisymetricke\_mody$$
$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{1,1}\, c_{4,4}}$$
$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{1,1}\, c_{4,4}}$$
$$kde$$
$$A = 4\ (-c_{4,4} + \rho\, v^2)\ (-c_{1,1} + \rho\, v^2)\ c_{1,1}\, c_{4,4}$$
$$B = -c_{1,1}\ (-c_{1,1} + \rho\, v^2) - c_{4,4}\ (-c_{4,4} + \rho\, v^2) - (c_{1,2} + c_{4,4})^2$$
$$SH\_mody$$
$$lz^2 = -1 + \frac{\rho\, v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material := cubic$$
$$smer := \tfrac{1}{4}\,\pi$$
$$\alpha_{1,1} = -lz_1\ (c_{1,2} + c_{4,4})$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = \tfrac{1}{2}\, c_{1,1} + \tfrac{1}{2}\, c_{1,2} + c_{4,4} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,3} = -lz_3\ (c_{1,2} + c_{4,4})$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$
$$\alpha_{3,3} = \tfrac{1}{2}\, c_{1,1} + \tfrac{1}{2}\, c_{1,2} + c_{4,4} + lz_3^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$

$$\alpha_{3,5} = 0$$

$$symetricke\_a\_antisymetricke\_mody$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{A}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{A}$$

$$kde$$

$$A = 2\,c_{1,1}\,c_{4,4}$$

$$B = -2\,v^2\,\rho\,(c_{4,4} + c_{1,1}) + (c_{1,2} + 2\,c_{4,4})\,(c_{1,1} - 2\,c_{1,2}) + c_{1,1}^2$$

$$C\,(-c_{4,4} + \rho\,v^2)\,(2\,\rho\,v^2 - c_{1,1} - c_{1,2} - 2\,c_{4,4})$$

$$SH\_mody$$

$$lz^2 = \frac{-\frac{1}{2}\,c_{1,1} + \frac{1}{2}\,c_{1,2} + \rho\,v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$

$$smer := \phi$$

$$\alpha_{1,1} = g_8\,g_1 lz_1^4 + (-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1)\,lz_1^2 + g_2\,g_3$$

$$\alpha_{1,3} = g_8\,g_1 lz_3^4 + (-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1)\,lz_3^2 + g_2\,g_3$$

$$\alpha_{1,5} = g_8\,g_1 lz_5^4 + (-g_4^2 + g_8\,g_3 + g_2\,g_1)\,lz_5^2 + g_2\,g_3$$

$$\alpha_{2,1} = -g_8\,g_5 lz_1^4 + (g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5)\,lz_1^2 - g_2\,g_7$$

$$\alpha_{2,3} = -g_8\,g_5 lz_3^4 + (g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5)\,lz_3^2 - g_2\,g_7$$

$$\alpha_{2,5} = -g_8\,g_5 lz_5^4 + (g_6\,g_4 - g_8\,g_7 - g_2\,g_5)\,lz_5^2 - g_2\,g_7$$

$$\alpha_{3,1} = (g_5\,g_4 - g_1\,g_6)\,lz_1^3 + (g_7\,g_4 - g_3\,g_6)\,lz_1$$

$$\alpha_{3,3} = (g_5\,g_4 - g_1\,g_6)\,lz_3^3 + (g_7\,g_4 - g_3\,g_6)\,lz_3$$

$$\alpha_{3,5} = (g_5\,g_4 - g_1\,g_6)\,lz_5^3 + (g_7\,g_4 - g_3\,g_6)\,lz_5$$

$$kde$$

$$g_1 := \cos(\phi)^2\,c_{4,4} + \sin(\phi)^2\,c_{5,5}$$

$$g_2 := \sin(\phi)^2\,c_{4,4} + \cos(\phi)^2\,c_{5,5} - \rho\,v^2$$

$$g_3 := \sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(c_{1,1} - 2\,c_{1,2} - 4\,c_{6,6} + c_{2,2}) + c_{6,6} - \rho\,v^2$$

$$g_4 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,(c_{2,3} - c_{1,3} + c_{4,4} - c_{5,5})$$

$$g_5 := \cos(\phi)\,\sin(\phi)\,(c_{4,4} - c_{5,5})$$

$$g_6 := \sin(\phi)^2\,(c_{2,3} + c_{4,4}) + \cos(\phi)^2\,(c_{1,3} - c_{5,5})$$

$$g_7 := -\left(-\cos(\phi)^2\,(-c_{1,1}+c_{1,2}+2\,c_{6,6})+\sin(\phi)^2\,(c_{1,2}+2\,c_{6,6}-c_{2,2})\right)\cos(\phi)\,\sin(\phi)$$

$$g_8 := c_{3,3}$$

$$g_9 := \sin(\phi)^2\,c_{4,4}+\cos(\phi)^2\,c_{5,5}$$

$$g_{10} := \cos(\phi)^4\,c_{1,1}+c_{2,2}\,\sin(\phi)^4+2\,(c_{1,2}+2\,c_{6,6})\,\cos(\phi)^2\,\sin(\phi)^2-\rho\,v^2$$

$$\mathit{symetricke\_a\_antisymetricke\_mody}$$

$$A\,lz^6+B\,lz^4+C\,lz^2+D=0$$

$$A=p_4\,p_5$$

$$B=\sin(\phi)^2\,(p_2\,p_5+p_4\,p_6-p_5\,q_1)+\cos(\phi)^2\,(p_5\,p_6+p_1\,p_4-p_4\,q_2)-\chi^2\,(p_4+p_5+p_4\,p_5)$$

$$C=r_1\,p_4\,p_5+p_6\,r_2+r_{sc}\,\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2+r_3\,\chi^2$$

$$D=r_4+\left(r_5+(S\_2\_21+S\_2\_45+p_6-\chi^2)\,\chi^2\right)\chi^2$$

$$q_1=p_8\,(p_8+2\,p_4)$$

$$q_2=p_7\,(2\,p_5+p_7)$$

$$q_3=p_1\,p_2-p_3^2$$

$$q_4=p_5\,p_8+p_7\,p_8+p_4\,p_7$$

$$r_1=2\,\cos(\phi)^2\,\sin(\phi)^2\,(p_3+2\,p_6)+S\_4\_21-\chi^2$$

$$r_2=S\_4\_21-\sin(\phi)^4\,q_1+2\,\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(q_4-p_3)-\cos(\phi)^4\,q_2-\chi^2\,(1+S\_2\_45)$$

$$r_3=(q_1-p_2\,p_5)\,\sin(\phi)^2+(q_2-p_1\,p_4)\,\cos(\phi)^2-S\_2\_21+\chi^2\,(1+p_4+p_5)$$

$$r_4=\left(p_6\,S\_4\_21-\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(2\,p_3\,p_6-q_3)\right)S\_2\_45$$

$$r_5=\sin(\phi)^2\,\cos(\phi)^2\,(2\,p_3\,p_6-q_3)-S\_2\_45\,S\_2\_21+p_6\,(-S\_4\_21-S\_2\_45)$$

$$r_{sc}=q_3-p_1\,q_1-p_2\,q_2+2\,p_3\,q_4$$

$$S\_2\_21=\cos(\phi)^2\,p_1+p_2\,\sin(\phi)^2$$

$$S\_2\_45=p_4\,\sin(\phi)^2+\cos(\phi)^2\,p_5$$

$$S\_4\_21=\cos(\phi)^4\,p_1+p_2\,\sin(\phi)^4$$

$$p_1 := \frac{c_{1,1}}{c_{3,3}}$$

$$p_2 := \frac{c_{2,2}}{c_{3,3}}$$

$$p_3 := \frac{c_{1,2}}{c_{3,3}}$$

$$p_4 := \frac{c_{4,4}}{c_{3,3}}$$

$$p_5 := \frac{c_{5,5}}{c_{3,3}}$$

$$p_6 := \frac{c_{6,6}}{c_{3,3}}$$

$$p_7 := \frac{c_{1,3}}{c_{3,3}}$$

$$p_8 := \frac{c_{2,3}}{c_{3,3}}$$
$$\chi := \sqrt{\frac{\rho\, v^2}{c_{3,3}}}$$
$$0$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$
$$smer := 0$$
$$\alpha_{1,1} = (-c_{1,3} - c_{5,5})\ lz_1$$
$$\alpha_{2,1} = 0$$
$$\alpha_{3,1} = c_{1,1} + lz_1^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,3} = (-c_{1,3} - c_{5,5})\ lz_3$$
$$\alpha_{2,3} = 0$$
$$\alpha_{3,3} = c_{1,1} + lz_3^2\, c_{5,5} - \rho\, v^2$$
$$\alpha_{1,5} = 0$$
$$\alpha_{2,5} = 1$$
$$\alpha_{3,5} = 0$$
$$symetricke\_a\_antisymetricke\_mody$$
$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{5,5}\, c_{3,3}}$$
$$lz^2 = \frac{1}{2}\, \frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{5,5}\, c_{3,3}}$$
$$kde$$
$$A = 4\ c_{5,5}\, c_{3,3}\, (c_{1,1} - \rho\, v^2)\ (c_{5,5} - \rho\, v^2)$$
$$B = c_{3,3}\ (c_{1,1} - \rho\, v^2) + c_{5,5}\ (c_{5,5} - \rho\, v^2) - (c_{1,3} + c_{5,5})^2$$
$$SH\_mody$$
$$lz^2 = \frac{-c_{6,6} + \rho\, v^2}{c_{4,4}}$$

* nebo:

$$material := ortotropic$$
$$smer := \tfrac{1}{2}\,\pi$$
$$\alpha_{1,1} = (-c_{2,3} - c_{4,4})\ lz_1$$

$$\alpha_{2,1} = 0$$

$$\alpha_{3,1} = c_{2,2} + lz_1^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$

$$\alpha_{1,3} = (-c_{2,3} - c_{4,4})\; lz_3$$

$$\alpha_{2,3} = 0$$

$$\alpha_{3,3} = c_{2,2} + lz_3^2\, c_{4,4} - \rho\, v^2$$

$$\alpha_{1,5} = 0$$

$$\alpha_{2,5} = 1$$

$$\alpha_{3,5} = 0$$

$$symetricke\_a\_antisymetricke\_mody$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B + \sqrt{B^2 - A}}{c_{4,4}\, c_{3,3}}$$

$$lz^2 = \frac{1}{2}\,\frac{-B - \sqrt{B^2 - A}}{c_{4,4}\, c_{3,3}}$$

$$kde$$

$$A = 4\; c_{4,4}\, c_{3,3}\, (-c_{2,2} + \rho\, v^2)\; (-c_{4,4} + \rho\, v^2)$$

$$B = -c_{3,3}\; (-c_{2,2} + \rho\, v^2) - c_{4,4}\; (-c_{4,4} + \rho\, v^2) - (c_{2,3} + c_{4,4})^2$$

$$SH\_mody$$

$$lz^2 = \frac{-c_{6,6} + \rho\, v^2}{c_{5,5}}$$

3.2 dc_cubic_ortho.mw

V tomto souboru jsou odvozeny tvary disperzních vztahů, jako pro symetrické, antisymetrické a SH módy, tak pro Mindlinovy oddělené módy pro kubickou a ortotropní desku. Tento soubor je vytvořen systémem pro symbolické výpočty Maple, [14]

Pro kubickou desku a směr šíření $\phi = 0°$ jsou to rovnice (1.18) a (1.22) až (1.25), pro směr šíření $\phi = 45°$ rovnice (1.30) a (1.34) až (1.37) a pro obecný směr šíření rovnice (1.40), (1.41) a (1.42).

V případě ortotropní desky jsou zde odvozeny pro směr šíření $\phi = 0°$ rovnice (1.47) a (1.51) až (1.52), pro směr šíření $\phi = 90°$ rovnice (1.57) a (1.62) až (1.63) a pro obecný směr šíření rovnice (1.67), (1.68) a (1.69).

Odvození disperzních vztahů a mindlinových křivek pro kubický nebo ortotropní materiál ve směrech šíření (100),(110) nebo (010) a pro obecný úhel otáčení ϕ okolo osy z

vektor výchylek ve shodě s článkem ([21]) :

```
> restart;
> material:= cubic;
  #material:= ortotropic;
  smer:=phi;
  #smer:=0;     # (100)
  #smer:=Pi/4; # (110) - cubic
  #smer:=Pi/2; # (010) - ortotropic
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z možností:

$material := cubic$ $smer := \phi$	$material := cubic$ $smer := 0$	$material := cubic$ $smer := \frac{1}{4}\pi$
$material := ortotropic$ $smer := \phi$	$material := ortotropic$ $smer := 0$	$material := ortotropic$ $smer := \frac{1}{2}\pi$

```
> with(LinearAlgebra):
  u := array(1..3):
  for j to 3 do
    u[j]:=sum(C[n]*alpha[j,n]*exp(I*k*(x[1]+lz[n]*x[3])),n=1..6)
  end do:
```

substituce lz

```
> u[1] := subs({lz[2]=-lz[1], lz[4]=-lz[3], lz[6]=-lz[5]},u[1]):
  u[2] := subs({lz[2]=-lz[1], lz[4]=-lz[3], lz[6]=-lz[5]},u[2]):
  u[3] := subs({lz[2]=-lz[1], lz[4]=-lz[3], lz[6]=-lz[5]},u[3]):
```

substituce alpha

```
> for j to 3 do
    if smer = phi then
      if material = cubic then
        u[j] := subs({alpha[1,1]=1,  alpha[1,3]=1,  alpha[1,5]=1,
                      alpha[1,2]=1,  alpha[1,4]=1,  alpha[1,6]=1},u[j]):
      else
        u[j] := subs({alpha[1,2]= alpha[1,1], alpha[1,4]= alpha[1,3],
                      alpha[1,6]= alpha[1,5]},u[j]):
      end if;
      u[j] := subs({alpha[2,2]= alpha[2,1], alpha[2,4]= alpha[2,3],
                    alpha[2,6]= alpha[2,5], alpha[3,2]=-alpha[3,1],
                    alpha[3,4]=-alpha[3,3], alpha[3,6]=-alpha[3,5]},u[j]):
    else
```

```
      u[j] := subs({alpha[1,2]=-alpha[1,1], alpha[1,4]=-alpha[1,3],
                    alpha[3,2]=alpha[3,1], alpha[3,4]=alpha[3,3],
                alpha[1,5]=0, alpha[1,6]=0, alpha[2,1]=0,
                    alpha[2,2]=0, alpha[2,3]=0, alpha[2,4]=0,
                    alpha[2,5]=1, alpha[2,6]=1, alpha[3,5]=0,
                    alpha[3,6]=0},u[j]):
    end if:
  end do:
> printlevel := 2:
```

tenzor deformací

```
> SV := array(1..3,1..3):
  for j to 3 do
    for l to 3 do
      SV[j,l] := 1/2*(diff(u[j],x[l])+diff(u[l],x[j]))
    end do
  end do:
```

zkrácený zápis

```
> S := <SV[1,1], SV[2,2], SV[3,3], 2*SV[2,3], 2*SV[1,3], 2*SV[1,2]>:
```

tenzor elastických konstant

```
> if material = cubic then
    dd := <<c[1,1], c[1,2], c[1,2],      0,      0,      0>|
           <c[1,2], c[1,1], c[1,2],      0,      0,      0>|
           <c[1,2], c[1,2], c[1,1],      0,      0,      0>|
           <     0,      0,      0, c[4,4],      0,      0>|
           <     0,      0,      0,      0, c[4,4],      0>|
           <     0,      0,      0,      0,      0, c[4,4]>>:
  else
    dd := <<c[1,1], c[1,2], c[1,3],      0,      0,      0>|
           <c[1,2], c[2,2], c[2,3],      0,      0,      0>|
           <c[1,3], c[2,3], c[3,3],      0,      0,      0>|
           <     0,      0,      0, c[4,4],      0,      0>|
           <     0,      0,      0,      0, c[5,5],      0>|
           <     0,      0,      0,      0,      0, c[6,6]>>:
  end if:
```

Matice transformace soustavy souřadnic dle [2] (str. 294 - šestirozměrný prostor).

```
> bLU := Transpose(<<b[1,1]^2, b[1,2]^2, b[1,3]^2>|
                    <b[2,1]^2, b[2,2]^2, b[2,3]^2>|
                    <b[3,1]^2, b[3,2]^2, b[3,3]^2>>):
  bRU := 2*Transpose(<<b[1,2]*b[1,3], b[1,3]*b[1,1], b[1,1]*b[1,2]>|
                      <b[2,2]*b[2,3], b[2,3]*b[2,1], b[2,1]*b[2,2]>|
```

```
                     <b[3,2]*b[3,3], b[3,3]*b[3,1], b[3,1]*b[3,2]>>):
  bLB := Transpose(<<b[2,1]*b[3,1], b[2,2]*b[3,2], b[2,3]*b[3,3]>|
                   <b[3,1]*b[1,1], b[3,2]*b[1,2], b[3,3]*b[1,3]>|
                   <b[1,1]*b[2,1], b[1,2]*b[2,2], b[1,3]*b[2,3]>>):
  bRB := Transpose(
         <<b[2,2]*b[3,3]+b[2,3]*b[3,2], b[2,1]*b[3,3]+b[2,3]*b[3,1],
           b[2,2]*b[3,1]+b[2,1]*b[3,2]>|
          <b[1,2]*b[3,3]+b[1,3]*b[3,2], b[1,3]*b[3,1]+b[1,1]*b[3,3],
           b[1,1]*b[3,2]+b[3,1]*b[1,2]>|
          <b[1,2]*b[2,3]+b[1,3]*b[2,2], b[1,3]*b[2,1]+b[1,1]*b[2,3],
           b[1,1]*b[2,2]+b[1,2]*b[2,1]>>):
  bb := <<bLU, bLB>|<bRU, bRB>>:
```

Rotace okolo osy z.

```
> b  := <<cos(f), -sin(f), 0>|
         <sin(f),  cos(f), 0>|
         <     0,       0, 1>>:
```

rotovaná matice

```
> d_rot := Multiply(Multiply(bb,dd),Transpose(bb)):
  d_rot := Map(simplify,d_rot): f:=smer:
```

tensor napětí T[xx, yy,zz,yz,xz,xy]

```
> T := d_rot.S:
```

Mindlinovy křivky

První z dvojice Mindlinových podmínek. **Namazané tuhé poloprostory.** $T_{xz} = u_z = 0$ okrajové podmínky ($T[5](T_{xz}) = u[3]\,(u_z) = 0$ pro $x[3]\,(z) = \pm d$)

```
> RN[1]  := subs(x[3]= d, T[5]):
  RN[2]  := subs(x[3]=-d, T[5]):
  RN[3]  := subs(x[3]= d, u[3]):
  RN[4]  := subs(x[3]=-d, u[3]):
```

pro obecný směr šíření doplněná o $T_{yz} = 0$

```
> if smer = phi then
    RN[5]  := subs(x[3]= d, T[4]):
    RN[6]  := subs(x[3]=-d, T[4]):
    ZN  := Matrix(6):
    for j to 6 do
      for l to 6 do
        tmp  := subs(C[l]=1,RN[j]);
        ZN[j,l]  := subs({C[1]=0, C[2]=0, C[3]=0, C[4]=0, C[5]=0, C[6]=0},tmp);
      end do
    end do
  else
```

```
    ZN := Matrix(4):
    for j to 4 do
      for l to 4 do
        tmp := subs(C[1]=1,RN[j]);
        ZN[j,l] := subs({C[1]=0, C[2]=0, C[3]=0, C[4]=0},tmp);
      end do
    end do:
  end if:
> ZN:= subs(x[1]=0,ZN):#ZN:= simplify(ZN/exp(I*k*x[1])):
  dc1:=Determinant(ZN):
```

Druhá z dvojice Mindlinových podmínek. **Makroskopické řetízky**. $T_{zz} = u_x = 0$ okrajové podmínky ($T[3](T_{zz}) = u[1]\,(u_x) = 0$ pro $x[3]\,(z) = \pm d$)

```
> RR[1] := subs(x[3]= d, T[3]):
  RR[2] := subs(x[3]=-d, T[3]):
  RR[3] := subs(x[3]= d, u[1]):
  RR[4] := subs(x[3]=-d, u[1]):
```

pro obecný směr šíření doplněná o $u_y = 0$

```
> if smer = phi then
  RR[5] := subs(x[3]= d, u[2]):
  RR[6] := subs(x[3]=-d, u[2]):
  ZZ := Matrix(6):
  for j to 6 do
    for l to 6 do
      tmp := subs(C[1]=1,RR[j]);
      ZZ[j,l] := subs({C[1]=0, C[2]=0, C[3]=0, C[4]=0, C[5]=0, C[5]=0},tmp);
    end do
  end do;
  else
  ZZ := Matrix(4):
  for j to 4 do
    for l to 4 do
      tmp := subs(C[1]=1,RR[j]);
      ZZ[j,l] := subs({C[1]=0, C[2]=0, C[3]=0, C[4]=0},tmp);
    end do
  end do:
  end if:
> ZZ:= subs(x[1]=0,ZZ):#ZZ:= simplify(ZZS/exp(I*k*x[1])):
  dc2:=Determinant(ZZ):
```

Disperzní vztahy pro "Namazané tuhé poloprostory".

```
> material; smer;
  dc1:=evalc(factor(dc1)):
  dc1:=convert(dc1,sin):
  d_m[1]:=isolate(dc1,sin(2*lz[1]*k*d));
  d_m[2]:=isolate(dc1,sin(2*lz[3]*k*d));
  if smer = phi then d_m[3]:=isolate(dc1,sin(2*lz[5]*k*d)); end if;
```

* podle zvoleného směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$\begin{array}{ccc}
\textit{cubic} & \textit{cubic} & \textit{cubic} \\
\phi & 0 & \frac{1}{4}\pi \\
d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 \\
d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 \\
d_m_3 := \sin(2\,k\,lz_5\,d) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\textit{ortotropic} & \textit{ortotropic} & \textit{ortotropic} \\
\phi & 0 & \frac{1}{2}\pi \\
d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & d_m_1 := \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 \\
d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & d_m_2 := \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 \\
d_m_3 := \sin(2\,k\,lz_5\,d) = 0 & &
\end{array}$$

Disperzní vztahy pro "Makroskopické řetízky".

```
> dc2:=evalc(factor(dc2)):
  dc2:=convert(dc2,sin):
  isolate(dc2,sin(2*lz[1]*k*d));
  isolate(dc2,sin(2*lz[3]*k*d));
  if smer = phi then isolate(dc2,sin(2*lz[5]*k*d)); end if;
```

* podle zvoleného směru se tu zobrazí jedna z možností:

$$\begin{array}{ccc}
\sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 & \sin(2\,k\,lz_1\,d) = 0 \\
\sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 & \sin(2\,k\,lz_3\,d) = 0 \\
\sin(2\,k\,lz_5\,d) = 0 & &
\end{array}$$

Disperzní vztahy
okrajové podmínky ($T[5]\,(T_{xz}) = T[4](yz) = T[3](T_{xx}) = 0$ pro $x[3]\,(z) = \pm$ d,
d … 1/2 tloušťky desky)

```
> RD[1]  := subs(x[3]= d, T[5]):
  RD[2]  := subs(x[3]=-d, T[5]):
  RD[3]  := subs(x[3]= d, T[4]):
  RD[4]  := subs(x[3]=-d, T[4]):
  RD[5]  := subs(x[3]= d, T[3]):
  RD[6]  := subs(x[3]=-d, T[3]):
> Z := Matrix(6):
  for j to 6 do
    for l to 6 do
      tmp := subs(C[l]=1,RD[j]);
      Z[j,l] := subs({C[1]=0, C[2]=0, C[3]=0, C[4]=0, C[5]=0, C[6]=0},tmp);
    end do
  end do:
  Z:= simplify(Z/exp(I*k*x[1])): Z:=simplify(Z/I/k):
```

Disperzní vztahy pro směry (100) a (110) nebo (010)
Rozklad na dvě submatice

```
> if smer <> phi then
  Z1 :=SubMatrix(Z,[1,2,5,6],[1,2,3,4]):
  Z2 :=SubMatrix(Z,[3,4],[5,6]):  Z2:=simplify(Z2/c[4,4]): end if:
```

1. subdeterminant → symetrické a antisymetrické módy

```
> if smer <> phi then
  dc1:=Determinant(Z1):  dc1:=factor(dc1): nz:=nops(dc1):
  leva:=op(nz-1,dc1): leva:=factor(expand(evalc(leva))):
  prava:=op(nz,dc1): prava:=factor(expand(evalc(prava))): end if:
```

Disperzní vztahy pro symetrické a antisymetrické módy lze psát ve tvaru:

```
> if smer <> phi then
  dc_1:=sort(simplify(leva/4/I,size)):
  dc_1:=isolate(dc_1,sin(lz[1]*k*d))*cos(lz[3]*k*d)
                    /(cos(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)):
  dc_1:=convert(dc_1,tan);
  print(material); print(smer);
  dc_2:=sort(simplify(prava/4/I,size)):
  dc_2:=isolate(dc_2,sin(lz[1]*k*d))*cos(lz[3]*k*d)
                    /(cos(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)):
  dc_2:=convert(dc_2,tan);
    if has(numer(rhs(dc_1)),alpha[1, 1]*lz[1] )then
      d_s:=dc_2; d_a:= dc_1;
    else
      d_s:=dc_1; d_a:= dc_2;
    end if;
  print(d_s); print(d_a);
  end if:
```

* podle zvoleného směru (pro 0 a $\frac{1}{4}\pi$ resp. $\frac{1}{2}\pi$) se tu zobrazí jedna z možností:

$$cubic$$

$$0$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2})}{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1})}$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1})}{(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2})}$$

$$cubic$$

$$\frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2})\,(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3})}{(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1})\,(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2})}$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1})\,(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2})}{(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2})\,(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3})}$$

$$ortotropic$$

$$0$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(\alpha_{1,3}\,lz_3 + \alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3} + \alpha_{1,1}\,c_{1,3})}{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3} + \alpha_{1,3}\,c_{1,3})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1 + \alpha_{3,1})}$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3} + \alpha_{1,3}\,c_{1,3})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1 + \alpha_{3,1})}{(\alpha_{1,3}\,lz_3 + \alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3} + \alpha_{1,1}\,c_{1,3})}$$

* nebo:

$$ortotropic$$

$$\frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(\alpha_{1,3}\,lz_3 + \alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3} + \alpha_{1,1}\,c_{2,3})}{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3} + \alpha_{1,3}\,c_{2,3})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1 + \alpha_{3,1})}$$

$$\frac{\tan(k\,lz_1\,d)}{\tan(k\,lz_3\,d)} = \frac{(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3} + \alpha_{1,3}\,c_{2,3})\,(\alpha_{1,1}\,lz_1 + \alpha_{3,1})}{(\alpha_{1,3}\,lz_3 + \alpha_{3,3})\,(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3} + \alpha_{1,1}\,c_{2,3})}$$

2. subdeterminant → SH módy

Disperzní vztahy pro SH módy lze psát ve tvaru:

```
> if smer <> phi then
  dc2:= Determinant(Z2): dc_3:=-evalc(dc2):
  dc_3:=combine(dc_3,trig): d_SH:=isolate(dc_3,sin);
  print(d_SH); end if:
```

* pro směry šíření 0 a $\frac{1}{4}\pi$ resp. $\frac{1}{2}\pi$ se tu zobrazí:

$$\sin(2\,k\,lz_5\,d) = 0$$

Disperzní vztahy pro obecný úhel šíření ϕ

```
> if smer = phi then
    Z:=subs(exp( I*k*lz[1]*d)=Sigma[1],Z):
    Z:=subs(exp(-I*k*lz[1]*d)=Sigma[2],Z):
    Z:=subs(exp( I*k*lz[3]*d)=Sigma[3],Z):
    Z:=subs(exp(-I*k*lz[3]*d)=Sigma[4],Z):
    Z:=subs(exp( I*k*lz[5]*d)=Sigma[5],Z):
    Z:=subs(exp(-I*k*lz[5]*d)=Sigma[6],Z):
    if material = cubic then
      nu[1]:=remove(has,Z[1,1],{Sigma,c}): Z:=subs(nu[1]=Lambda[1],Z):
      nu[2]:=remove(has,Z[1,3],{Sigma,c}): Z:=subs(nu[2]=Lambda[2],Z):
      nu[3]:=remove(has,Z[1,5],{Sigma,c}): Z:=subs(nu[3]=Lambda[3],Z):
      nu[4]:=remove(has,Z[5,1],Sigma):     Z:=subs(nu[4]=Lambda[4],Z):
      nu[5]:=remove(has,Z[5,2],Sigma):     Z:=subs(nu[5]=Lambda[5],Z):
      nu[6]:=remove(has,Z[5,3],Sigma):     Z:=subs(nu[6]=Lambda[6],Z):
```

```
      nu[7]:=remove(has,Z[5,4],Sigma):      Z:=subs(nu[7]=Lambda[7],Z):
      nu[8]:=remove(has,Z[5,5],Sigma):      Z:=subs(nu[8]=Lambda[8],Z):
      nu[9]:=remove(has,Z[5,6],Sigma):      Z:=subs(nu[9]=Lambda[9],Z):
      dZ:= factor(Determinant(Z)/c[4,4]^4): np:=nops(dZ):
    else
      A:=NULL: for i in op(Z[1,1]) do
        if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[1]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[1]=Lambda[1],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[1,3]) do
        if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[2]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[2]=Lambda[2],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[1,5]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[3]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[3]=Lambda[3],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[3,1]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do;
      nu[4]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[4]=Lambda[4],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[3,3]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[5]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[5]=Lambda[5],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[3,5]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[6]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[6]=Lambda[6],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[5,1]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[7]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[7]=Lambda[7],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[5,3]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[8]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[8]=Lambda[8],Z):
      A:=NULL: for i in op(Z[5,5]) do
       if has(i, Sigma) then else A:=A, i; end if end do:
      nu[9]:=op(-1,[A]): Z:=subs(nu[9]=Lambda[9],Z);
      dZ:= factor(Determinant(Z)): np:=nops(dZ):
    end if;
    Sigma[1]:=exp(I*lz[1]*k*d): Sigma[2]:=exp(-I*lz[1]*k*d):
    Sigma[3]:=exp(I*lz[3]*k*d): Sigma[4]:=exp(-I*lz[3]*k*d):
    Sigma[5]:=exp(I*lz[5]*k*d): Sigma[6]:=exp(-I*lz[5]*k*d):
    LP:=op(np-1,dZ): LP:=simplify(evalc(LP))/8;
    RP:=op(np,dZ): RP:=simplify(evalc(RP))/8;
  end if:
> if smer = phi then
    unprotect(csc):
    scc:=sin(lz[1]*k*d)*cos(lz[3]*k*d)*cos(lz[5]*k*d):
    csc:=cos(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)*cos(lz[5]*k*d):
    ccs:=cos(lz[1]*k*d)*cos(lz[3]*k*d)*sin(lz[5]*k*d):
    css:=cos(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)*sin(lz[5]*k*d):
    scs:=sin(lz[1]*k*d)*cos(lz[3]*k*d)*sin(lz[5]*k*d):
    ssc:=sin(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)*cos(lz[5]*k*d):
```

```
    sss:=sin(lz[1]*k*d)*sin(lz[3]*k*d)*sin(lz[5]*k*d):
    ccc:=cos(lz[1]*k*d)*cos(lz[3]*k*d)*cos(lz[5]*k*d):
    if has(LP,I)then
      dc_a:=remove(has, LP, I): dc_s:=RP:
    else
      dc_a:=remove(has, RP, I): dc_s:=LP:
    end if:
    d_s[1]:=factor(select(has, dc_s, cos(k*lz[1]*d)));
    d_s[2]:=factor(select(has, dc_s, cos(k*lz[3]*d)));
    d_s[3]:=factor(select(has, dc_s, cos(k*lz[5]*d)));
    d_a[1]:=factor(select(has, dc_a, sin(k*lz[1]*d)));
    d_a[2]:=factor(select(has, dc_a, sin(k*lz[3]*d)));
    d_a[3]:=factor(select(has, dc_a, sin(k*lz[5]*d)));
    unassign('A'):
    dc_s:=C[A]*css+C[B]*scs+C[C]*ssc;
    dc_a:=C[A]*scc+C[B]*csc+C[C]*ccs;
    dc_s:=expand(dc_s/sss): dc_s:=convert(dc_s,tan):  dc_s:=convert(dc_s,cot)=0;
    dc_a:=expand(dc_a/ccc): dc_a:=convert(dc_a,tan)=0;
  end if:
> if smer = phi then
    if material = cubic then
      for i to 9 do
        Lambda[i]:=nu[i];
      end do:
    else
      a[1]:=factor(select(has,nu[1],alpha[2,1])):
      a[2]:=remove(has,nu[1],alpha[2,1]):
      a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[4,4])):
      a[2]:=factor(remove(has,a[2],c[4,4])):
      nu[1]:=a[1]+factor(a[2]+a[3]);
      a[1]:=factor(select(has,nu[2],alpha[2,3])):
      a[2]:=remove(has,nu[2],alpha[2,3]):
      a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[4,4])):
      a[2]:=factor(remove(has,a[2],c[4,4])):
      nu[2]:=a[1]+factor(a[2]+a[3]);
      a[1]:=factor(select(has,nu[3],alpha[2,5])):
      a[2]:=remove(has,nu[3],alpha[2,5]):
      a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[4,4])):
      a[2]:=factor(remove(has,a[2],c[4,4])):
      nu[3]:=a[1]+factor(a[2]+a[3]);
      a[1]:=select(has,nu[4],alpha[2,1]):
      a[2]:=remove(has,nu[4],alpha[2,1]):
      a[3]:=select(has,a[1],c[4,4]):
      a[1]:=simplify(remove(has,a[1],c[4,4])):
      a[4]:=factor(select(has,a[2],c[4,4])):
      a[2]:=simplify(remove(has,a[2],c[4,4])):
      nu[4]:=factor(a[1]+a[3])+factor(a[2]+a[4]);
      a[1]:=select(has,nu[5],alpha[2,3]):
```

```
a[2]:=remove(has,nu[5],alpha[2,3]):
a[3]:=select(has,a[1],c[4,4]):
a[1]:=simplify(remove(has,a[1],c[4,4])):;
a[4]:=factor(select(has,a[2],c[4,4])):
a[2]:=simplify(remove(has,a[2],c[4,4])):
nu[5]:=factor(a[1]+a[3])+factor(a[2]+a[4]);
a[1]:=select(has,nu[6],alpha[2,5]):
a[2]:=remove(has,nu[6],alpha[2,5]):
a[3]:=select(has,a[1],c[4,4]):
a[1]:=simplify(remove(has,a[1],c[4,4])):;
a[4]:=factor(select(has,a[2],c[4,4])):
a[2]:=simplify(remove(has,a[2],c[4,4])):
nu[6]:=factor(a[1]+a[3])+factor(a[2]+a[4]);
a[1]:=factor(select(has,nu[7],alpha[2,1])):
a[2]:=remove(has,nu[7],alpha[2,1]):
a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[1,3])):
a[4]:=simplify(select(has,a[2],c[2,3])):
a[2]:=simplify(select(has,a[2],c[3,3])):
nu[7]:=a[1]+factor(a[3]+a[4])+a[2];
a[1]:=factor(select(has,nu[8],alpha[2,3])):
a[2]:=remove(has,nu[8],alpha[2,3]):
a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[1,3])):
a[4]:=simplify(select(has,a[2],c[2,3])):
a[2]:=simplify(select(has,a[2],c[3,3])):
nu[8]:=a[1]+factor(a[3]+a[4])+a[2];
a[1]:=factor(select(has,nu[9],alpha[2,5])):
a[2]:=remove(has,nu[9],alpha[2,5]):
a[3]:=simplify(select(has,a[2],c[1,3])):
a[4]:=simplify(select(has,a[2],c[2,3])):
a[2]:=simplify(select(has,a[2],c[3,3])):
nu[9]:=a[1]+factor(a[3]+a[4])+a[2];
C_A:=d_a[1]/scc;  #CA:=d_s[1]/css;
C_B:=d_a[2]/csc;  #CB:=d_s[2]/scs;
C_C:=d_a[3]/ccs;  #CC:=d_s[3]/ssc;
unprotect(D);
for j from 1 to 9 do Lambda[j]:=nu[j] end do;
j:=0:for i in [1,3,5] do j:=j+1:
eq[j]   :=alpha[1,i]*lz[i]+alpha[3,i]=D[1,i]:
eq[j+3] :=alpha[2,i]=D[2,i]/lz[i]:
eq[j+6] :=alpha[3,i]*lz[i]*c[3,3]=D[3,i]-alpha[1,i]*c[2,3]:
eq[j+9] :=alpha[1,i]=E[1,i]/cos(f):
eq[j+12]:=alpha[2,i]=E[2,i]/sin(f):
end do:
a1:=simplify(eval((C_A/Lambda[7]), [eq[2],eq[3],eq[5],eq[6]]));
a2:=collect(eval(eval(simplify(Lambda[7]),[eq[7],eq[13]]),eq[10]),cos);
b1:=simplify(eval((C_B/Lambda[8]), [eq[1],eq[3],eq[4],eq[6]]));
b2:=collect(eval(eval(simplify(Lambda[8]),[eq[8],eq[14]]),eq[11]),cos);
c1:=simplify(eval((C_C/Lambda[9]), [eq[1],eq[2],eq[4],eq[5]]));
```

```
      c2:=collect(eval(eval(simplify(Lambda[9]),[eq[9],eq[15]]),eq[12]),cos);
    end if:
  end if:
> print('material'); material;
  print(směr_šíření); smer;
  print(Mindlinovy_křivky); d_m[1]; d_m[2];
  if smer =phi then d_m[3]; else
  print(SH_mody); d_SH;
  end if;
  print(symetrické_mody); dc_s;
  print(antisymetrické_mody); dc_a;
  if smer =phi then print(kde);
    if material = cubic then
      C[A]:=d_a[1]/scc;  #CA:=d_s[1]/css;
      C[B]:=d_a[2]/csc;  #CB:=d_s[2]/scs;
      C[C]:=d_a[3]/ccs;  #CC:=d_s[3]/ssc;
    else
      C[A]=a1*(factor(op(1,a2))+op(2,a2));
      C[B]=b1*(factor(op(1,b2))+op(2,b2));
      C[C]=c1*(factor(op(1,c2))+op(2,c2));
      for j from 1 to 9 do print(isolate(eq[j],D)) end do:
      for j from 10 to 15 do print(isolate(eq[j],E)) end do:
    end if;
  end if;
```

* podle zvoleného materiálu a směru se tu zobrazí jedna z následujících možností:

$$material$$

$$cubic$$

$$sm\check{e}r\_\check{s}\acute{\imath}\check{r}en\acute{\imath}$$

$$\phi$$

$$Mindlinovy\_k\check{r}ivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5d\right)=0$$

$$symetrick\acute{e}\_mody$$

$$C_A\,\cot\left(k\,lz_1d\right)+C_B\,\cot\left(k\,lz_3d\right)\,+C_C\,\cot\left(k\,lz_5d\right)=0$$

$$antisymetrick\acute{e}\_mody$$

$$C_A\,\tan\left(k\,lz_1d\right)+C_B\,\tan\left(k\,lz_3d\right)\,+C_C\,\tan\left(k\,lz_5d\right)=0$$

$$kde$$

$$C_A=\left(c_{1,2}+c_{1,1}\,\alpha_{3,1}\,lz_1\right)\,\left(-\alpha_{2,5}\,\left(lz_3+\alpha_{3,3}\right)\,lz_5+\left(lz_5+\alpha_{3,5}\right)\,lz_3\,\alpha_{2,3}\right)$$

$$C_B=-\left(c_{1,2}+c_{1,1}\,\alpha_{3,3}\,lz_3\right)\,\left(-\alpha_{2,5}\,\left(lz_1+\alpha_{3,1}\right)\,lz_5+\left(lz_5+\alpha_{3,5}\right)\,lz_1\,\alpha_{2,1}\right)$$

$$C_C=\left(c_{1,2}+c_{1,1}\,\alpha_{3,5}\,lz_5\right)\,\left(\left(lz_3+\alpha_{3,3}\right)\,\alpha_{2,1}\,lz_1+\left(lz_1+\alpha_{3,1}\right)\,lz_3\,\alpha_{2,3}\right)$$

* nebo

$$material$$

$$cubic$$

$$směr\_šíření$$

$$0$$

$$Mindlinovy\_křivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3 d\right)=0$$

$$SH\_mody$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5 d\right)=0$$

$$symetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2}\right)}{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}$$

$$antisymetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2}\right)}$$

* nebo

$$material$$

$$cubic$$

$$směr\_šíření$$

$$\frac{1}{4}\,\pi$$

$$Mindlinovy\_křivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3 d\right)=0$$

$$SH\_mody$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5 d\right)=0$$

$$symetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2}\right)\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)}{\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2}\right)}$$

$$antisymetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{1,1}+\alpha_{1,3}\,c_{1,2}\right)}{\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{1,1}+\alpha_{1,1}\,c_{1,2}\right)\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)}$$

* nebo

$$material$$

$$ortotropic$$

$$směr\_šíření$$

$$\phi$$

$$Mindlinovy\_křivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5 d\right)=0$$

$$symetrické\_mody$$

$$C_A\ \cot\left(k\,lz_1 d\right)+C_B\ \cot\left(k\,lz_3 d\right)\ +C_C\ \cot\left(k\,lz_5 d\right)=0$$

$$antisymetrické\_mody$$

$$C_A\ \tan\left(k\,lz_1 d\right)+C_B\ \tan\left(k\,lz_3 d\right)\ +C_C\ \tan\left(k\,lz_5 d\right)=0$$

$$kde$$

$$C_A=-c_{4,4}\ c_{5,5}\ \left(-D_{2,3}\ D_{1,5}+D_{2,5}\ D_{1,3}\right)\ \left(\left(E_{1,1}-E_{2,1}\right)\ \left(c_{1,3}-c_{2,3}\right)\ \cos\left(\phi\right)+D_{3,1}\right)$$

$$C_B=-c_{4,4}\ c_{5,5}\ \left(D_{2,1}\ D_{1,5}-D_{2,5}\ D_{1,1}\right)\ \left(-\left(E_{1,3}-E_{2,3}\right)\ \left(-c_{1,3}+c_{2,3}\right)\ \cos\left(\phi\right)+D_{3,3}\right)$$

$$C_C=c_{4,4}\ c_{5,5}\ \left(D_{2,1}\ D_{1,3}-D_{2,3}\ D_{1,1}\right)\ \left(-\left(-E_{1,5}+E_{2,5}\right)\ \left(c_{1,3}-c_{2,3}\right)\ \cos\left(\phi\right)+D_{3,5}\right)$$

$$D_{1,1}=\alpha_{1,1}\ lz_1+\alpha_{3,1}$$

$$D_{1,3}=\alpha_{1,3}\ lz_3+\alpha_{3,3}$$

$$D_{1,5}=\alpha_{1,5}\ lz_5+\alpha_{3,5}$$

$$D_{2,1}=\alpha_{2,1}\ lz_1$$

$$D_{2,3}=\alpha_{2,3}\ lz_3$$

$$D_{2,5}=\alpha_{2,5}\ lz_5$$

$$D_{3,1}=\alpha_{1,1}\ c_{2,3}+c_{3,3}\ \alpha_{3,1}\ lz_1$$

$$D_{3,3}=\alpha_{1,3}\ c_{2,3}+c_{3,3}\ \alpha_{3,3}\ lz_3$$

$$D_{3,5}=\alpha_{1,5}\ c_{2,3}+c_{3,3}\ \alpha_{3,5}\ lz_5$$

$$E_{1,1}=\alpha_{1,1}\cos\left(\phi\right)$$

$$E_{1,3}=\alpha_{1,3}\cos\left(\phi\right)$$

$$E_{1,5}=\alpha_{1,5}\cos\left(\phi\right)$$

$$E_{2,1}=\alpha_{2,1}\sin\left(\phi\right)$$

$$E_{2,3}=\alpha_{2,3}\sin\left(\phi\right)$$

$$E_{2,5}=\alpha_{2,5}\sin\left(\phi\right)$$

* nebo

$$material$$

$$ortotropic$$

$$směr\_šíření$$

$$0$$

$$Mindlinovy\_křivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3 d\right)=0$$

$$SH\_mody$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5 d\right)=0$$

$$symetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3}+\alpha_{1,1}\,c_{1,3}\right)}{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3}+\alpha_{1,3}\,c_{1,3}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}$$

$$antisymetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3}+\alpha_{1,3}\,c_{1,3}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3}+\alpha_{1,1}\,c_{1,3}\right)}$$

* nebo

$$material$$

$$ortotropic$$

$$směr\_šíření$$

$$\frac{1}{2}\pi$$

$$Mindlinovy\_křivky$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_1 d\right)=0$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_3 d\right)=0$$

$$SH\_mody$$

$$\sin\left(2\,k\,lz_5 d\right)=0$$

$$symetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3}+\alpha_{1,1}\,c_{2,3}\right)}{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3}+\alpha_{1,3}\,c_{2,3}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}$$

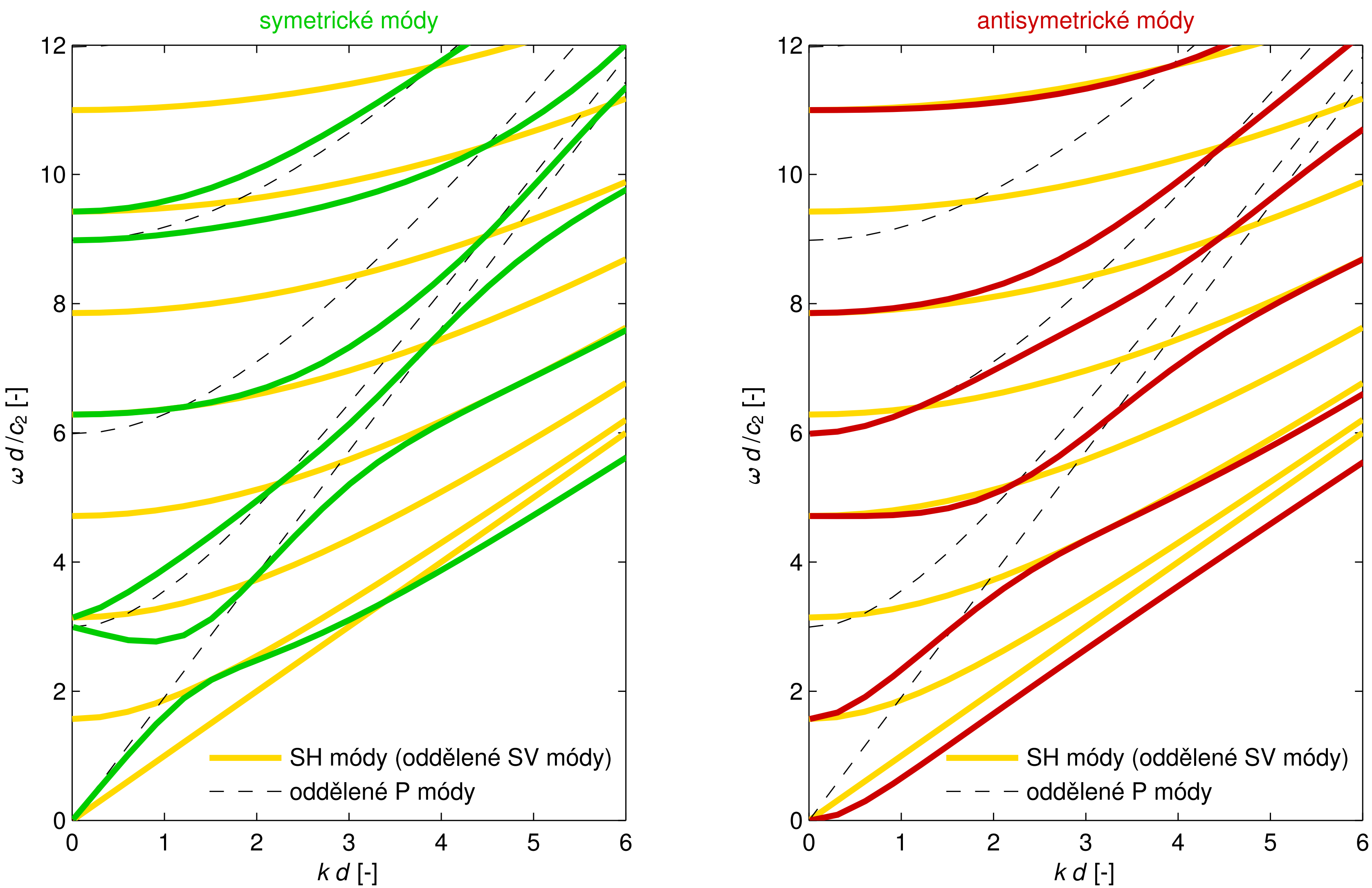
$$antisymetrické\_mody$$

$$\frac{\tan\left(k\,lz_1\,d\right)}{\tan\left(k\,lz_3\,d\right)}=\frac{\left(lz_3\,\alpha_{3,3}\,c_{3,3}+\alpha_{1,3}\,c_{2,3}\right)\left(\alpha_{1,1}\,lz_1+\alpha_{3,1}\right)}{\left(\alpha_{1,3}\,lz_3+\alpha_{3,3}\right)\left(lz_1\,\alpha_{3,1}\,c_{3,3}+\alpha_{1,1}\,c_{2,3}\right)}$$

4 Výsledky

4.1 Izotropní deska

Disperzní křivky byly počítány pro materiál s Poissonovým číslem 0,31 pomocí Matlabu [15]. A jsou znázorněny na obr. 4.1



Obrázek 4.1: Disperzní křivky v izotropní desce.

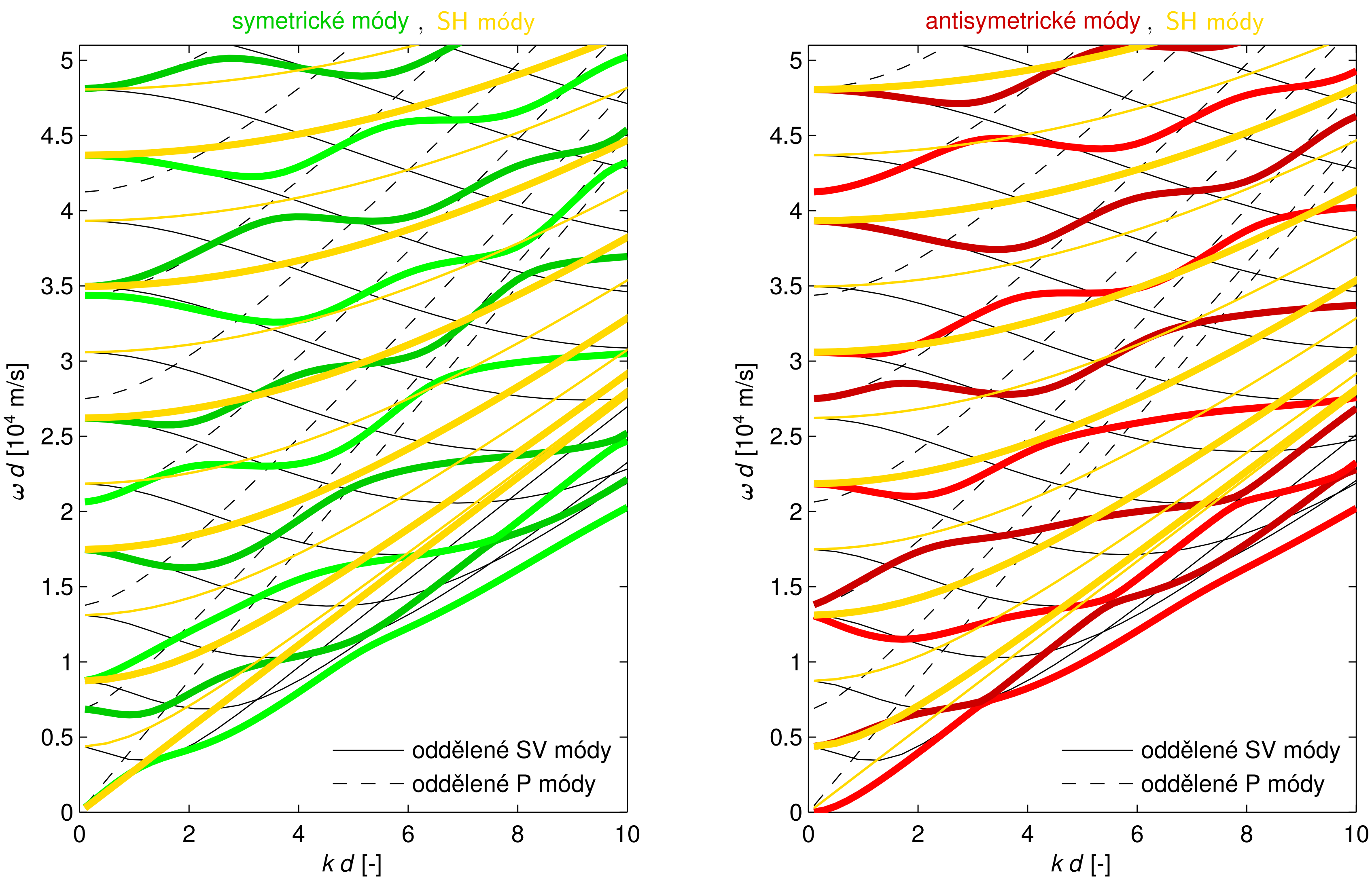
4.2 Kubická deska

Při výpočtu disperzních křivek v desce s kubickou anizotropií byly použity hodnoty materiálových konstant mědi, jak je uvedeno v tabulce 4.1, podle [10].

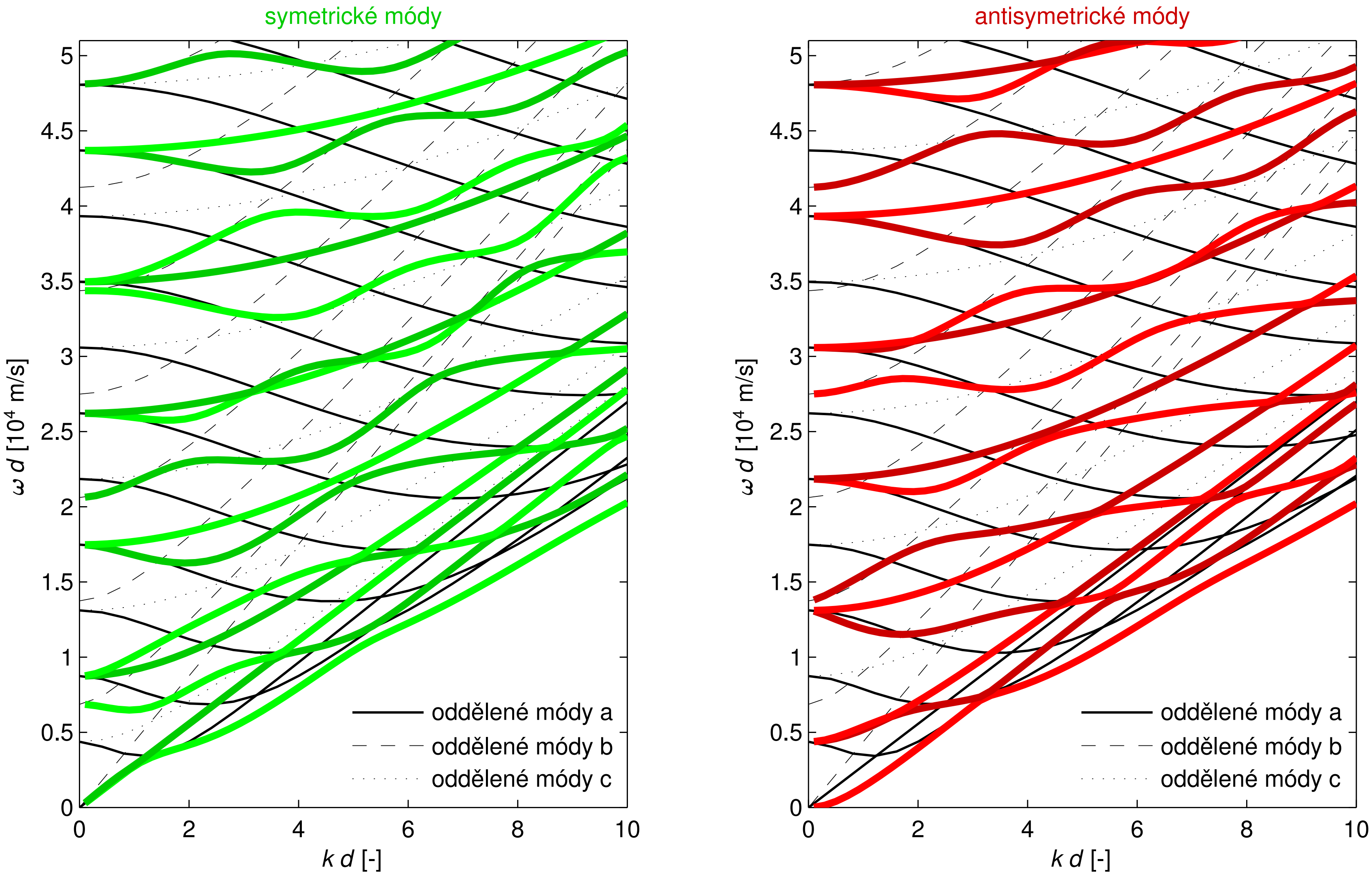
c_{11}	171	[GPa]
c_{12}	122	[GPa]
c_{44}	69,1	[GPa]
ρ	8930	[kg/m^3]

Tabulka 4.1: Materiálové konstanty pro Cu použité ve výpočtech.

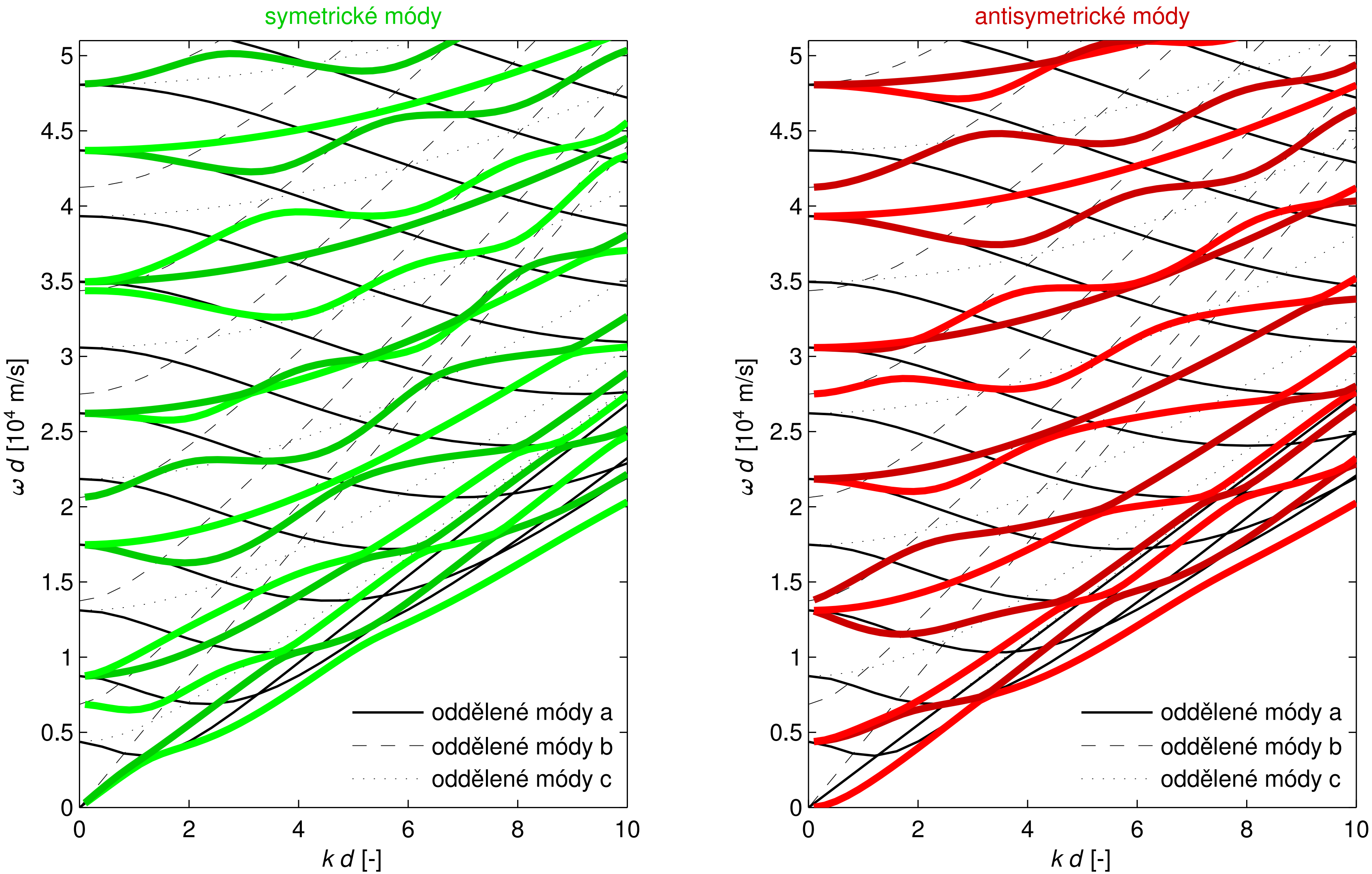
Disperzní křivky pro symetrické a antisymetrické módy desky s kubickou anizotropií společně s Mindlinovými oddělenými módy a směr šíření $\phi = 0°$ jsou zakresleny v obr. 4.2, pro směr šíření $0° < \phi < 45°$ jsou zakresleny v obr. 4.3 – 4.12. A pro směr šíření $\phi = 45°$ v obr. 4.13.



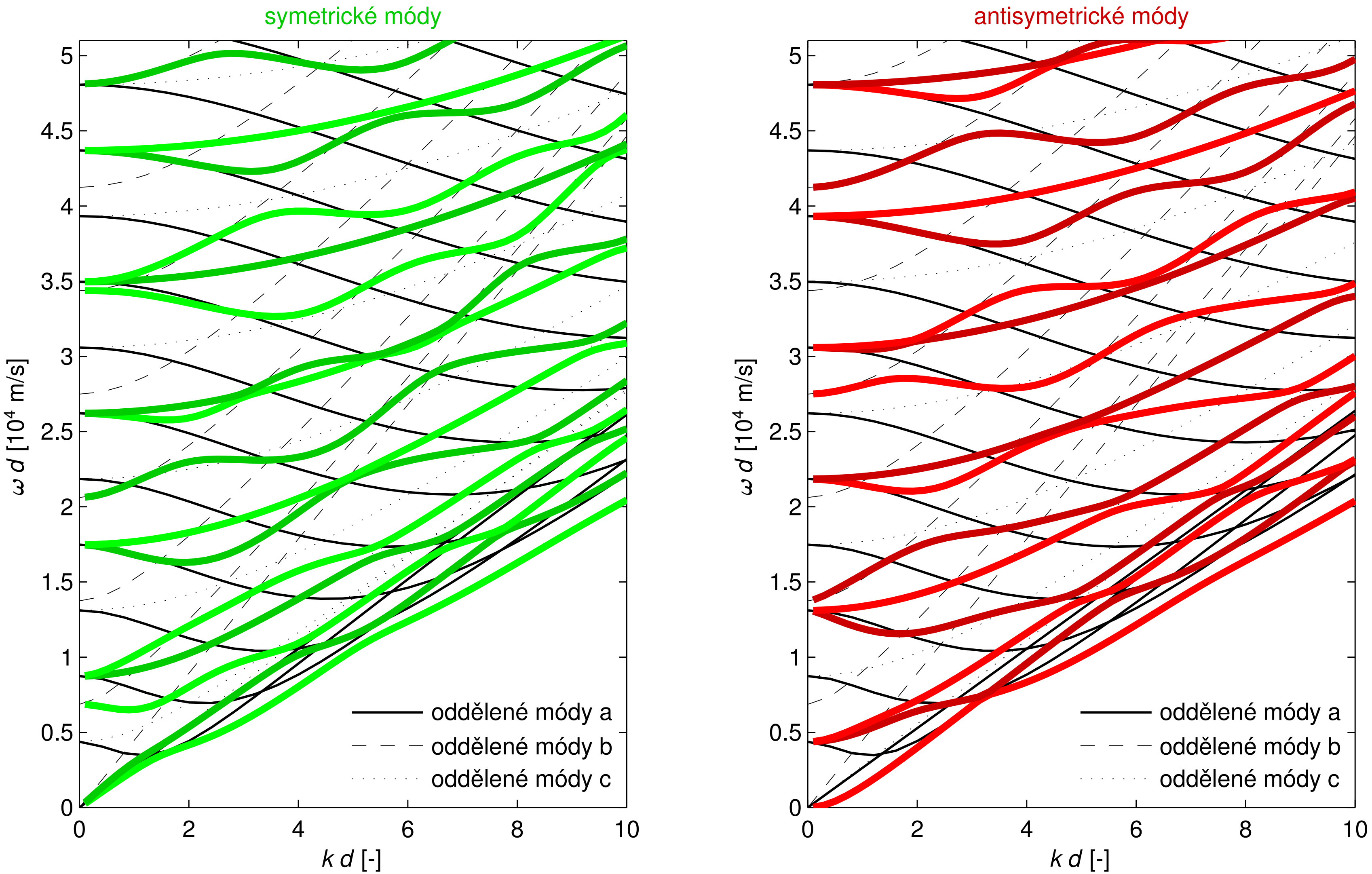
Obrázek 4.2: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 0°$ v kubické dese.



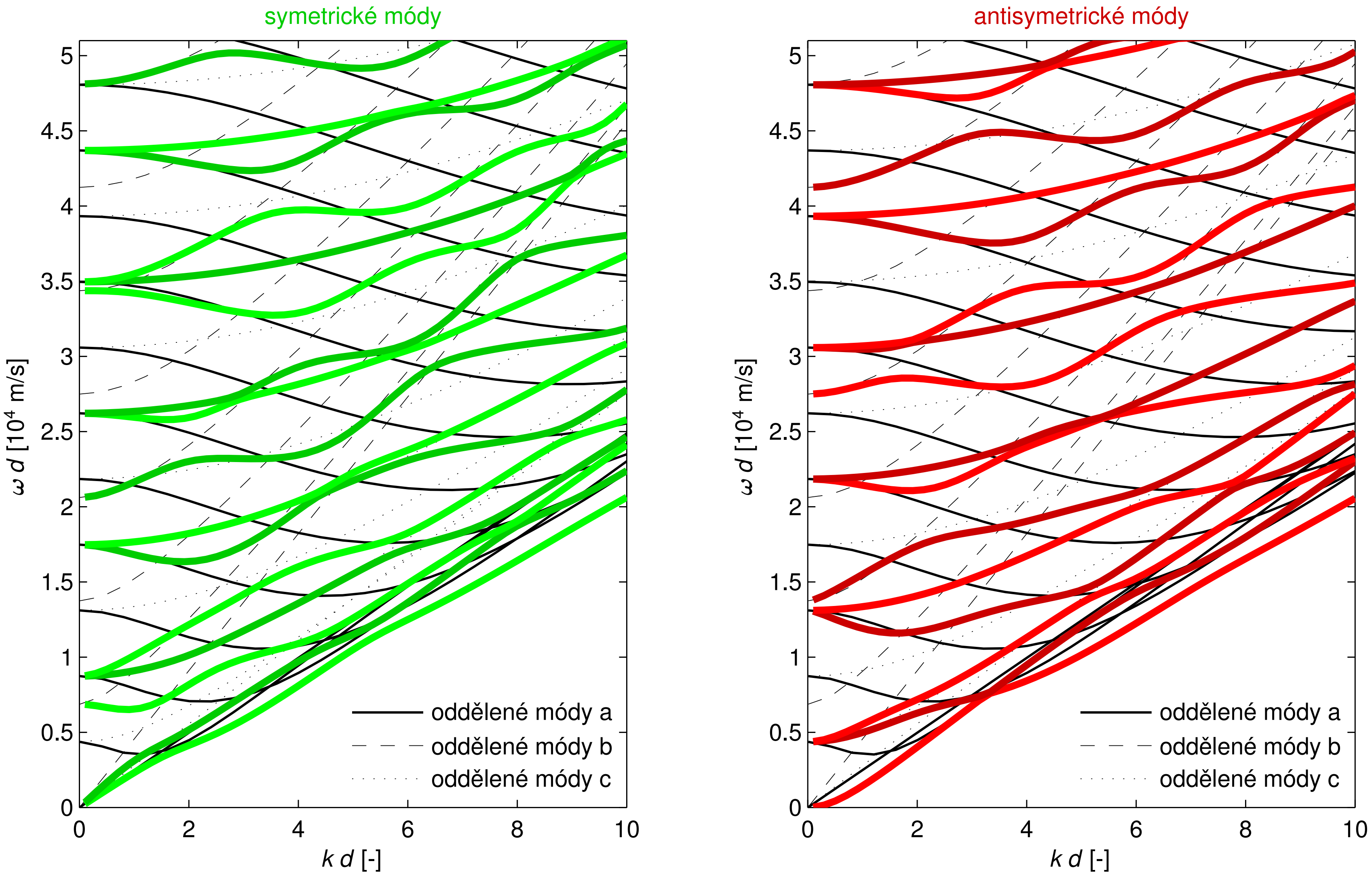
Obrázek 4.3: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 1^\circ$ v kubické dese.



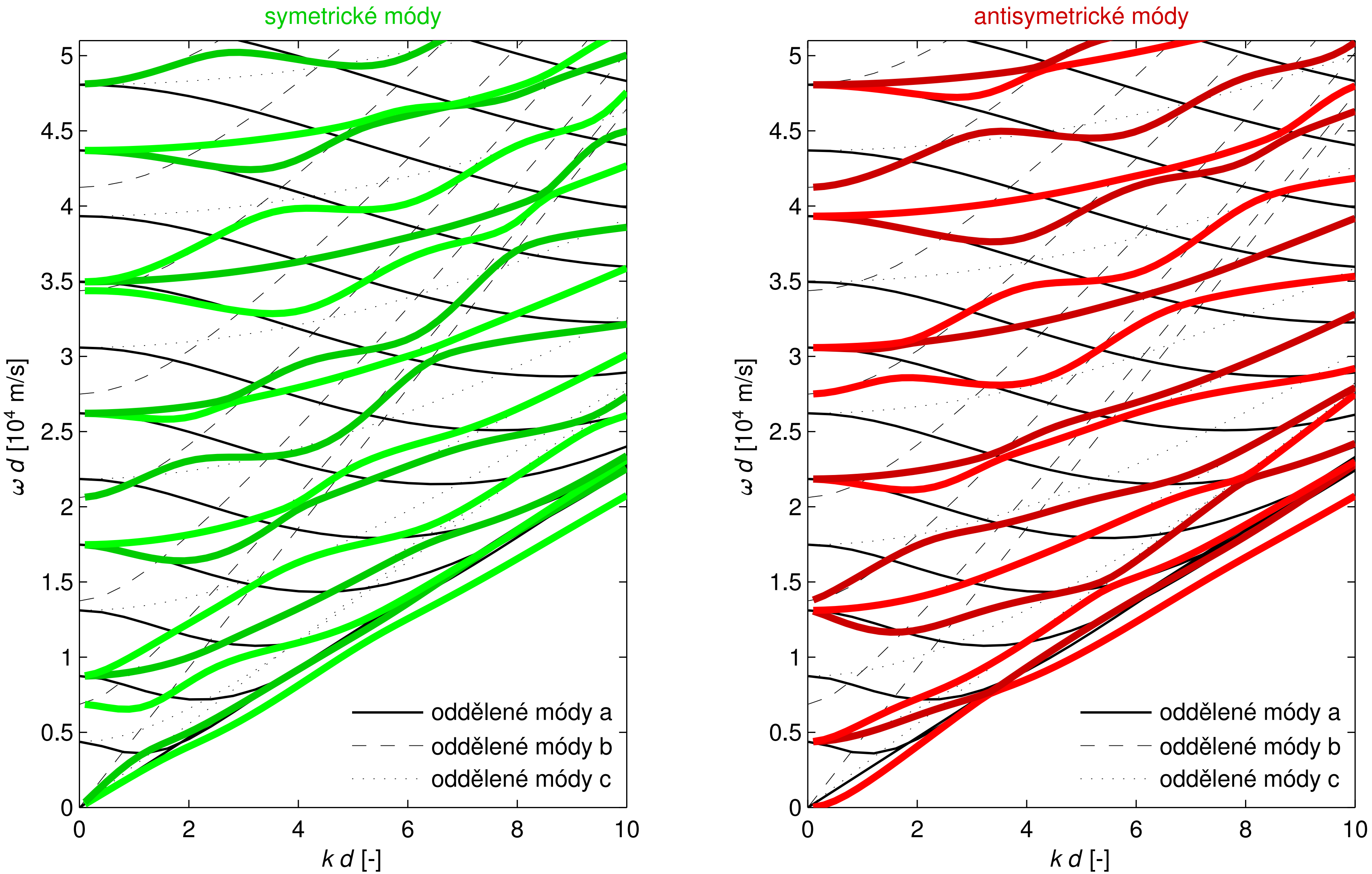
Obrázek 4.4: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 5^\circ$ v kubické dese.



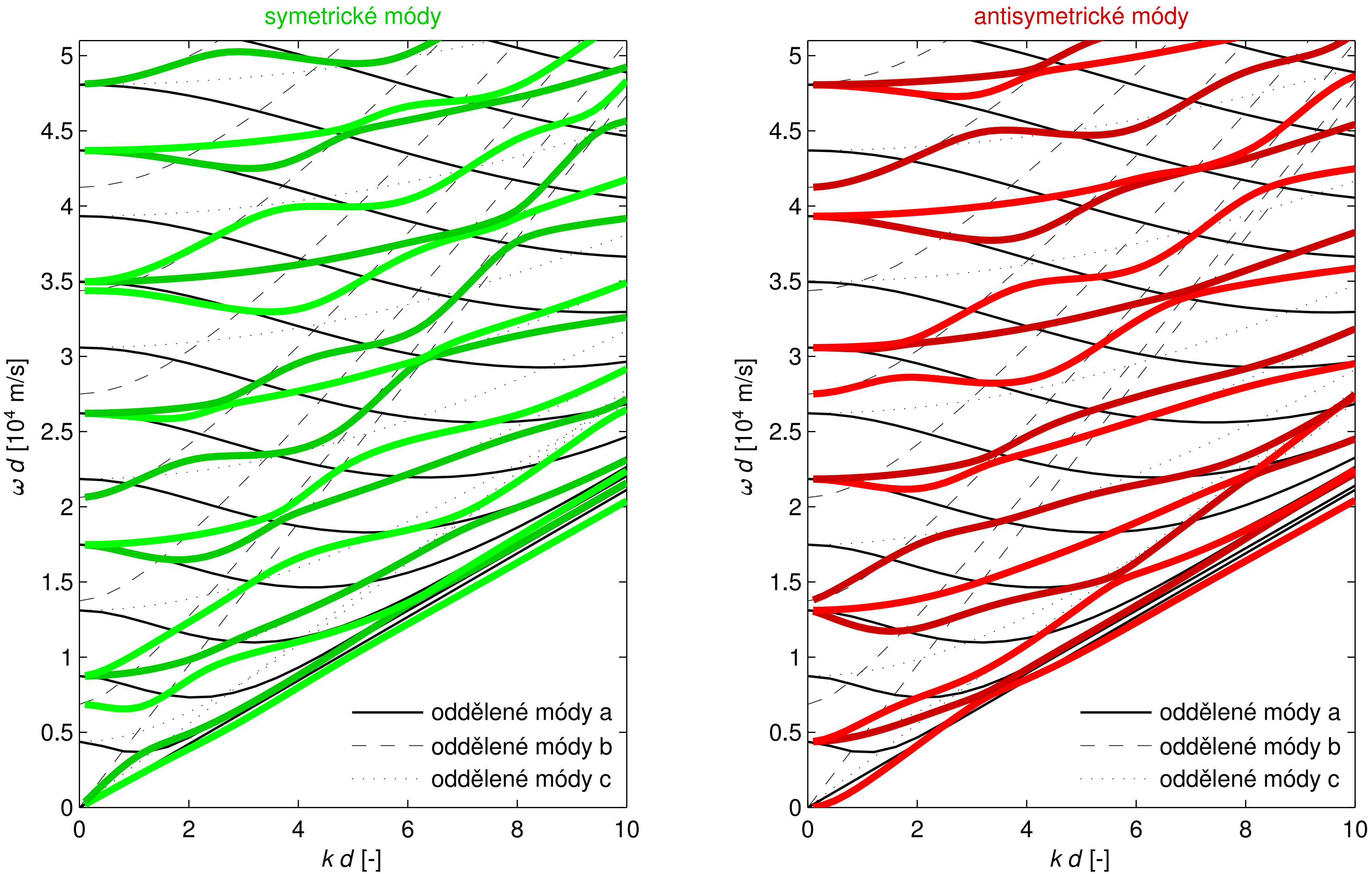
Obrázek 4.5: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 10°$ v kubické dese.



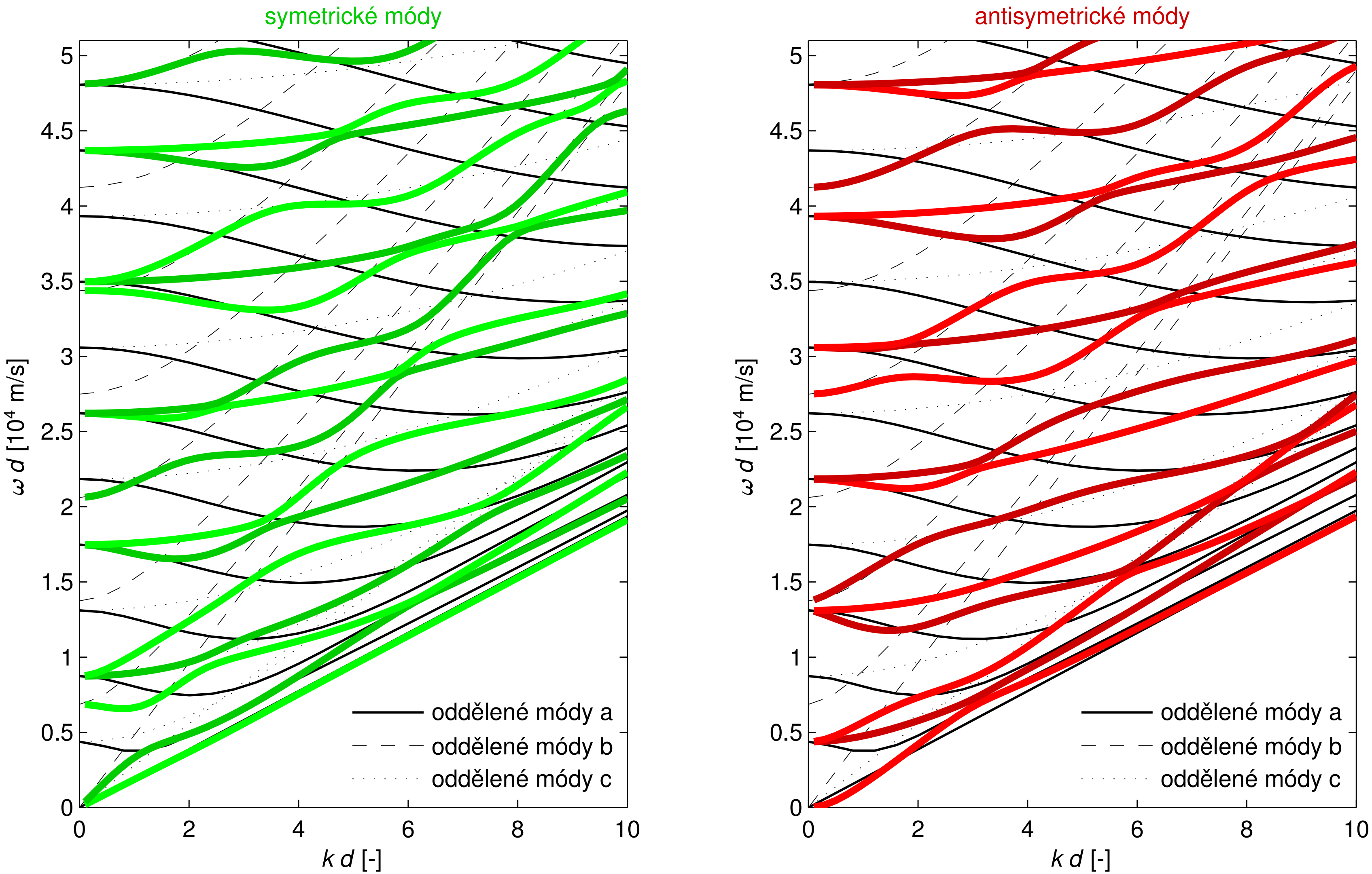
Obrázek 4.6: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 15°$ v kubické dese.



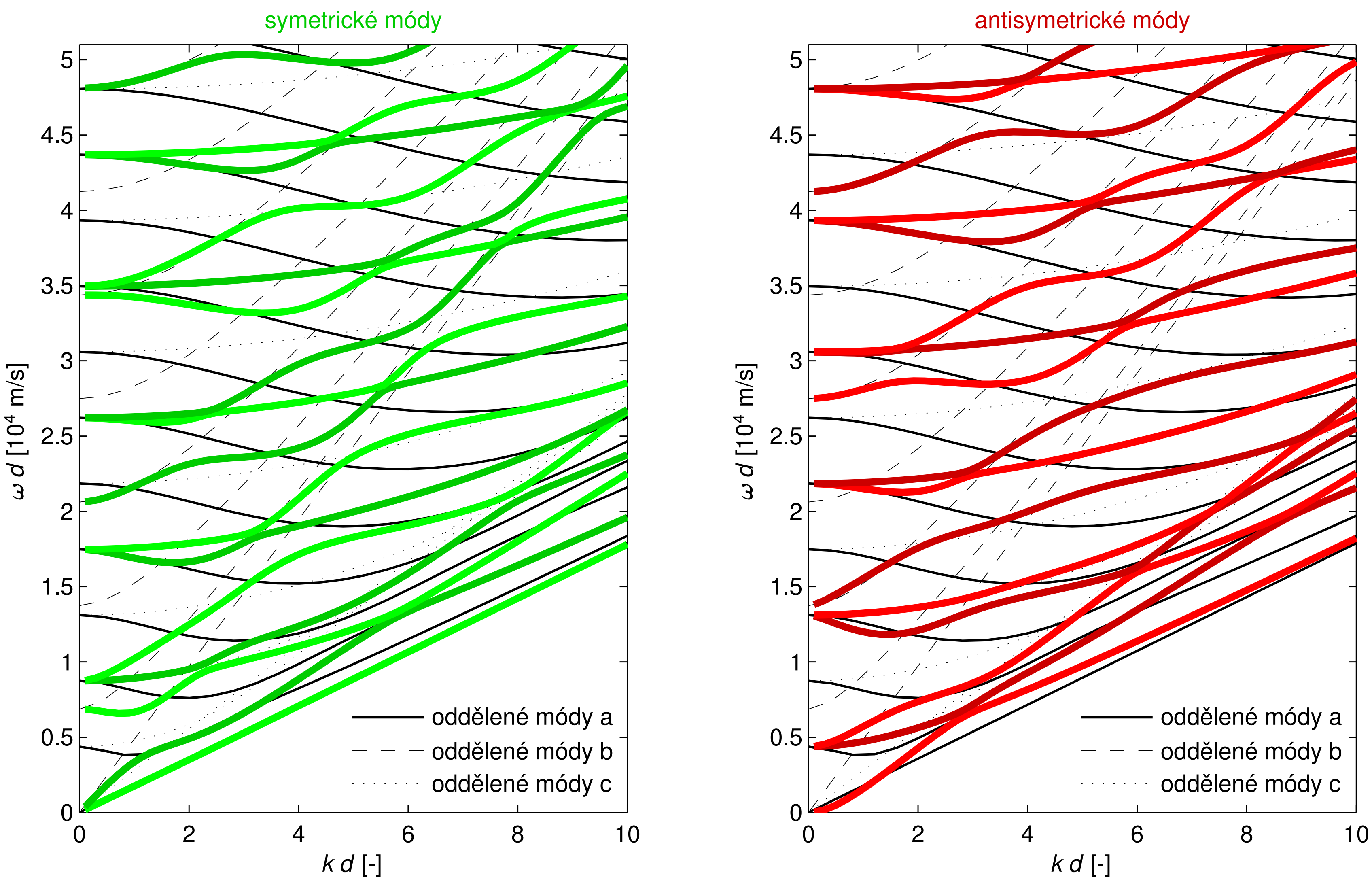
Obrázek 4.7: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 20°$ v kubické dese.



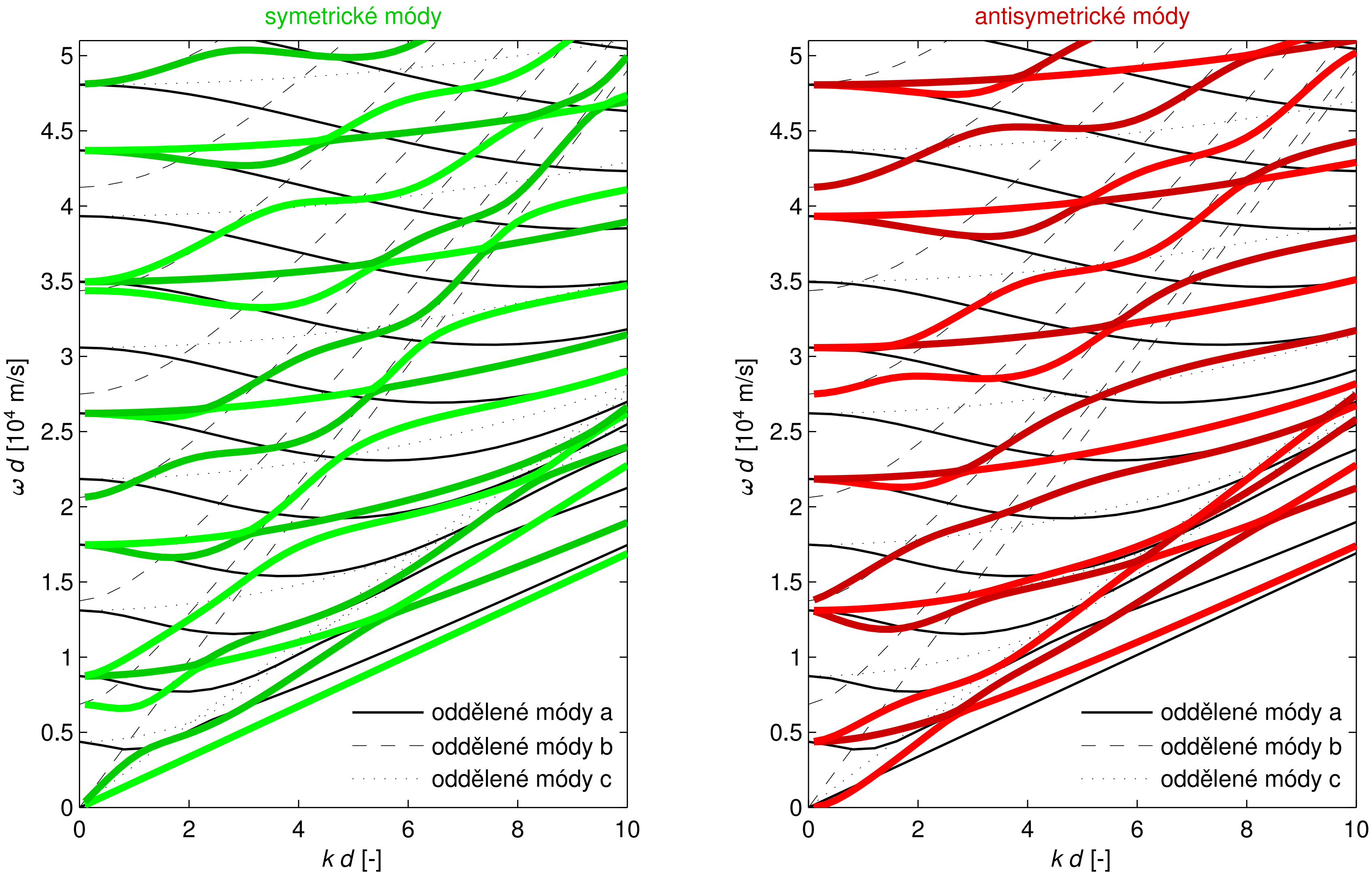
Obrázek 4.8: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 25°$ v kubické dese.



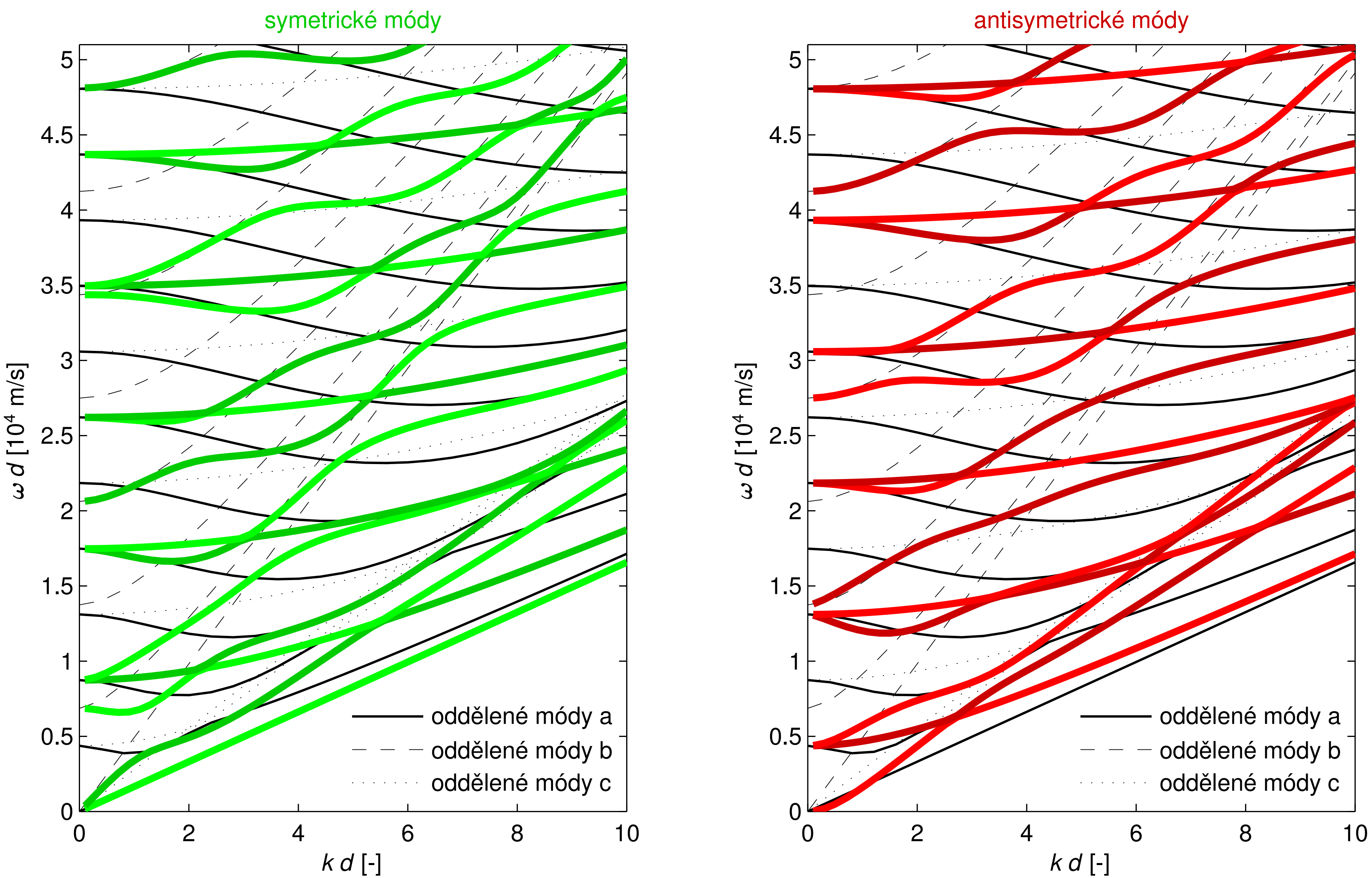
Obrázek 4.9: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 30°$ v kubické dese.



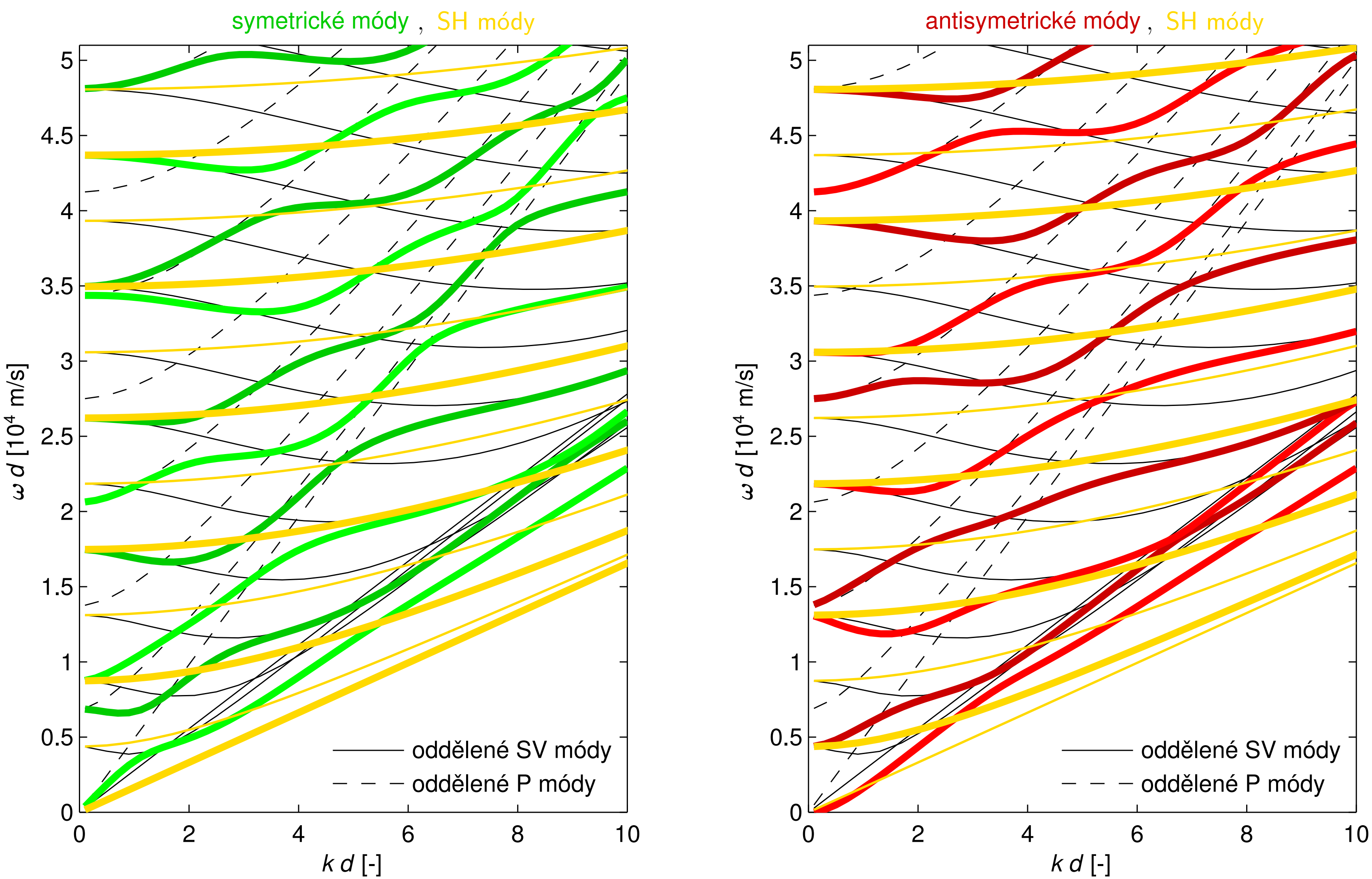
Obrázek 4.10: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 35°$ v kubické dese.



Obrázek 4.11: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 40^\circ$ v kubické desce.



Obrázek 4.12: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 44°$ v kubické dese.



Obrázek 4.13: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 45°$ v kubické desce.

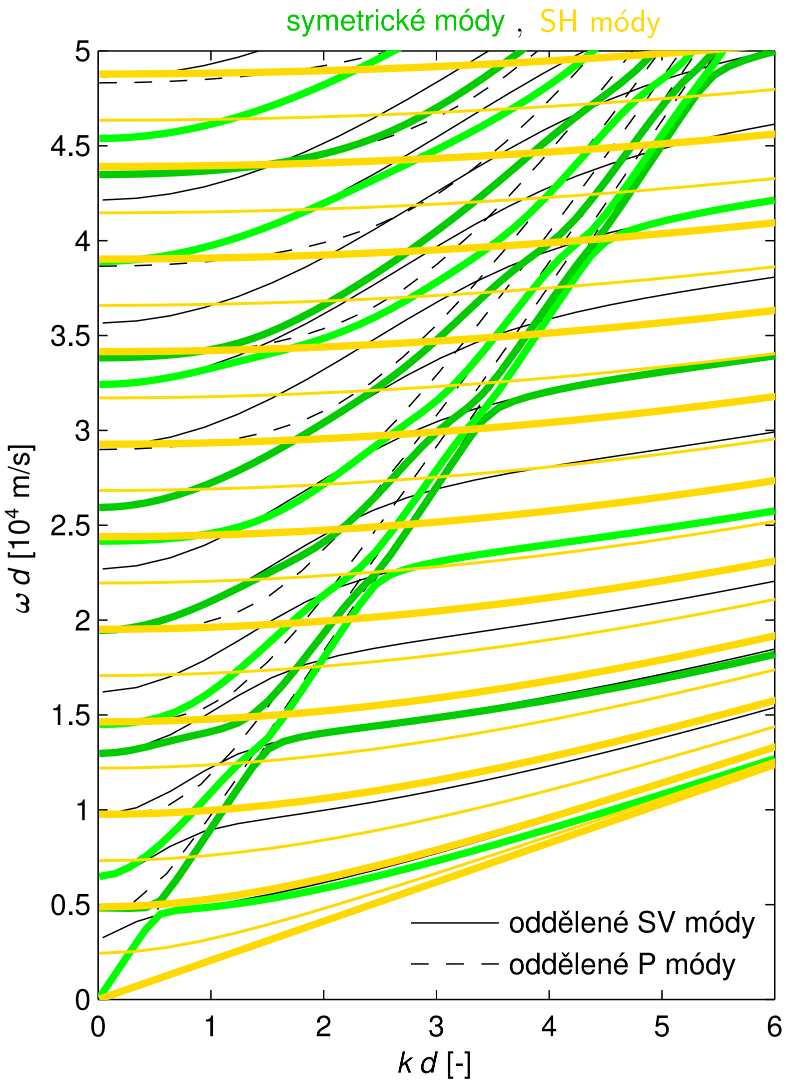
4.3 Ortotropní deska

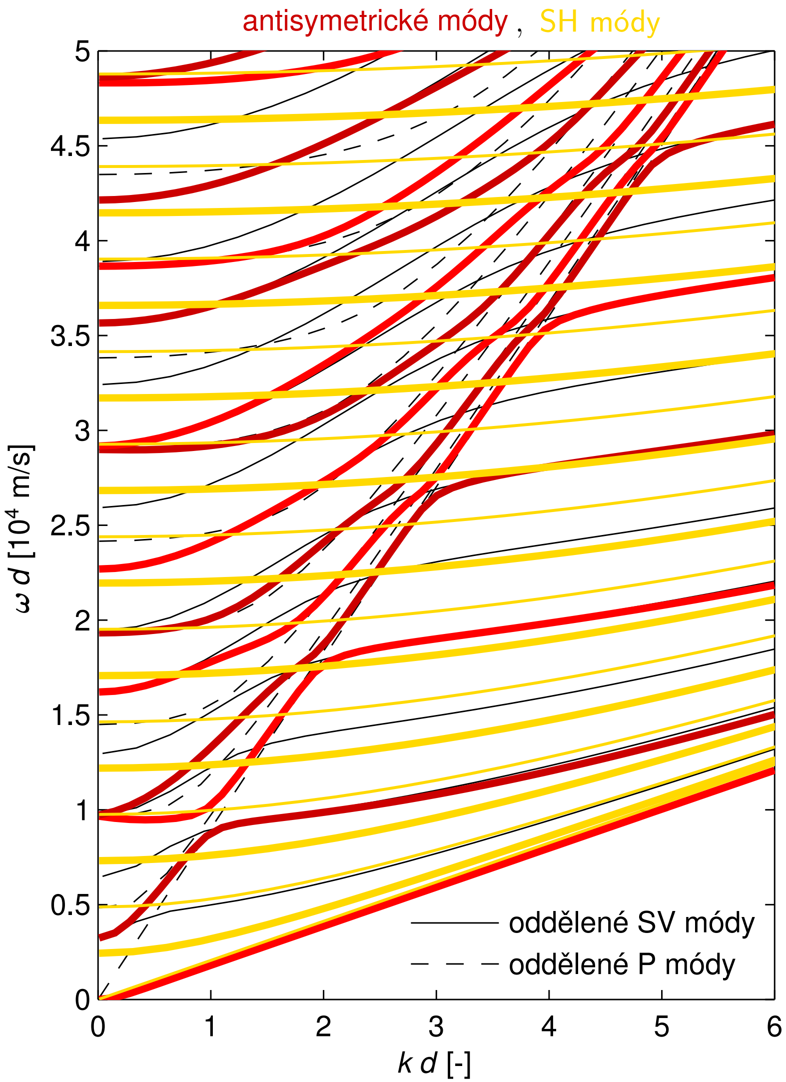
Při výpočtu disperzních křivek v ortotropní desce byly použity hodnoty materiálových konstant uhlíkového kompozitu, jak je uvedeno v tabulce 4.2, podle [20].

c_{11}	128,20	[GPa]
$c_{22} = c_{33}$	14,95	[GPa]
c_{44}	3,81	[GPa]
$c_{55} = c_{66}$	6,73	[GPa]
$c_{12} = c_{13}$	6,90	[GPa]
c_{23}	7,33	[GPa]
ρ	1580	[kg/m^3]

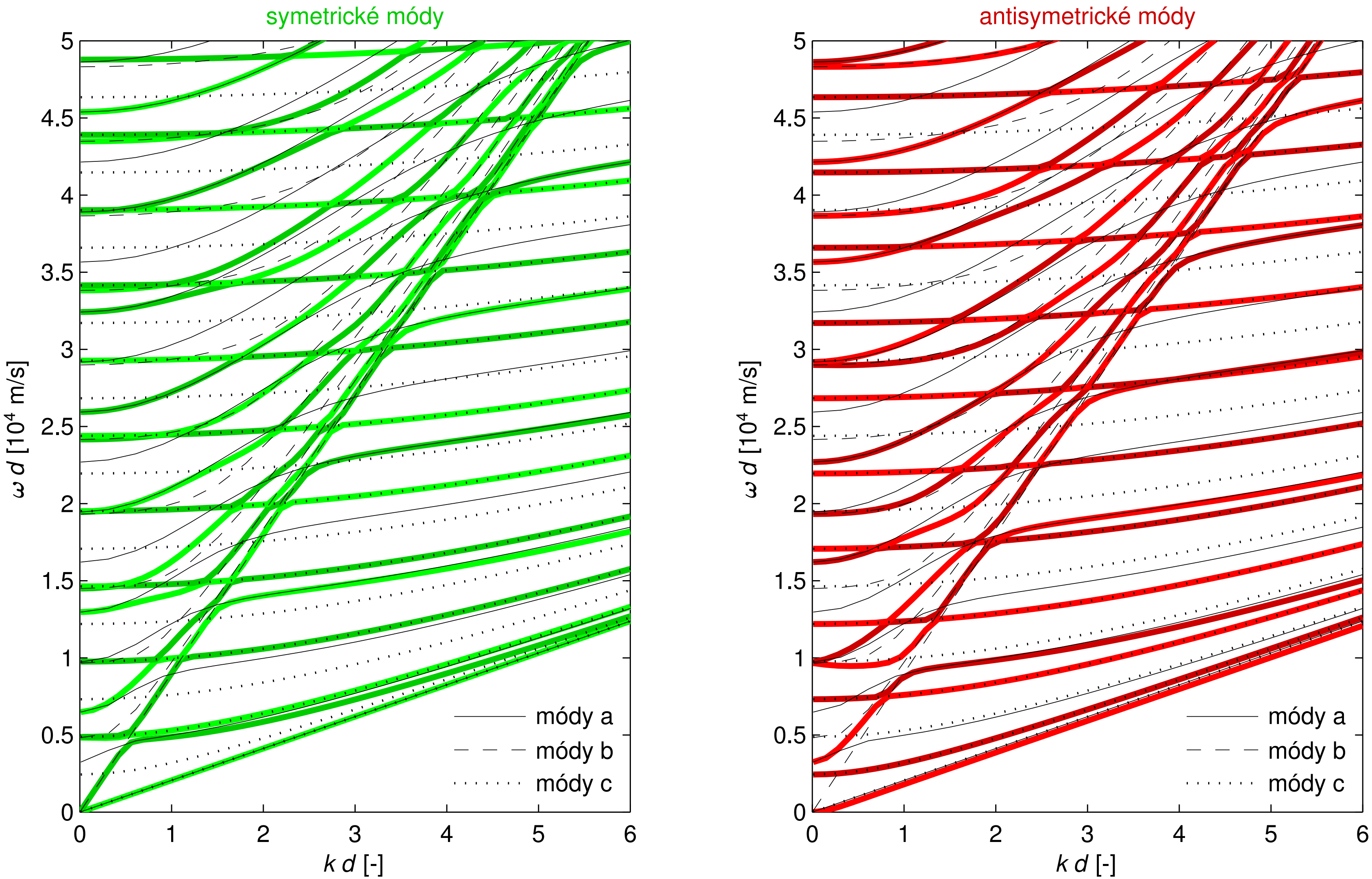
Tabulka 4.2: Materiálové konstanty pro uhlíkový kompozit použité ve výpočtech.

Disperzní křivky pro symetrické a antisymetrické módy desky s ortotropní anizotropií společně s Mindlinovými oddělenými módy a směr šíření $\phi = 0°$ jsou zakresleny v obr. 4.14, pro směr šíření $0° < \phi < 90°$ jsou zakresleny v obr. 4.15 – 4.33. A pro směr šíření $\phi = 90°$ v obr. 4.34.

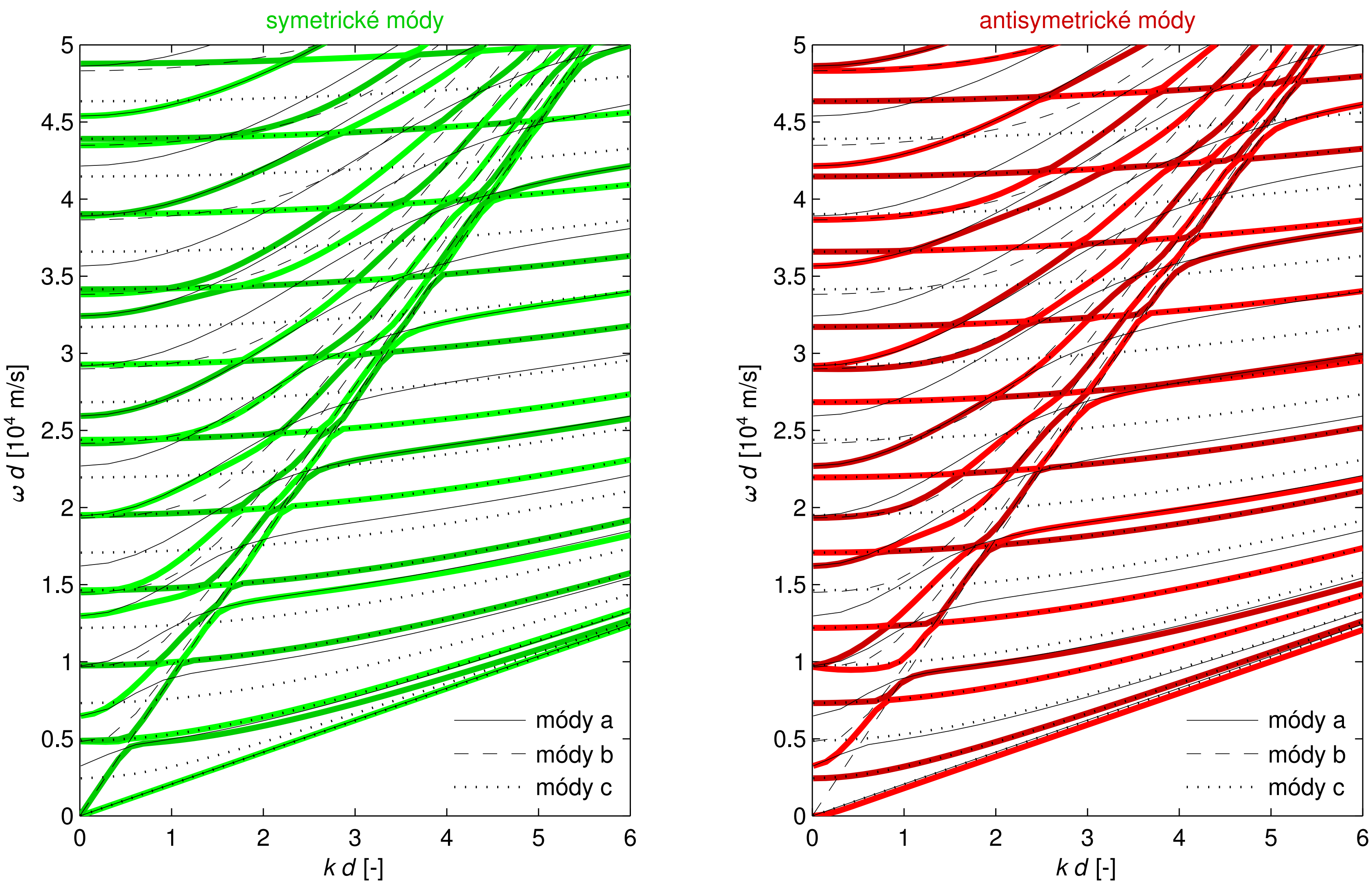




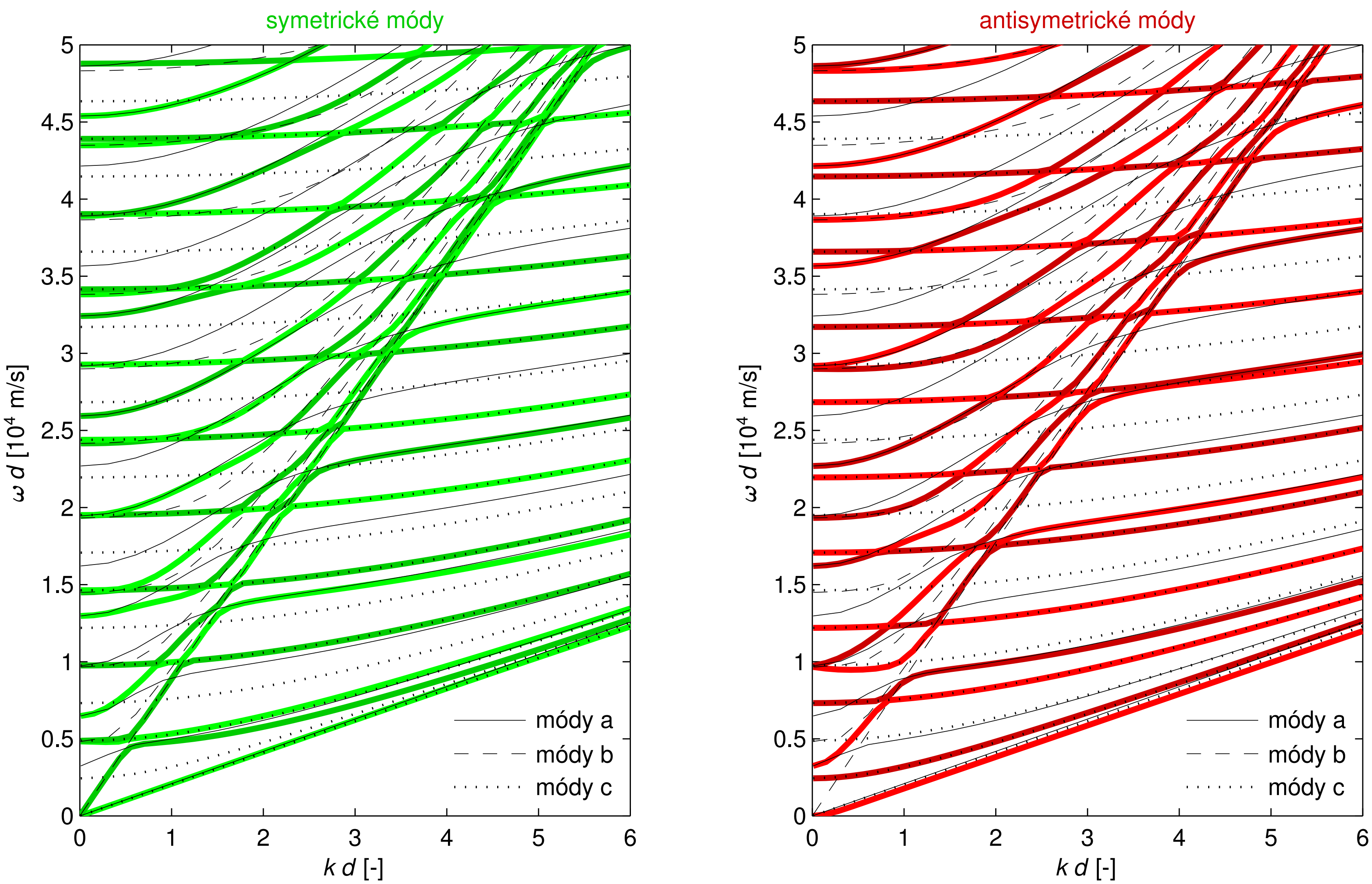
Obrázek 4.14: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 0°$ v ortotropní desce.



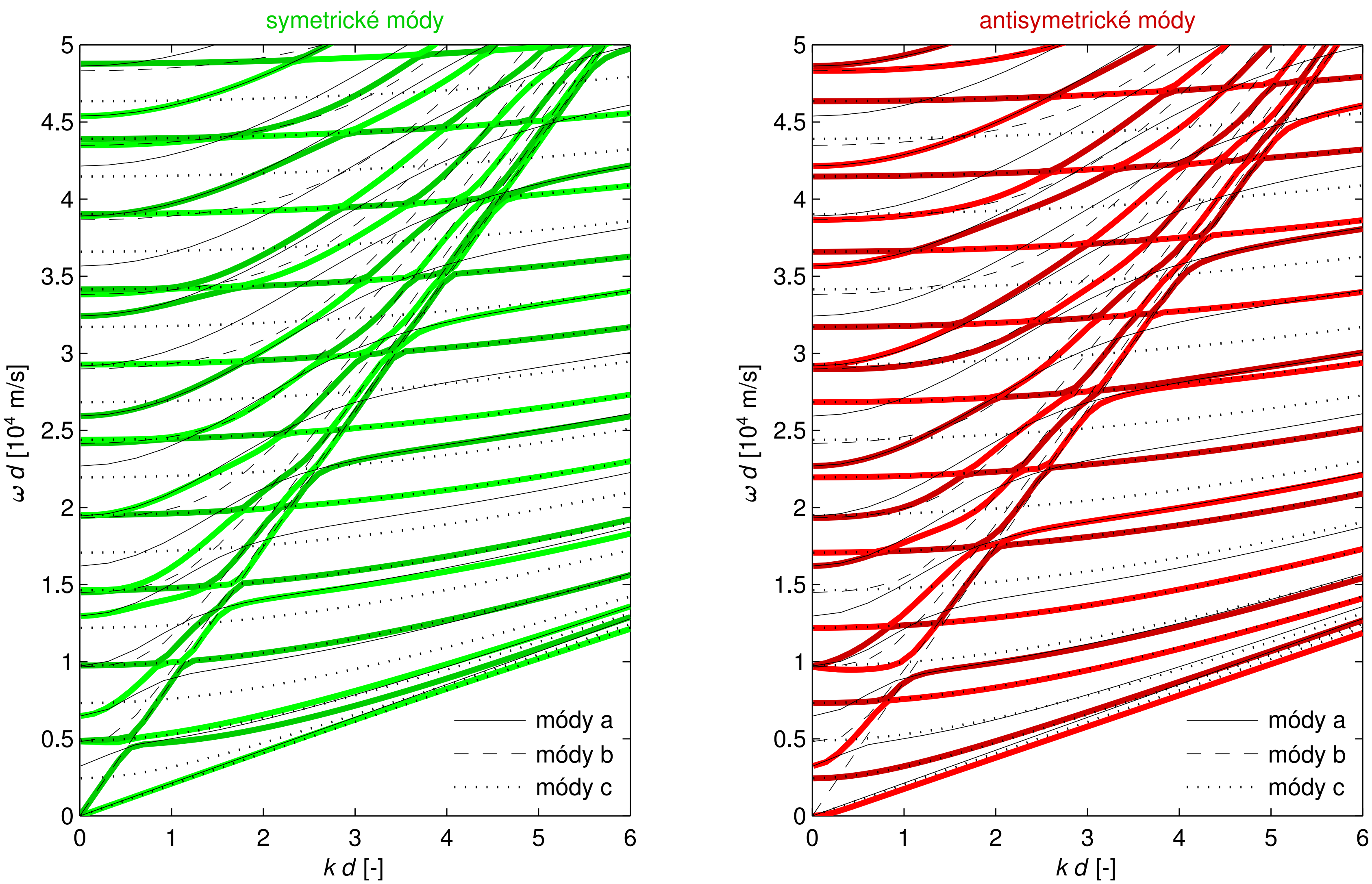
Obrázek 4.15: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 1°$ v ortotropní desce.



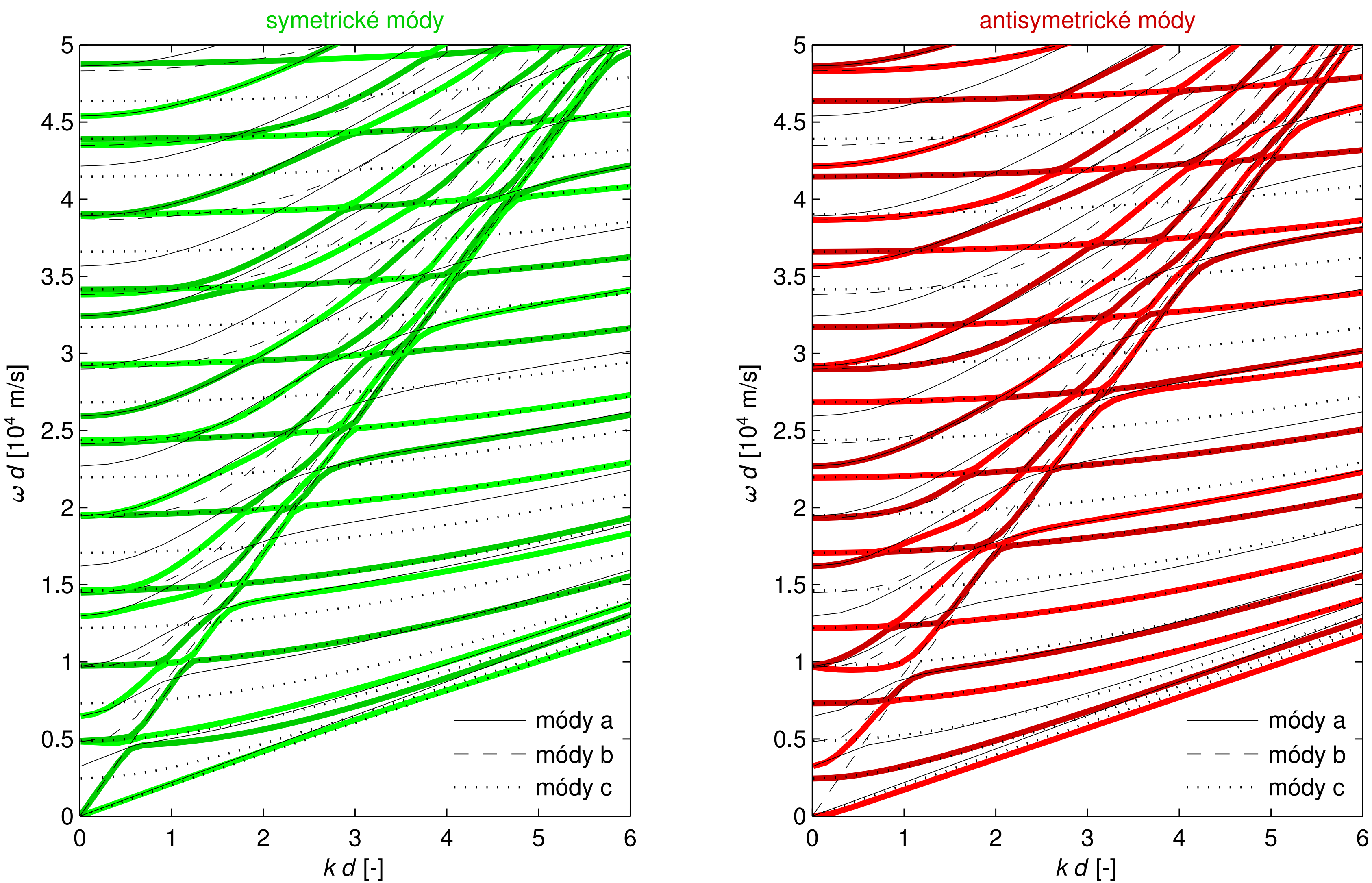
Obrázek 4.16: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 5°$ v ortotropní desce.



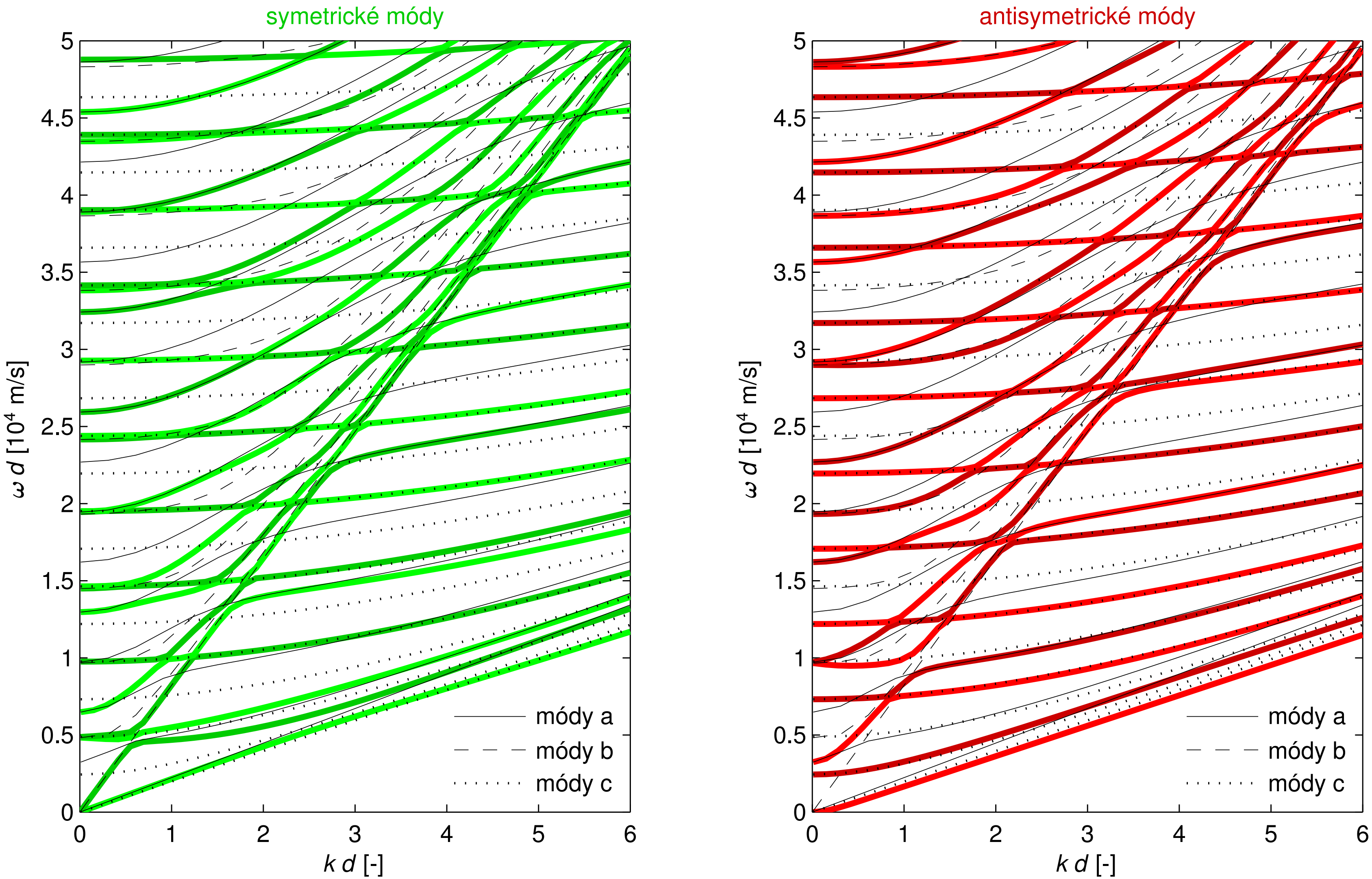
Obrázek 4.17: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 10°$ v ortotropní desce.



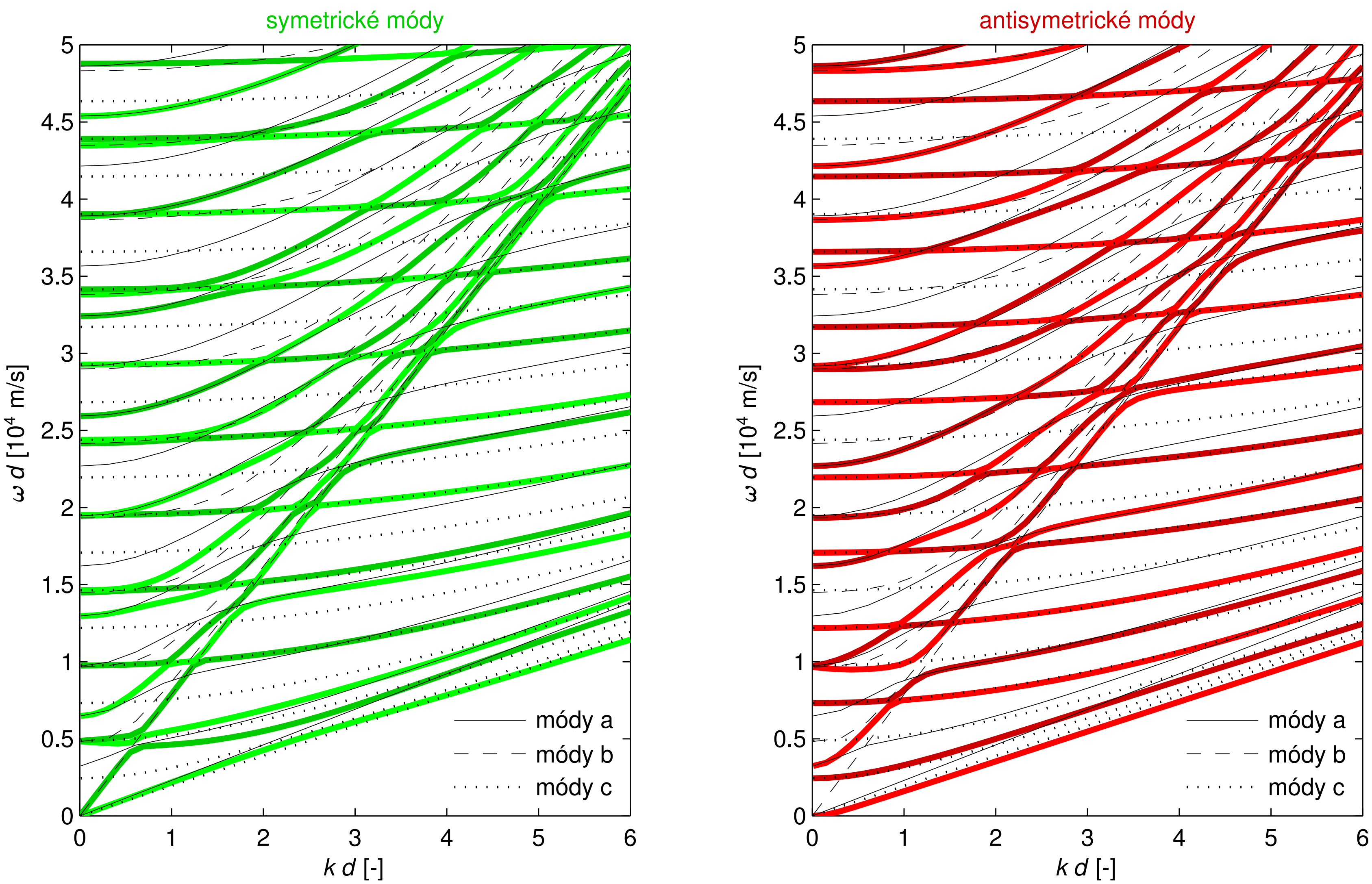
Obrázek 4.18: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 15°$ v ortotropní desce.



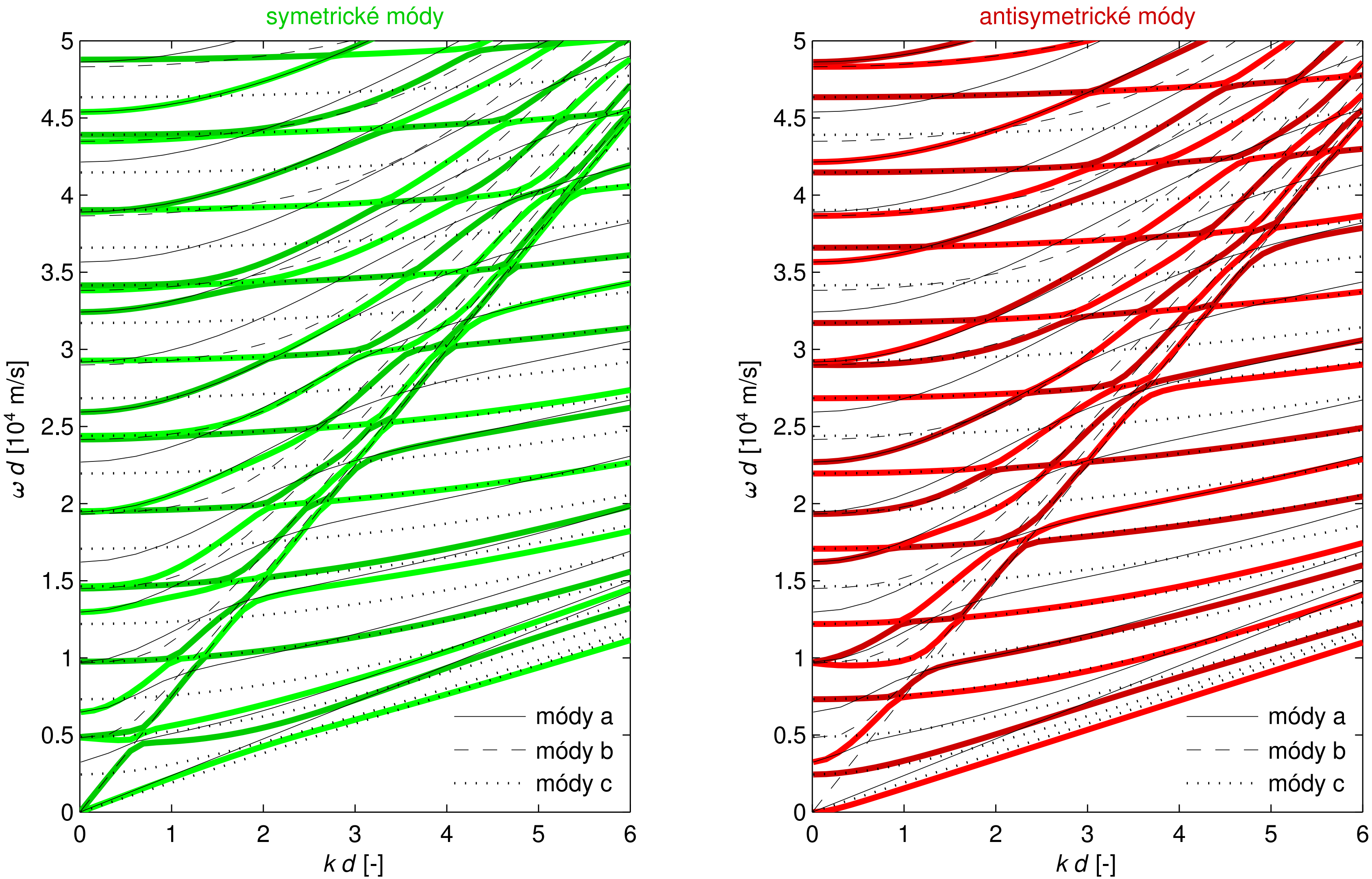
Obrázek 4.19: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 20°$ v ortotropní desce.



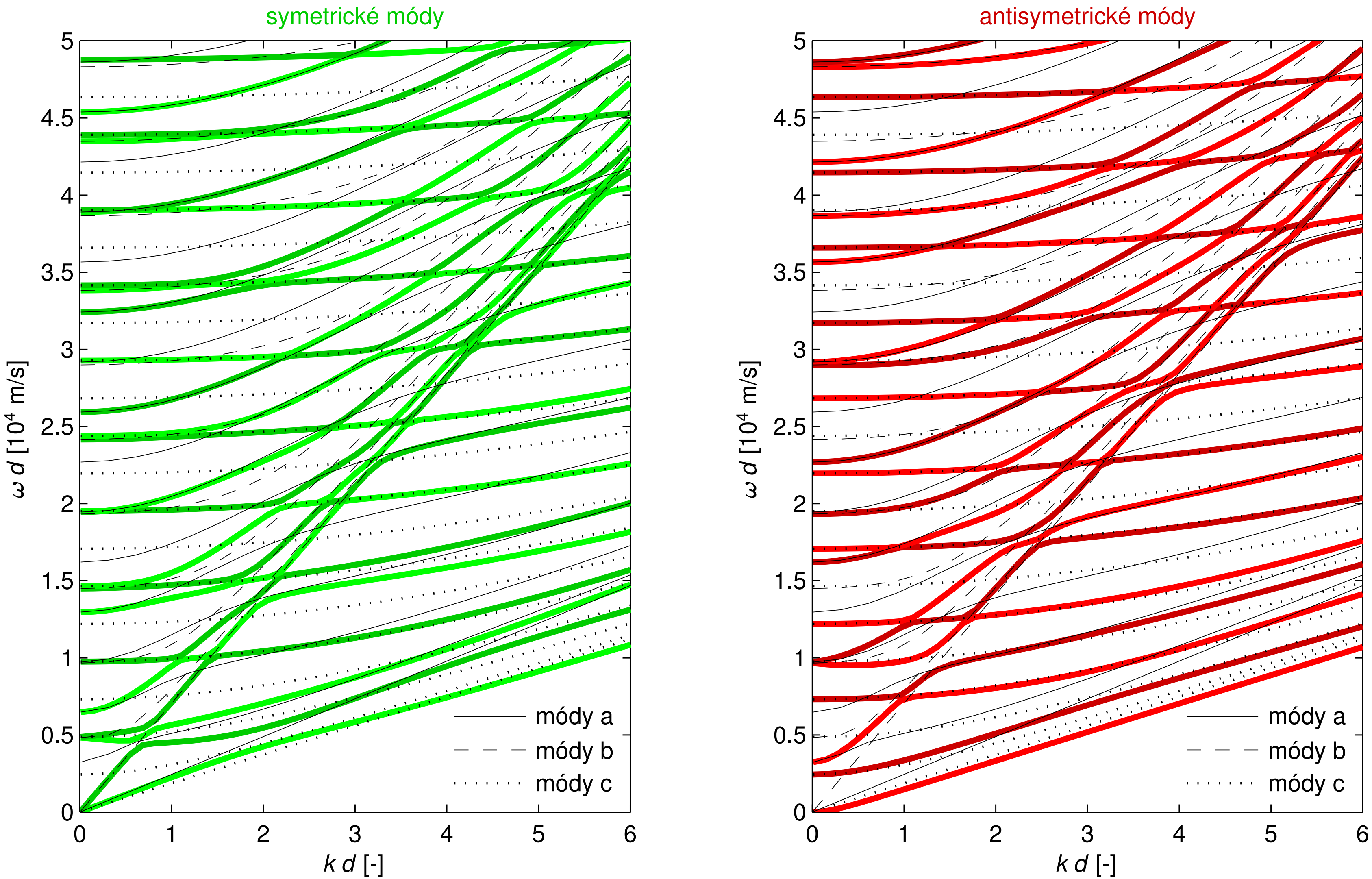
Obrázek 4.20: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 25°$ v ortotropní desce.



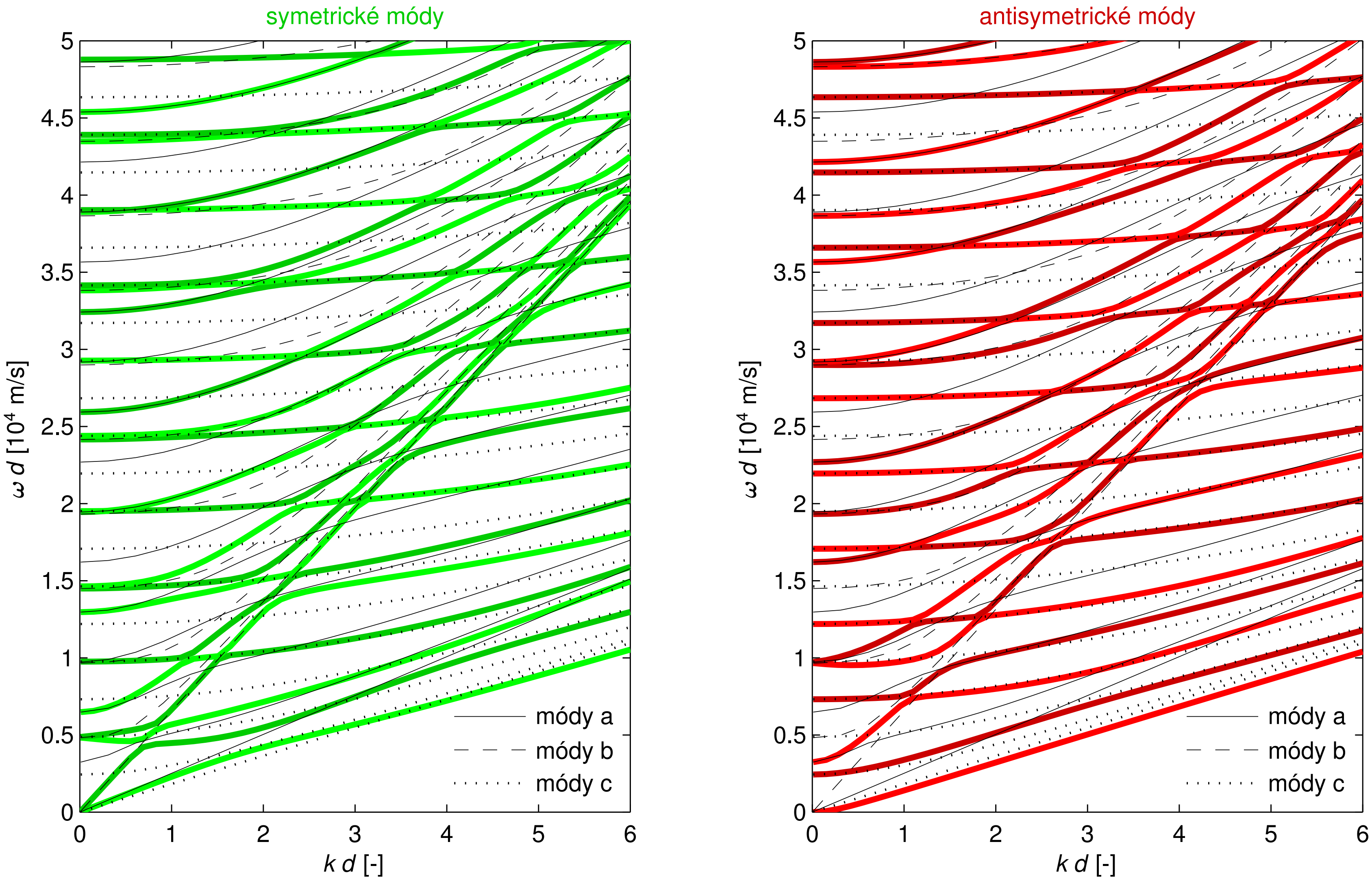
Obrázek 4.21: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 30°$ v ortotropní desce.



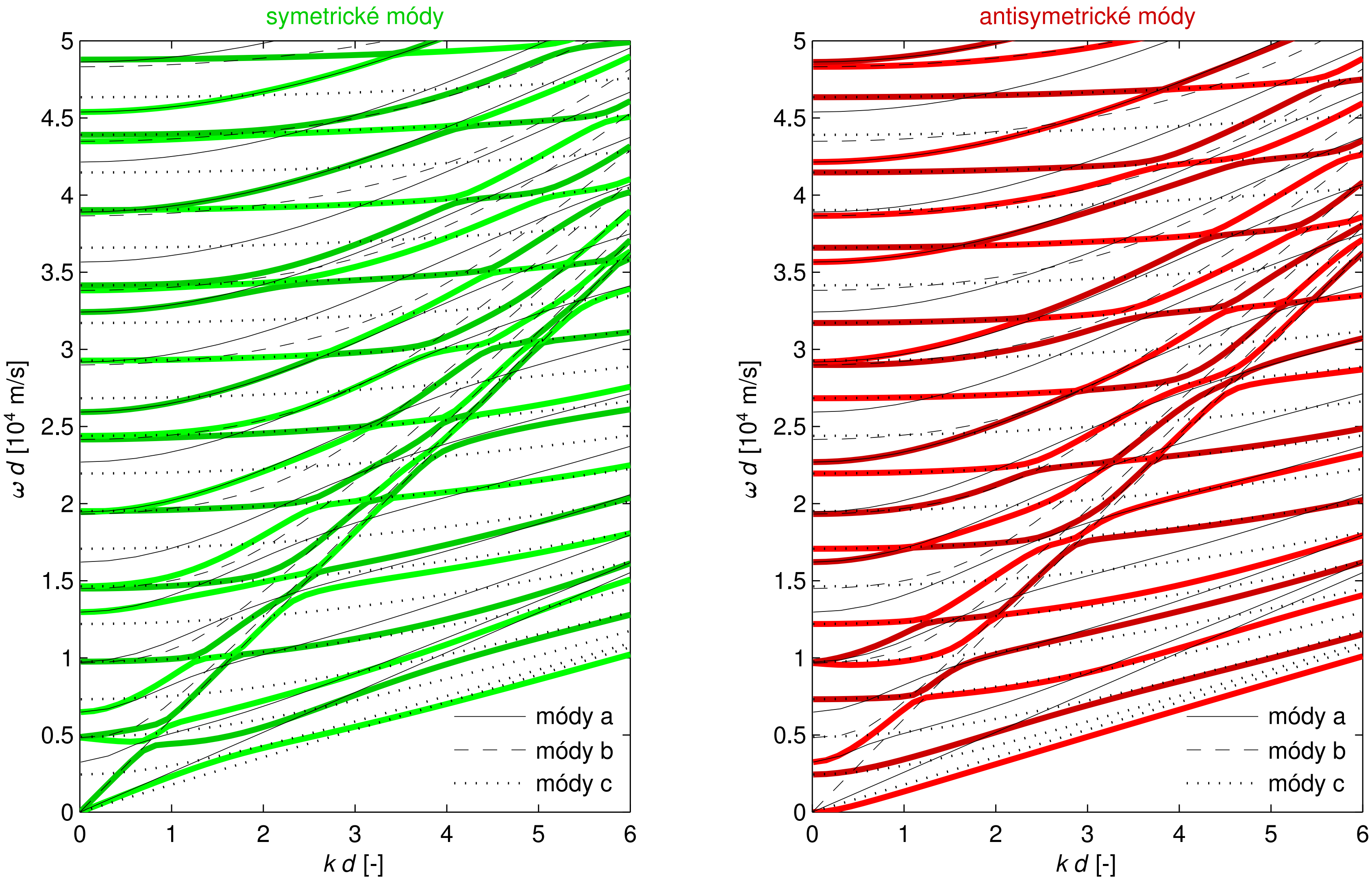
Obrázek 4.22: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 35°$ v ortotropní desce.



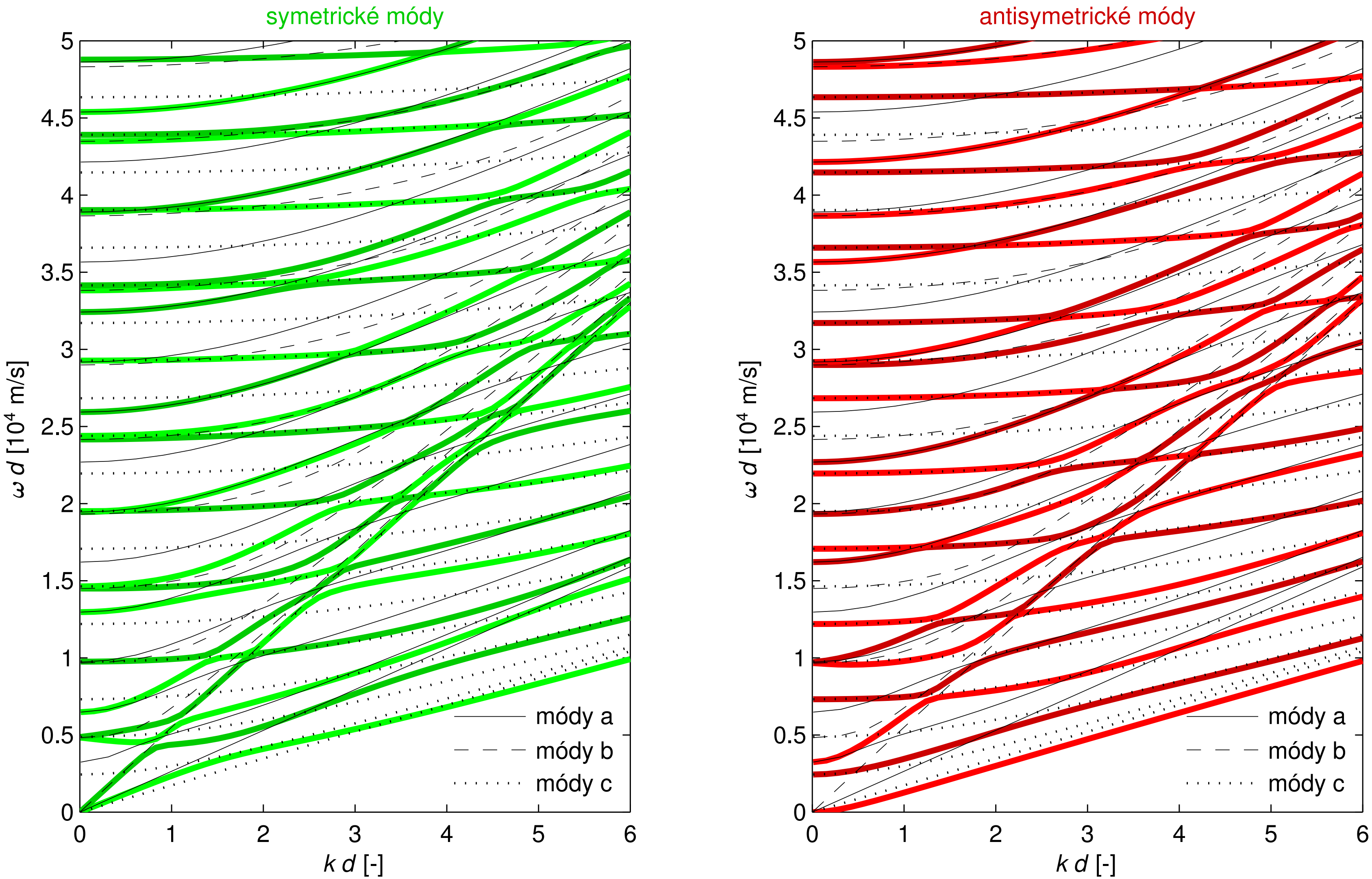
Obrázek 4.23: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 40°$ v ortotropní desce.



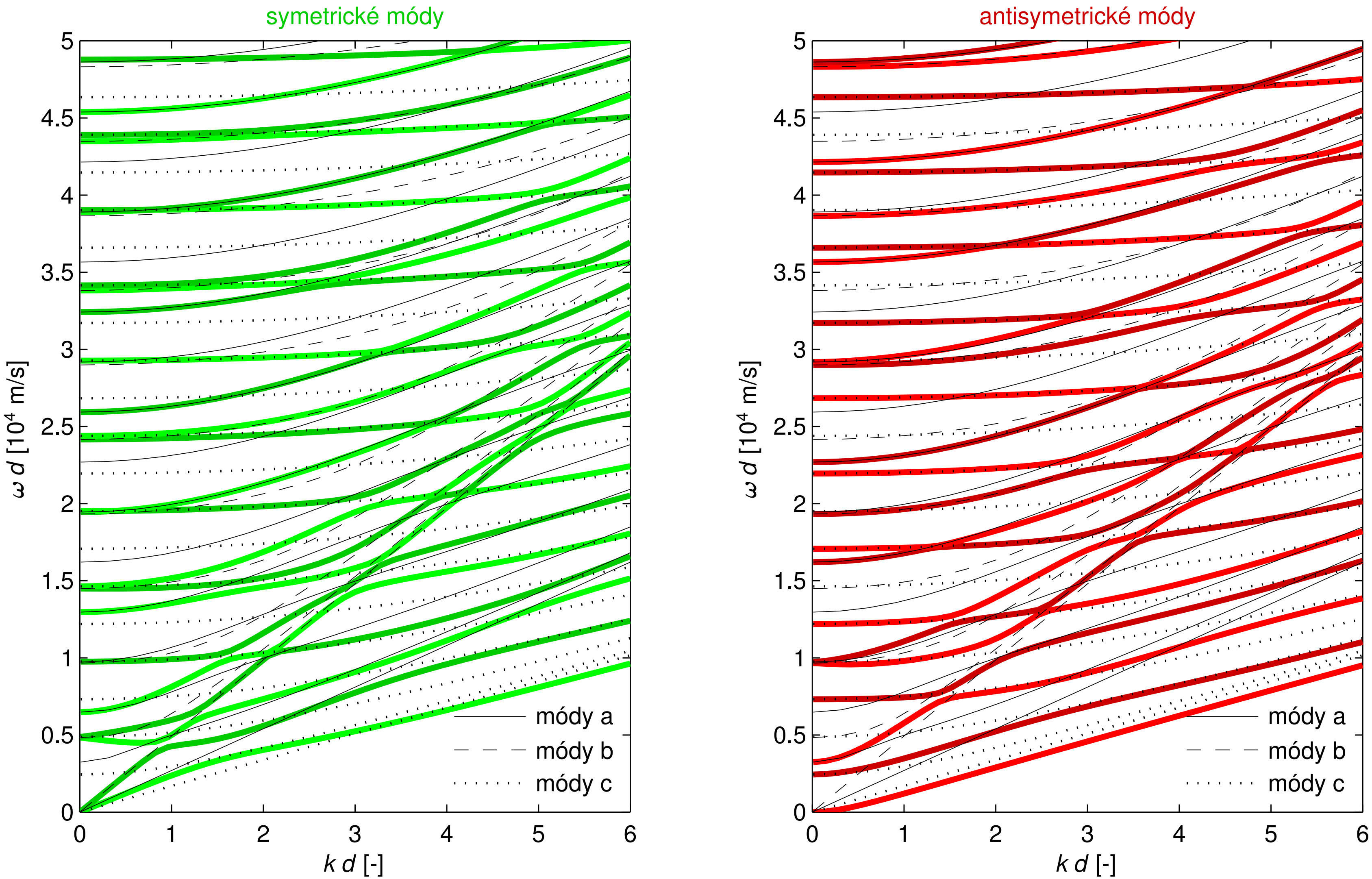
Obrázek 4.24: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 45°$ v ortotropní desce.



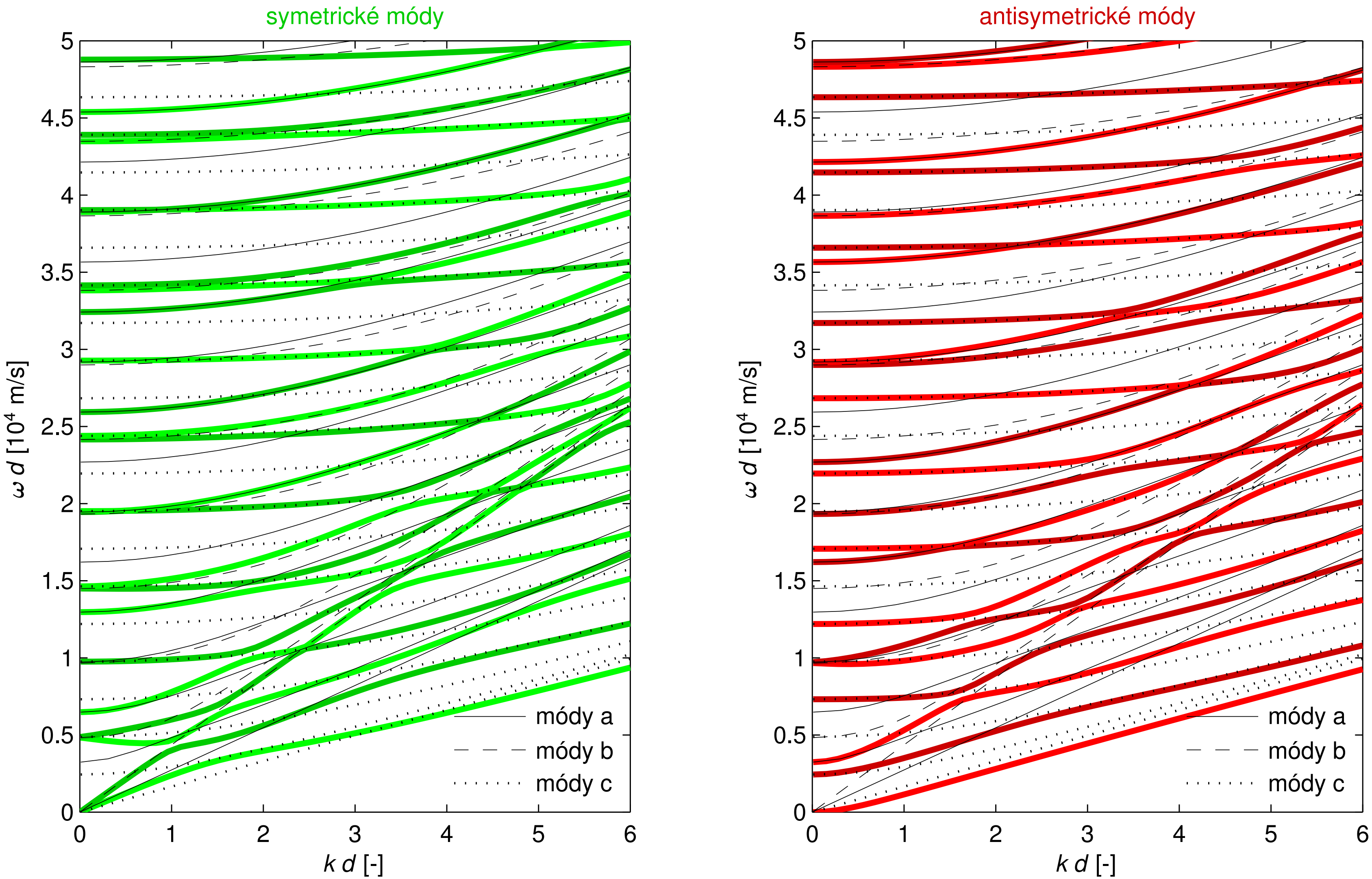
Obrázek 4.25: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 50°$ v ortotropní desce.



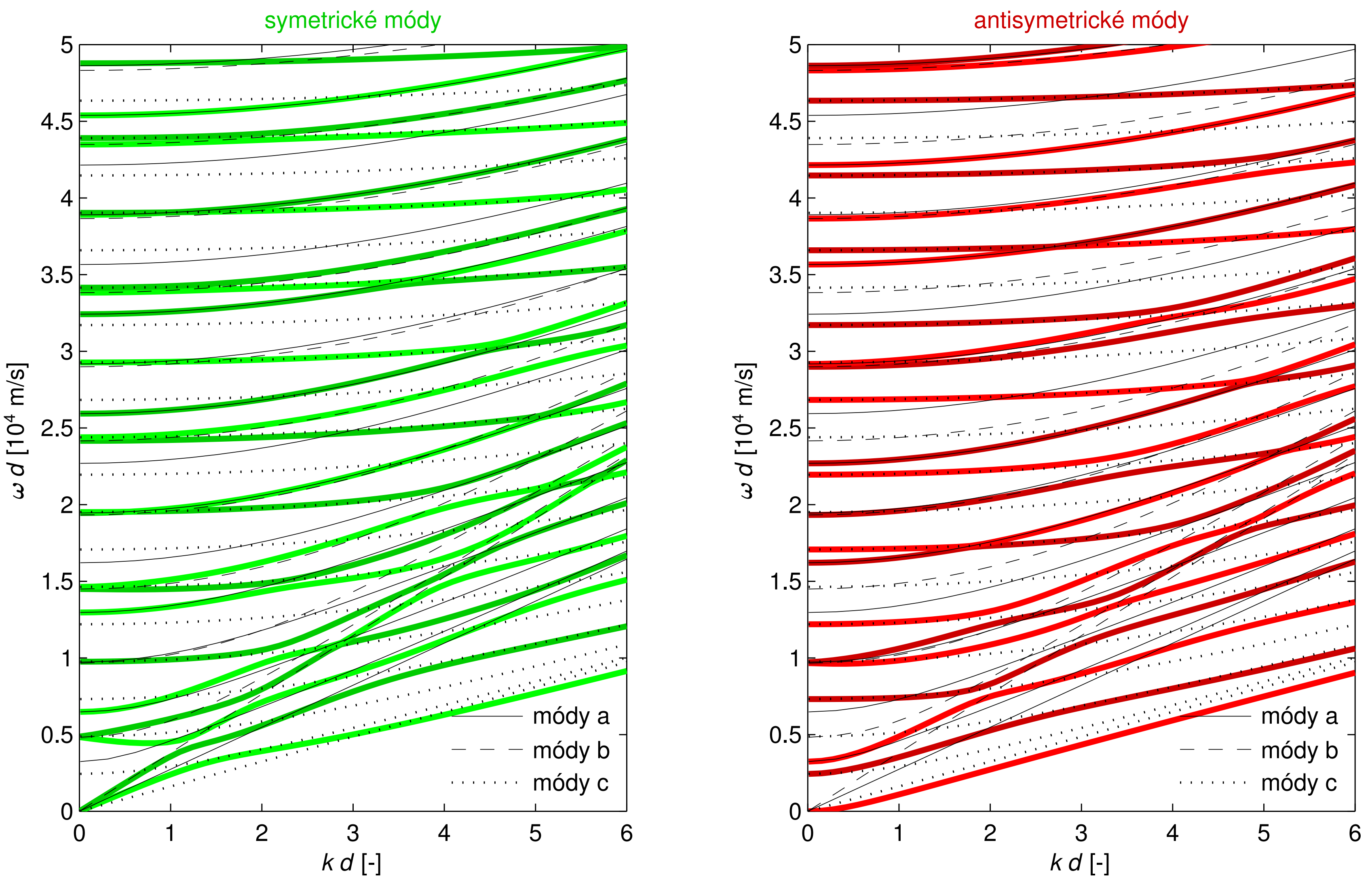
Obrázek 4.26: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 55^\circ$ v ortotropní desce.



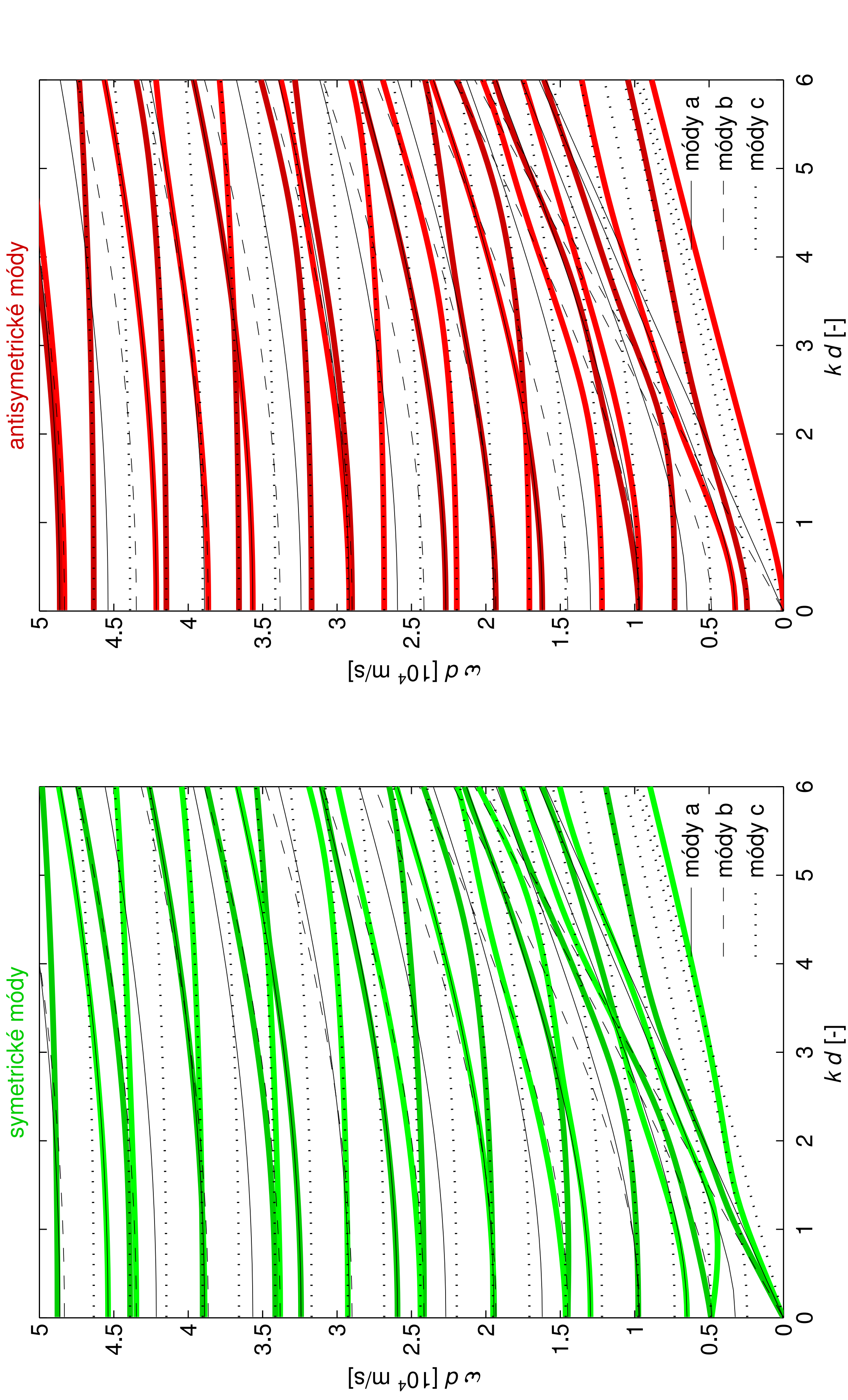
Obrázek 4.27: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 60°$ v ortotropní desce.



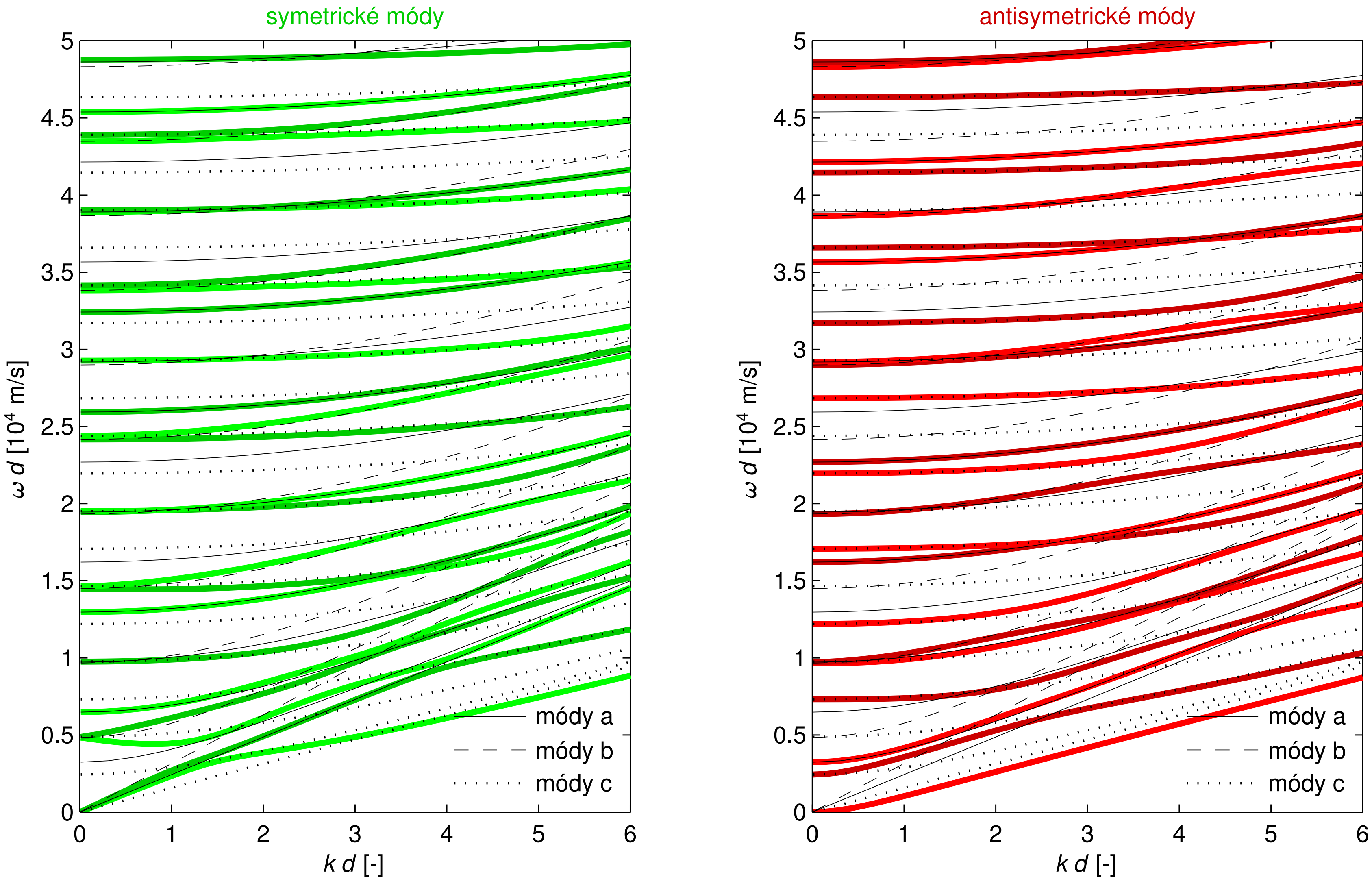
Obrázek 4.28: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 65°$ v ortotropní desce.



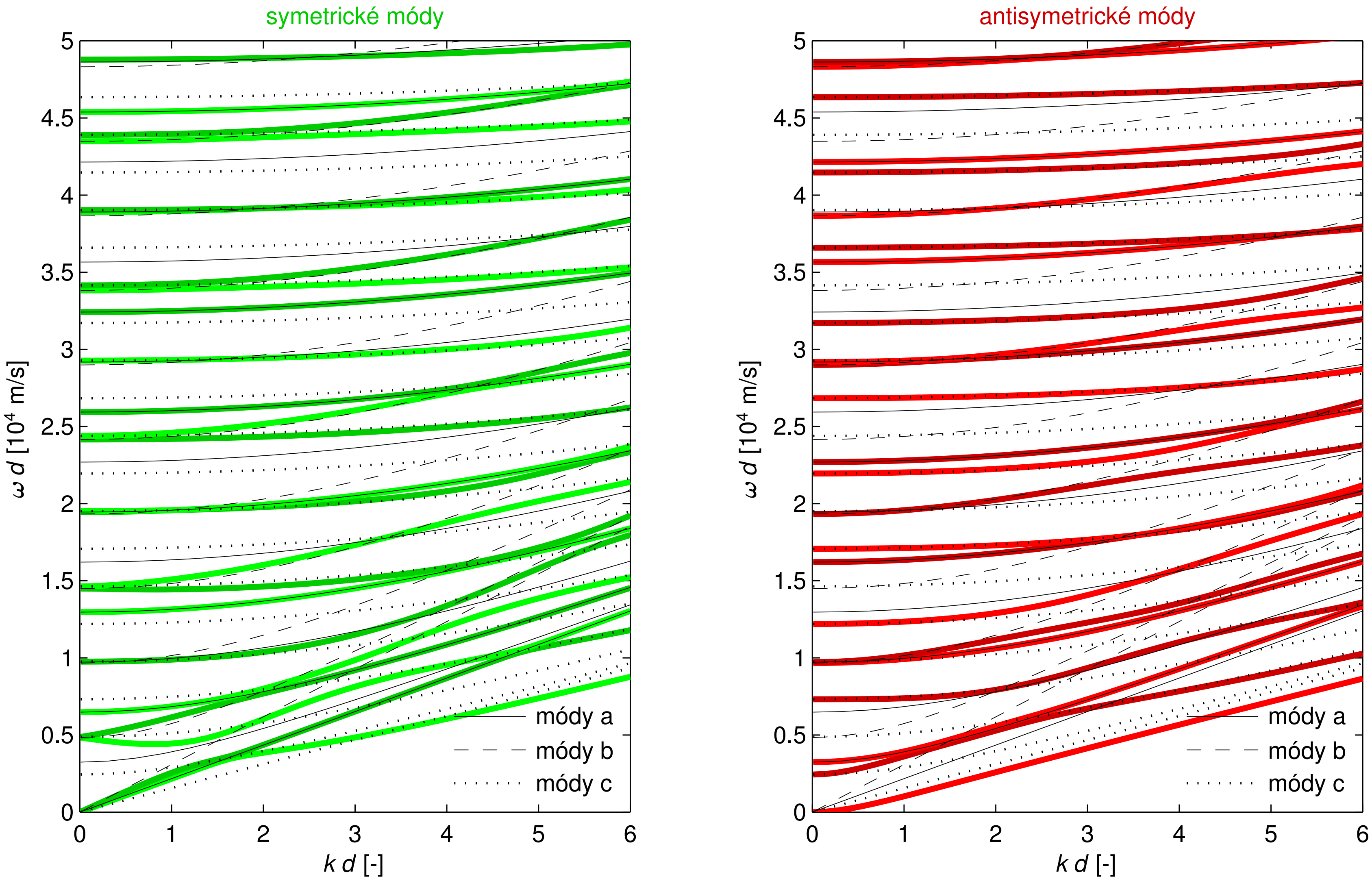
Obrázek 4.29: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 70°$ v ortotropní desce.



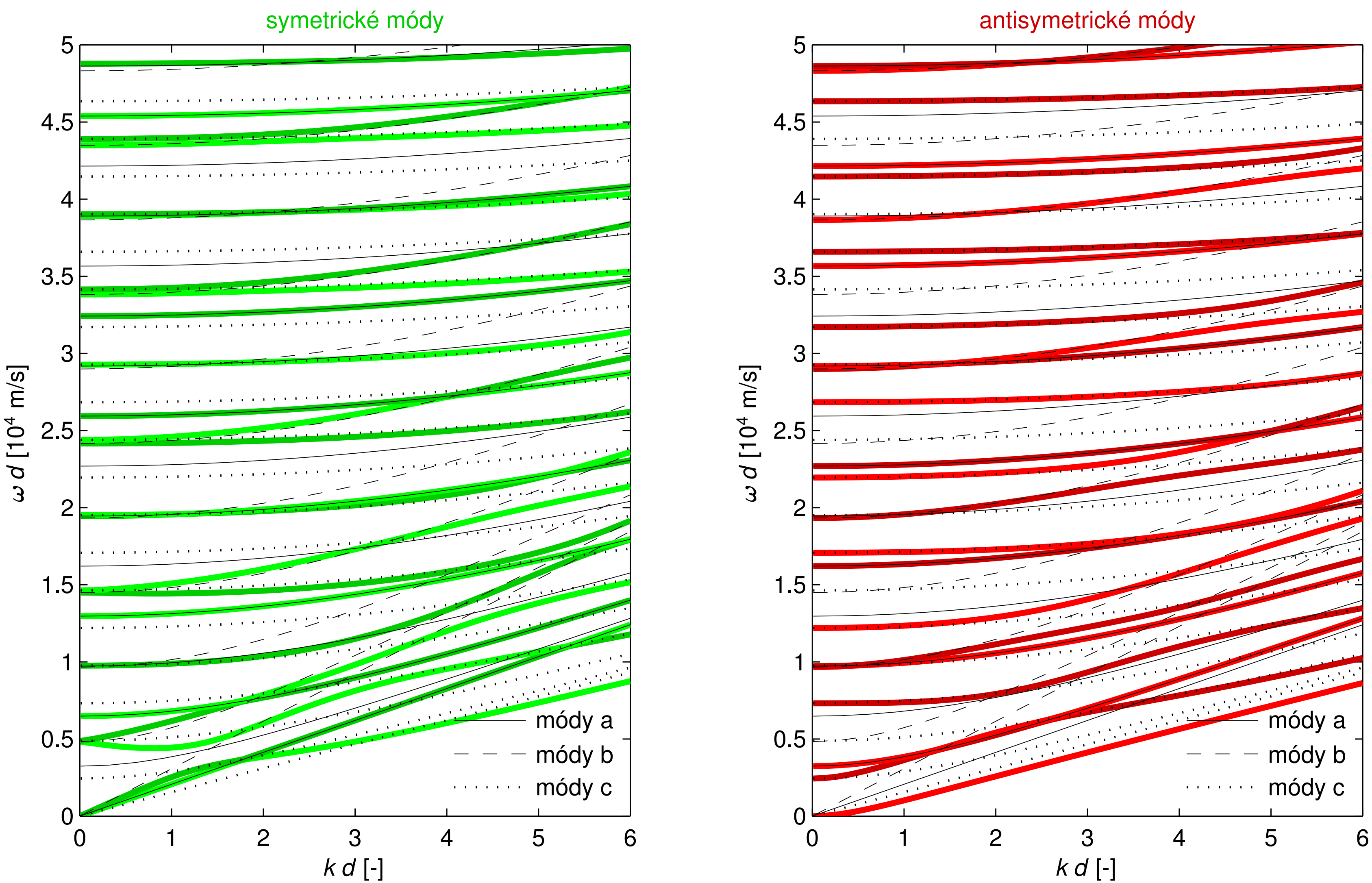
Obrázek 4.30: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 75°$ v ortotropní desce.



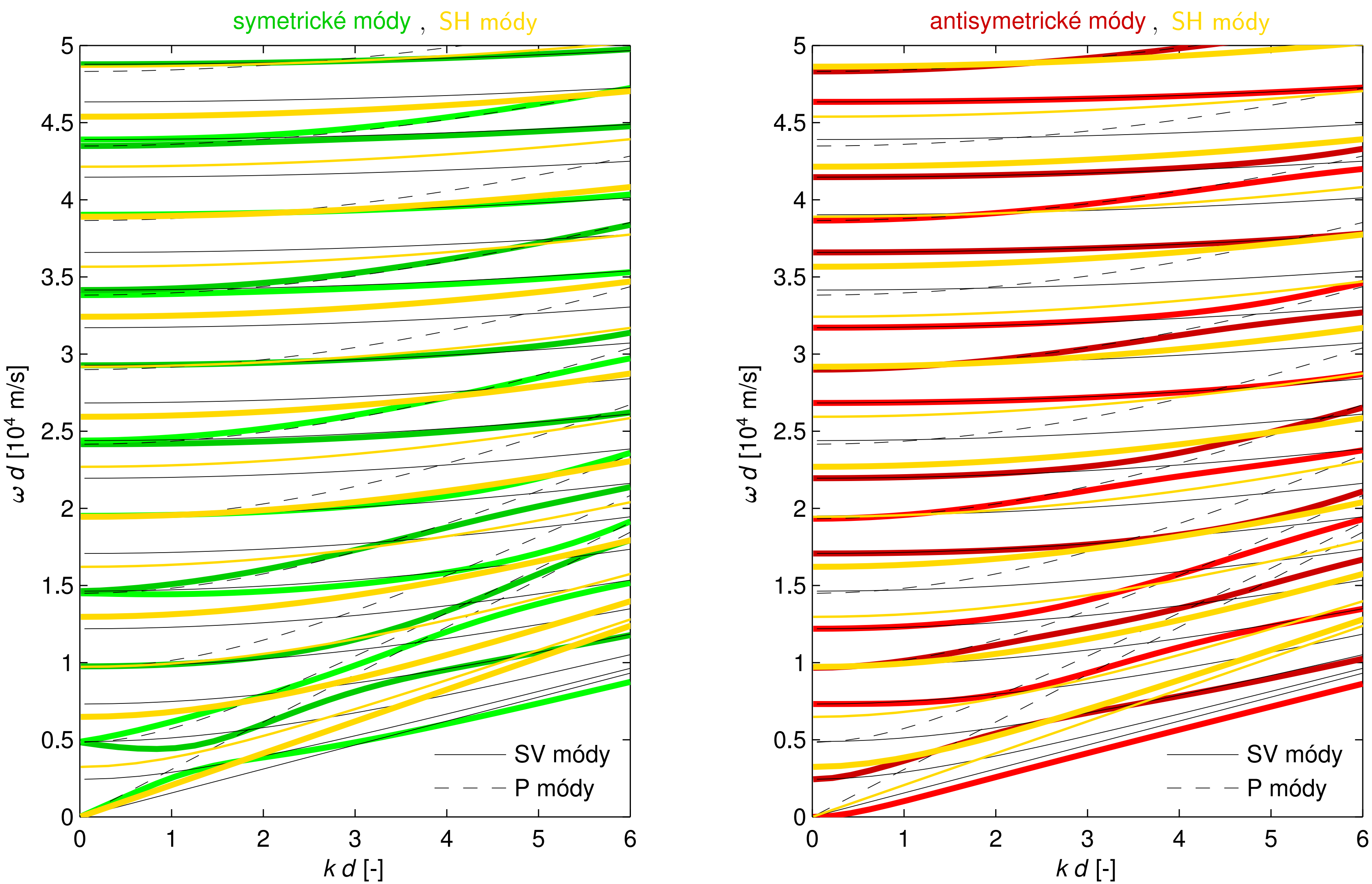
Obrázek 4.31: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 80^\circ$ v ortotropní desce.



Obrázek 4.32: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 85°$ v ortotropní desce.



Obrázek 4.33: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 89^\circ$ v ortotropní desce.



Obrázek 4.34: Disperzní křivky pro směr šíření $\phi = 90°$ v ortotropní desce.

Literatura

[1] Achenbach, J.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1973.

[2] Angot A.: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. SNTL,Praha 1971.

[3] Auld,B.A.: *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley and Sons, 1973.

[4] Brekhovskikh, L.M.: *Waves in Layer Media*, Academic Press Inc., New York, 1980.

[5] Brepta, R.:*Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech.* Vydavetelství ČVUT, Praha 1977.

[6] Červená, O., Hora, P.: Analytické vyjádření disperzních křivek v desce s kubickou anizotropií pro libovolný směr šíření, in: *Proc. 22nd Int. Conference Computational mechanics 2006* University of West Bohemia in Pilsen, pp 99–106,2006.

[7] Červená O., Hora, P.: The influence of the Mindlin's boundary conditions on wave propagation in thick anisotropic plate.
in: Proc. National Conference *Engineering mechanics 2007* Institute of Thermomechanics ASCR, v.v.i., Prague 2007.

[8] Červená, O., Hora, P.: The problems at investigation of state of stress of thick orthotropic plate, in: *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 1, No. 1, pp 11-20, 2007.

[9] Graff, K.F.: *Wave Motion in Elastic Solids*, Oxford, 1975.

[10] Hearmon, R.F.S.: *Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek*, SNTL, Praha, 1965.

[11] Hora, P., Červená O.: Disperzní křivky v desce s kubickou anisotropií, *Proceedings, 21th Conference Computational mechanics 2005* University of West Bohemia in Pilsen, pp 219–226, 2005.

[12] Hora, P.; Červená, O.: Interpretace falešných kořenů objevujících se ve výpočtech disperzních křivek tlustých desek. in: *Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2007.* Ústí nad Labem, UJEP Ústí nad Labem, pp. 76–80, 2007.

[13] Kolsky, H.: *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, 1963.

[14] Maplesoft^{TM},
http://www.maplesoft.com

[15] The MathWorks, Inc.,
http://www.mathworks.com

[16] Miklowitz, J.: *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1978.

[17] Mindlin, R.D.: *Structural Mechanics*, Pergamon, New York, 1960.

[18] Nayfeh, A.H.: *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*, Elsevier Science, 1995.

[19] Pelts, S.P., and Rose, J.L.: Source influence parameters on elastic guided waves in an orthotropic plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 99. pp 2124-2129, 1996.

[20] Rose, J. L.: *Ultrasonic Waves in Solid Media.*, Cambridge University Press, 1999.

[21] Solie, L.P., and Auld, B.A.: Elastic waves in free anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54. pp 50-65, 1973.