



INTERPRETACE FALEŠNÝCH KOŘENŮ OBJEVUJÍCÍCH SE VE VÝPOČTECH DISPERZNÍCH KŘIVEK TLUSTÝCH DESEK

INTERPRETATION OF THE FALSE ROOTS IN THE DISPERSION CURVES OF THICK PLATES

Petr HORA, Olga ČERVENÁ¹

Abstract: This paper deals with the interpretation of the false roots appearing in the numerical computation of thick plate dispersion curves from isotropic or anisotropic materials. The examples of false roots, the reasons of their occurrence, the possibilities of their detection and removing are presented here. Dispersion curves are computed for steel and the unidirectional composite.

Keywords: wave propagation, anisotropy, dispersion curves

1. Úvod

Při numerických výpočtech disperzních závislostí tlustých desek pro ortotropní materiály jsme narazili na problém s výskytem falešných disperzních křivek. V následujících kapitolách provedeme interpretaci tohoto jevu a ukážeme si, proč se nejedná o skutečné disperzní křivky. Jelikož se podobné chování vyskytuje i u disperzních křivek pro izotropní tlustou desku, začneme analýzou disperze v izotropních deskách.

2. Izotropní deska

Disperzní závislosti pro symetrické módy v izotropní desce jsou dány známým vztahem (viz např. [1]):

$$4\delta\beta \sinh(kd\delta) \cosh(kd\beta) - \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right)^2 \sinh(kd\beta) \cosh(kd\delta) = 0, \quad (1)$$

kde $\delta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}$, $\beta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}$, k je vlnové číslo, d je polovina tloušťky desky, c je fázová rychlost, c_1 rychlost podélných a c_2 rychlost příčných vln.

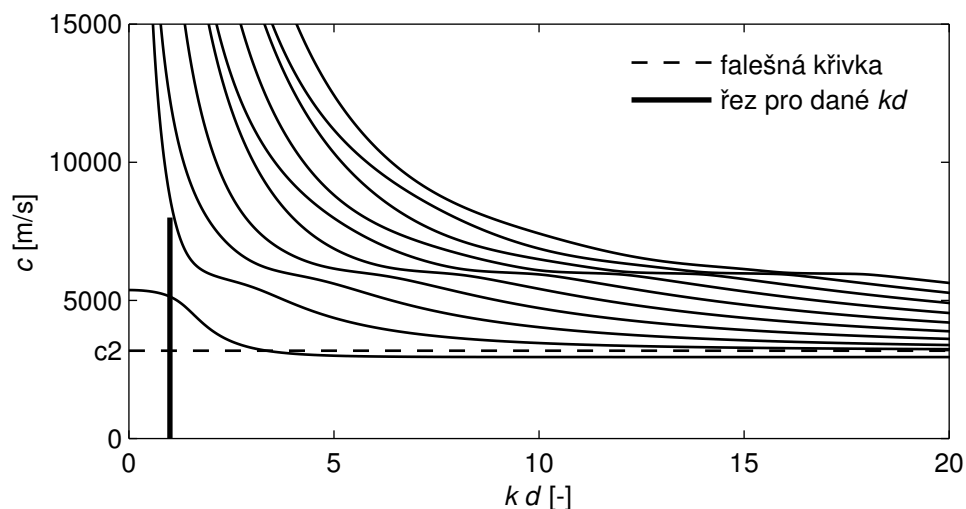
Disperzní závislosti pro antisymetrické módy v izotropní desce jsou dány obdobně vztahem:

$$4\delta\beta \sinh(kd\beta) \cosh(kd\delta) - \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right)^2 \sinh(kd\delta) \cosh(kd\beta) = 0. \quad (2)$$

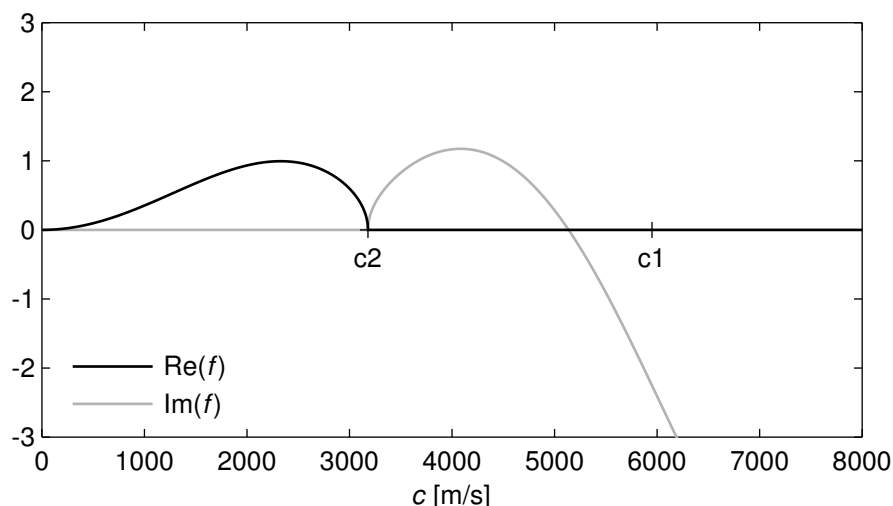
Průběh disperzních větví pro symetrické resp. antisymetrické módy je znázorněn na obr. 1 resp. obr. 3, Poissonovo číslo je 0.3.

Po dosažení za δ a β do vztahu (1) je zřejmé, že kořenem by pro symetrické módy měla být i rychlost c_2 . Na obr. 2 je vynesena levá strana rovnice (1) v závislosti na

¹Doc. Ing. Petr Hora, CSc., RNDr. Olga Červená: Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.,
Centrum diagnostiky materiálu; Veleslavínova 11; 301 14 Plzeň;
tel.: +420.377 236 415; e-mail: hora@cdm.it.cas.cz, cervena@cdm.it.cas.cz



Obr. 1: Disperzní křivky pro symetrické módy izotropní desky



Obr. 2: Průběh funkce (1) pro symetrické módy.

fázové rychlosti c v řezu zobrazeném na obr. 1. Že se nejedná o skutečný kořen disperzní závislosti, se lze přesvědčit výpočtem odpovídajících výchylek.

Výchylky ve směru osy x pro symetrické módy jsou dány vztahy:

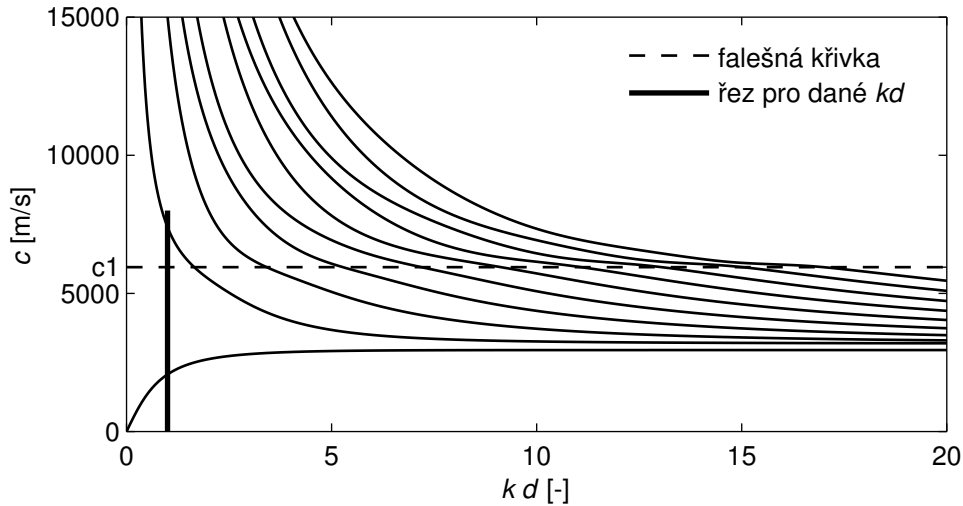
$$u_x = \frac{ic_2^2}{kc^2} \left[\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \sinh(kd\beta) \cosh(kz\delta) + 2\beta\delta \sinh(kd\delta) \cosh(kz\beta) \right], \quad (3)$$

výchylky ve směru osy z

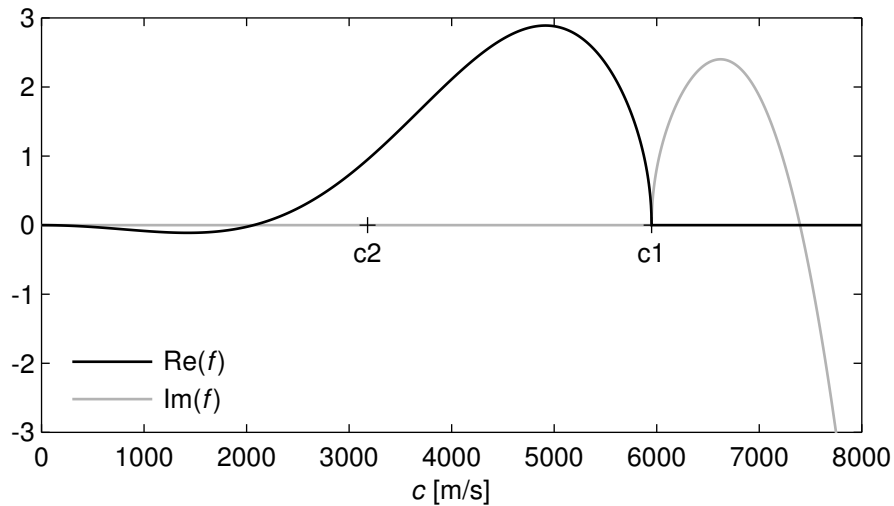
$$u_z = \frac{\delta c_2^2}{kc^2} \left[\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \sinh(kd\beta) \sinh(kz\delta) + 2 \sinh(kd\delta) \sinh(kz\beta) \right]. \quad (4)$$

Dosadíme-li do těchto vztahů $c = c_2$, vyjdou nám výchylky nulové a nejedná se tudíž o skutečnou disperzní křivku.

Obdobně pro antisymetrické módy po dosazení za δ a β do vztahu (2) je zřejmé, že kořenem by měla být tentokrát rychlost c_1 . Na obr. 4 je vynesena levá strana rovnice (2)



Obr. 3: Disperzní křivky pro antisymetrické módy izotropní desky



Obr. 4: Průběh funkce (2) pro antisymetrické módy

v závislosti na fázové rychlosti c v řezu zobrazeném na obr. 3. Že se nejedná o skutečný kořen disperzní závislosti, se lze opět přesvědčit výpočtem odpovídajících výchylek:

$$u_x = \frac{i c_2^2}{k c^2} \left[\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \cosh(kd\beta) \sinh(kz\delta) + 2\beta\delta \cosh(kd\delta) \sinh(kz\beta) \right], \quad (5)$$

$$u_z = \frac{\delta c_2^2}{k c^2} \left[\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \cosh(kd\beta) \cosh(kz\delta) + 2 \cosh(kd\delta) \cosh(kz\beta) \right]. \quad (6)$$

Dosadíme-li do těchto vztahů $c = c_1$, vyjdou nám výchylky nulové a nejedná se tudíž o skutečnou disperzní křivku. Při numerickém hledání kořenů nám tyto falešné křivky nedělají problémy, neboť neprotínají nulu.

2. Ortotropní deska

K získání analytických disperzních vztahů jsme použili metodu parciálních vln, uvedenou v [2], která předpokládá, že se řešení skládá z jednoduchých vln exponenciálního typu, které putují mezi okraji desky. Každá parciální vlna musí mít stejnou hodnotu $k_x = k = \omega/c$, kde c je fázová rychlost vlny v desce. Řešení má tvar $u_j = \alpha_j \exp [ik(x + l_z z)]$, ($j = x, y, z$ a $l_z = k_z/k_x$), pro každé parciální vlnové řešení. u_j jsou složky výchylek, k_j složky vlnového vektoru a α_j složky polarizace parciálních vln. Substitucí předpokládaného řešení do Christoffelovy rovnice získáme soustavu tří homogenních lineárních rovnic pro α_x, α_y a α_z . netriviální řešení existuje, pouze pokud je determinant soustavy nulový. To vede na polynom šestého řádu pro l_z , který má šest kořenů $l_z^{(n)}$, $n = 1, \dots, 6$. Parciální vlnové řešení definované těmito kořeny odpovídá třem dopadajícím a třem odraženým vlnám.

Disperzní vztahy pro obecný úhel šíření ϕ v ortotropní desce, odvozené v [3], jsou pro symetrické módy:

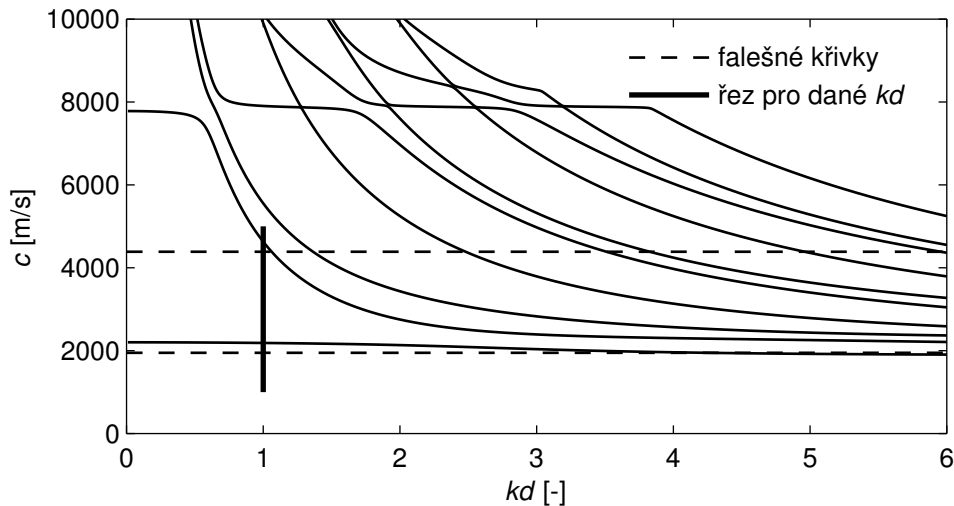
$$\cotg(l_z^{(1)}kd) A + \cotg(l_z^{(3)}kd) B + \cotg(l_z^{(5)}kd) C = 0, \quad (7)$$

pro antisymetrické módy:

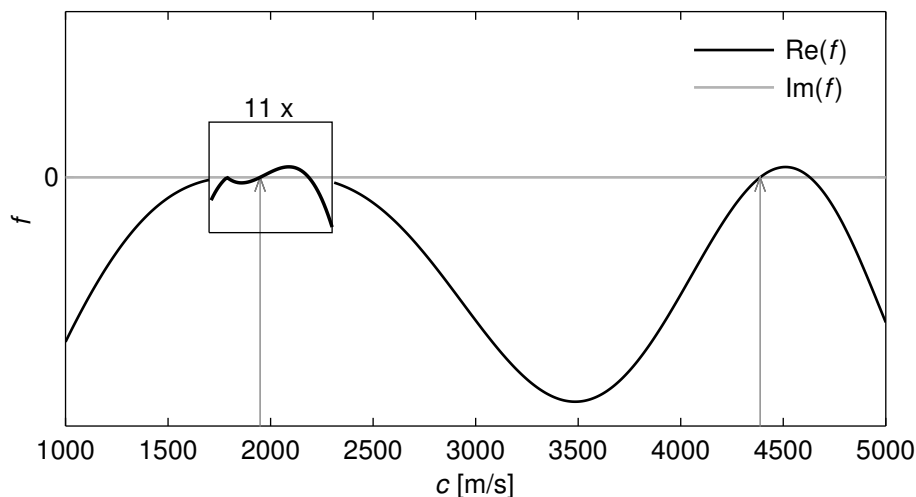
$$\tg(l_z^{(1)}kd) A + \tg(l_z^{(3)}kd) B + \tg(l_z^{(5)}kd) C = 0, \quad (8)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} A &= (D_x^{(3)} D_y^{(5)} - D_x^{(5)} D_y^{(3)}) [D_z^{(1)} + (E_x^{(1)} - E_y^{(1)}) \cos \phi (c_{13} - c_{23})] c_{44} c_{55}, \\ B &= (D_x^{(5)} D_y^{(1)} - D_x^{(1)} D_y^{(5)}) [D_z^{(3)} + (E_x^{(3)} - E_y^{(3)}) \cos \phi (c_{13} - c_{23})] c_{44} c_{55}, \\ C &= (D_x^{(1)} D_y^{(3)} - D_x^{(3)} D_y^{(1)}) [D_z^{(5)} + (E_x^{(5)} - E_y^{(5)}) \cos \phi (c_{13} - c_{23})] c_{44} c_{55}, \\ D_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)} l_z^{(n)} + \alpha_z^{(n)}, \\ D_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)} l_z^{(n)}, \\ D_z^{(n)} &= \alpha_z^{(n)} l_z^{(n)} c_{33} + \alpha_x^{(n)} c_{23}, \\ E_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)} \cos \phi, \\ E_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)} \sin \phi, \\ \alpha_x^{(n)} &= c_{33} g_1 l_z^{(n)4} + (g_1 g_2 + c_{33} g_3 - g_4^2) l_z^{(n)2} + g_2 g_3, \\ \alpha_y^{(n)} &= -c_{33} g_5 l_z^{(n)4} + (g_4 g_6 + c_{33} g_7 - g_2 g_5) l_z^{(n)2} + g_2 g_7, \\ \alpha_z^{(n)} &= ((g_4 g_5 - g_1 g_6) l_z^{(n)2} - (g_3 g_6 + g_4 g_7)) l_z^{(n)}, \\ g_1 &= \sin^2 \phi c_{55} + \cos^2 \phi c_{44}, \\ g_2 &= \sin^2 \phi c_{44} + \cos^2 \phi c_{55} - \rho c^2, \\ g_3 &= \sin^2 \phi \cos^2 \phi (c_{11} - 2 c_{12} + c_{22} - 4 c_{66}) + c_{66} - \rho c^2, \\ g_4 &= \sin \phi \cos \phi (c_{23} - c_{13} + c_{44} - c_{55}), \\ g_5 &= \sin \phi \cos \phi (c_{44} - c_{55}), \\ g_6 &= \sin^2 \phi (c_{23} + c_{44}) + \cos^2 \phi (c_{13} + c_{55}), \\ g_7 &= \sin \phi \cos \phi (c_{12} - c_{22} + 2 c_{66} + (c_{11} - 2 c_{12} + c_{22} - 4 c_{66}) \cos^2 \phi). \end{aligned} \right\} \text{ pro } n = 1, 3, 5$$

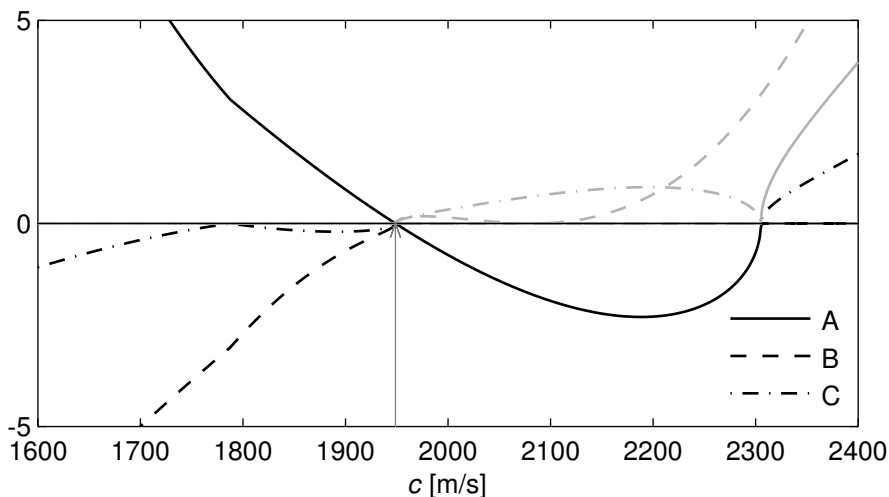


Obr. 5: Disperzní křivky pro symetrické módy v ortotropní desce a směr šíření 30°

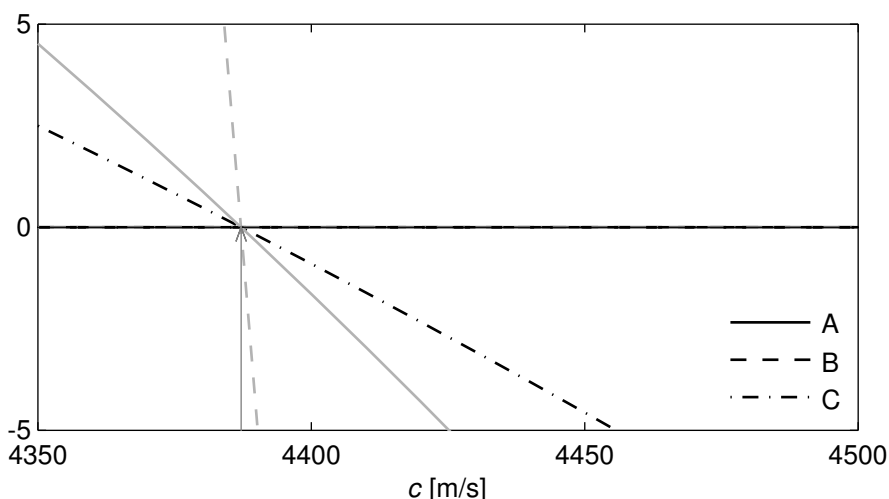


Obr. 6: Průběh funkce (7) pro symetrické módy pro ortotropní desku pro $\phi = 30^\circ$

Průběh vypočtených disperzních větví pro symetrické módy ortotropní desky pro směr šíření $\phi = 30^\circ$ je znázorněn na obr. 5. Materiál použitý pro výpočty (uhlíkový kompozit) měl následující parametry: $c_{11} = 128.2$ GPa, $c_{12} = 6.9$ GPa, $c_{13} = 6.9$ GPa, $c_{22} = 14.95$ GPa, $c_{23} = 7.33$ GPa, $c_{33} = 14.95$ GPa, $c_{44} = 3.81$ GPa, $c_{55} = 6.73$ GPa, $c_{66} = 6.73$ GPa a $\rho = 1580$ kg/m³, [4]. Na tomto obrázku je zajímavý především výskyt dvou bezdisperzních křivek (vykresleny čárkovane). Tyto křivky se kříží s ostatními, což je v rozporu s teorií. Jelikož nás zajímala příčina jejich vzniku, vykreslili jsme si do obr. 6 levou stranu rovnice (7); šipkami je zvýrazněna poloha falešných kořenů. Z obrázku je vidět, že na rozdíl od případu izotropní desky, kde se funkce nuly dotkla, zde ji protíná. Proto numerický program bez problémů průsečík s nulou detekoval jako platný kořen disperzní křivky. Museli jsme proto hledat nějakou jinou metodu jak odstranit tyto falešné kořeny. Vykreslili jsme si tedy v jejich okolí průběhy proměnných A , B a C z rovnice (7), viz obr. 7 a 8 (reálná část je vykreslena černě, imaginární šedě). Z obrázků je patrné, že v místech falešných kořenů jsou všechny tři proměnné A , B i C rovny nule a proto je splněna rovnice (7). Z těchto důvodů byl program doplněn o zachytávání falešných kořenů,



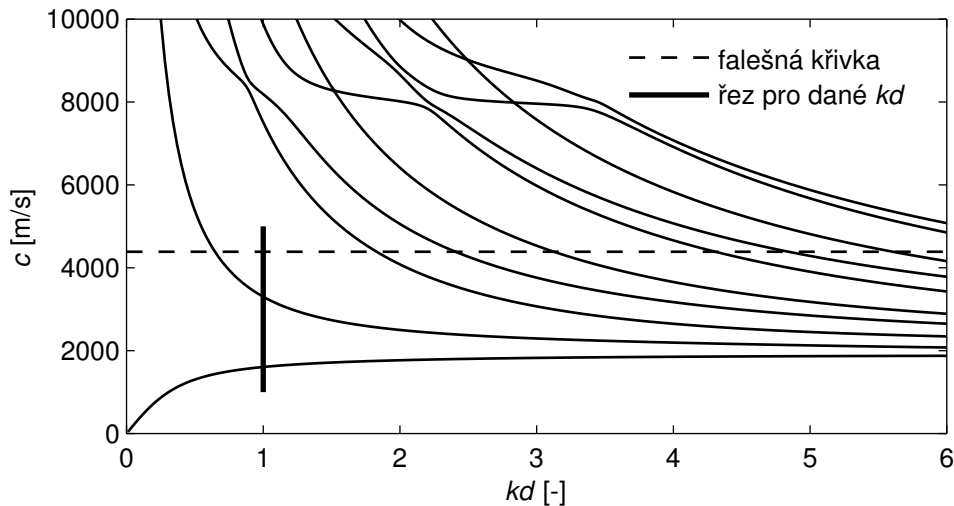
Obr. 7: Průběhy parametrů A,B,C pro ortotropní desku pro $\phi = 30^\circ$



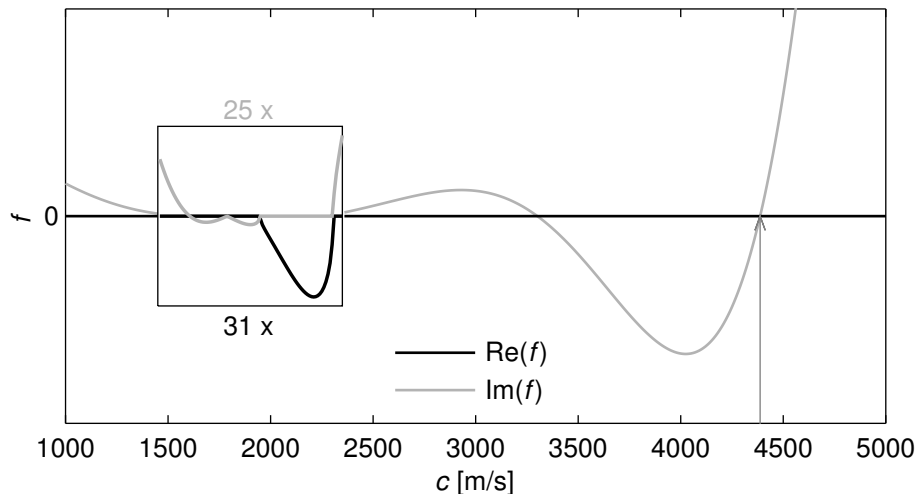
Obr. 8: Průběhy parametrů A,B,C pro ortotropní desku pro $\phi = 30^\circ$

kteří je založeno na detekci nulovosti proměnných A , B a C . Následnou analýzou jsme zjistili, že výchylky pro symetrické módy v těchto falešných kořenech jsou nulové.

Průběh vypočtených disperzních větví pro antisymetrické módy ortotropní desky pro směr šíření $\phi = 30^\circ$ je znázorněn na obr. 9. Na tomto obrázku se vyskytuje pouze jedna bezdisperzní křivka. Tato křivka se opět kříží s ostatními. Na obr. 10 je vykreslena levá strana rovnice (8). Z obrázku je opět vidět, že zde funkce nulovou hodnotu protíná. Stejně jako v případě symetrických módů je tento falešný kořen způsoben nulovostí všech tří proměnných A , B a C , viz obr. 8. Následnou analýzou jsme zjistili, že i výchylky pro antisymetrické módy v tomto falešném kořenu jsou nulové.



Obr. 9: Disperzní křivky pro antisymetrické módy v ortotropní desce a směr šíření 30°



Obr. 10: Průběh funkce (8) pro antisymetrické módy pro ortotropní desku pro $\phi = 30^\circ$

4. Závěr

Při numerických výpočtech disperzních závislostí tlustých desek pro ortotropní materiály se vyskytuje problém s výskytem falešných disperzních křivek. Příspěvek se zabývá interpretací těchto falešných křivek, jejich vznikem a možností odstranění. Na začátku je uveden příklad izotropní tlusté desky, kde by se mohla rychlost c_2 resp. c_1 uvažovat jako kořen disperzní rovnice pro symetrické resp. antisymetrické módy. Z výpočtu výchylek pro tyto kořeny však jednoznačně vyplynulo, že se nejedná o skutečný kořen disperzní rovnice (výchytky byly nulové). Obdobně u ortotropní tlusté desky bylo z výpočtu výchylek prokázáno, že se nejedná o skutečné kořeny. Během analýzy falešných kořenů disperzních rovnic ortotropních tlustých desek se zjistilo, že za vznikem těchto falešných kořenů stojí současná nulovost všech tří proměnných A , B a C z rovnic (7) a (8). Tento poznatek jsme začlenili do numerického programu pro výpočet příslušných disperzních křivek, který jsme implementovali v jazyce MATLAB [5].

Poděkování

Příspěvek vznikl na základě podpory projektu GA ČR č.101/06/1689 *Analýza komponent modelu systému pro metodiku akustické emise* a záměru ÚT AV ČR, v.v.i., AV0Z20760514.

Literatura

- [1] Brepta, R.:
Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech.
Vydavatelství ČVUT, Praha 1977
- [2] Auld, B.A.:
Acoustic fields and waves in solids, vol. 1.
John Wiley, New York 1973
- [3] Červená O., Hora, P.:
The influence of the Mindlin's boundary conditions on wave propagation in thick anisotropic plate.
in: Proc. National Conference *Engineering mechanics 2007* Institute of Thermomechanics ASCR, v.v.i., Prague
- [4] Rose, J.L.:
Ultrasonic Waves in Solid Media.
Cambridge Univ. Press, London 1999
- [5] The MathWorks, Inc.
<http://www.mathworks.com>