

## DISPERZNÍ KŘIVKY V DESCE S KUBICKOU ANIZOTROPIÍ

Petr HORA<sup>1</sup>, Olga ČERVENÁ<sup>2</sup>

**Abstract:** The mathematical technique for obtaining dispersion curves for stress waves in free plates of arbitrary anisotropy is outlined. The dispersion relations for propagation in a (001)-cut cubic plate are obtained. The dispersion curves for Cu are presented. These results are compared to the uncoupled SV and P modes.

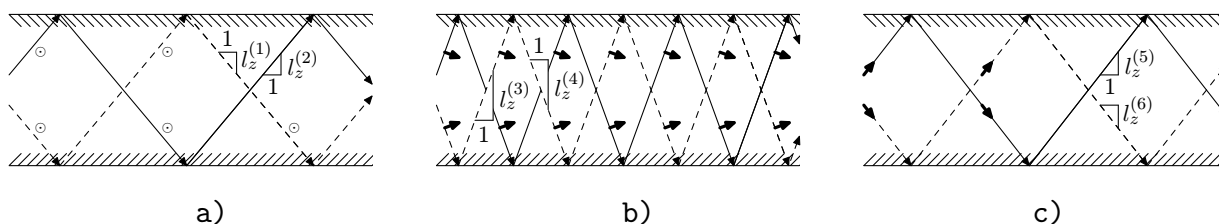
**Keywords:** Dispersion curves, cubic anisotropy, wave propagation

### 1. ÚVOD

Předmět příspěvku je získání disperzních vztahů pro nekonečnou tlustou desku s volnými okrajovými podmínkami, která má kubickou anizotropii. Pro analýzu disperzního chování takové desky jsme vybrali orientaci (001) a metodu parciálních vln. Při vyčíslování disperzních vztahů jsme jako materiál s kubickou anizotropií uvažovali měď. Získané disperzní křivky byly porovnány s výsledky Mindlinovy teorie oddělených módů.

### 2. METODA PARCIÁLNÍCH VLN

Ke studiu šíření napěťových vln v izotropních deskách se používají dvě analytické metody: metoda založená na potenciálech s následnou separací proměnných a novější metoda parciálních vln, u které se řešení skládá z jednoduchých vln exponenciálního typu, které putují mezi okraji desky, viz obr. 1 (SH-příčná horizontální, SV-příčná vertikální, P-podélná). Tato druhá metoda vede k řešení rychleji a přináší lepší náhled do fyzikální povahy vlnového šíření.



**Obr. 1.** Parciální vlny v nekonečné izotropní desce: a) SH, b) SV, c) P.

Při řešení problému šíření vln v anizotropních deskách máme výběr analytické metody zjednodušen. Lze totiž použít pouze metodu parciálních vln.

Pro obecné anizotropní médium jsou parciální vlny odvozeny z Christoffelovy rovnice, viz Auld (1973)

$$(k_{iC_{IJ}}k_{Jj} - \rho\omega^2\delta_{ij})u_j = 0, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Ing. Petr Hora, CSc. CDM ÚT AV ČR, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, tel.: +420 377236415, e-mail: hora@cdm.it.cas.cz

<sup>2</sup>RNDr. Olga Červená, tamtéž, e-mail: cervena@cdm.it.cas.cz

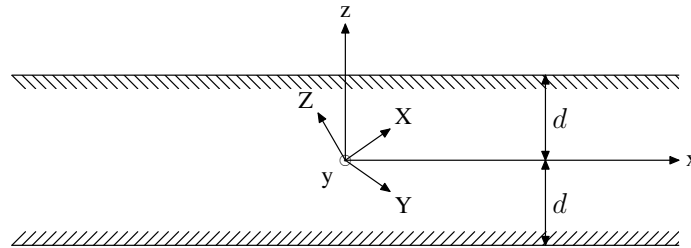
kteřá byla odvozena z předpokládaného řešení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp [i (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)], \text{ kde } \mathbf{u}_0 = \hat{x}\alpha_x + \hat{y}\alpha_y + \hat{z}\alpha_z \quad (2)$$

v pohybové rovnici pro anizotropní prostředí. Ve vztahu (1) se předpokládá sčítání přes opakující se indexy a je užito obvyklé značení indexů  $i, j = x, y, z$  a  $\mathbf{I}, \mathbf{J} = xx, yy, zz, yz, xz, xy$ . Matice  $k_{iI}$  je

$$k_{iI} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & k_z & k_y \\ 0 & k_y & 0 & k_z & 0 & k_x \\ 0 & 0 & k_z & k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

a  $k_{Jj}$  je její transpozicí. Materiálové vlastnosti desky jsou popsány hustotou  $\rho$  a elastickými konstantami  $c_{IJ}$ .



**Obr. 2.** Materiálové osy  $X, Y, Z$  libovolně orientované k osám anizotropní desky  $x, y, z$ .

Základní princip metody parciálních vln spočívá v jejich vazbě na ostatní vlny přes odrazy na okrajích desky. Vyplyvá to ze skutečnosti, že každá parciální vlna na obr. 1 nebo v anizotropním problému znázorněném na obr. 2 musí mít stejnou hodnotu  $k_x$ . To je  $k_x = k = \omega/v$ , kde  $v$  je fázová rychlost vlny v desce. Rovnice (2) pak přejde na tvar

$$u_j = \alpha_j \exp [ik(x + l_z z)], \quad (4)$$

s  $j = x, y, z$  a  $l_z = k_z/k_x$  pro každé parciální vlnové řešení.

Substitucí vztahu (4) do (1) získáme soustavu tří homogenních lineárních rovnic pro  $\alpha_x, \alpha_y$  a  $\alpha_z$ , kde jsou koeficienty funkcemi  $\rho, c_{IJ}$  a  $\omega/k = v$ . Netriviální řešení existuje, pouze pokud je determinant soustavy nulový. To vede na polynom šestého řádu pro  $l_z$ , který má šest kořenů  $l_z^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 6$ , které jsou buď reálné nebo komplexně sdružené. Parciální vlnové řešení definované těmito kořeny odpovídá šesti dopadajícím a odraženým vlnám, viz obr. 1 pro izotropní desku. V anizotropní desce se obvykle parciální vlny neseparují na čistě horizontálně a vertikálně polarizované. K tomu dochází pouze při speciální orientaci materiálu a desky.

Vztahy pro parciální vlny jsou nyní

$$u_j = \sum_{n=1}^6 C_n \alpha_j^{(n)} \exp [ik(x + l_z^{(n)} z)], \quad (j = x, y, z). \quad (5)$$

V dalším kroku se vyšetřuje vazba mezi parciálními vlnami na okraji desky. Pro volný povrch desky je třeba splnit následující okrajové podmínky

$$T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0, \quad (6)$$

na každém povrchu desky,  $z = \pm d$  viz obr. 2.

Substitucí vztahů (5) do okrajových podmínek (6) dostaneme soustavu šesti homogenních lineárních rovnic, ve kterých jsou koeficienty  $C_n$  funkcemi  $\rho, c_{IJ}, \omega/k = v$  a  $kd$ . Opět netriviální řešení existuje, pouze pokud determinant soustavy je roven nule, což určuje disperzní vztah mezi  $\omega$  a  $k$ .

### 3. IZOTROPNÍ DESKA

Disperzní vztahy pro izotropní desku lze rozdělit do tří samostatných rovnic, jak je uvedeno v Achenbach (1973) a Miklowitz (1978).

SH-módy:

$$(N\pi)^2 = (2d\omega/v_S)^2 - (2dk)^2, \quad (7)$$

kde  $N$  je přirozené číslo včetně nuly a  $v_S$  je fázová objemová rychlost příčných vln.

Symetrické (dilatační) módy:

$$\frac{\tan(dk_{is})}{\tan(dk_{il})} = -\frac{4k^2 k_{il} k_{is}}{(k_{is}^2 - k^2)^2} \quad (8)$$

Antisymetrické (ohybové) módy:

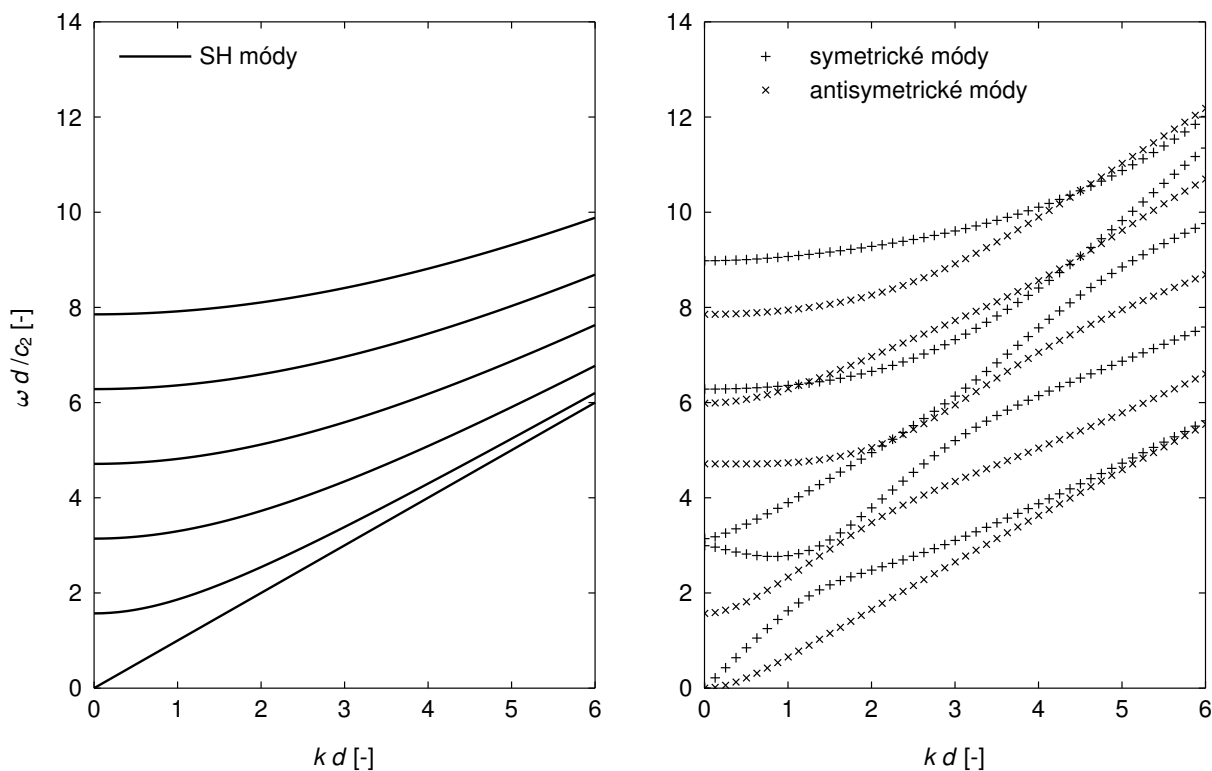
$$\frac{\tan(dk_{is})}{\tan(dk_{il})} = -\frac{(k_{is}^2 - k^2)^2}{4k^2 k_{il} k_{is}} \quad (9)$$

V rovnicích (8) a (9) platí

$$(2dk_{is})^2 = (2d\omega/v_S)^2 - (2dk)^2, \quad (2dk_{il})^2 = (2d\omega/v_L)^2 - (2dk)^2, \quad (10)$$

kde  $v_L$  je fázová objemová rychlost podélných vln.

Disperzní křivky pro SH-módy jsou uvedeny na obr. 3 vlevo a pro symetrické a antisymetrické na obr. 3 vpravo. Křivky byly počítány pro materiál s Poissonovým číslem 0,31.



**Obr. 3.** Disperzní křivky pro SH-módy (vlevo) a (anti)symetrické módy (vpravo).

Pro snažší pochopení chování symetrických a antisymetrických módů vyvinul Mindlin (1960) metodu oddělených módů, která spočívá v zavedení speciálních okrajových podmínek

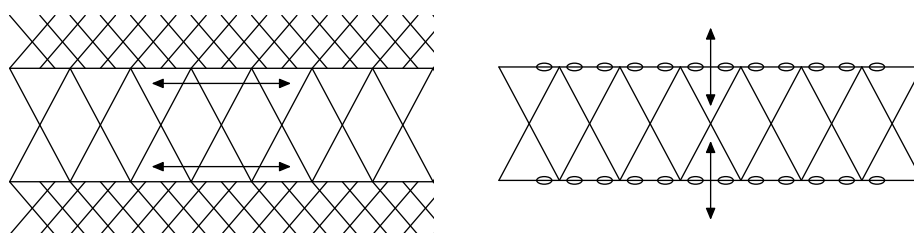
$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad (11)$$

nebo

$$T_{zz} = 0, \quad u_x = 0. \quad (12)$$

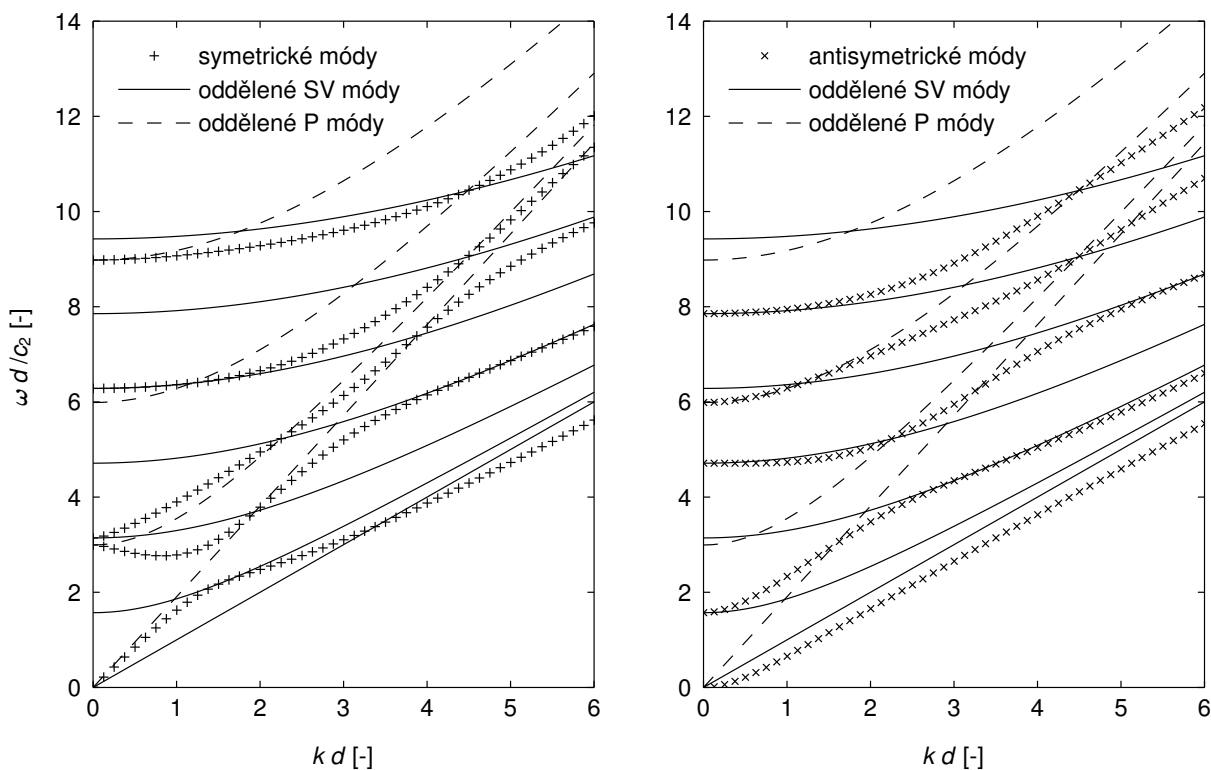
Tyto okrajové podmínky nelze realizovat v praxi, ale lze je simulovat „namazanými tuhými poloprostory“ (viz obr. 4 vlevo) a „mikroskopickým řetízkiem“ (viz obr. 4 vpravo). Pro tyto speciální okrajové podmínky degenerují symetrické a antisymetrické módy do oddělených SV-módů, popsaných vztahem (7), a oddělených P-módů, popsaných vztahem

$$(M\pi)^2 = (2d\omega/v_L)^2 - (2dk)^2. \quad (13)$$



Obr. 4. Modely Mindlinových okrajových podmínek.

Mindlinovy disperzní křivky jsou spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy izotropní desky zakresleny v obr. 5.



Obr. 5. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy zakresleny do Mindlinových křivek.

#### 4. DESKA S KUBICKOU ANIZOTROPIÍ

V anizotropní desce nelze obvykle nalézt parciální vlny analyticky a všechny kroky načrtnuté ve druhé části je nutné provést numericky. Avšak v případě, kdy má deska s kubickou anizotropií orientaci (001) a vyšetřujeme směr šíření (100), lze pro disperzní křivky získat analytické vyjádření.

V tomto případě se Christoffelova rovnice (1) redukuje na

$$\begin{pmatrix} c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44} (1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \quad (14)$$

kde  $\alpha_x^{(n)}$ ,  $\alpha_y^{(n)}$  a  $\alpha_z^{(n)}$  jsou složky polarizace  $n$ -té parciální vlny. Determinant soustavy se rozdělí na

$$c_{44} (1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 = 0 \quad (15)$$

a

$$(c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2)(c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2) - (c_{12} + c_{44})^2 l_z^{(n)2} = 0. \quad (16)$$

SH-módy

Uvažujeme první dva kořeny  $l_z^{(n)}$  rovnice (15), které spojíme s  $n = 5, 6$ . Odpovídající parciální vlny

$$\begin{aligned} l_z^{(5)} &= [(\rho v^2 / c_{44}) - 1]^{\frac{1}{2}} \\ l_z^{(6)} &= -l_z^{(5)} \end{aligned} \quad \alpha^{(5)} = \alpha^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

kde  $v = \omega/k$ , jsou horizontálně polarizované. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby  $l_z^{(5)} = N\pi/2kd$  pro  $N = 0, 1, 2, \dots$  Jedná se o čistě SH-módy stejně jako v izotropním případě.

Symetrické a antisymetrické módy

Čtyři kořeny  $l_z^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) rovnice (16)

$$l_z^{(n)2} = -\frac{B \pm [B^2 - A]^{\frac{1}{2}}}{2c_{11}c_{44}}, \quad (18)$$

kde  $A = 4c_{11}c_{44}(c_{11} - \rho v^2)(c_{44} - \rho v^2)$  a  $B = (c_{11} - \rho v^2)c_{11} + (c_{44} - \rho v^2)c_{44} - (c_{12} + c_{44})^2$ , vedou na zbývající parciální vlny typu P a SV. Znaménko plus vede na kvazipříčné vlny ( $n = 1, 2$ ) a znaménko mínus na kvazipodélné vlny ( $n = 3, 4$ ):

$$SV \left\{ \begin{aligned} l_z^{(1)} &= \left[ \frac{-B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}}{2c_{11}c_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ l_z^{(2)} &= -l_z^{(1)} \end{aligned} \right. \quad \alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} \\ \alpha_y^{(1)} \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12} + c_{44})l_z^{(1)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{44}l_z^{(1)2} - \rho v^2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(1)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} l_z^{(3)} = \left[ \frac{-B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}}{2c_{11}c_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(3)} \\ \alpha_y^{(3)} \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c_{12} + c_{44})l_z^{(3)} \\ 0 \\ c_{11} + c_{44}l_z^{(3)2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \\ l_z^{(4)} = -l_z^{(3)} \quad \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{(3)} \\ 0 \\ \alpha_z^{(3)} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (20)$$

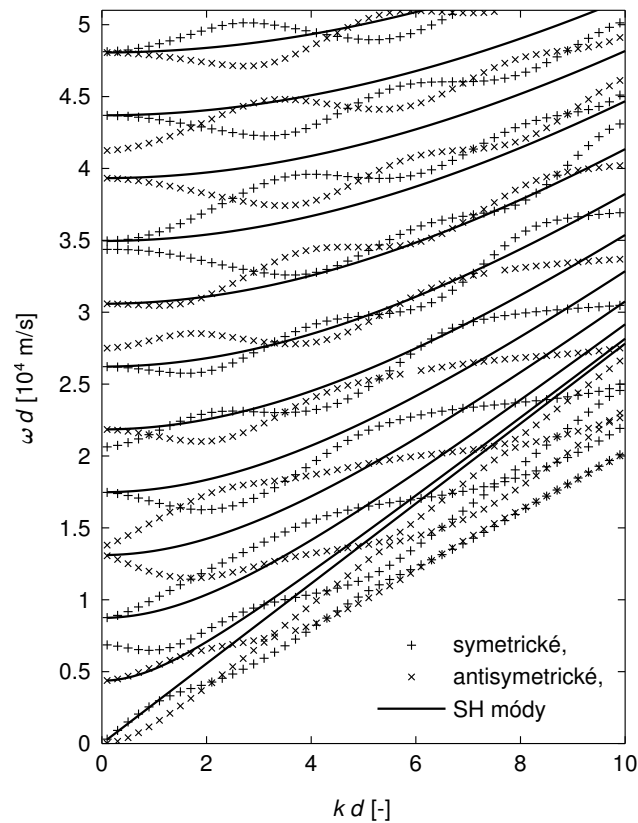
Okrajové podmínky  $T_{xz} = T_{zz} = 0$  jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\tan(l_z^{(1)}kd)}{\tan(l_z^{(3)}kd)} = \frac{(c_{12}\alpha_x^{(1)} + c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)})(\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)})}{(c_{12}\alpha_x^{(3)} + c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)})(\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)})} \quad (21)$$

nebo

$$\frac{\tan(l_z^{(1)}kd)}{\tan(l_z^{(3)}kd)} = \frac{(c_{12}\alpha_x^{(3)} + c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)})(\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)})}{(c_{12}\alpha_x^{(1)} + c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)})(\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)})}. \quad (22)$$

Rovnice (21) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (22) závislost pro antisymetrické módy. Grafické znázornění těchto disperzních závislostí spolu se závislostí SH-módů je znázorněno na obr. 6.



Obr. 6. Disperzní křivky pro SH-módy a (anti)symetrické módy.

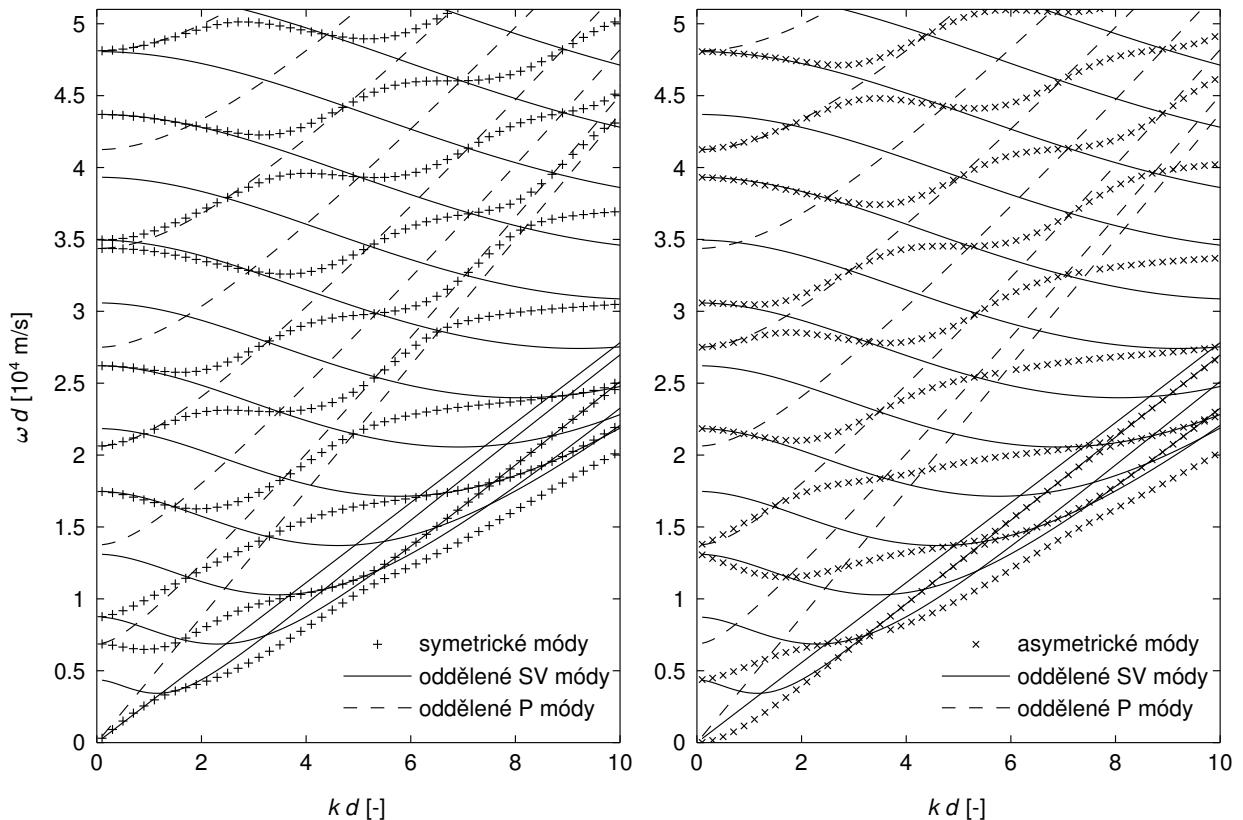
Mindlinovy okrajové podmínky (11) resp. (12) jsou splněny, pokud platí

$$\sin(l_z^{(1)}kd) \cos(l_z^{(1)}kd) = 0 \quad (23)$$

nebo

$$\sin(l_z^{(3)}kd) \cos(l_z^{(3)}kd) = 0 \quad (24)$$

Mindlinovy disperzní křivky jsou spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy desky s kubickou anizotropií zakresleny v obr. 7. Uvedené výsledky jsou ve shodě s prací Solie a Auld (1973).



**Obr. 7.** Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy zakresleny do Mindlinových křivek.

Při výpočtu disperzních křivek v desce s kubickou anizotropií byly použity hodnoty materiálových konstant mědi, jak je uvedeno v tabulce 1 podle Hearmon (1965). Pro odvození disperzních vztahů jsme použili symbolický toolbox Matlabu, bez kterého bychom vztahy (21) až (24) jen těžko získávali.

$c_{11}$ [GPa]	$c_{12}$ [GPa]	$c_{44}$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
171	122	69,1	8930

**Tab. 1.** Materiálové konstanty pro Cu použité ve výpočtech.

## 5. ZÁVĚR

V příspěvku je popsán obecný princip získání disperzních vztahů pro nekonečnou tlustou anizotropní desku s volnými okrajovými podmínkami. Pro desku s kubickou anizotropií a orientací (001) byly pro směr šíření (100) odvozeny analytické vztahy disperzních závislostí. Pro výše uvedenou orientaci a směr šíření jsou v příspěvku vyobrazeny disperzní závislosti pro měděnou desku.

K odvození disperzních závislostí bylo použito metody parciálních vln. Získané disperzní křivky byly porovnány s výsledky Mindlinovy teorie oddělených módů. Znalost disperzních křivek lze využít v inverzním algoritmu pro stanovení elastických konstant a při výpočtu jednotlivých složek posuvů a napětí.

**Poděkování:** Příspěvek vznikl na základě podpory grantu cíleného vývoje a výzkumu AV ČR č. IBS2076356 "Ultrazvukové metody vyšetřování mechanických vlastností kompozitních materiálů používaných v letectví" (řešitel Ing. M. Landa, CSc.) a záměru ÚT AV ČR AV0Z20760514.

## LITERATURA

- Achenbach, J.D., 1973. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland Publishing Comp., Amsterdam & Elsevier, New York.
- Auld, B.A., 1973. *Acoustic fields and waves in solids, vol. 1*. John Wiley, New York.
- Hearmon, R.F.S., 1965. *Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek*. SNTL, Praha.
- Miklowitz, J., 1978. *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. North Holland Publishing Comp., Amsterdam.
- Mindlin, R.D., 1960. *Structural Mechanics*. Pergamon, New York.
- Solie, L.P., and Auld, B.A., 1973. Elastic waves in free anisotropic plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54. pp 50-65.