

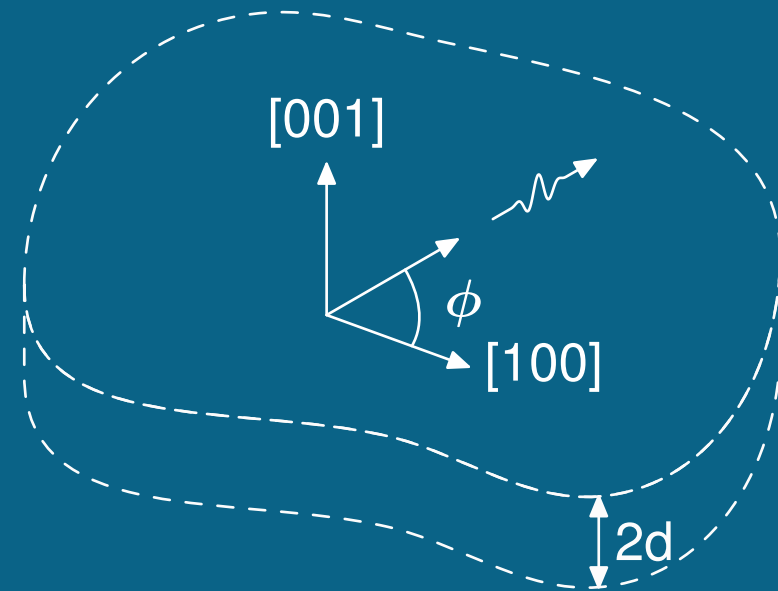
ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ DISPERZNÍCH KŘIVEK V DESCE S KUBICKOU ANIZOTROPIÍ PRO LIBOVOLNÝ SMĚR ŠÍŘENÍ

O. Červená, P. Hora
Ústav termomechaniky AV ČR

Příspěvek vznikl na základě podpory projektu GA ČR č. 101/06/0213
Nestacionární napjatost a disperzní vlastnosti ortotropních těles (řešitel
Ing. F. Valeš, CSc.) a záměru ÚT AV ČR AV0Z20760514.

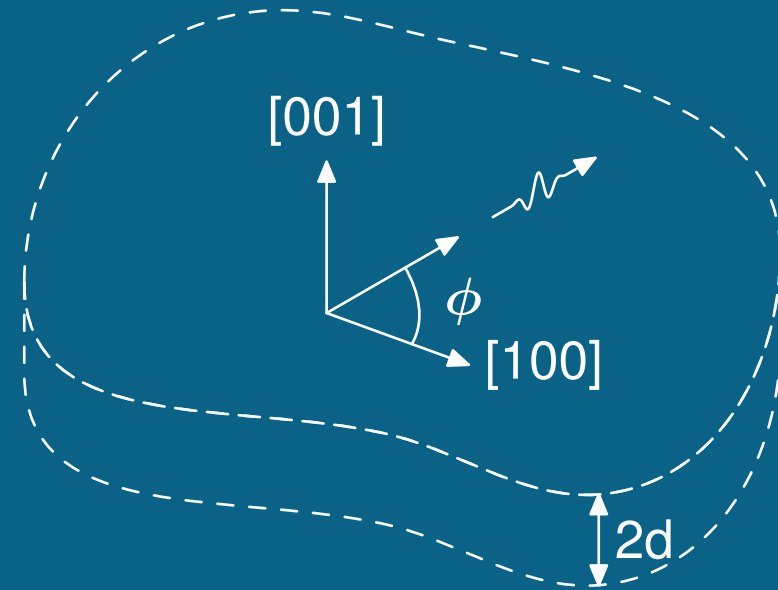
Úvod

- nekonečná tlustá deska
- volné okrajové podmínky
- kubická anizotropie
- orientace (001)
- libovolný směr šíření v rovině desky



Úvod

- nekonečná tlustá deska
- volné okrajové podmínky
- kubická anizotropie
- orientace (001)
- libovolný směr šíření v rovině desky
- metoda parciálních vln
- získání disperzních vztahů
- vyčíslení disperzních vztahů pro měď
- porovnání s výsledky Mindlinovy teorie oddělených módů



Metoda parciálních vln

- Používá se ke studiu šíření napěťových vln v anizotropních deskách.
- Řešení skládá z jednoduchých vln exponenciálního typu, které putují mezi okraji desky.

Každá parciální vlna musí mít stejnou hodnotu k_x
 ($k_x = k = \omega/v$, kde v je fázová rychlost vlny v desce).

- Řešení má tvar

$$u_j = \alpha_j \exp [ik(x + l_z z)], \quad \text{kde } j = x, y, z \quad \text{a} \quad l_z = k_z/k_x.$$

- Substituce tohoto vztahu do Christoffelovy rovnice
- Soustava tří homogenních lineárních rovnic pro α_x, α_y a α_z
- Netriviální řešení \Rightarrow determinant soustavy je roven nule
- Polynom šestého řádu pro $l_z \Rightarrow$ šest kořenů $l_z^{(n)}, n = 1, \dots, 6$

Řešení odpovídá šesti dopadajícím a odraženým vlnám.

- Vztahy pro parciální vlny

$$u_j = \sum_{n=1}^6 C_n \alpha_j^{(n)} \exp \left[ik(x + l_z^{(n)} z) \right], \quad (j = x, y, z).$$

- Okrajové podmínky

$$T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0, \quad \text{pro } z = \pm d.$$

- Substituce předpokládaného řešení do okrajových podmínek
- Soustava šesti homogenních lineárních rovnic

Koeficienty soustavy C_n jsou funkcemi ρ , c_{IJ} , $\omega/k = v$ a kd .

- Netriviální řešení \Rightarrow determinant soustavy je roven nule
- Disperzní vztah mezi ω a k

Směr šíření [100] , tj. $\phi = 0^\circ$

- Christoffelova rovnice

$$\begin{pmatrix}
 c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} \\
 0 & c_{44} (1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 \\
 (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \alpha_x^{(n)} \\
 \alpha_y^{(n)} \\
 \alpha_z^{(n)}
 \end{pmatrix}
 = 0,$$

kde $\alpha_x^{(n)}$, $\alpha_y^{(n)}$ a $\alpha_z^{(n)}$ jsou složky polarizace n -té parciální vlny.

Směr šíření [100] , tj. $\phi = 0^\circ$

- Christoffelova rovnice

$$\begin{pmatrix}
 c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} \\
 0 & c_{44} (1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 \\
 (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \alpha_x^{(n)} \\
 \alpha_y^{(n)} \\
 \alpha_z^{(n)}
 \end{pmatrix}
 = 0,$$

kde $\alpha_x^{(n)}$, $\alpha_y^{(n)}$ a $\alpha_z^{(n)}$ jsou složky polarizace n -té parciální vlny.

- Determinant soustavy se rozdělí na dvě rovnice:

$$\left(c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) \left(c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) - (c_{12} + c_{44})^2 l_z^{(n)2} = 0,$$

$$c_{44} \left(1 + l_z^{(n)2} \right) - \rho v^2 = 0.$$

- ★ 1. rovnice → čtyři kořeny

$$l_z^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

vedou na parciální vlny typu P a SV.

$$l_z^{(1)} = -l_z^{(2)} \Rightarrow \text{kvazipříčné vlny}$$

$$l_z^{(3)} = -l_z^{(4)} \Rightarrow \text{kvazipodélné vlny}$$

- ★ 2. rovnice → dva kořeny

$$l_z^{(5)} = -l_z^{(6)}$$

vedou na parciální vlny typu SH.

- Symetrické a antisymetrické módy

Z okrajových podmínek volného povrchu plyne

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)}$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)},$$

$$\alpha_x^{(n)} = -(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}, \quad \alpha_z^{(n)} = c_{11} + c_{44}l_z^{(n)^2} - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1, 3.$$

- ★ 1. rovnice představuje disperzní závislost pro symetrické módy,
- ★ 2. rovnice závislost pro antisymetrické módy.

- Horizontálně polarizované módy

Z okrajových podmínek volného povrchu plyne

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

- ★ Rovnice představuje disperzní závislost pro SH-módy.

Směr šíření [110] , tj. $\phi = 45^\circ$

- Christoffelova rovnice

$$\begin{pmatrix}
 \frac{c_{11} + c_{12}}{2} + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} \\
 0 & c_{44}l_z^{(n)2} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} - \rho v^2 & 0 \\
 (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \alpha_x^{(n)} \\
 \alpha_y^{(n)} \\
 \alpha_z^{(n)}
 \end{pmatrix}
 = 0,$$

- Determinant soustavy se rozdělí na dvě rovnice:

$$\left(\frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 \right) \left(c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) - (c_{12} + c_{44})^2 l_z^{(n)2} = 0,$$

$$c_{44}l_z^{(n)2} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) - \rho v^2 = 0.$$

- ★ 1. rovnice → čtyři kořeny

$$l_z^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

vedou na parciální vlny typu P a SV.

$$l_z^{(1)} = -l_z^{(2)} \Rightarrow \text{kvazipříčné vlny}$$

$$l_z^{(3)} = -l_z^{(4)} \Rightarrow \text{kvazipodélné vlny}$$

- ★ 2. rovnice → dva kořeny

$$l_z^{(5)} = -l_z^{(6)}$$

vedou na parciální vlny typu SH.

- Symetrické a antisymetrické módy

Z okrajových podmínek volného povrchu plyne

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)}$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)},$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_x^{(n)} &= -(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}, \\ \alpha_z^{(n)} &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1,3. \end{aligned}$$

- ★ 1. rovnice představuje disperzní závislost pro symetrické módy,
- ★ 2. rovnice závislost pro antisymetrické módy.

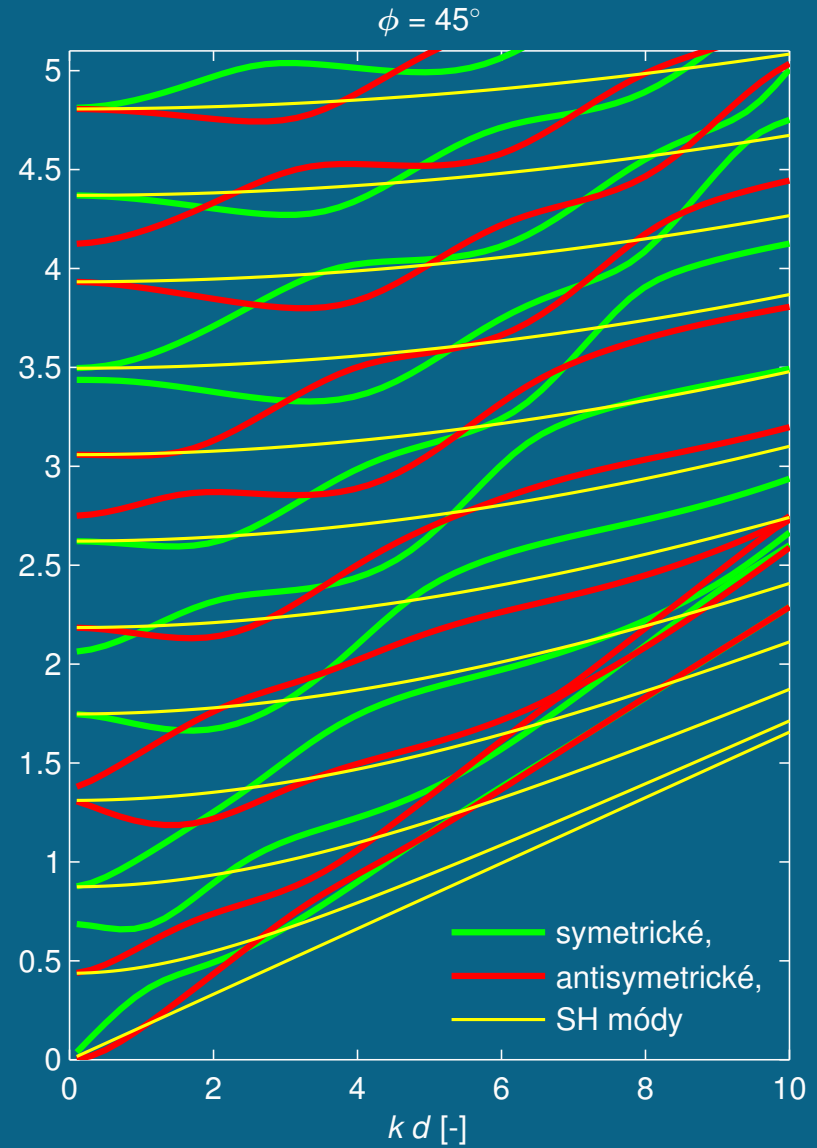
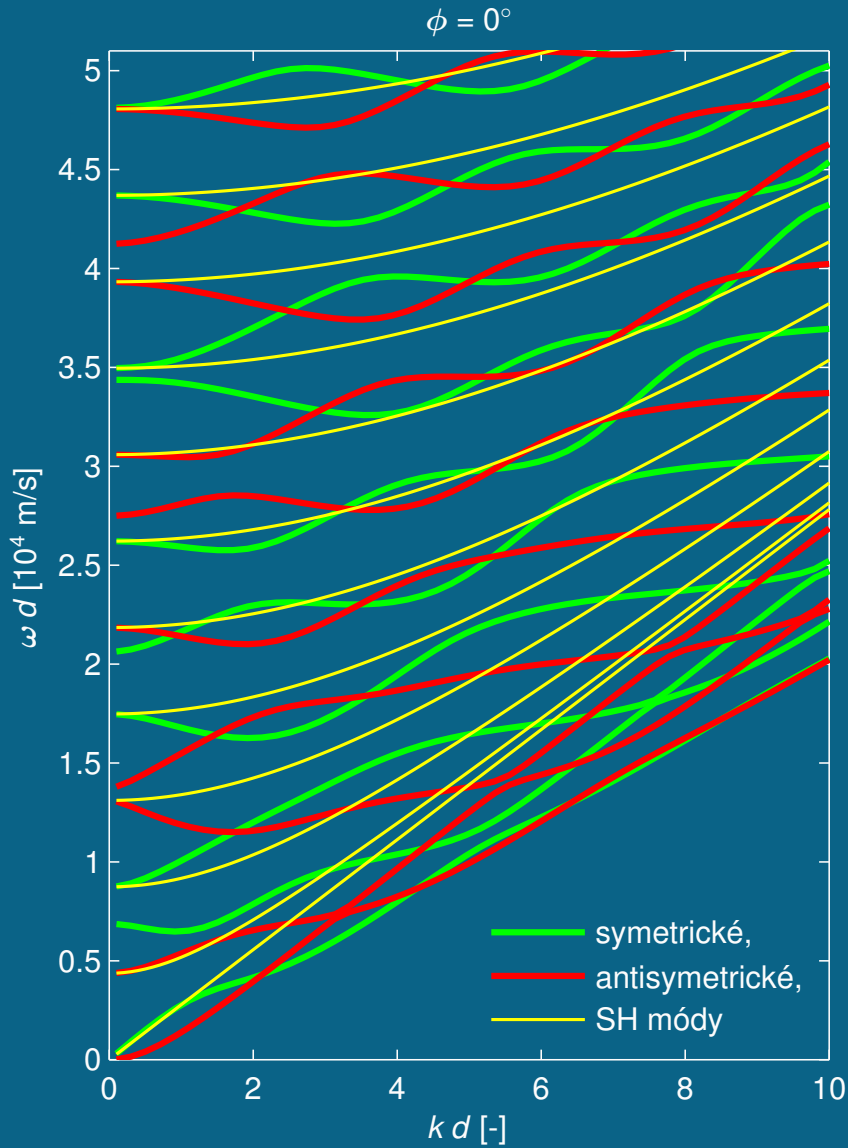
- Horizontálně polarizované módy

Z okrajových podmínek volného povrchu plyne

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

- ★ Rovnice představuje disperzní závislost pro SH-módy.

Disperzní křivky pro směry šíření $\phi = 0^\circ$ a 45°



Libovolný směr šíření

- Christoffelova rovnice

$$\begin{pmatrix}
 K_A + c_{11} + c_{44}l_z^{(n)2} - \rho v^2 & K_B & (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} \\
 K_B & (l_z^{(n)2} + 1)c_{44} - K_A - \rho v^2 & 0 \\
 (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \alpha_x^{(n)} \\
 \alpha_y^{(n)} \\
 \alpha_z^{(n)}
 \end{pmatrix}
 = 0,$$

kde

$$K_A = -2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}),$$

$$K_B = (1 - 2 \cos^2 \phi) (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \sin \phi \cos \phi.$$

Libovolný směr šíření

- Christoffelova rovnice

$$\begin{pmatrix}
 K_A + c_{11} + c_{44}l_z^{(n)2} - \rho v^2 & K_B & (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} \\
 K_B & (l_z^{(n)2} + 1)c_{44} - K_A - \rho v^2 & 0 \\
 (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \alpha_x^{(n)} \\
 \alpha_y^{(n)} \\
 \alpha_z^{(n)}
 \end{pmatrix}
 = 0,$$

kde

$$K_A = -2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}),$$

$$K_B = (1 - 2 \cos^2 \phi) (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \sin \phi \cos \phi.$$

- Determinant soustavy již nelze rozložit \Rightarrow rovnice 6. řádu.
- Kořeny rovnice vedou na symetrické a antisymetrické módy.
- SH-módy se nevyskytují.

- Symetrické módy

$$C_A \operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right) + C_B \operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right) + C_C \operatorname{tg} \left(l_z^{(5)} kd \right) = 0$$

- Antisymetrické módy

$$C_A \operatorname{cotg} \left(l_z^{(1)} kd \right) + C_B \operatorname{cotg} \left(l_z^{(3)} kd \right) + C_C \operatorname{cotg} \left(l_z^{(5)} kd \right) = 0,$$

kde

$$\begin{aligned}
 C_A &= \left(c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} + c_{12} \right) \left[\alpha_y^{(5)} l_z^{(5)} \left(\alpha_z^{(3)} + l_z^{(3)} \right) - \alpha_y^{(3)} l_z^{(3)} \left(l_z^{(5)} + \alpha_z^{(5)} \right) \right], \\
 C_B &= \left(c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} + c_{12} \right) \left[\alpha_y^{(1)} l_z^{(1)} \left(\alpha_z^{(5)} + l_z^{(5)} \right) - \alpha_y^{(5)} l_z^{(5)} \left(l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right) \right], \\
 C_C &= \left(c_{11} \alpha_z^{(5)} l_z^{(5)} + c_{12} \right) \left[\alpha_y^{(3)} l_z^{(3)} \left(\alpha_z^{(1)} + l_z^{(1)} \right) - \alpha_y^{(1)} l_z^{(1)} \left(l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right) \right]
 \end{aligned}$$

a

$$\alpha_y^{(n)} = \frac{K_B}{K_A + \rho v^2 - \left(l_z^{(n)2} + 1 \right) c_{44}}, \quad \alpha_z^{(n)} = \frac{(c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)}}{\rho v^2 - c_{44} - c_{11} l_z^{(n)2}} \quad \text{pro } n = 1, 3, 5.$$

Mindlinova metoda oddělených módů

- zavedení speciálních okrajových podmínek:

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{nebo} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0.$$

- Degenerace symetrických a antisymetrických módů do oddělených SV a P-módů.
- Lze použít pro dělení módů při $\phi = 0^\circ$ a $\phi = 45^\circ$, kdy lze oddělit SH-módy.

Mindlinova metoda oddělených módů

- zavedení speciálních okrajových podmínek:

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{nebo} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0.$$

- Degenerace symetrických a antisymetrických módů do oddělených SV a P-módů.
- Lze použít pro dělení módů při $\phi = 0^\circ$ a $\phi = 45^\circ$, kdy lze oddělit SH-módy.

Zobecnění metody

- Pro $0^\circ < \phi < 45^\circ$ přidána podmínka:

$$u_y = 0.$$

- Degenerace symetrických a antisymetrických módů do tří různých oddělených módů.

Mindlinovy křivky pro směry šíření [100] a [110]

- Z Mindlinových okrajových podmínek

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{resp.} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0$$

plyne

$$\sin\left(2l_z^{(1)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(1)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

nebo

$$\sin\left(2l_z^{(3)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(3)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Mindlinovy křivky pro směry šíření $0 < \phi < 45$

- Ze zobecněných Mindlinových okrajových podmínek

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0, \quad u_y = 0 \quad \text{resp.} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = 0$$

plyne

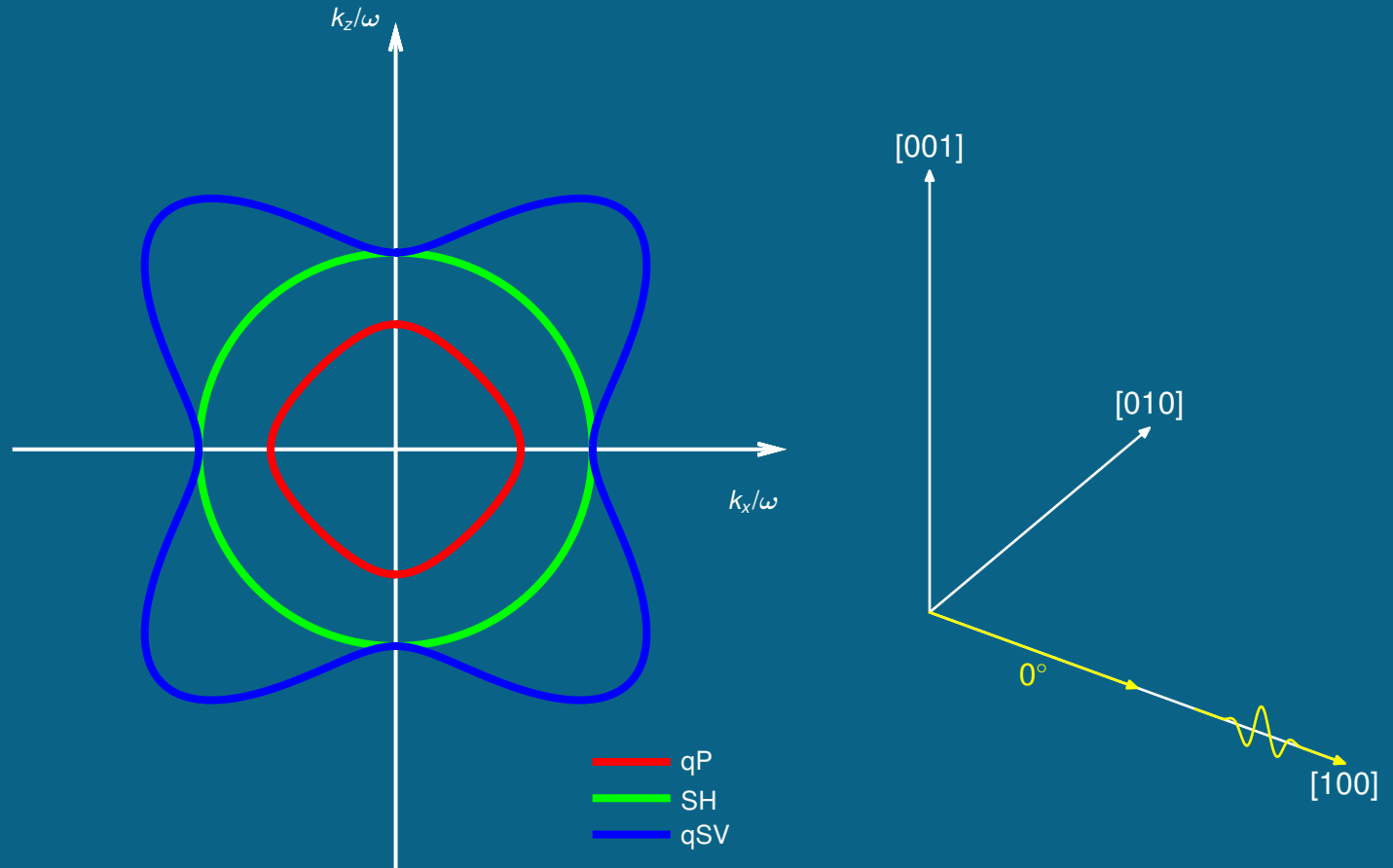
$$\sin\left(2l_z^{(1)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(1)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin\left(2l_z^{(3)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(3)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

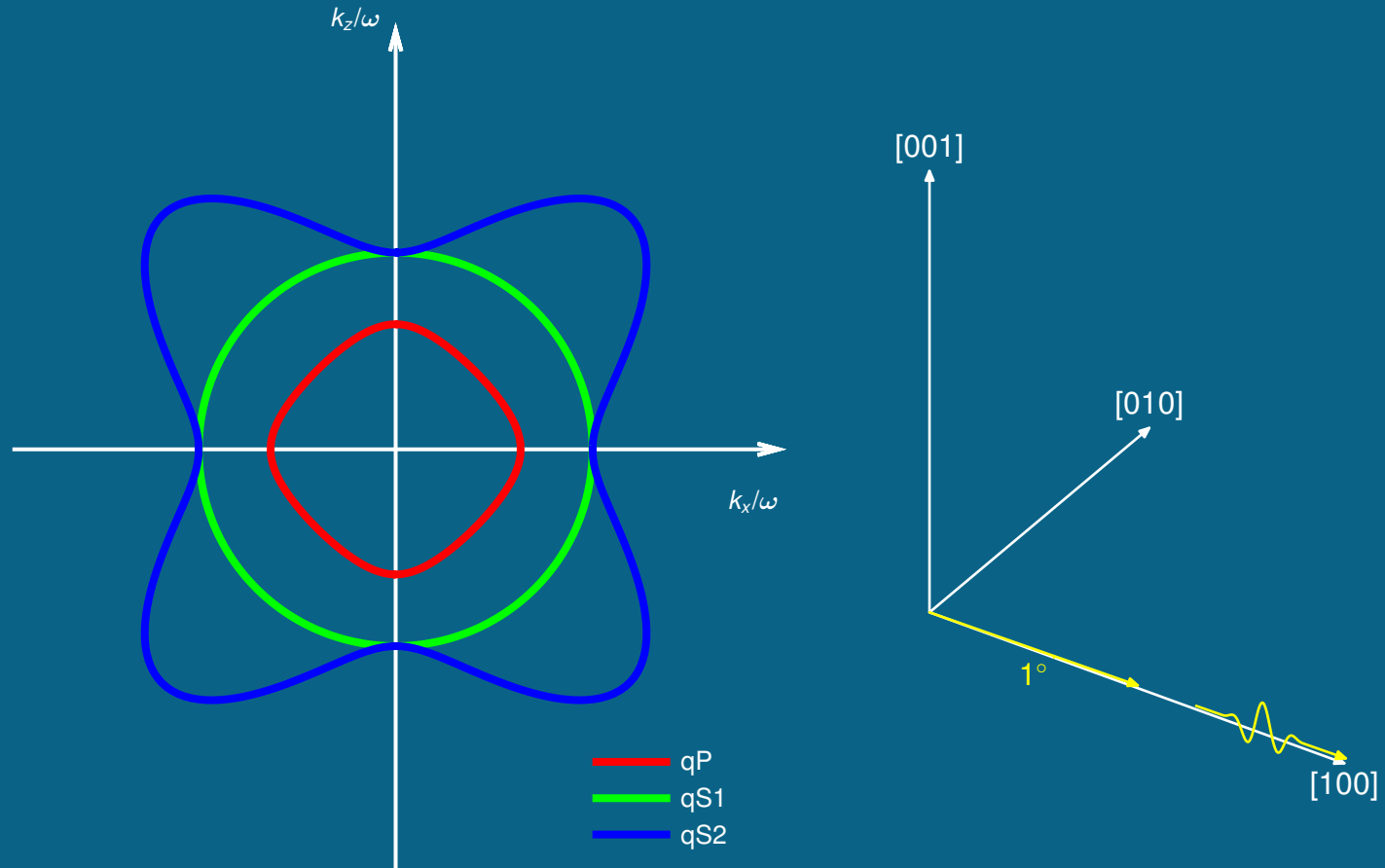
nebo

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

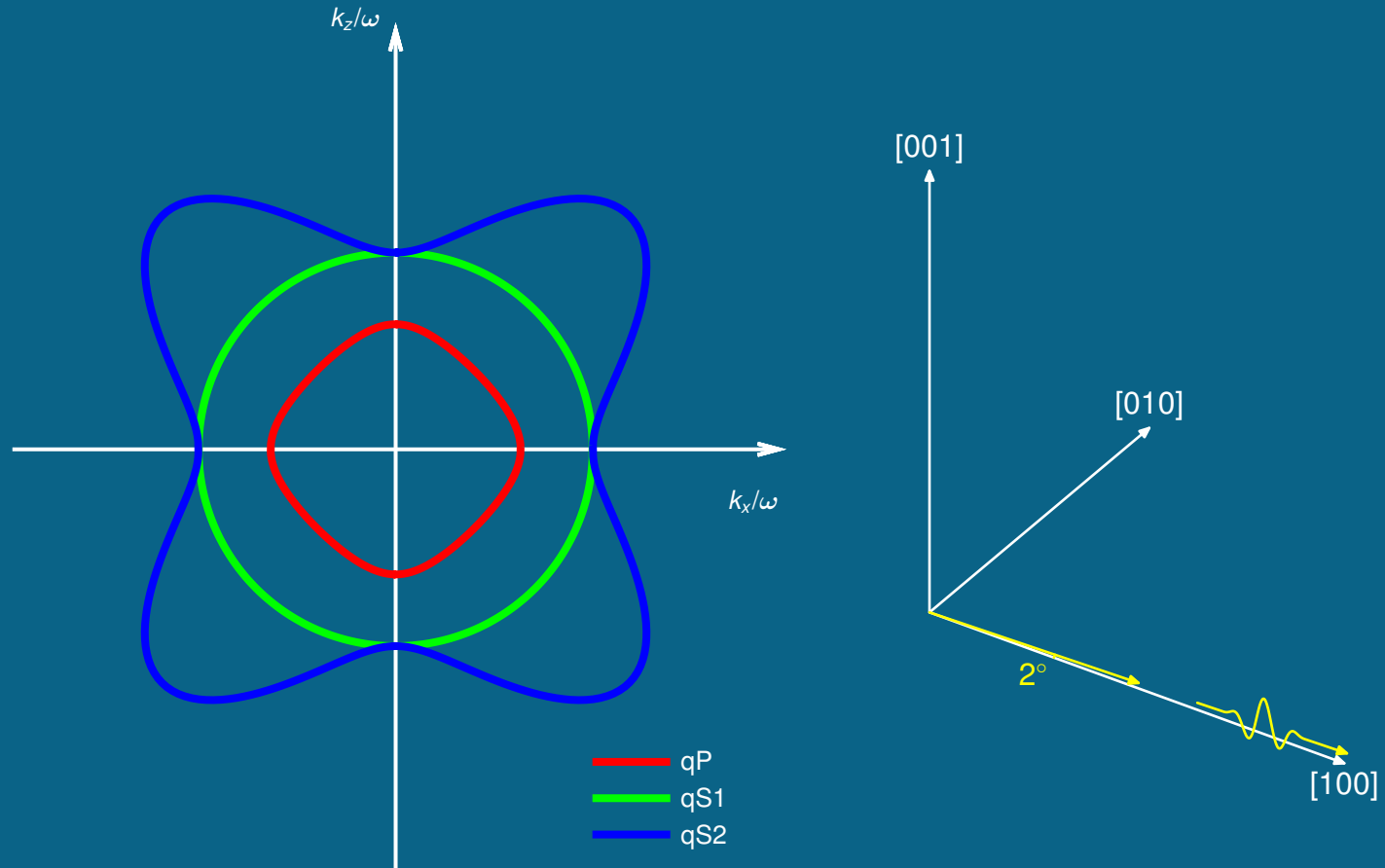
Pomalostní křivky



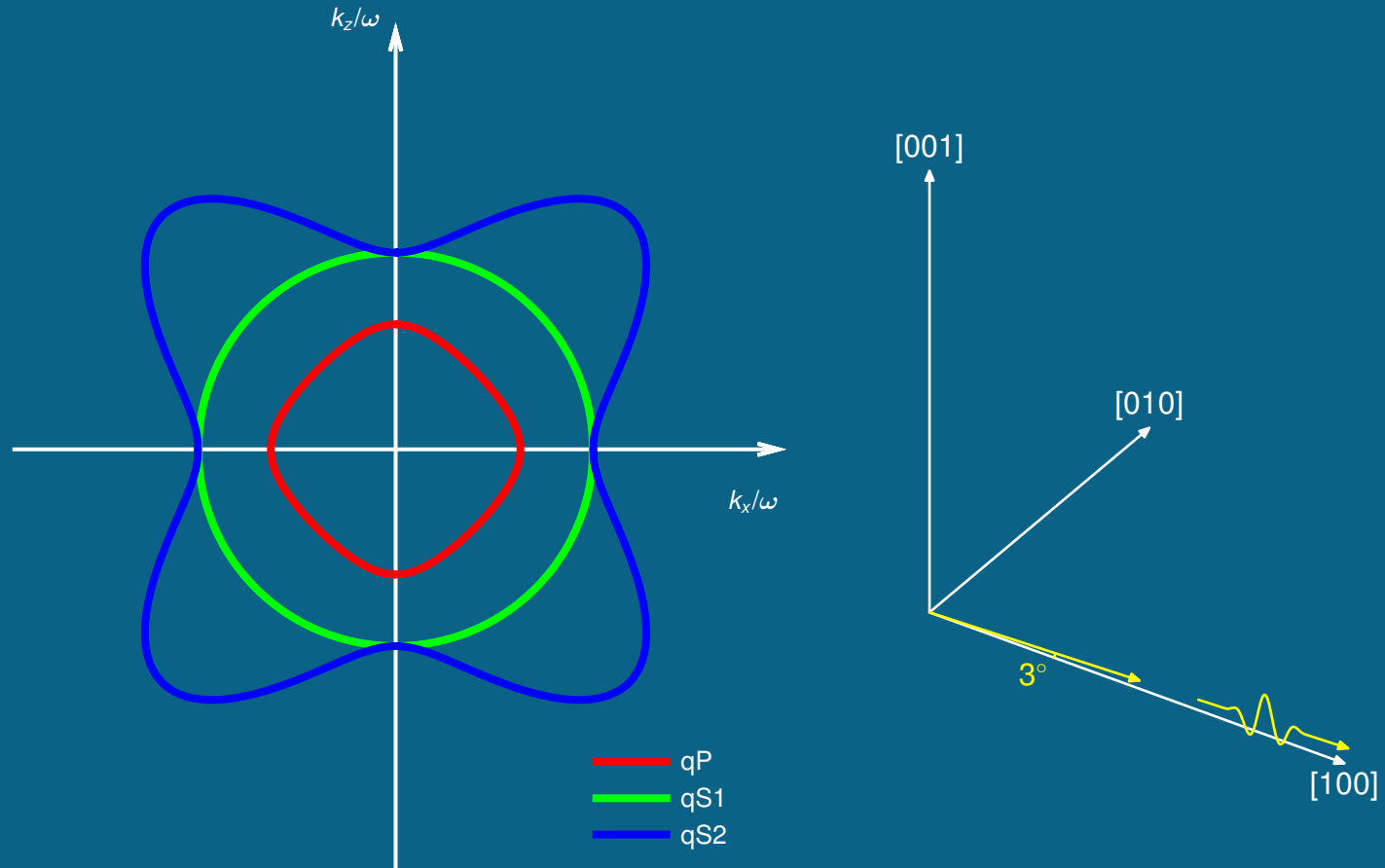
Pomalostní křivky



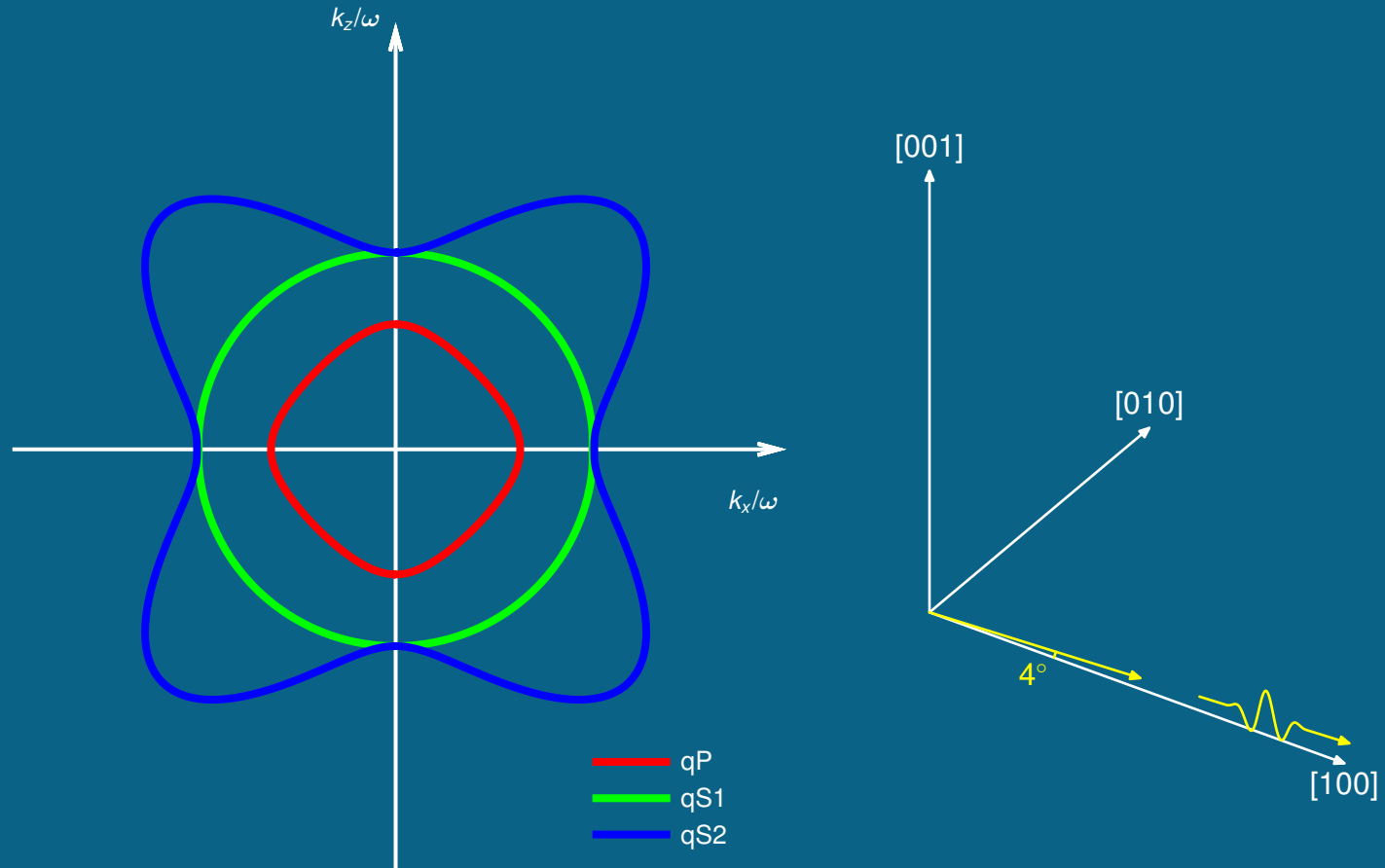
Pomalostní křivky



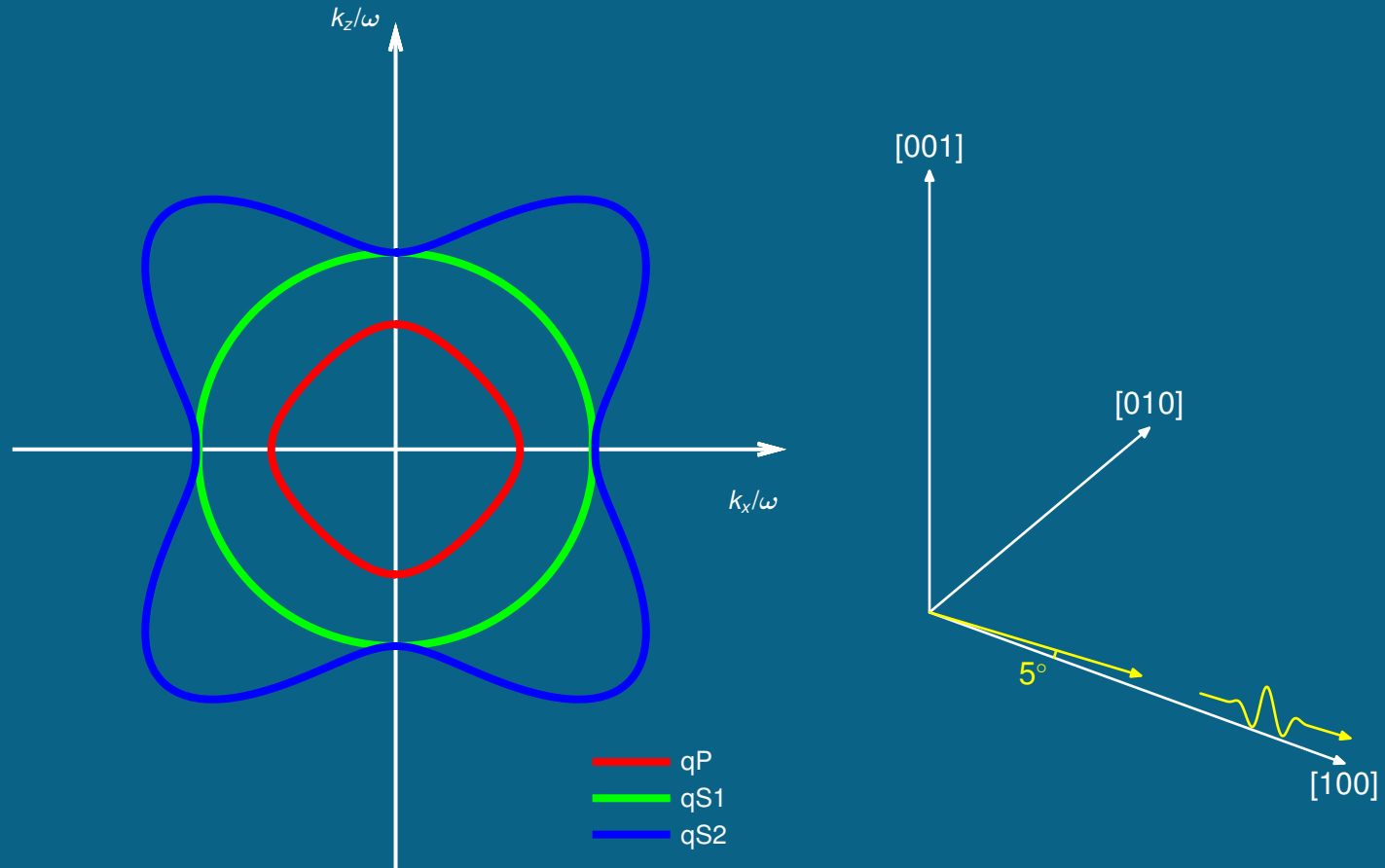
Pomalostní křivky



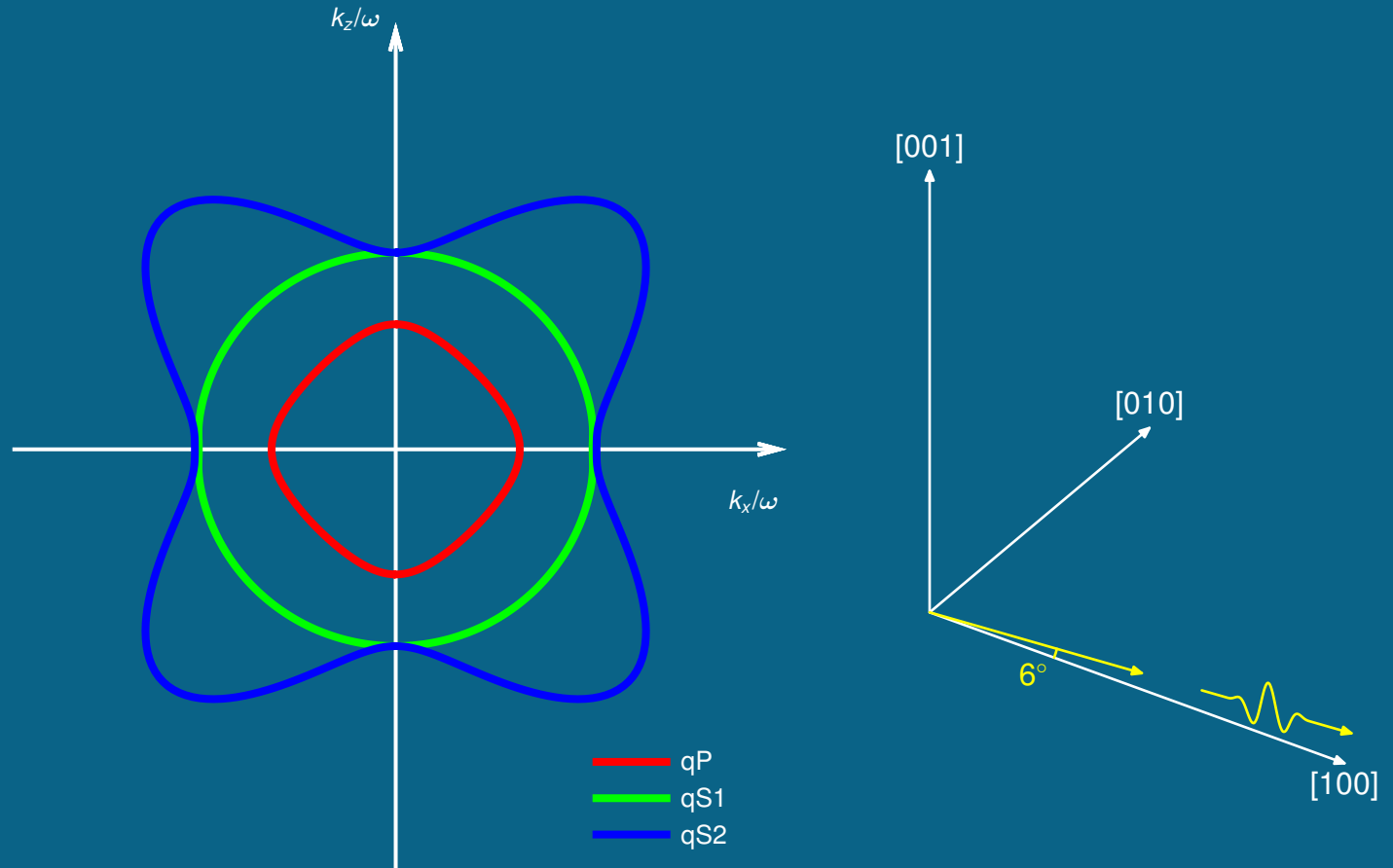
Pomalostní křivky



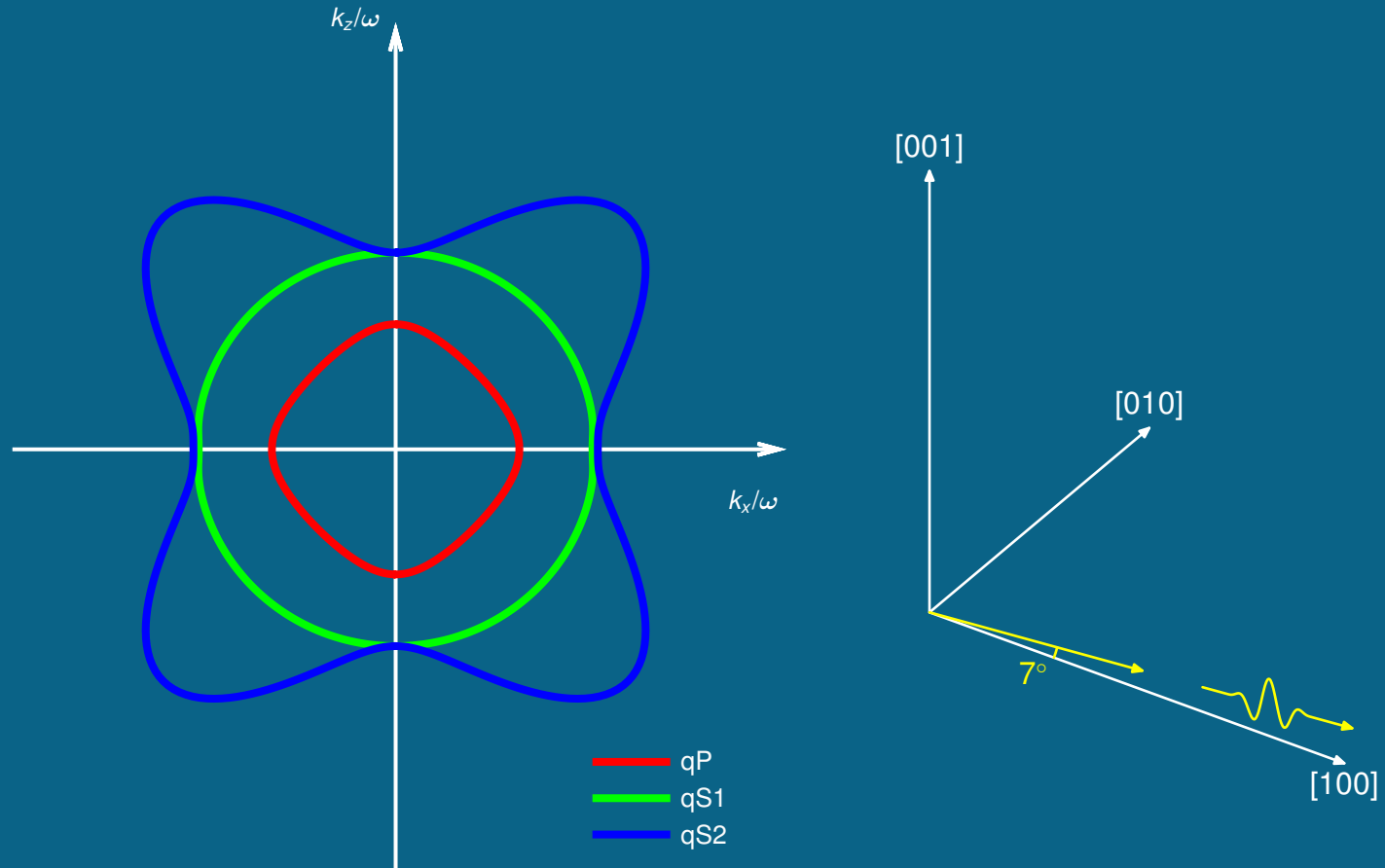
Pomalostní křivky



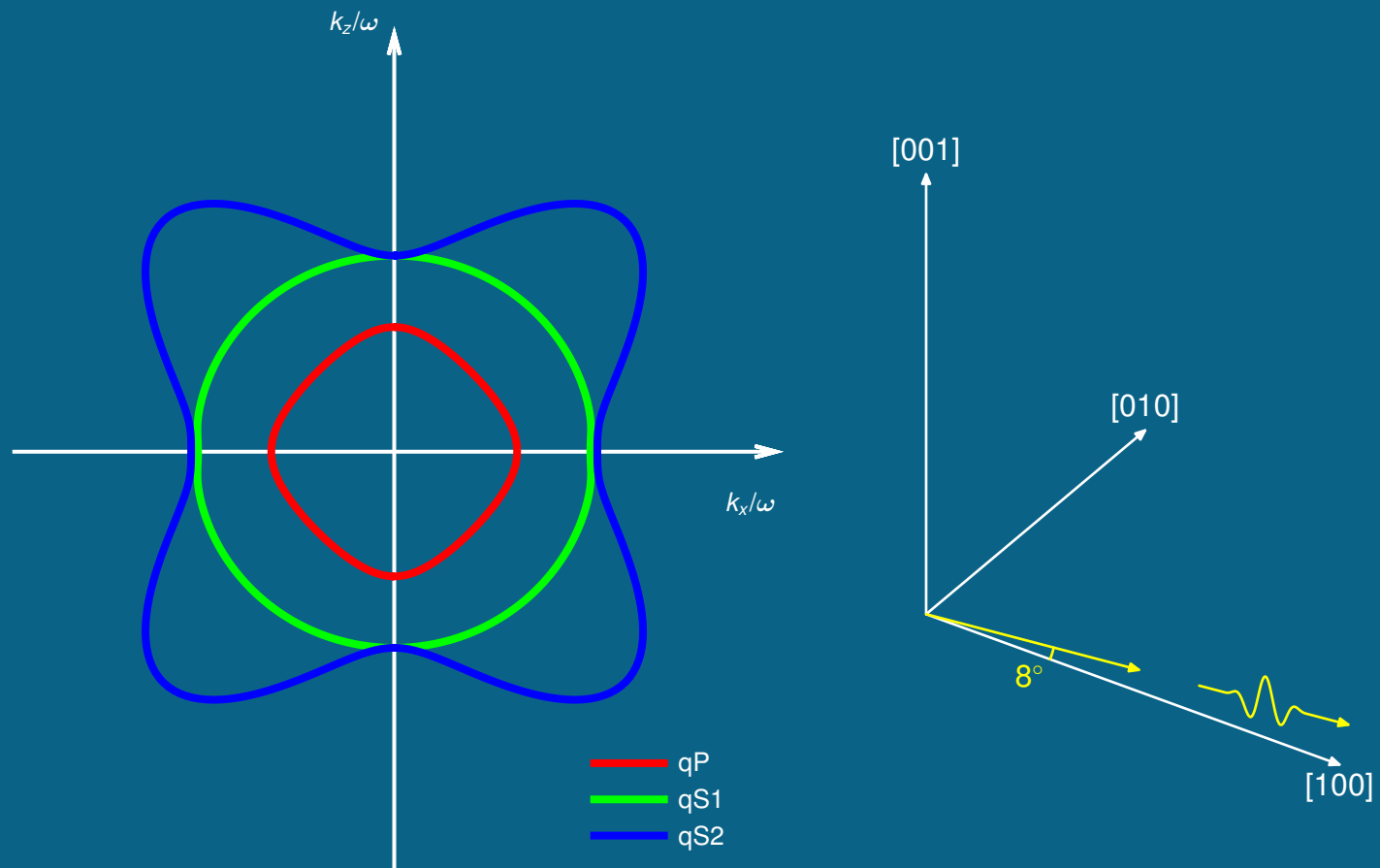
Pomalostní křivky



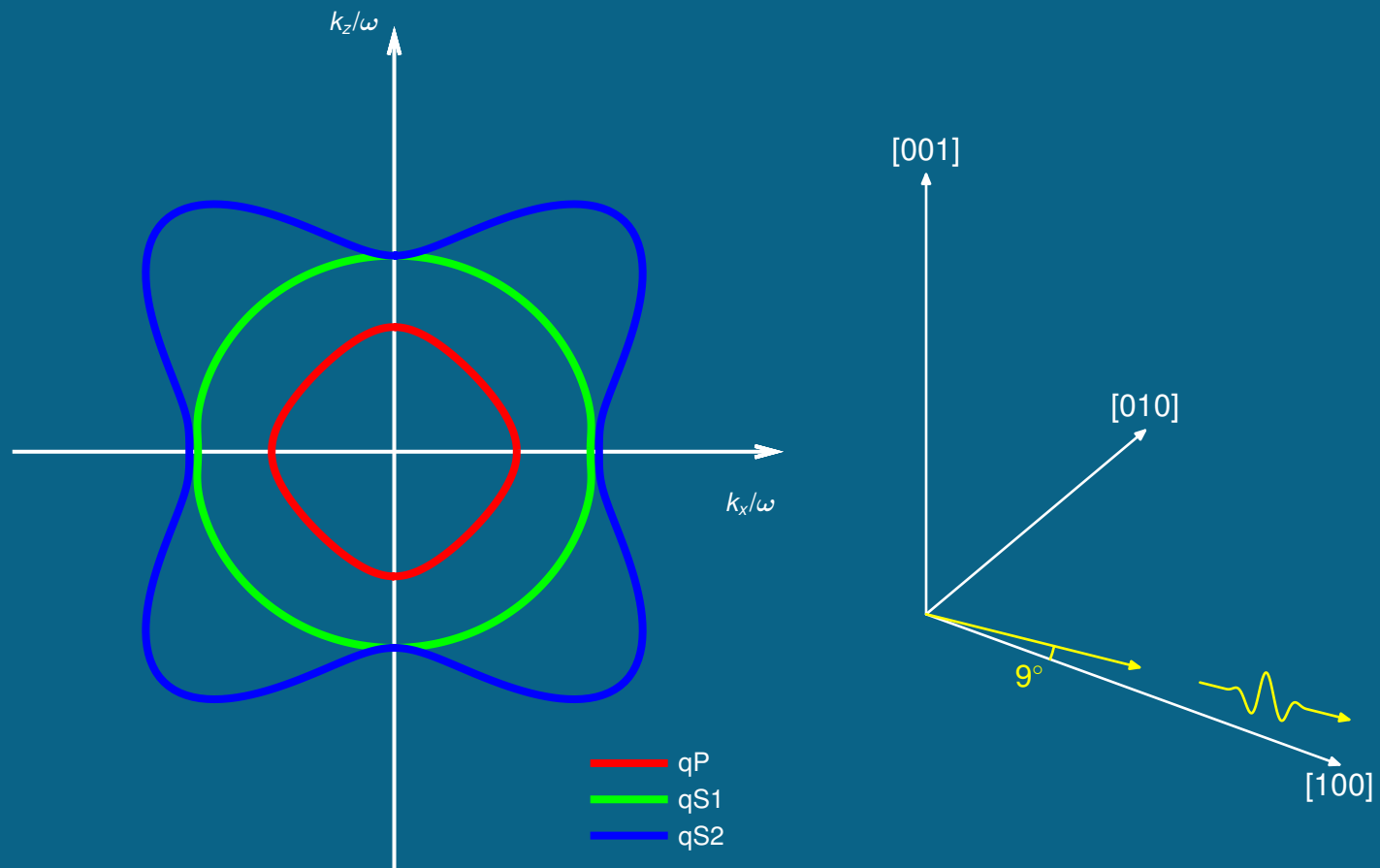
Pomalostní křivky



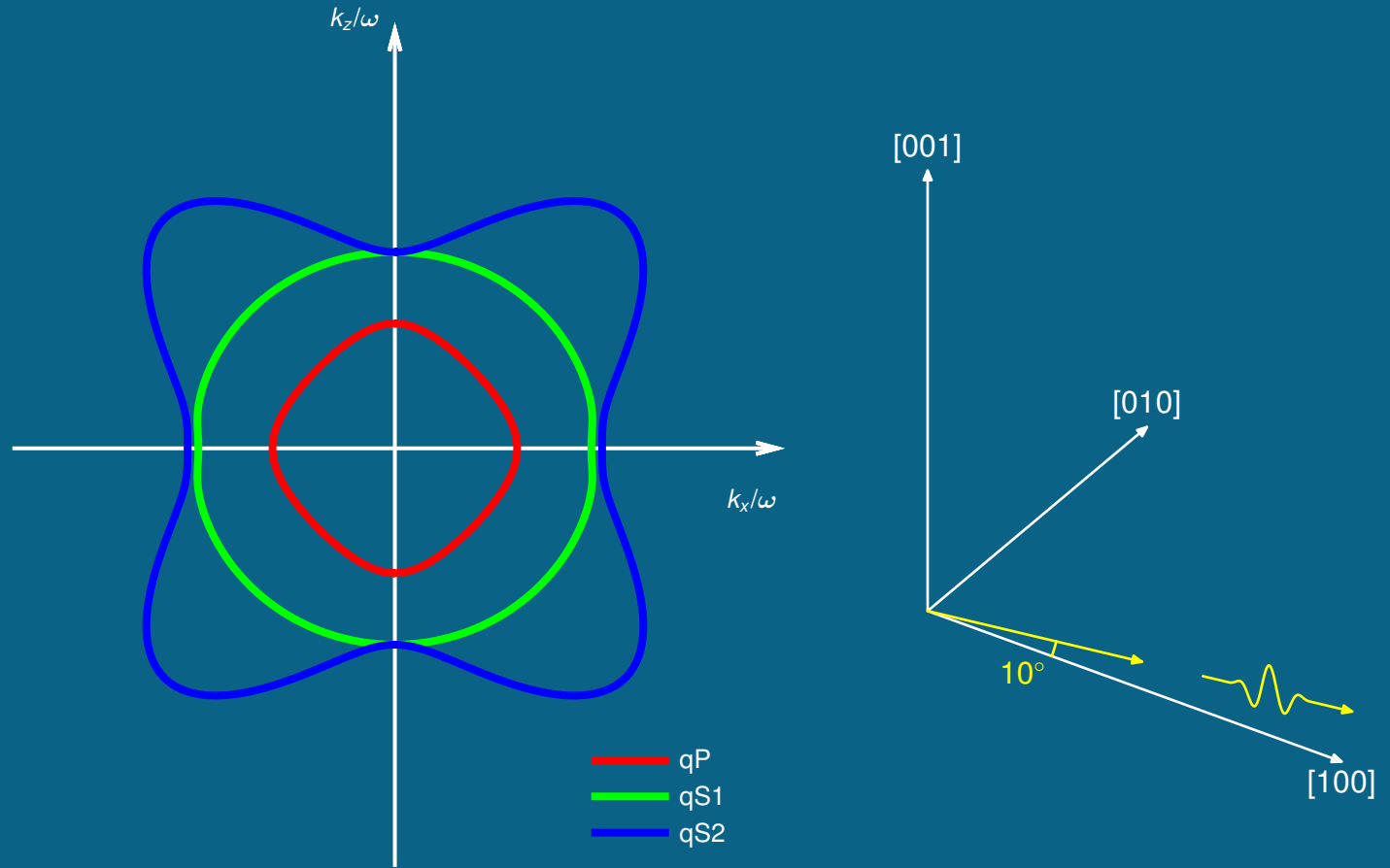
Pomalostní křivky



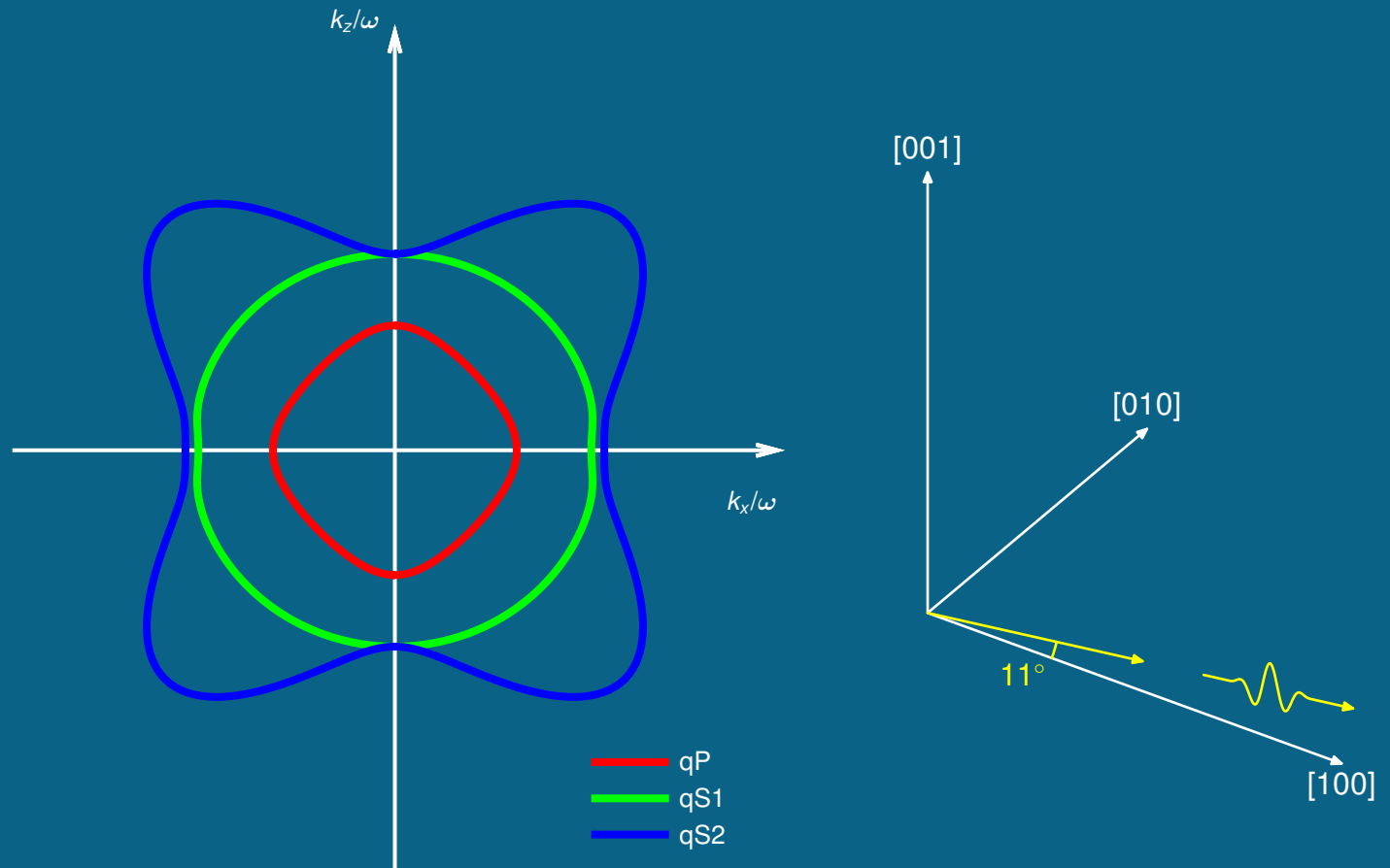
Pomalostní křivky



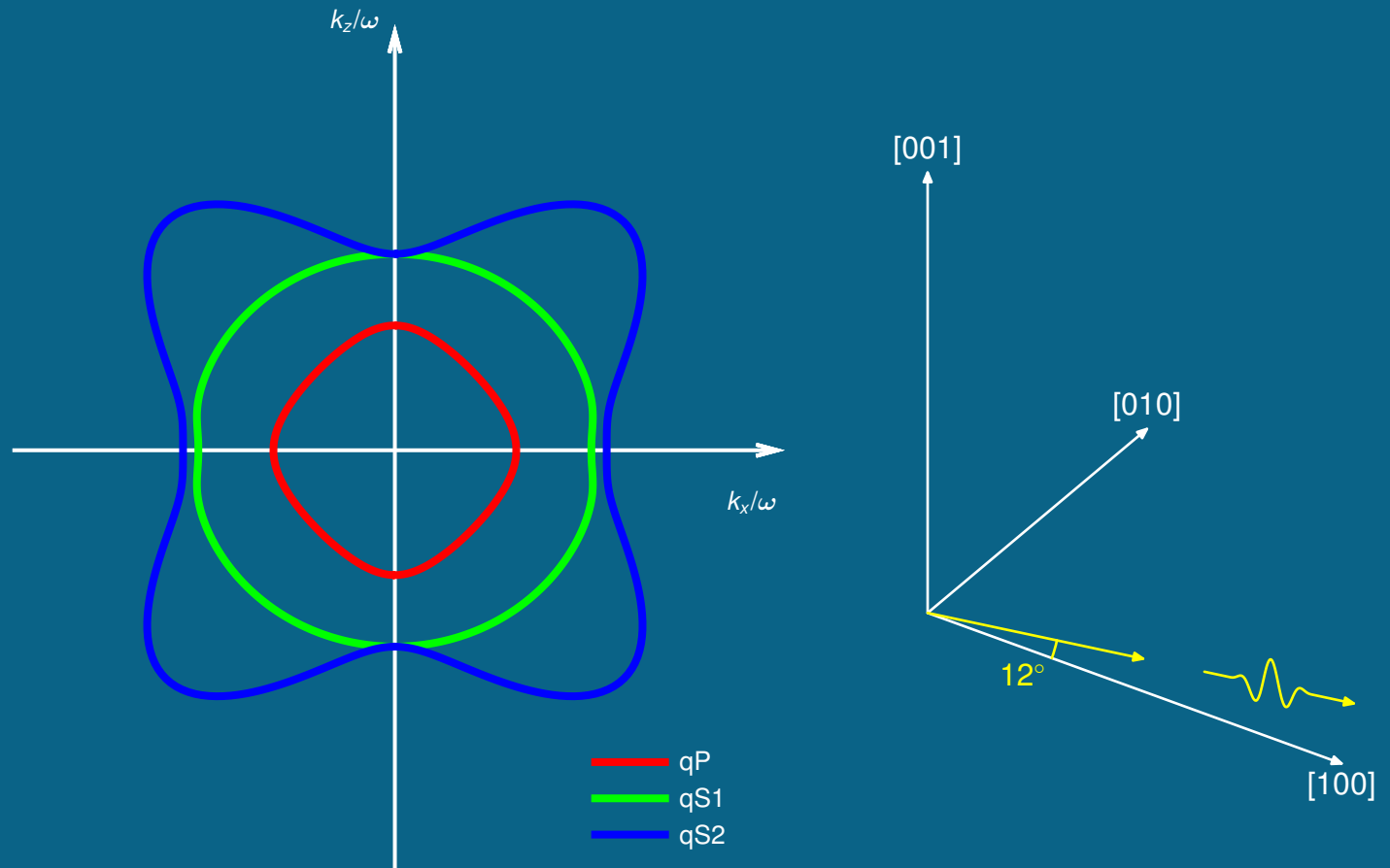
Pomalostní křivky



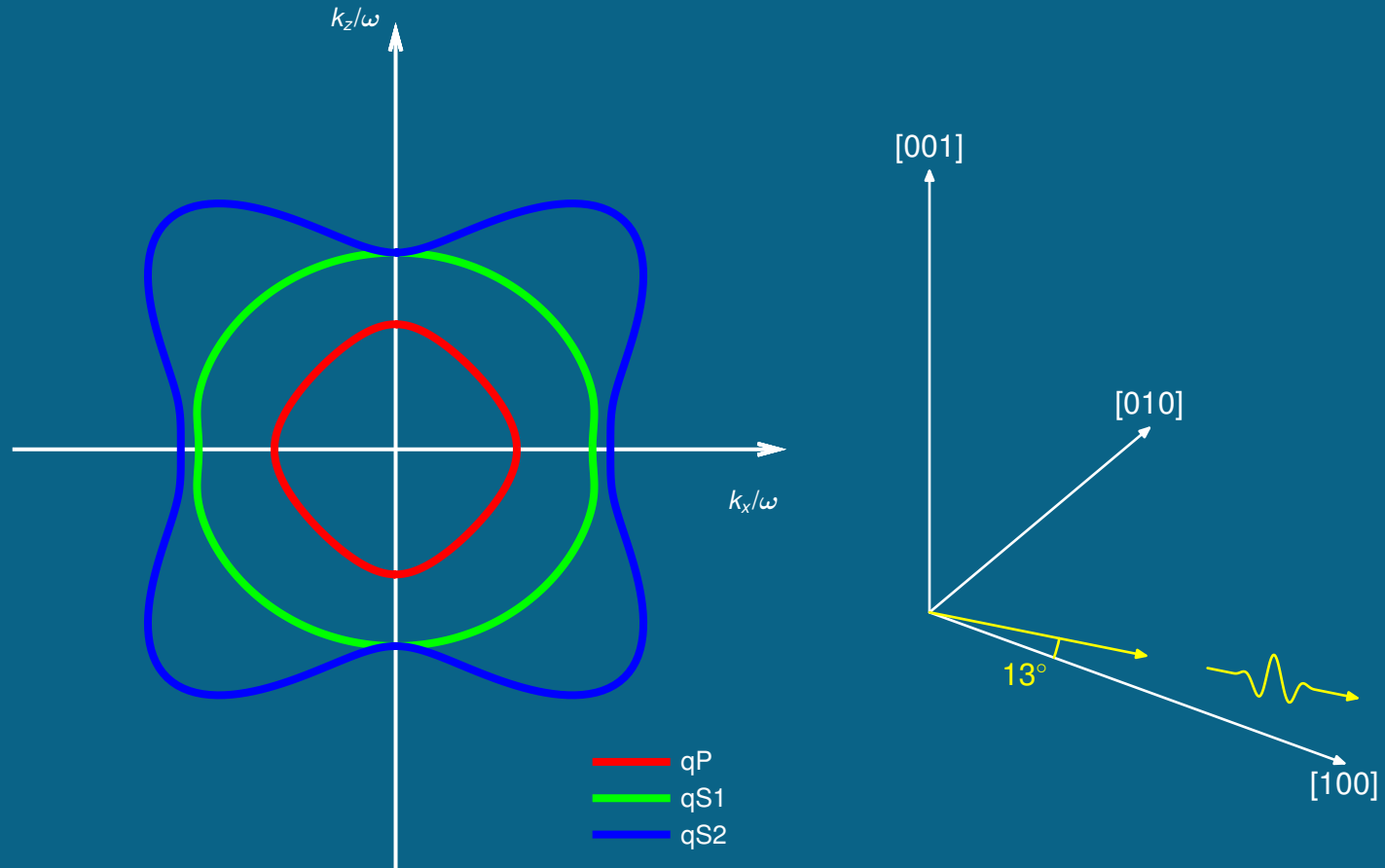
Pomalostní křivky



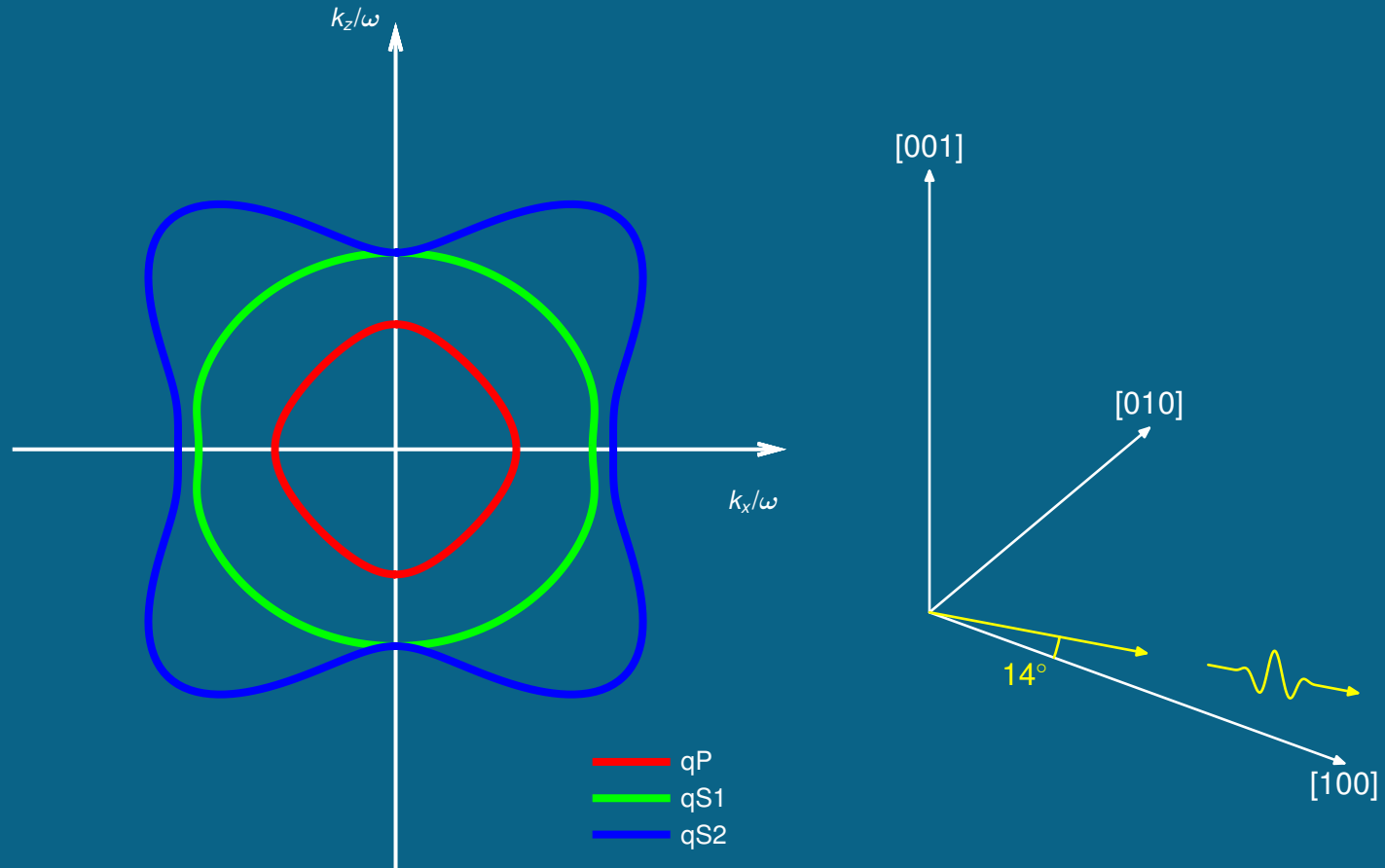
Pomalostní křivky



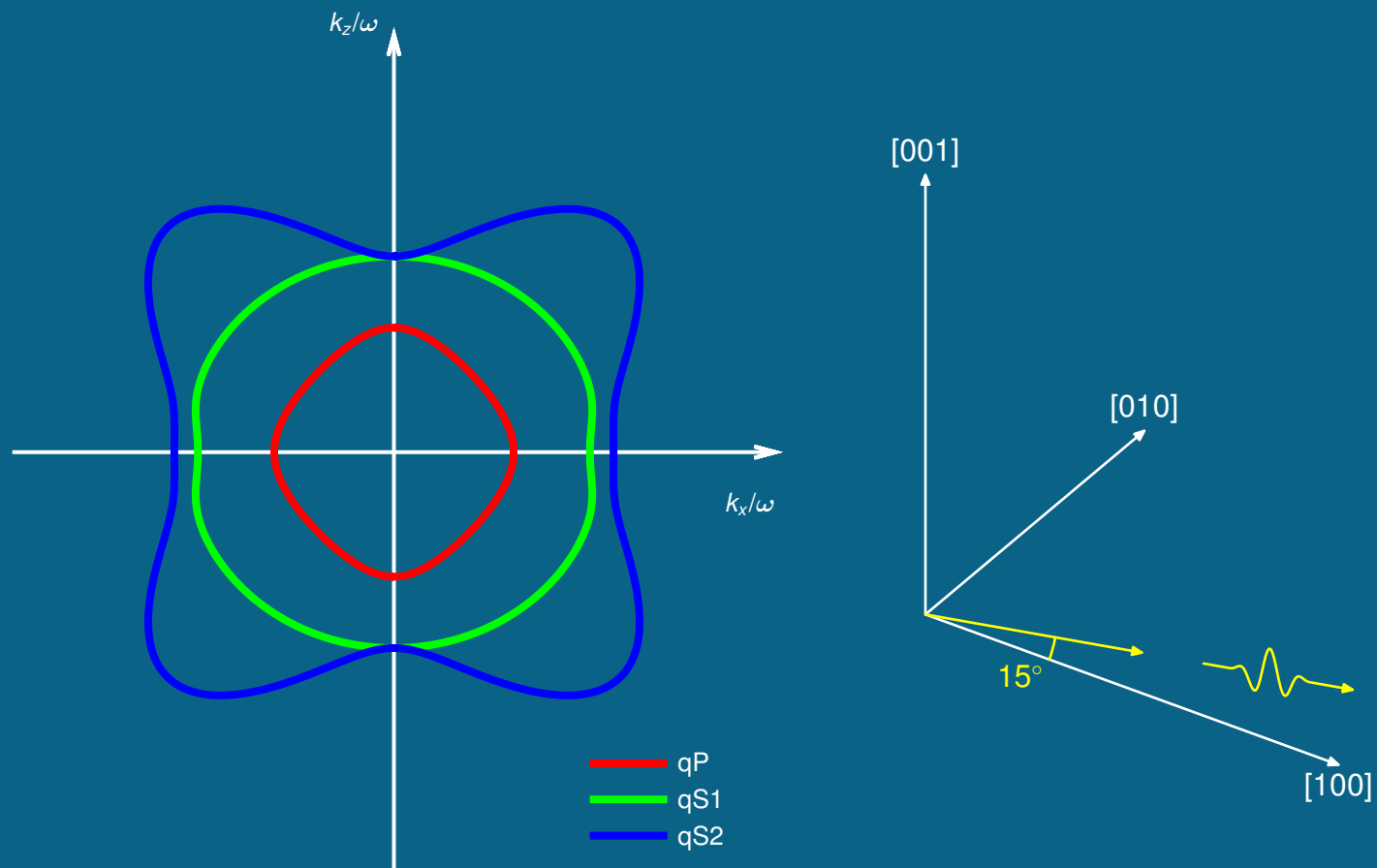
Pomalostní křivky



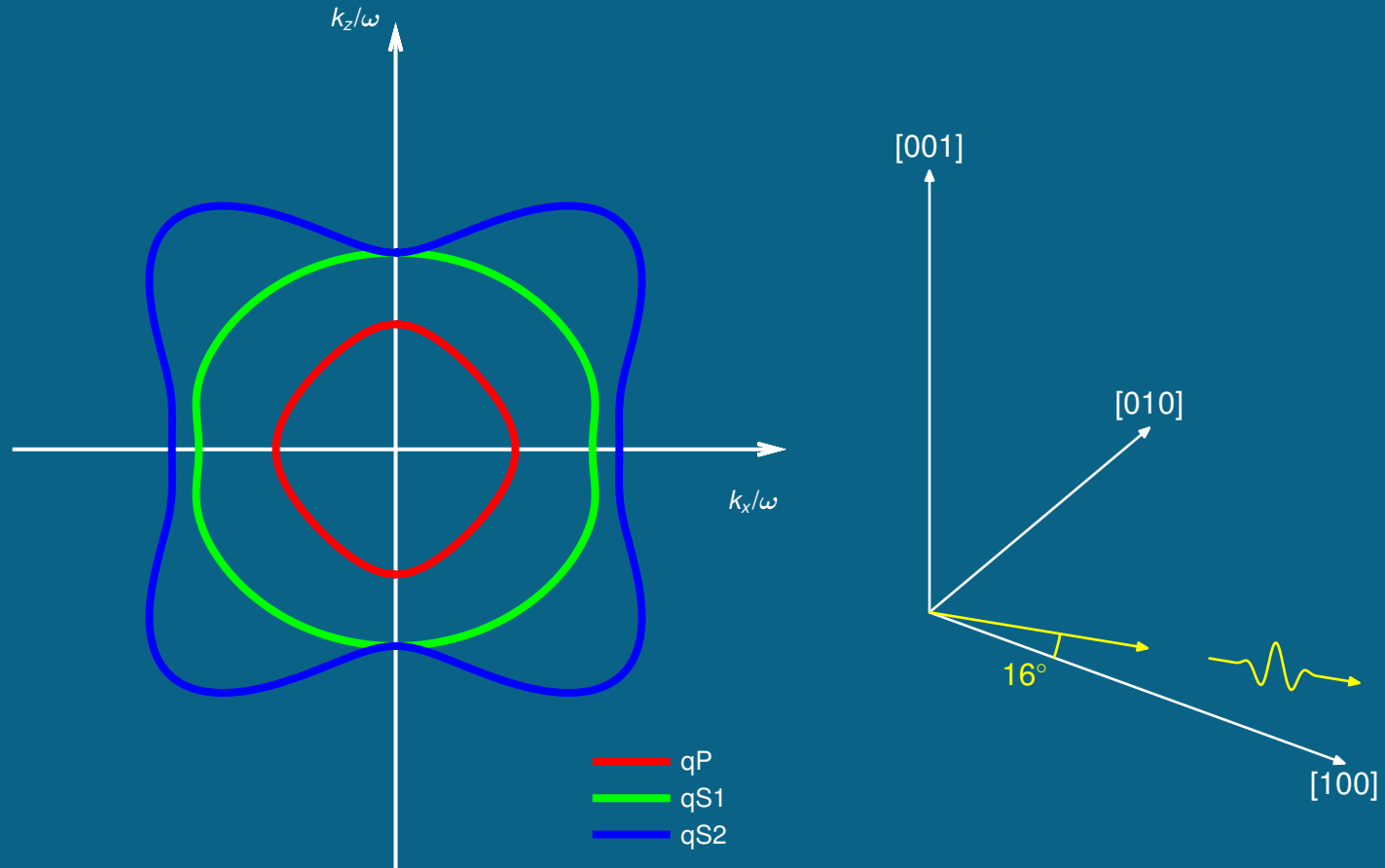
Pomalostní křivky



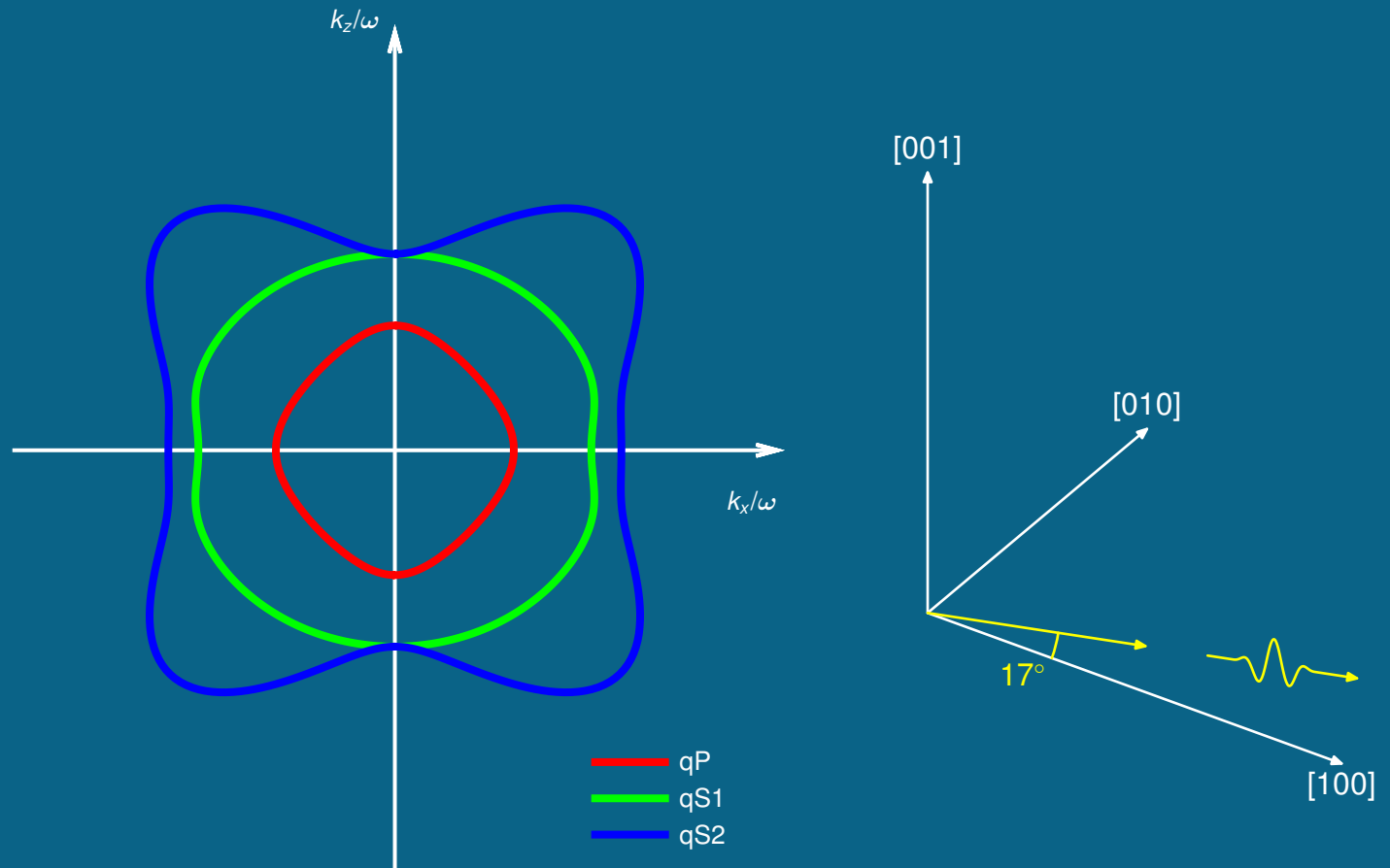
Pomalostní křivky



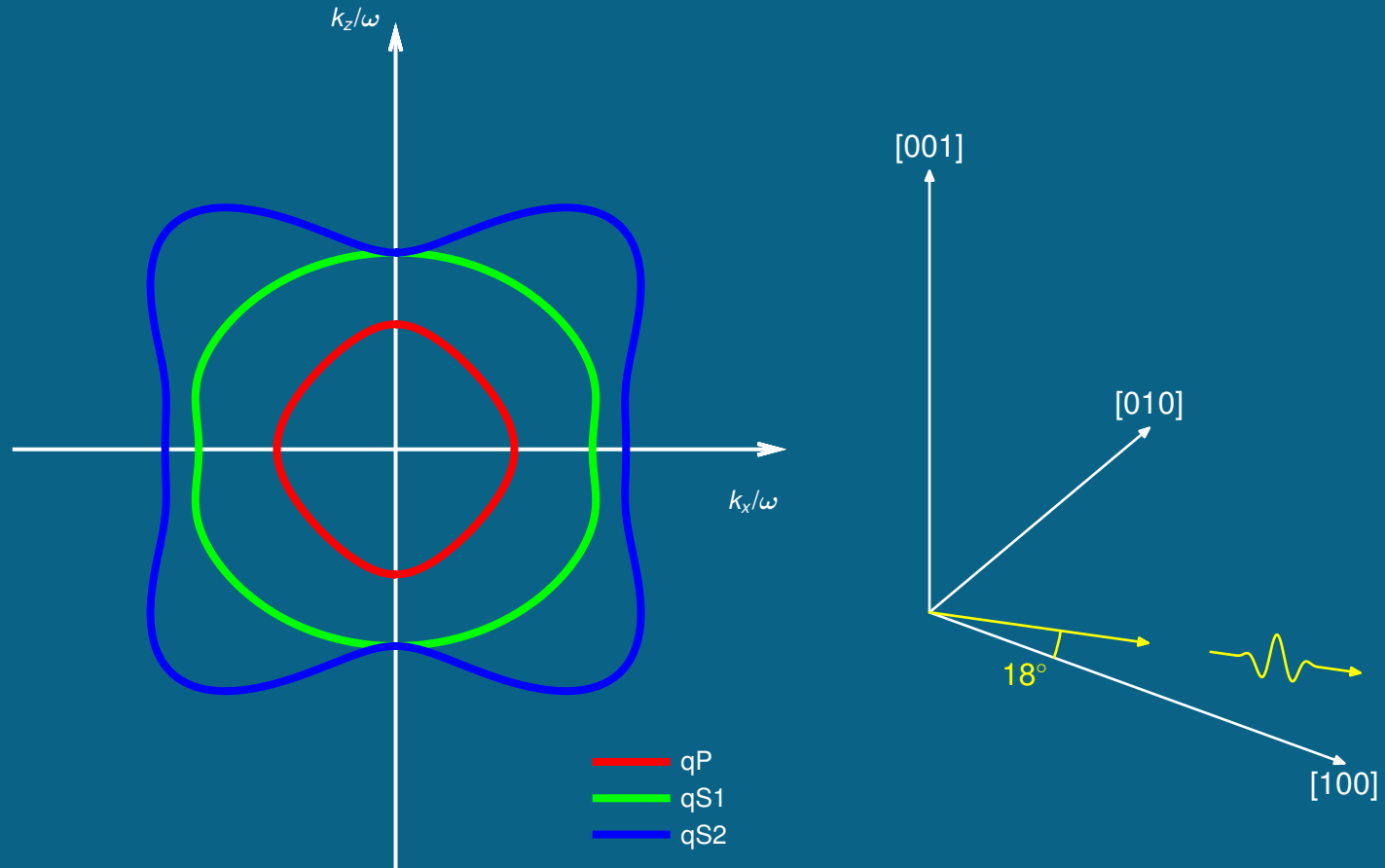
Pomalostní křivky



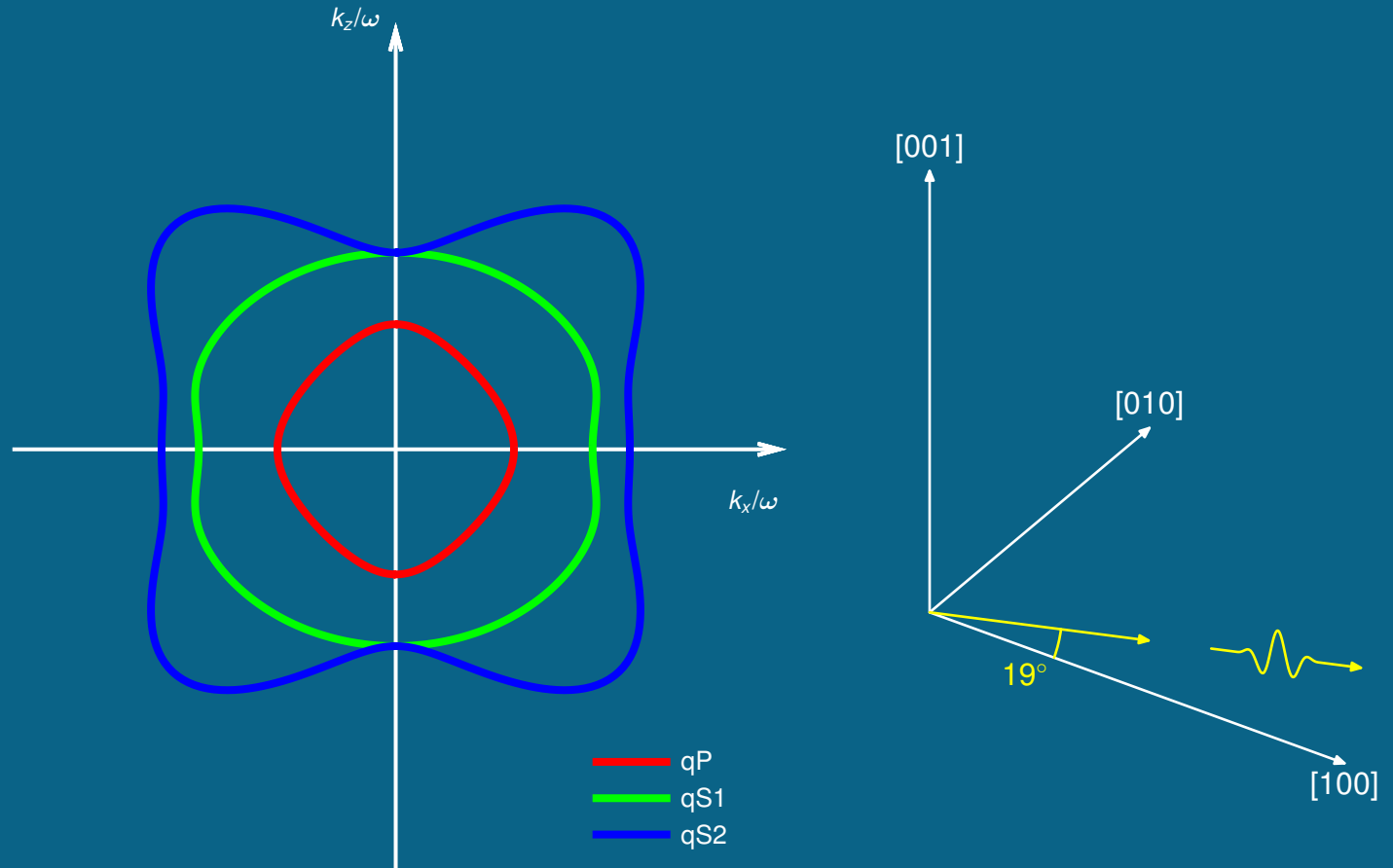
Pomalostní křivky



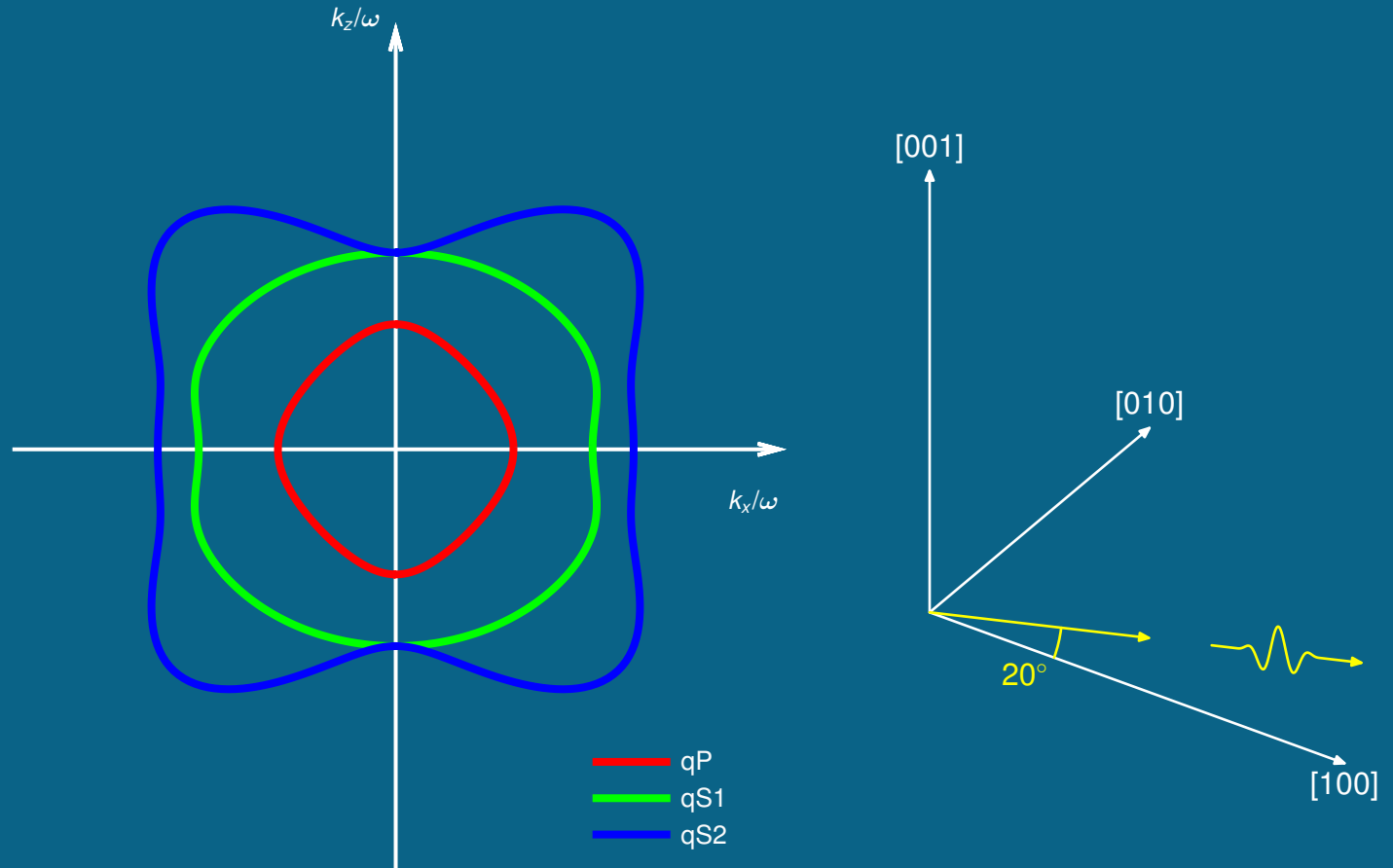
Pomalostní křivky



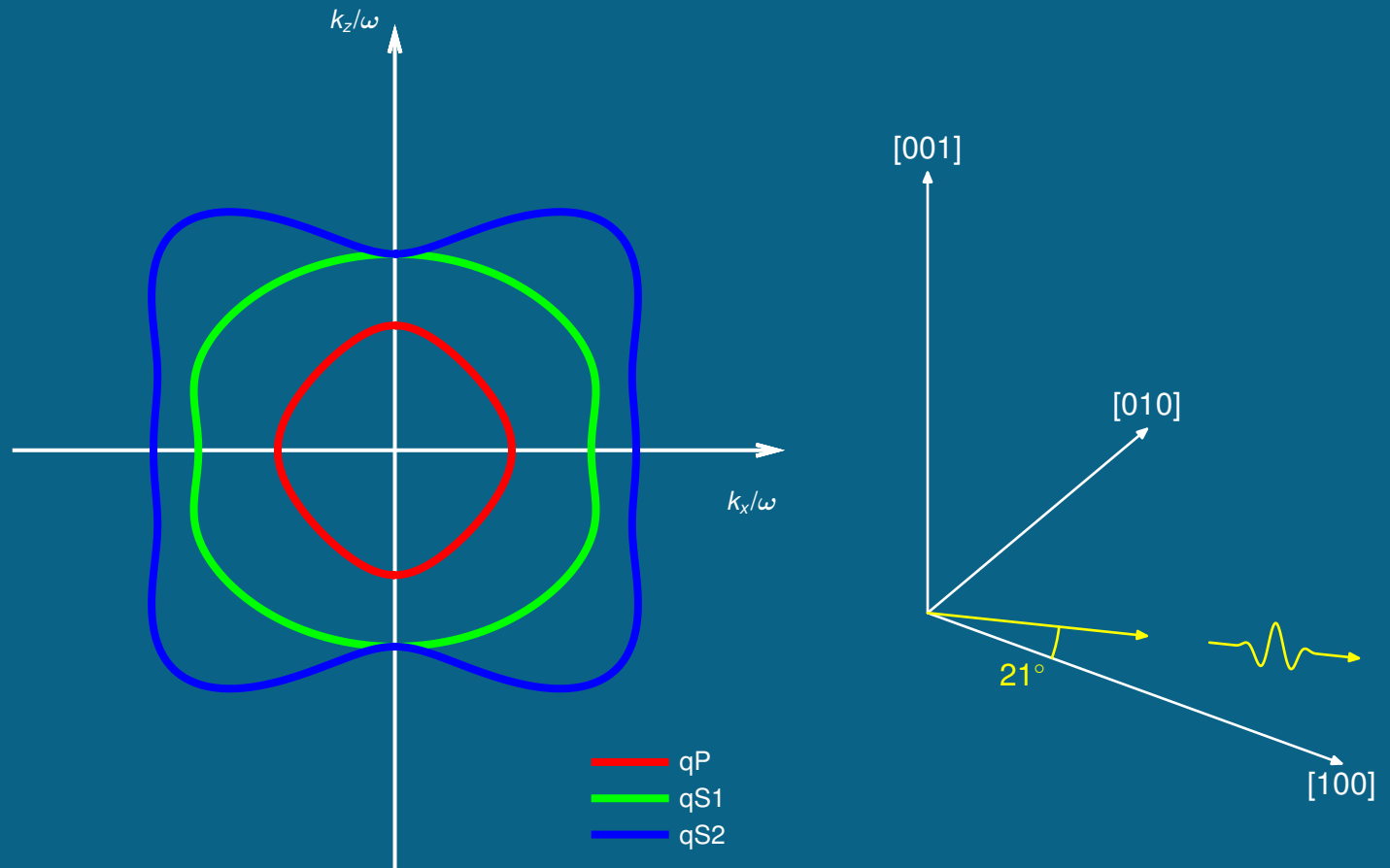
Pomalostní křivky



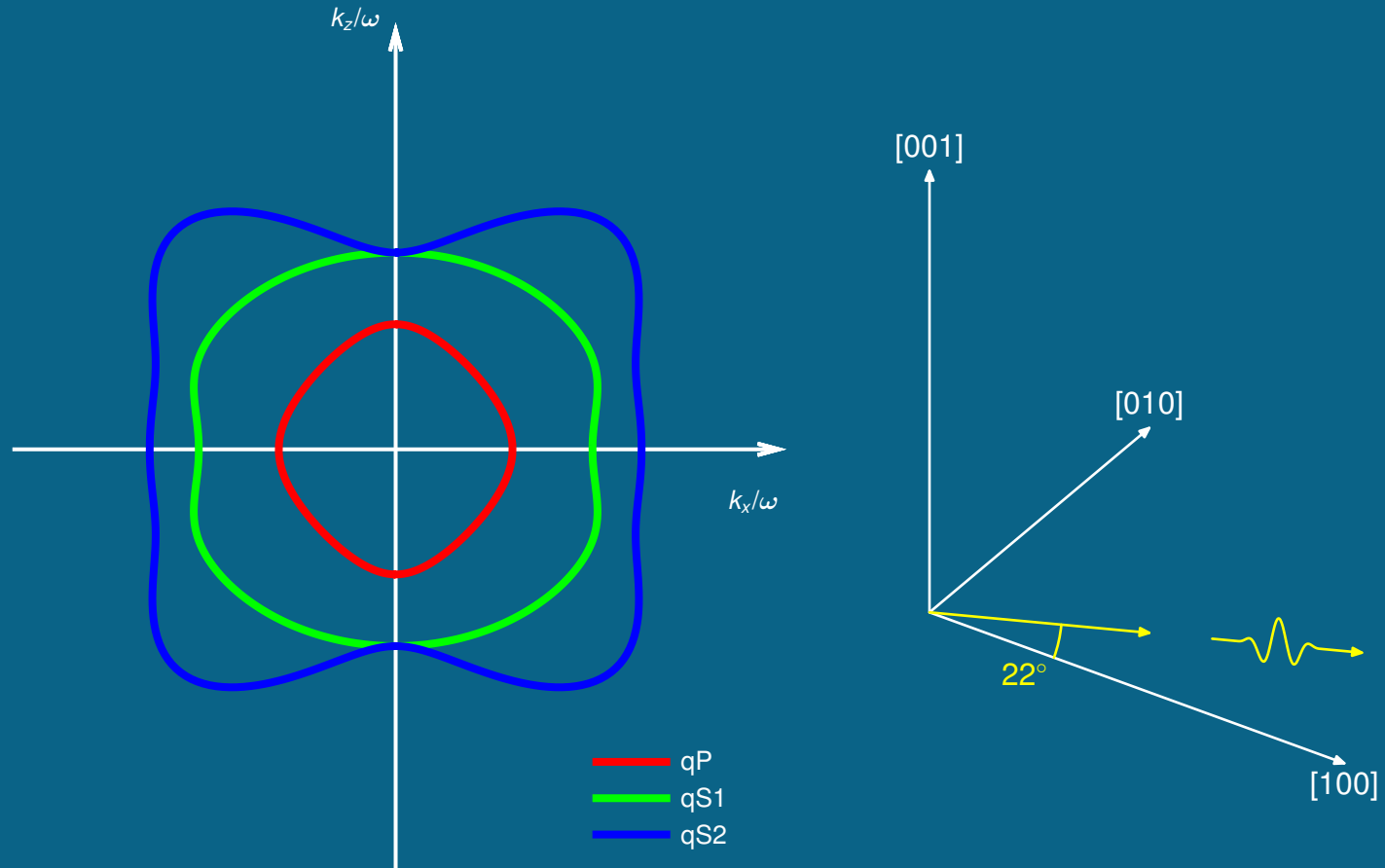
Pomalostní křivky



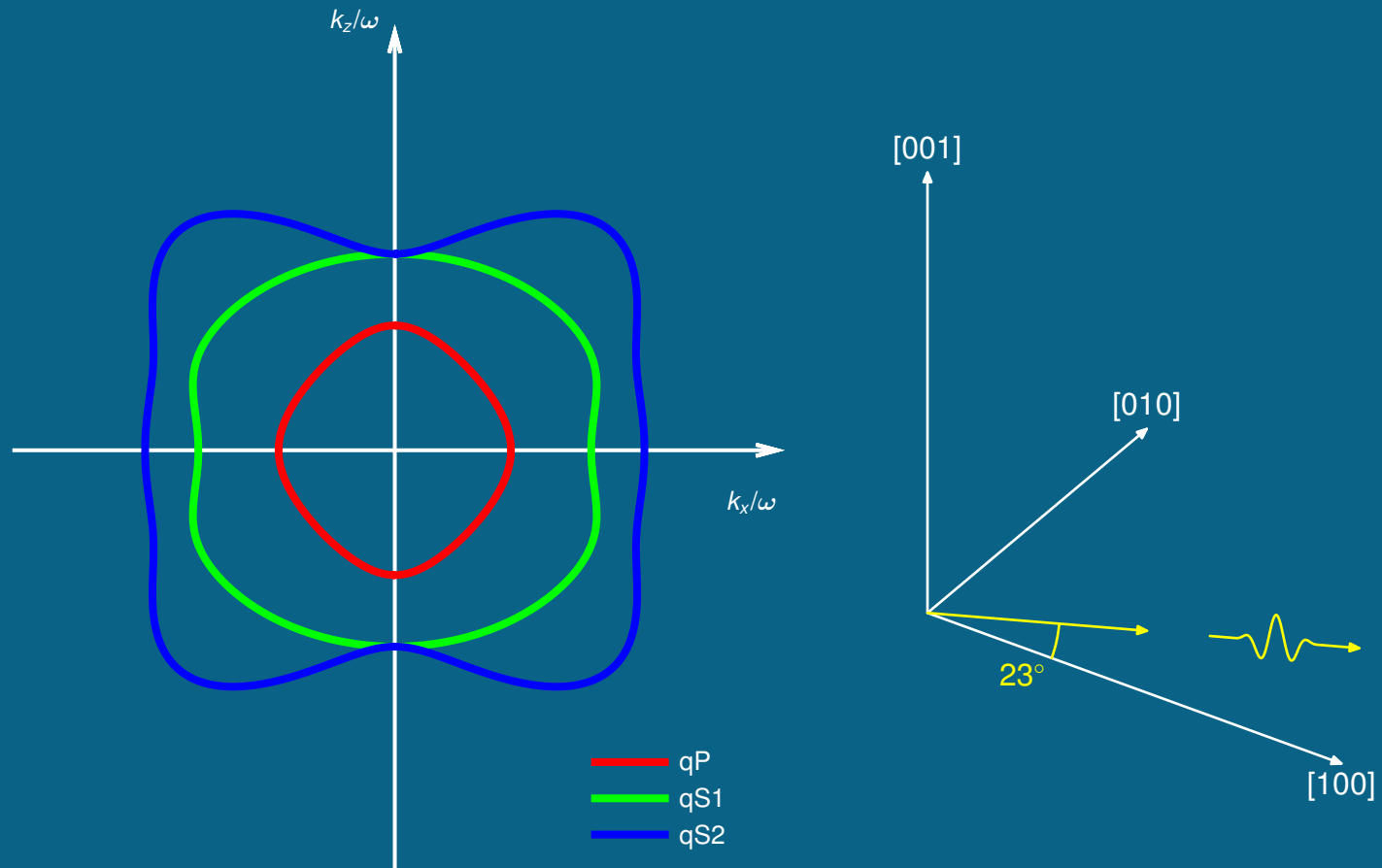
Pomalostní křivky



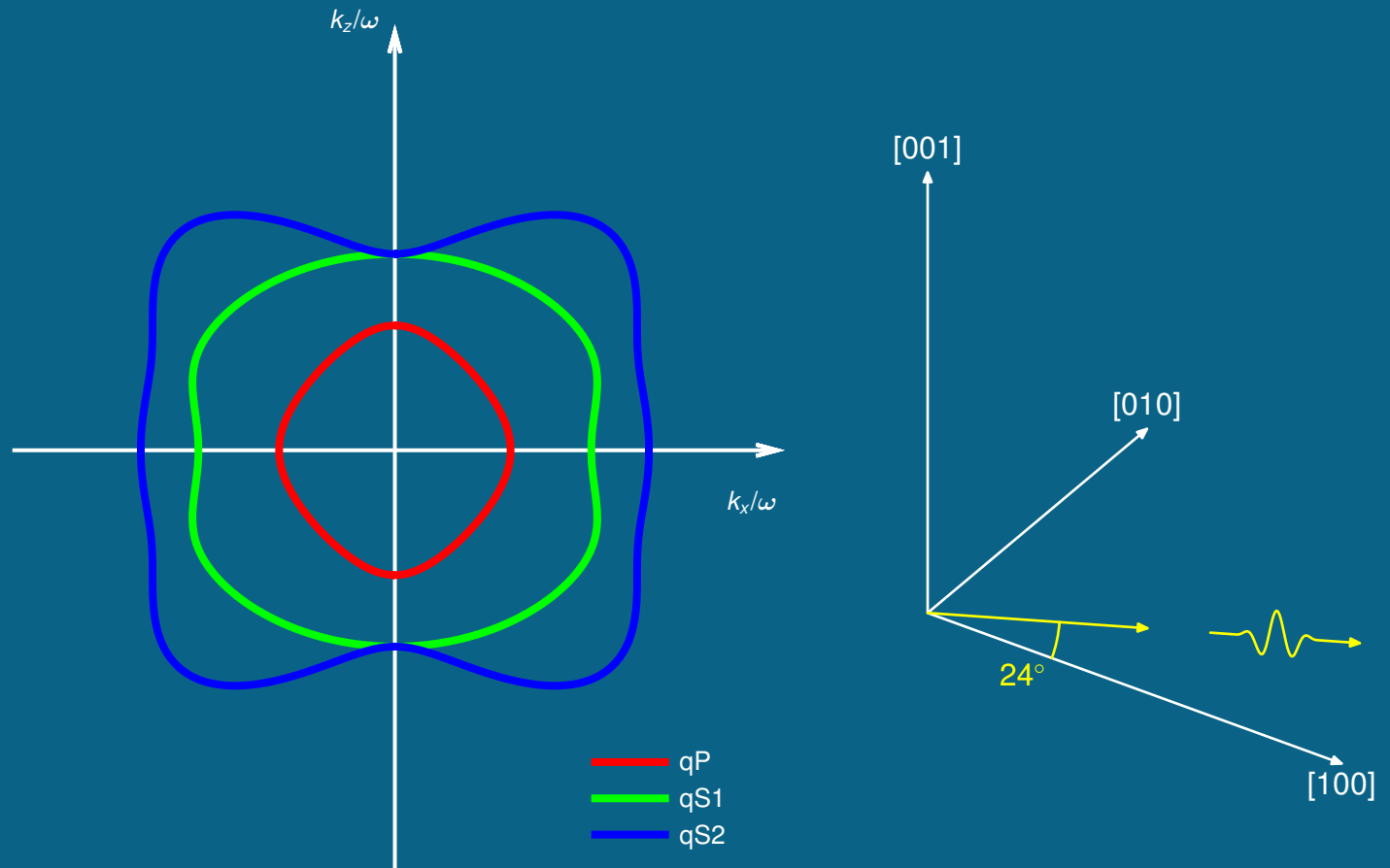
Pomalostní křivky



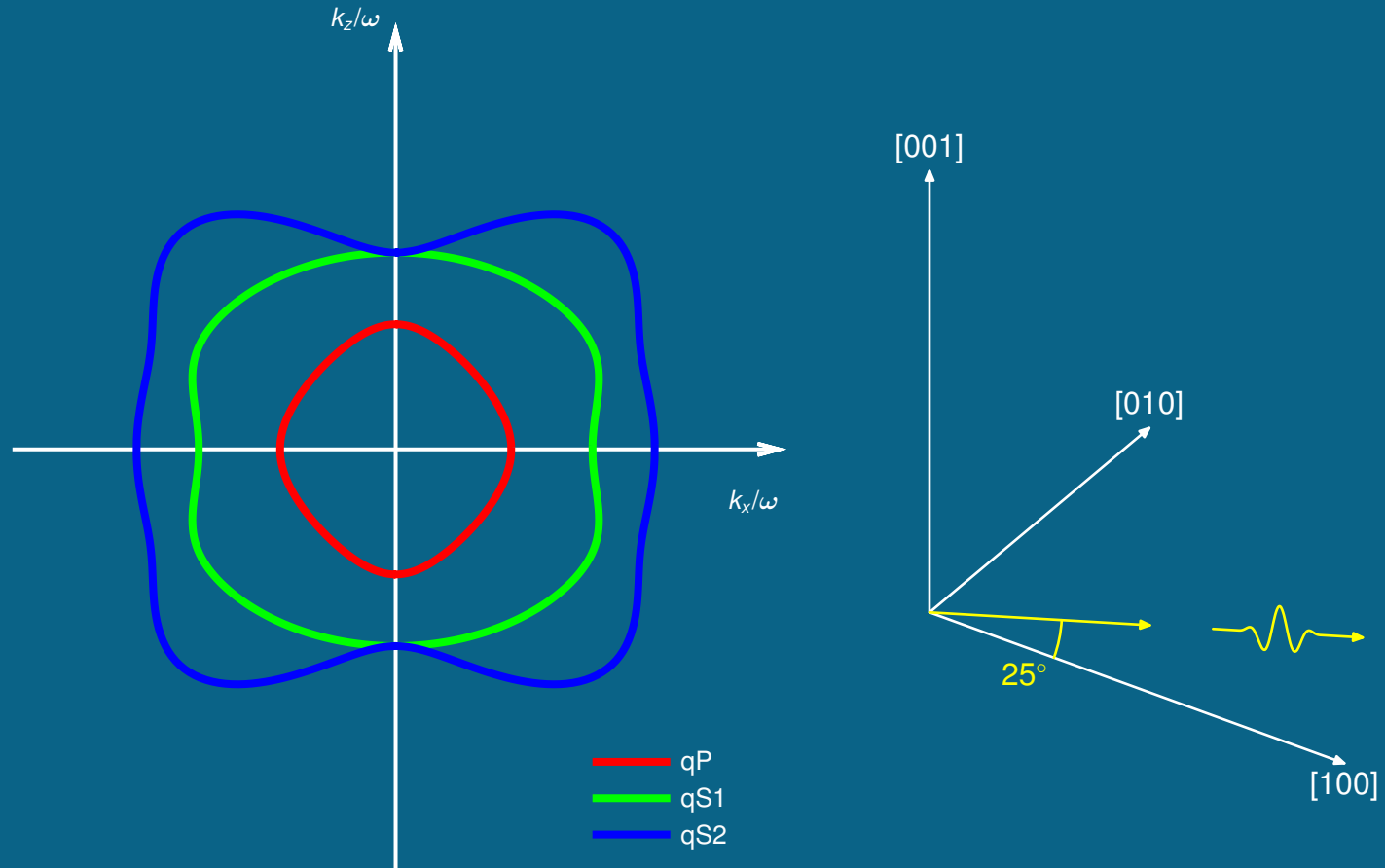
Pomalostní křivky



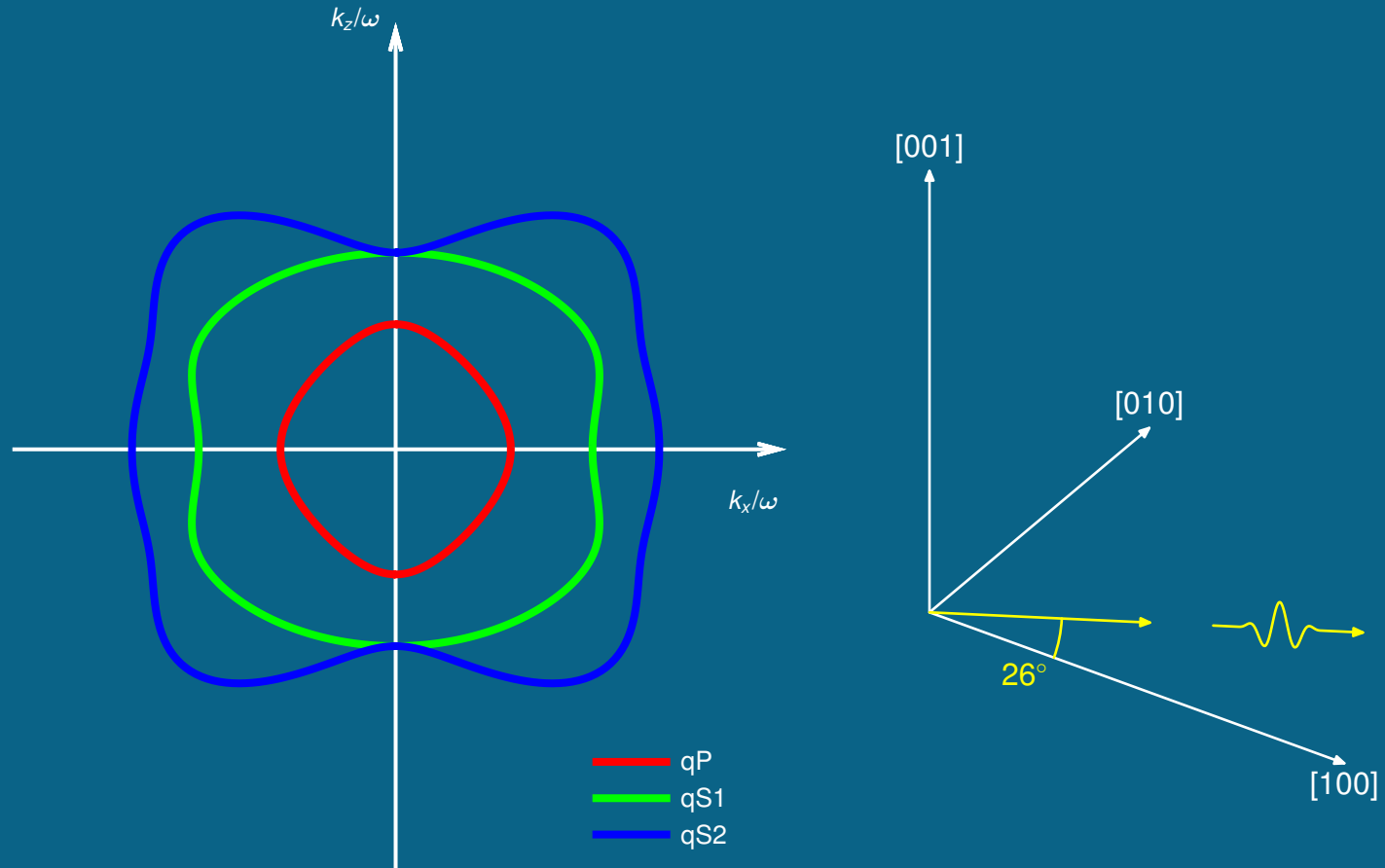
Pomalostní křivky



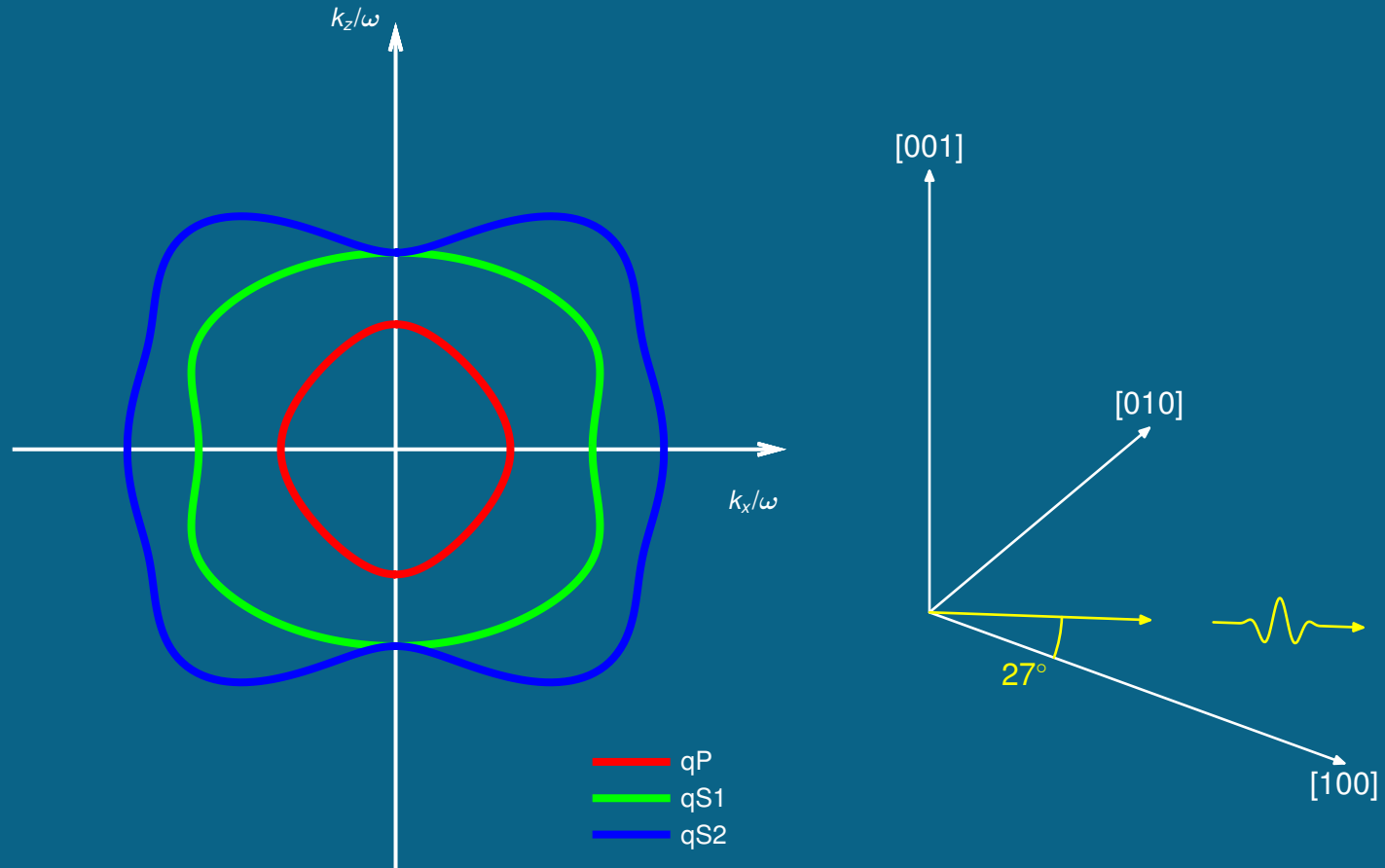
Pomalostní křivky



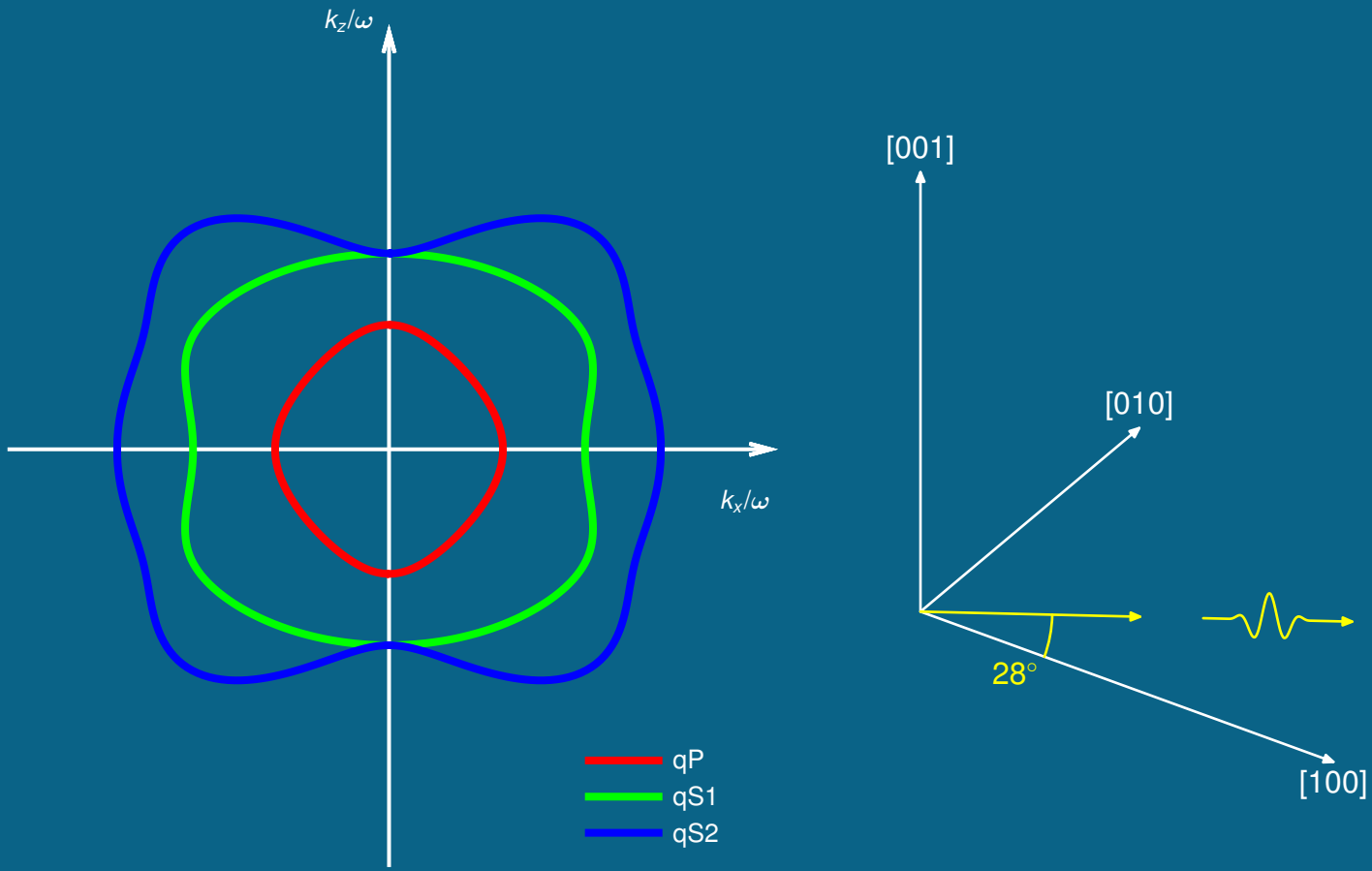
Pomalostní křivky



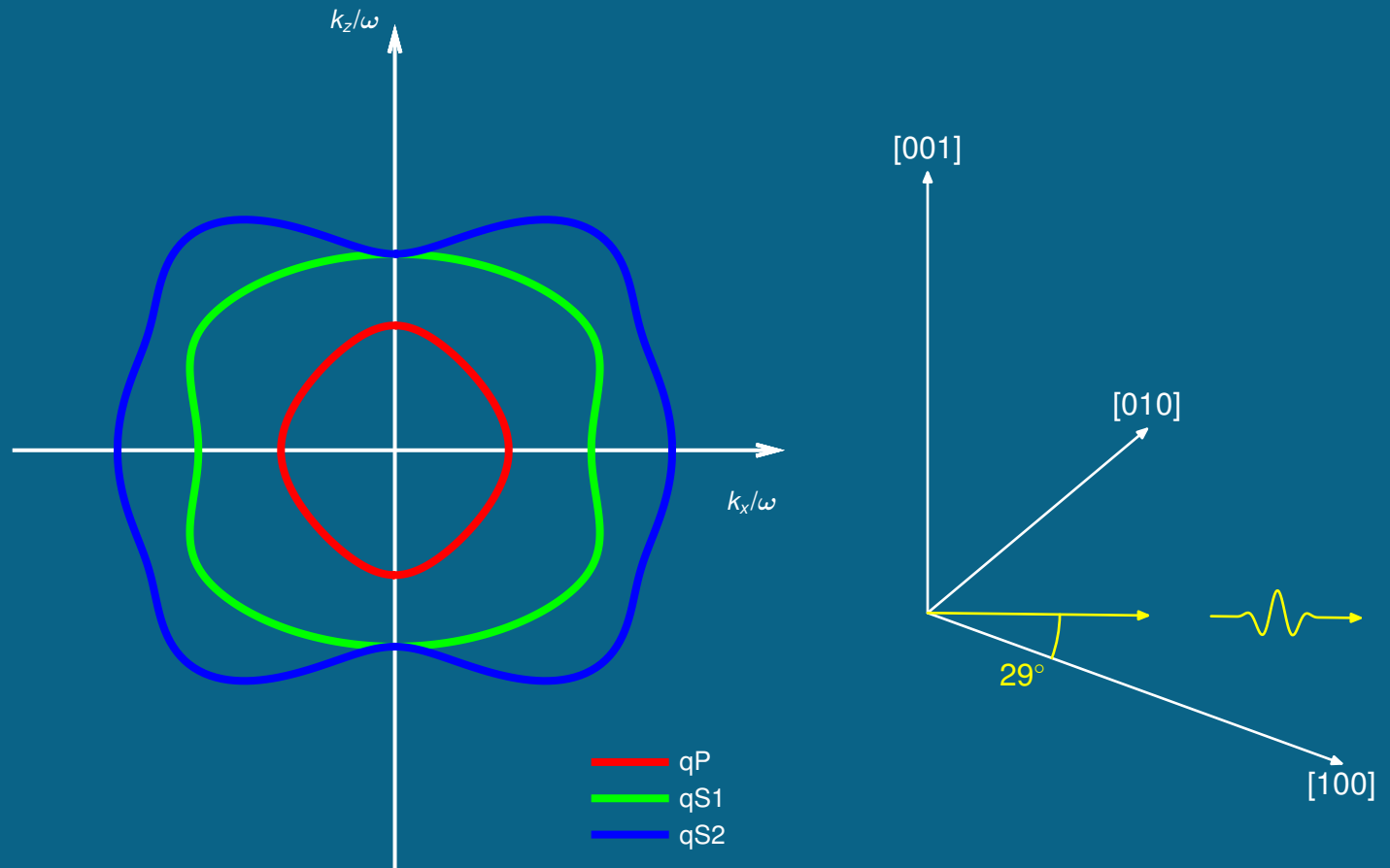
Pomalostní křivky



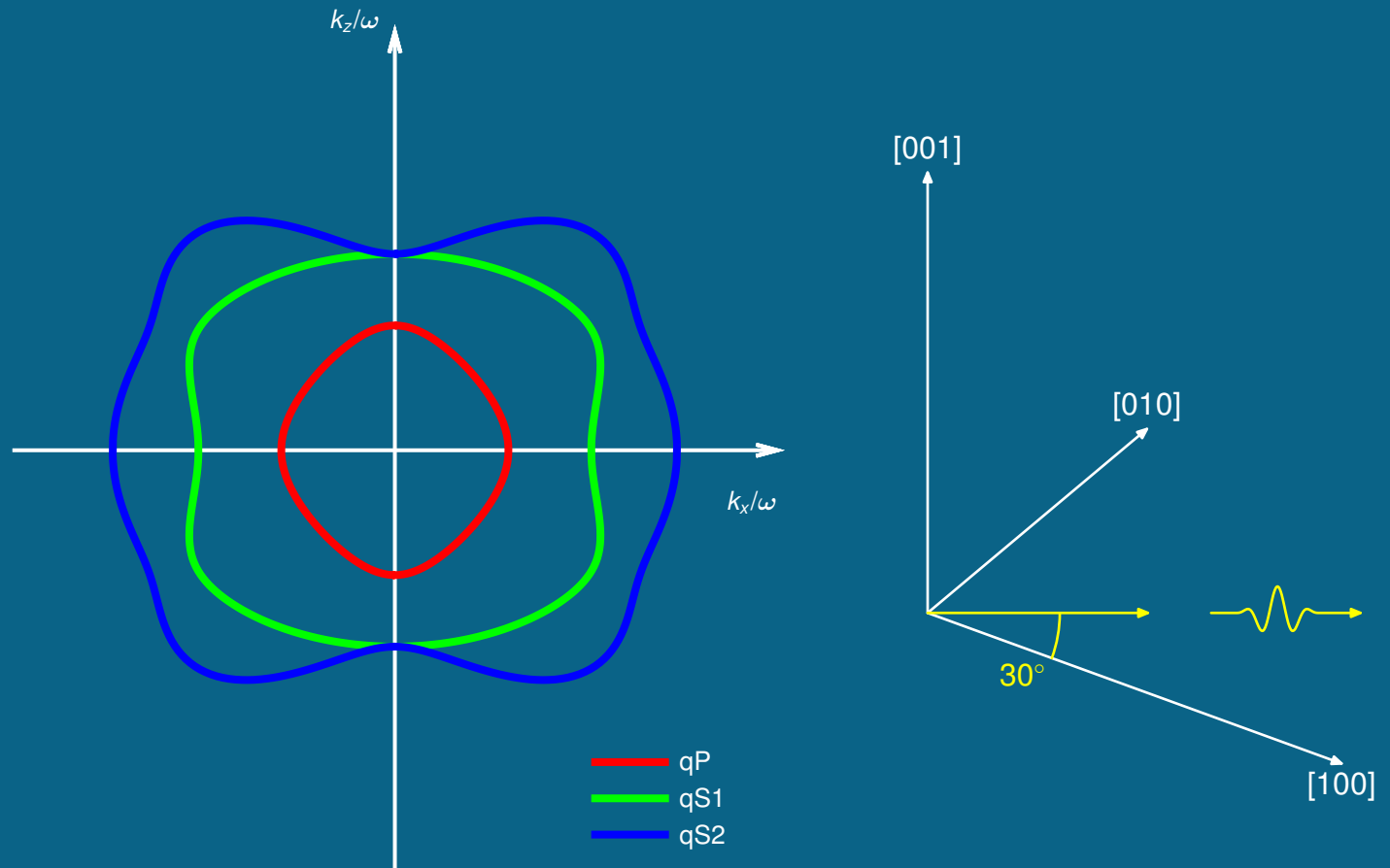
Pomalostní křivky



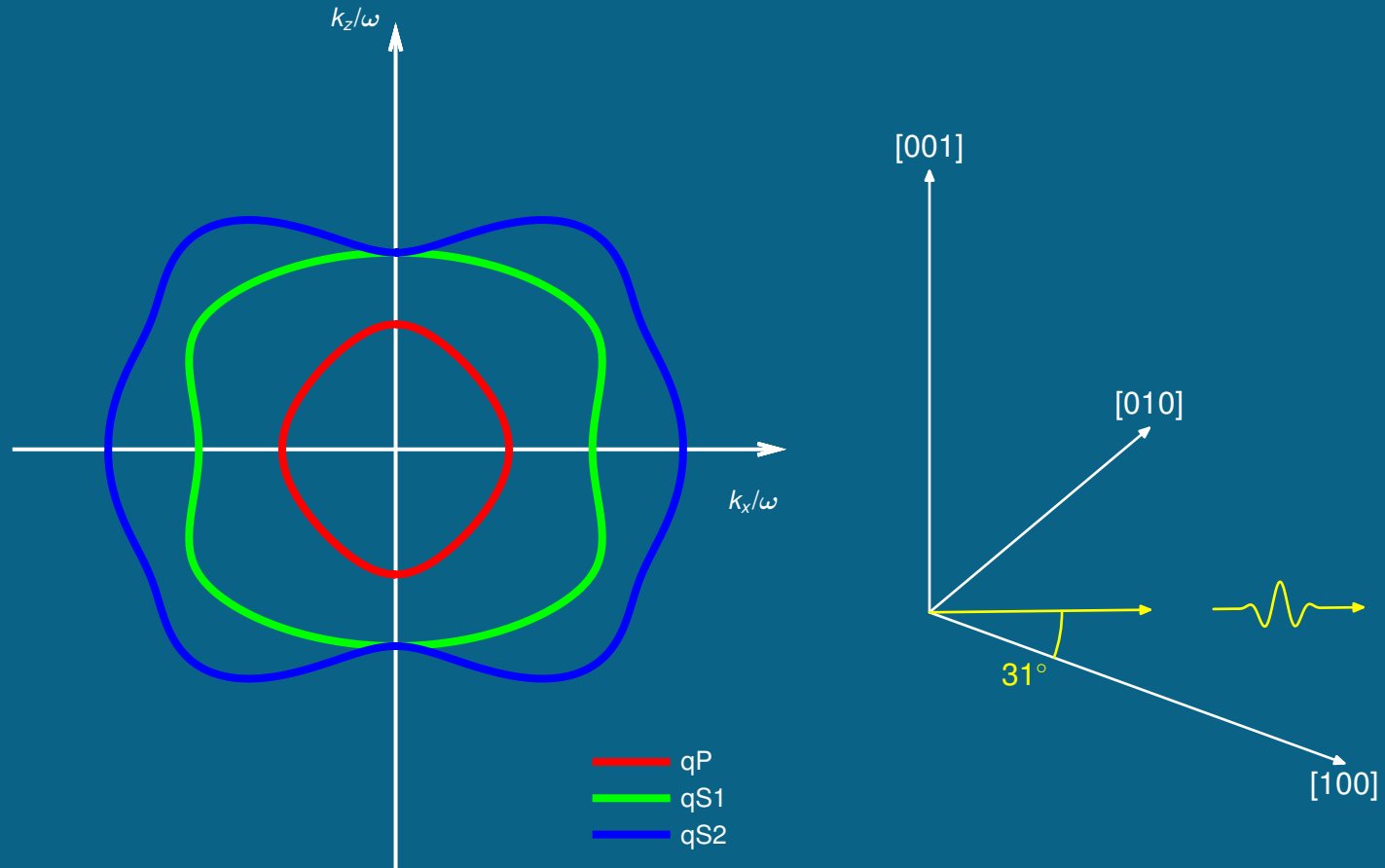
Pomalostní křivky



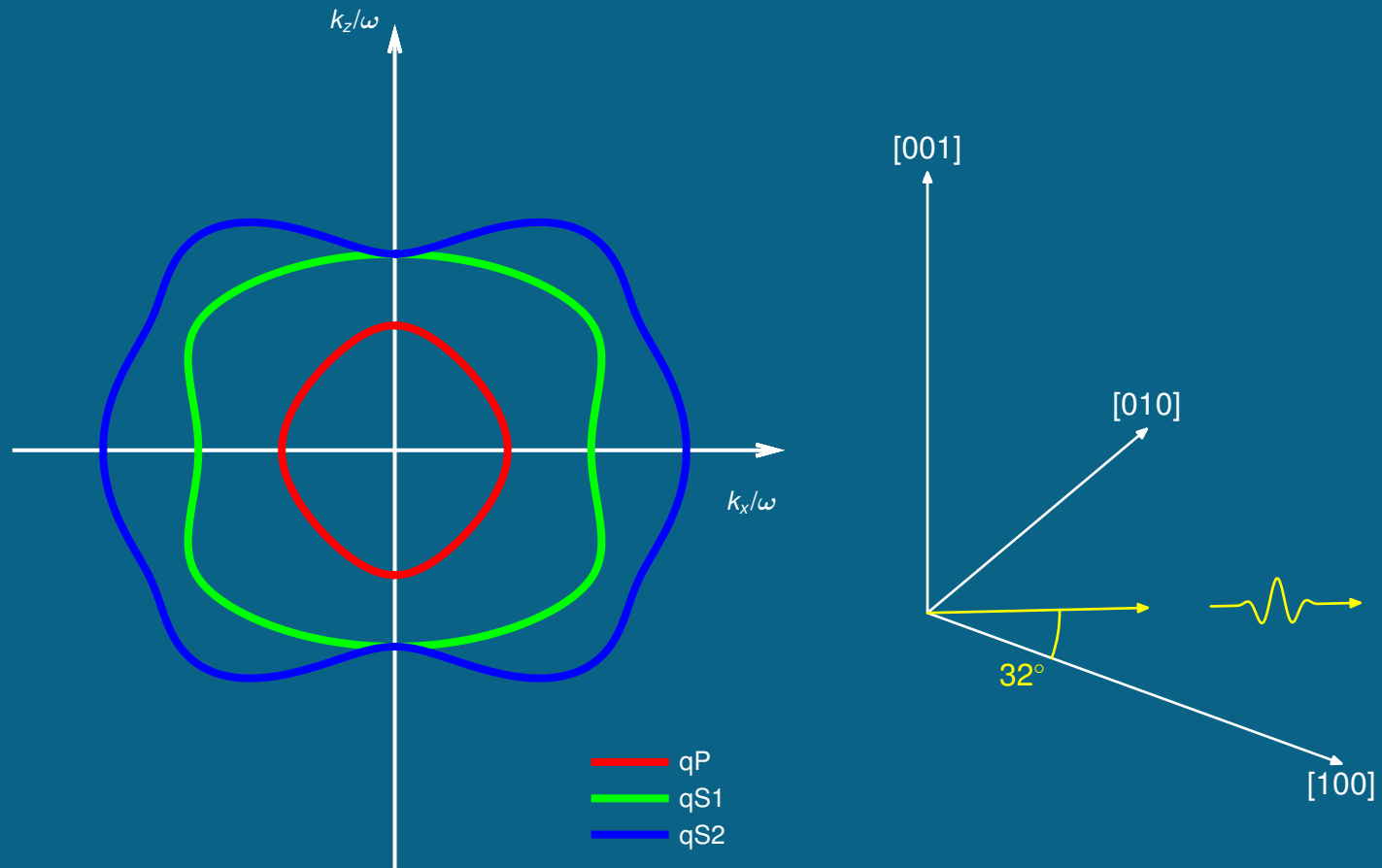
Pomalostní křivky



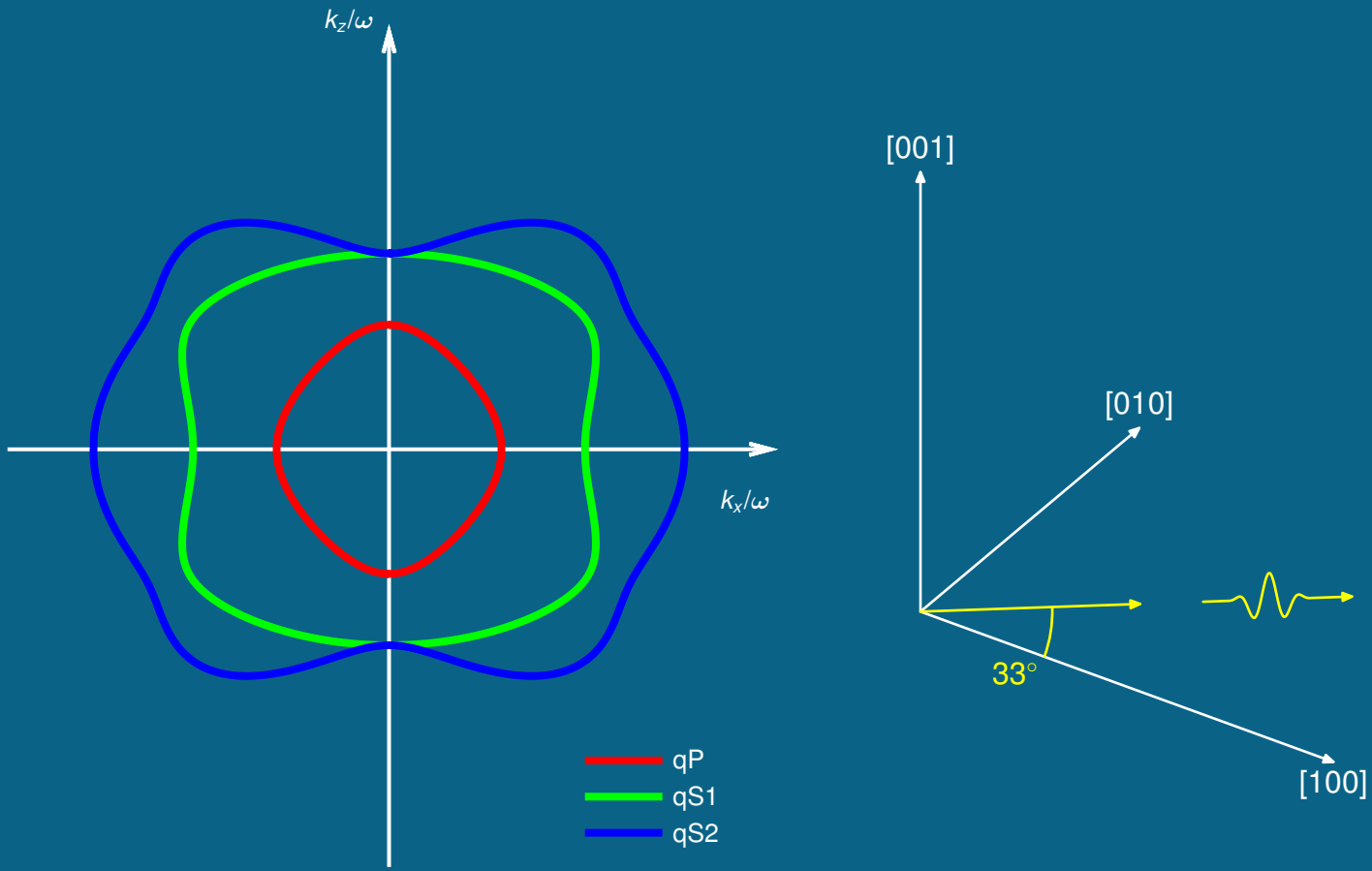
Pomalostní křivky



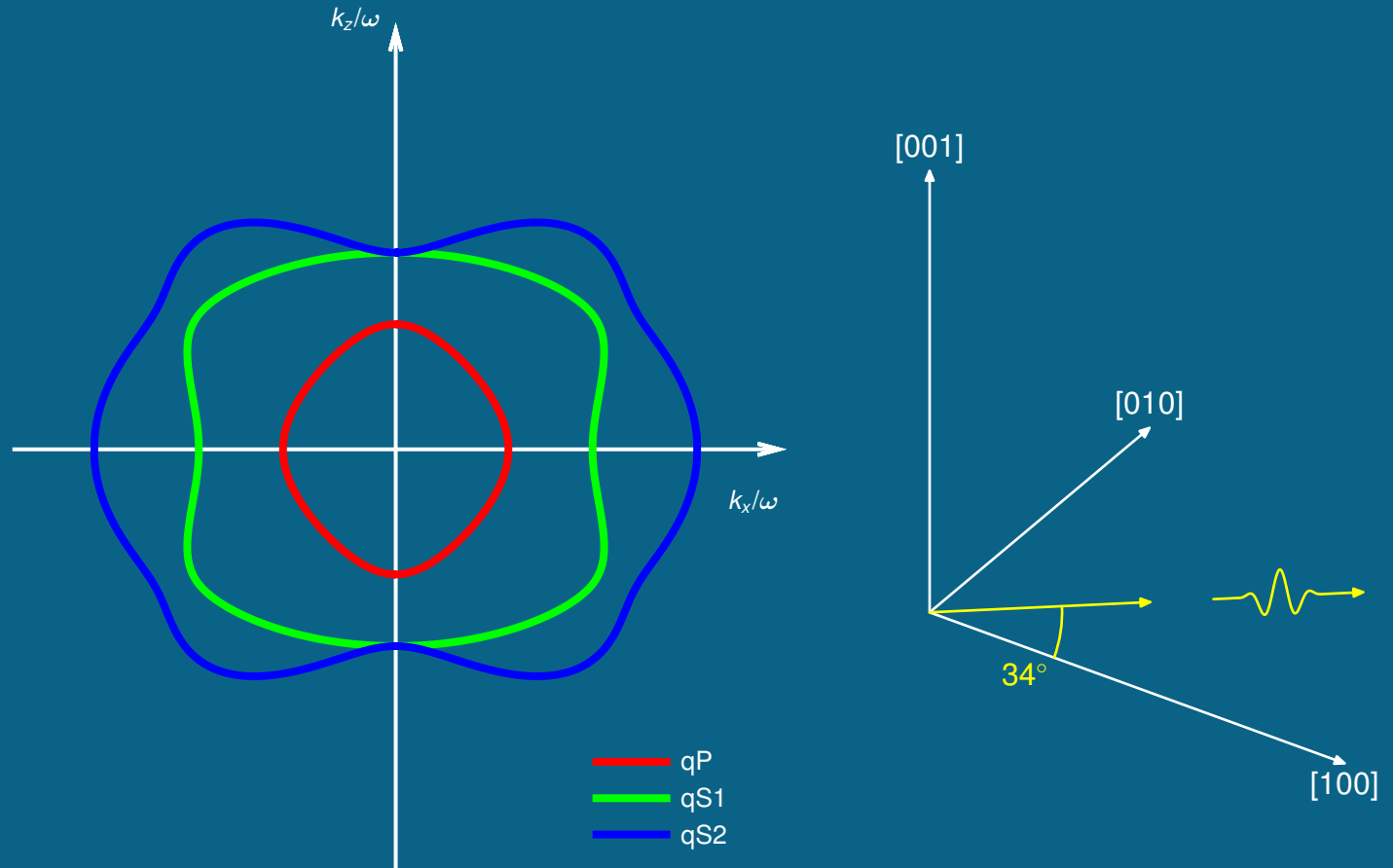
Pomalostní křivky



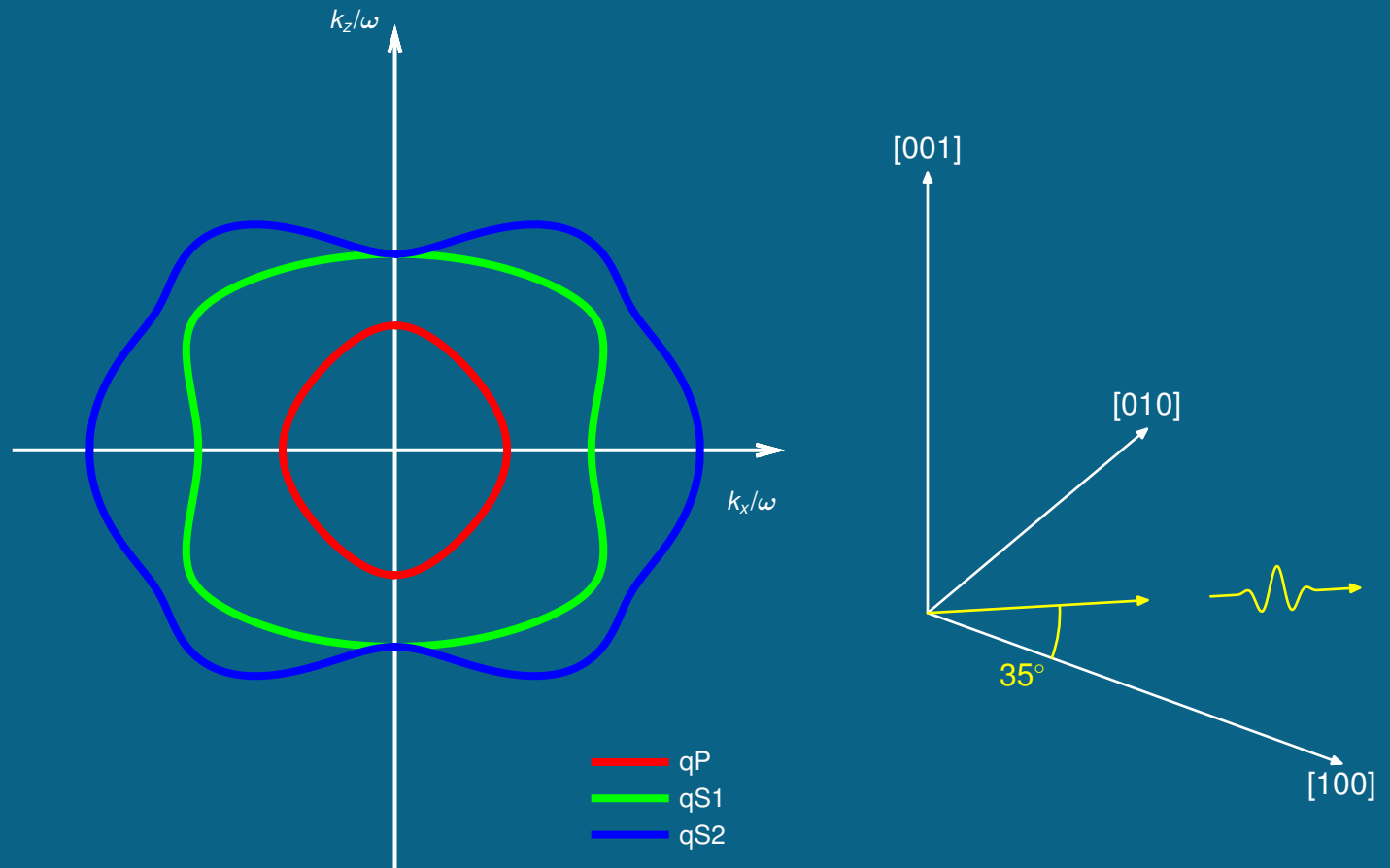
Pomalostní křivky



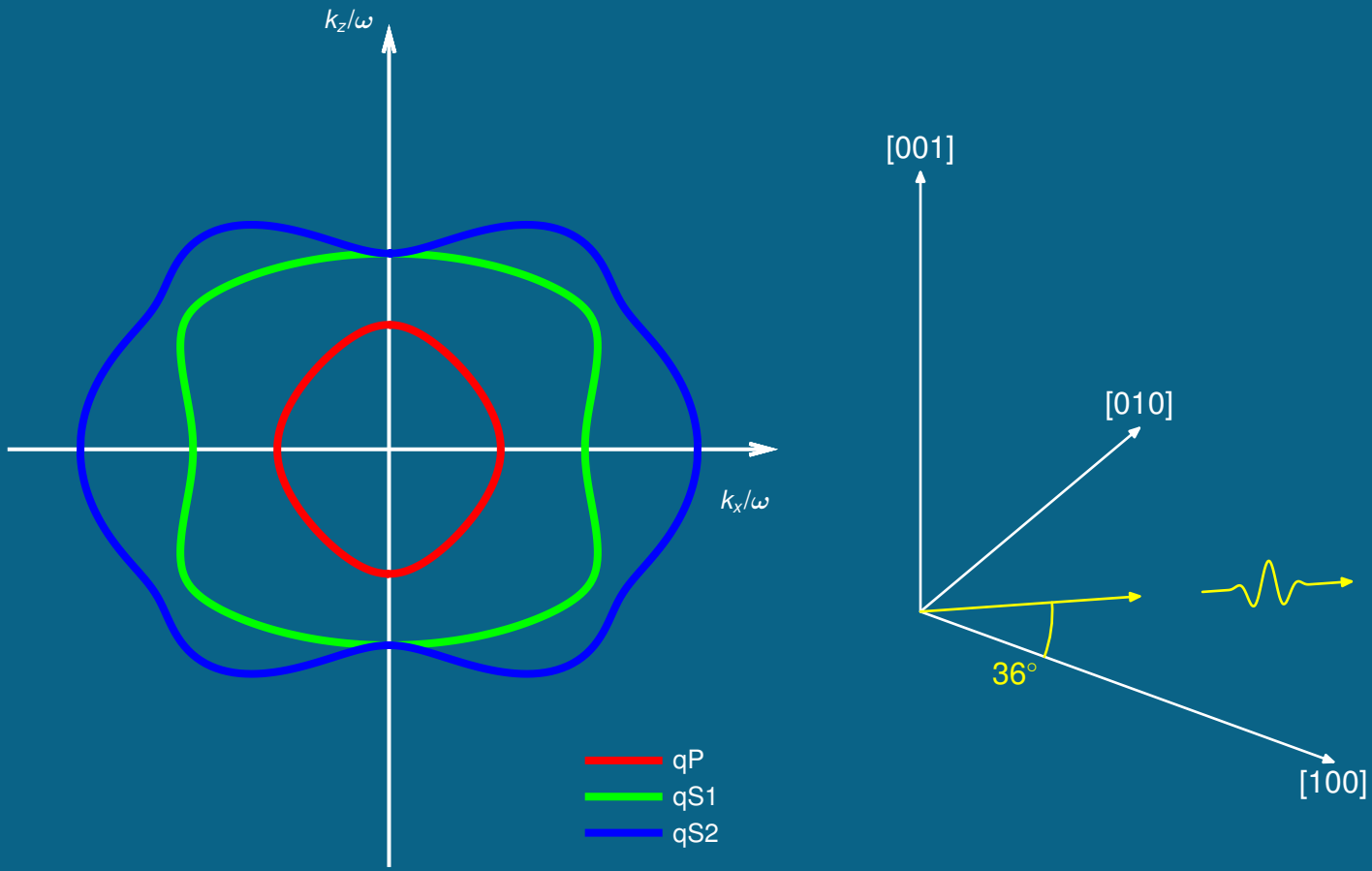
Pomalostní křivky



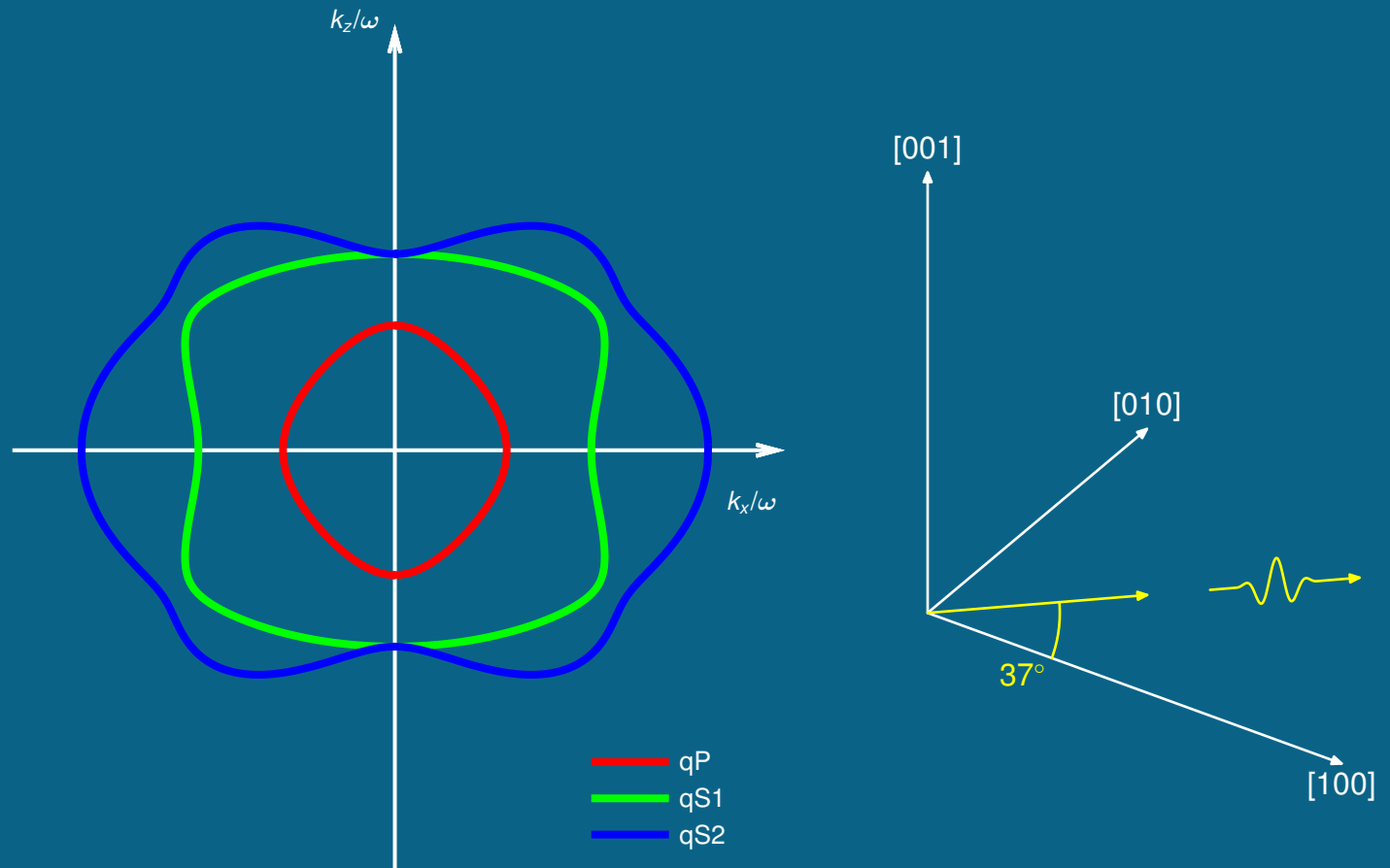
Pomalostní křivky



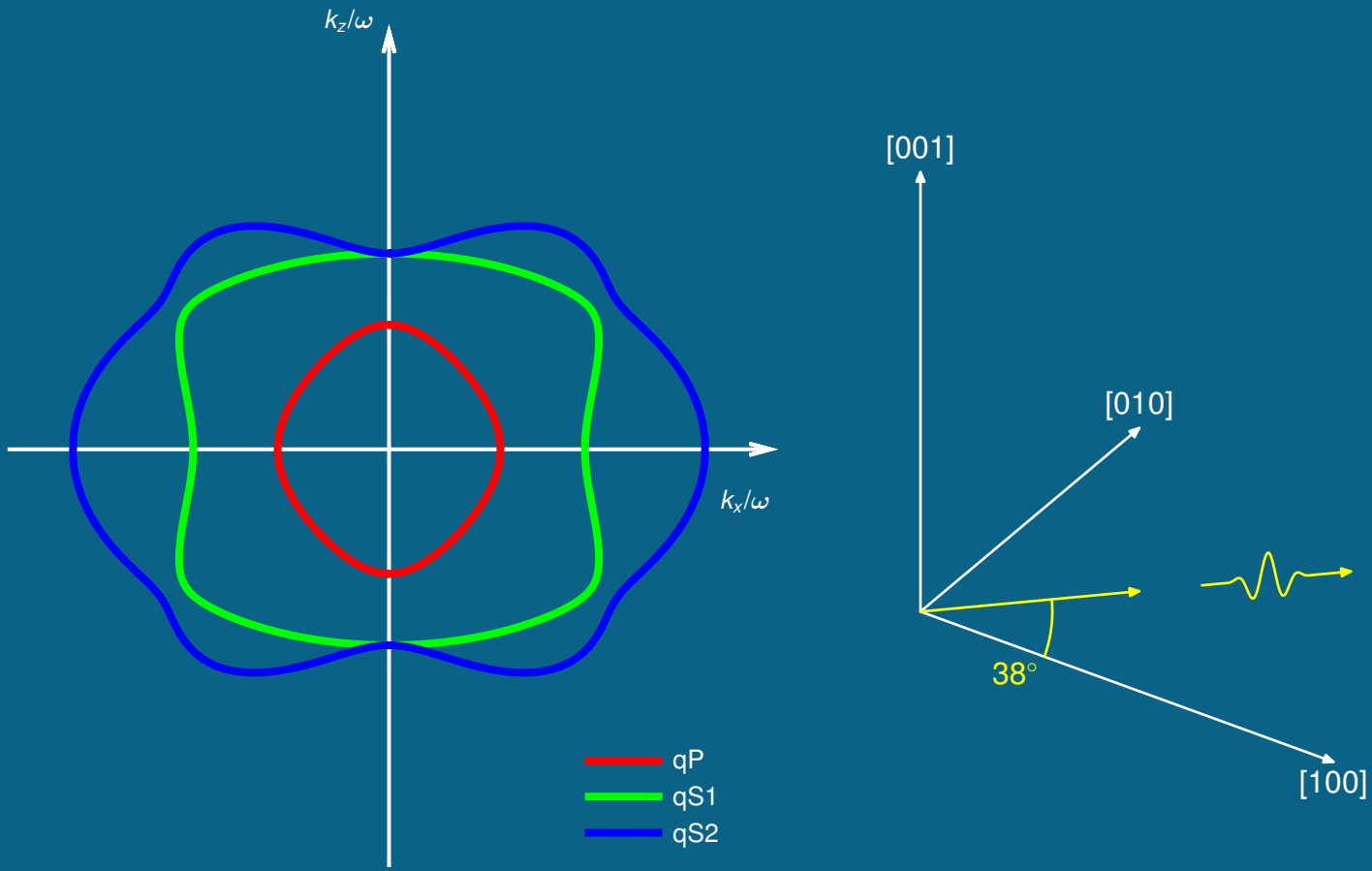
Pomalostní křivky



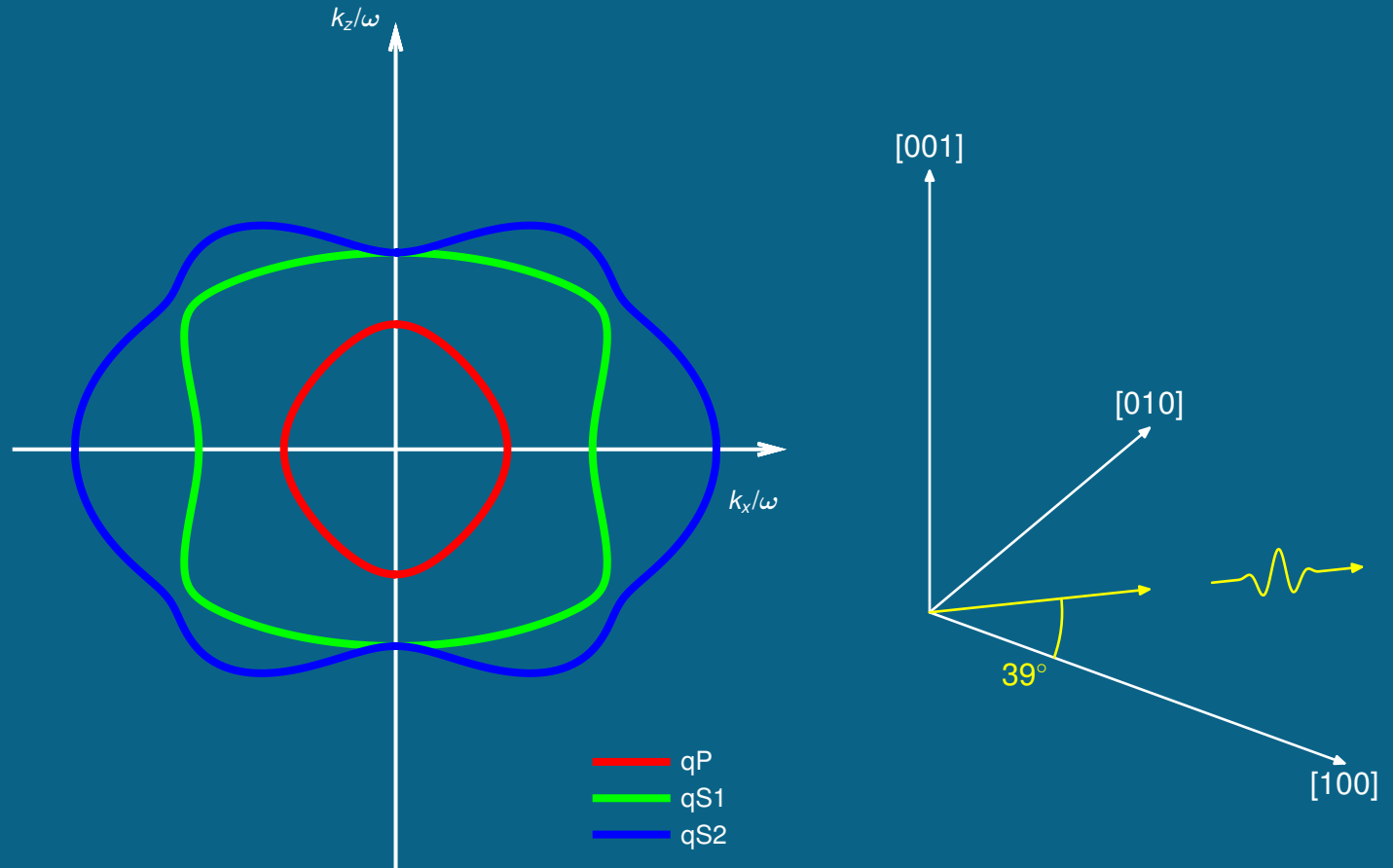
Pomalostní křivky



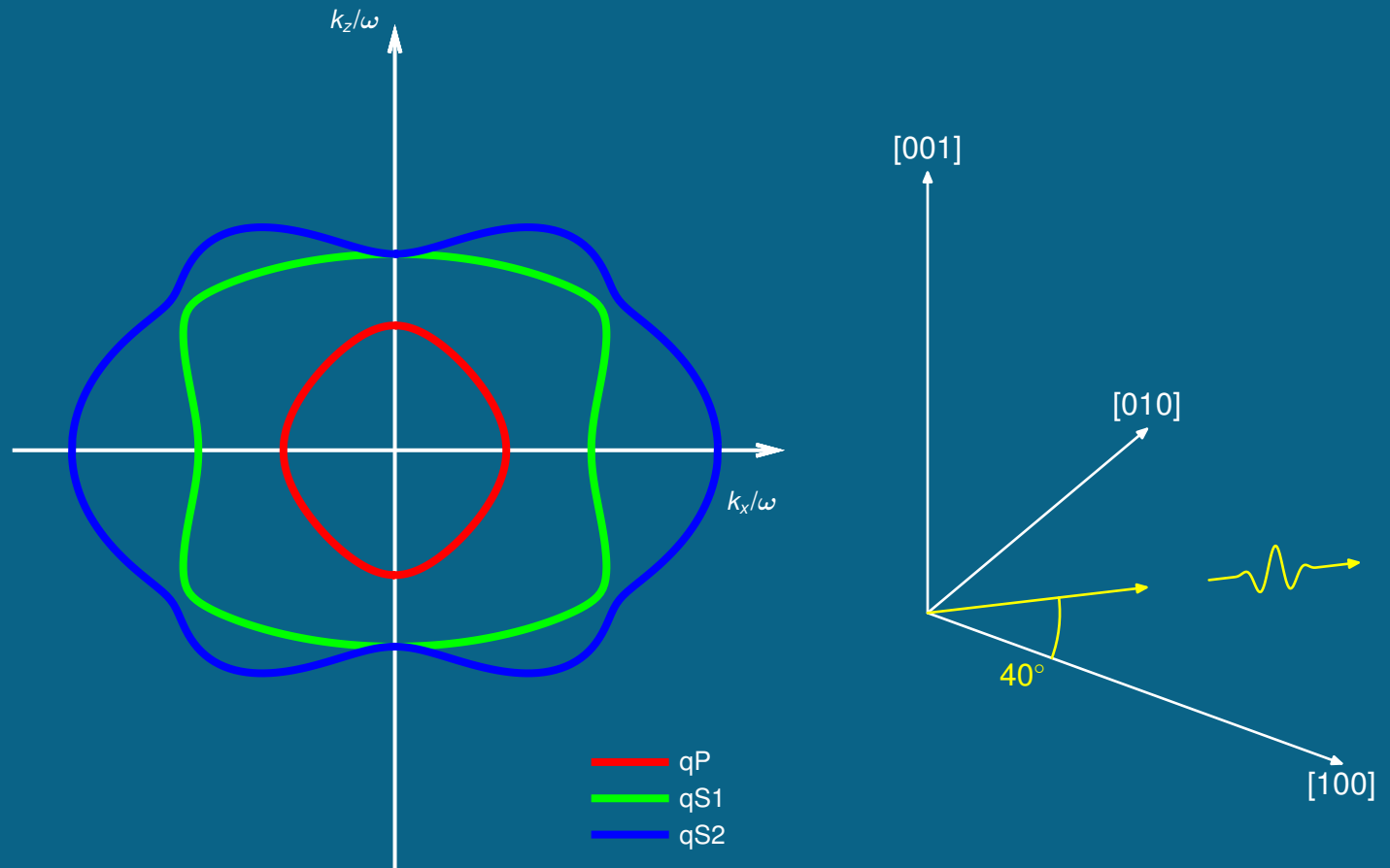
Pomalostní křivky



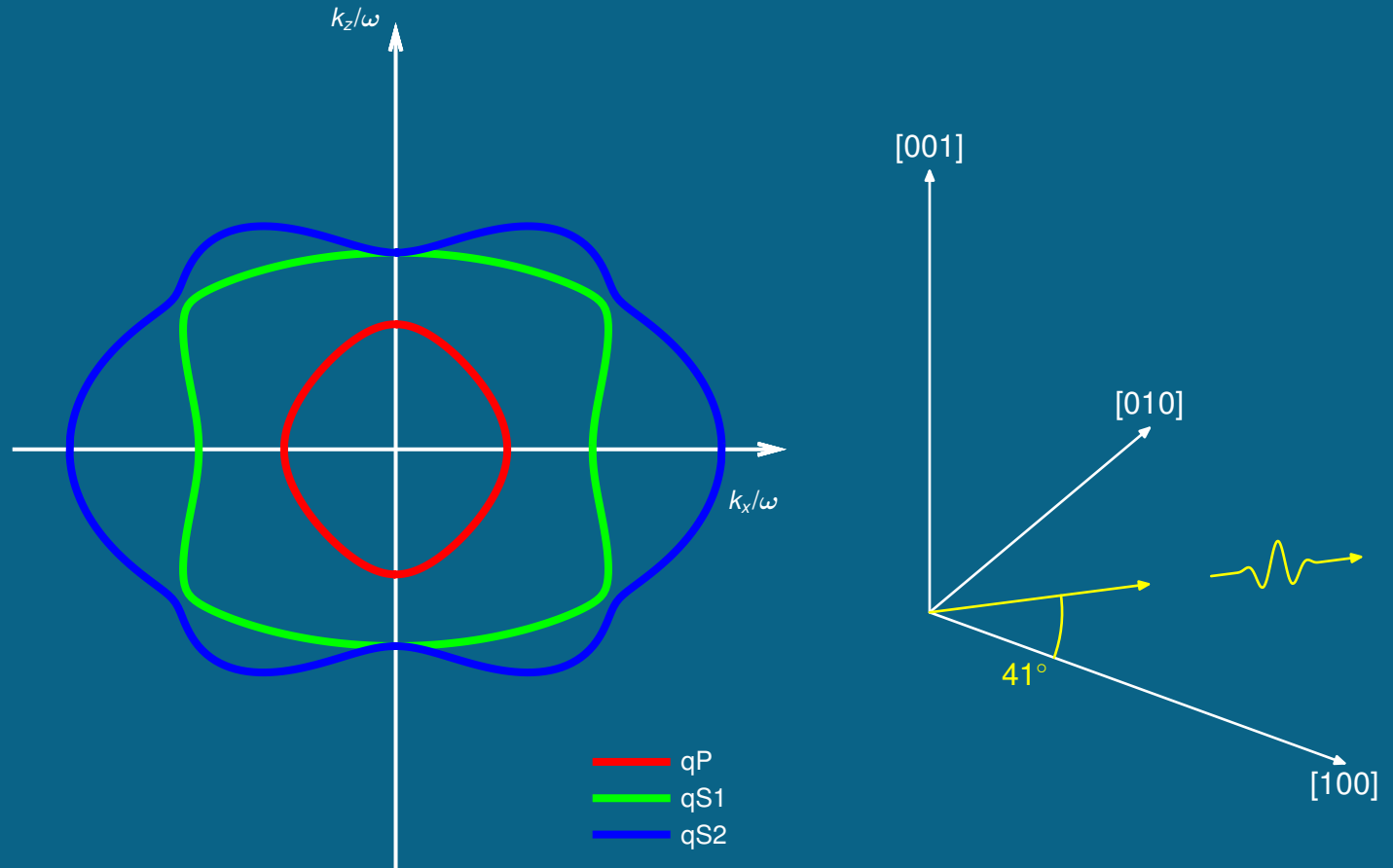
Pomalostní křivky



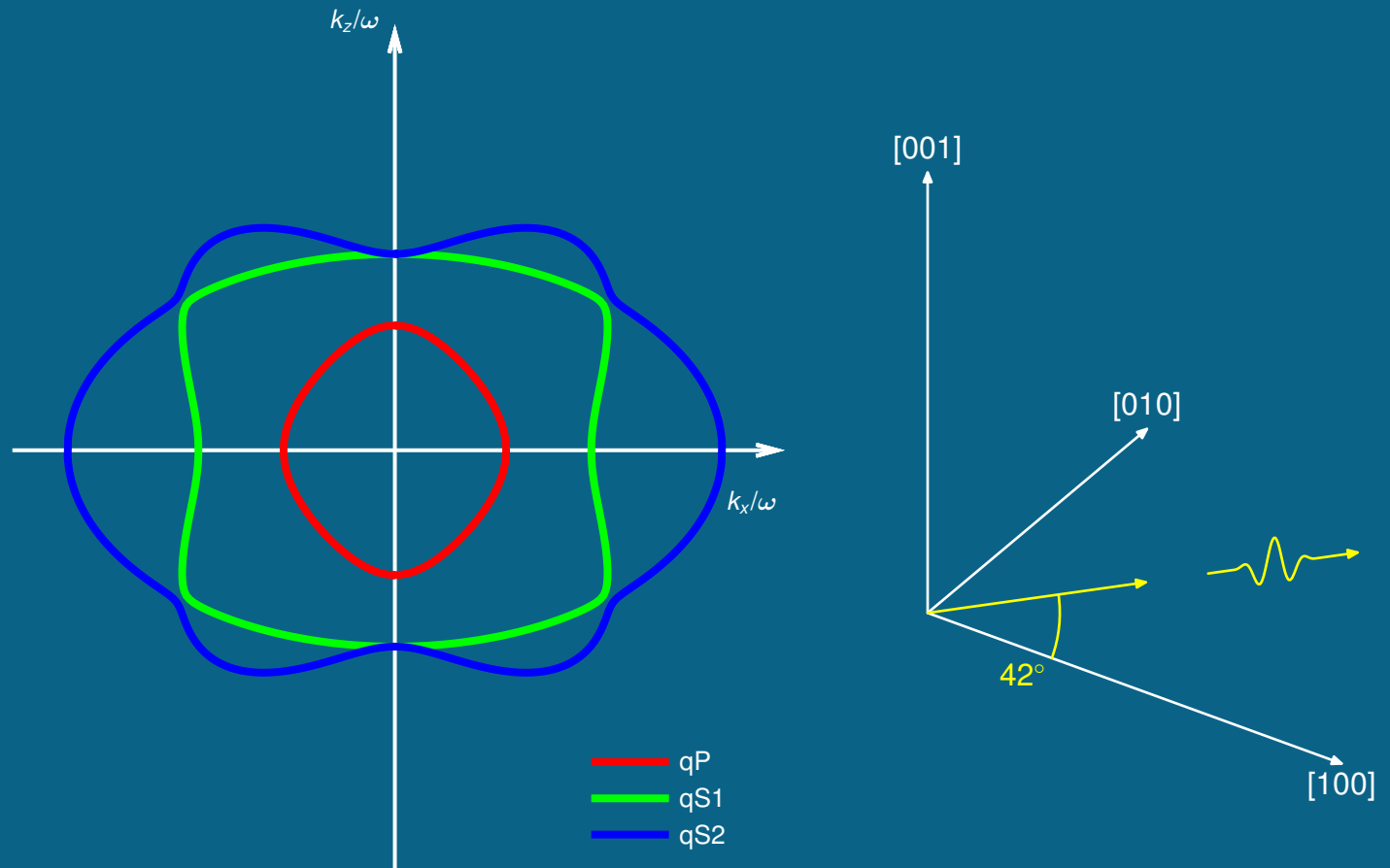
Pomalostní křivky



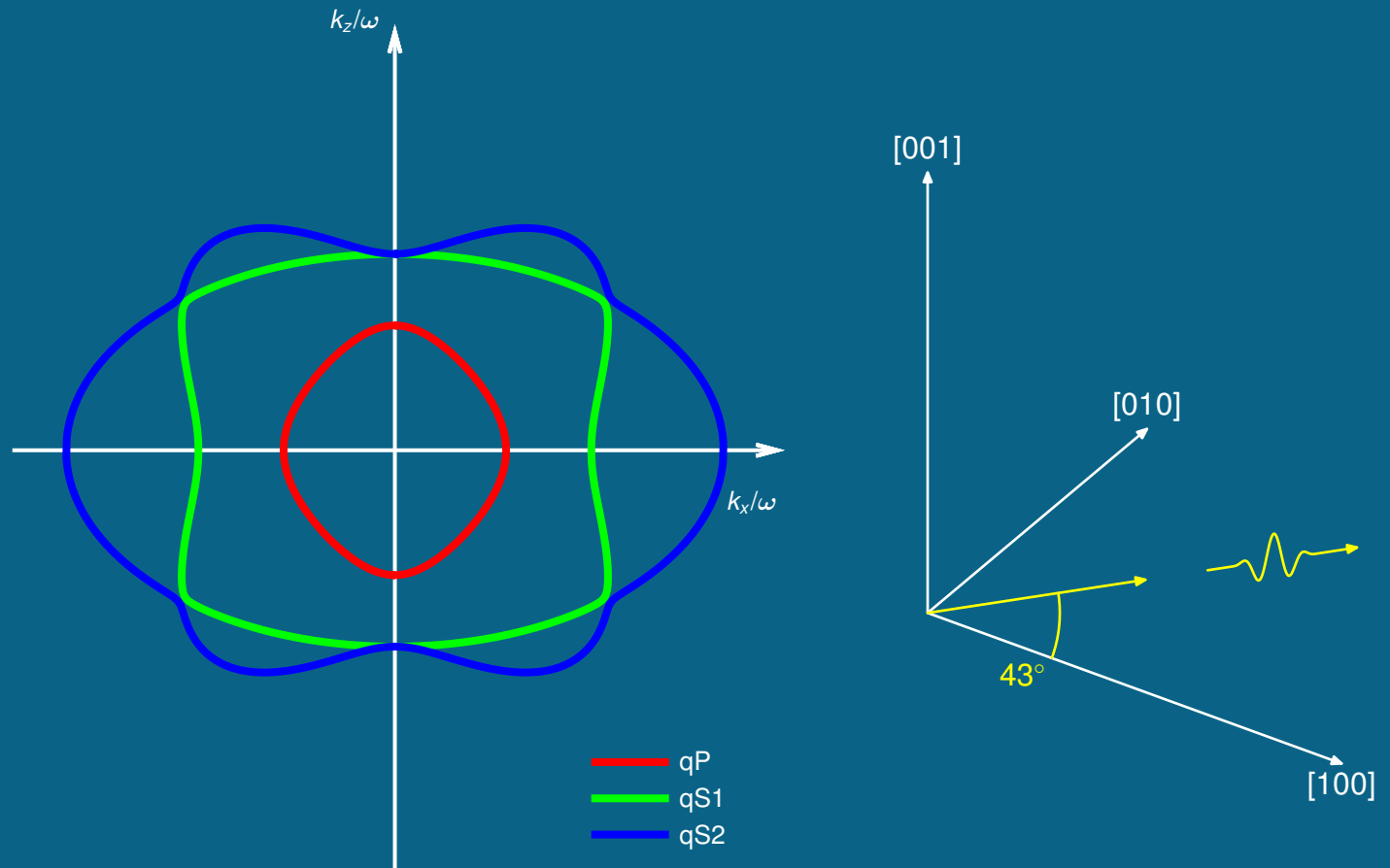
Pomalostní křivky



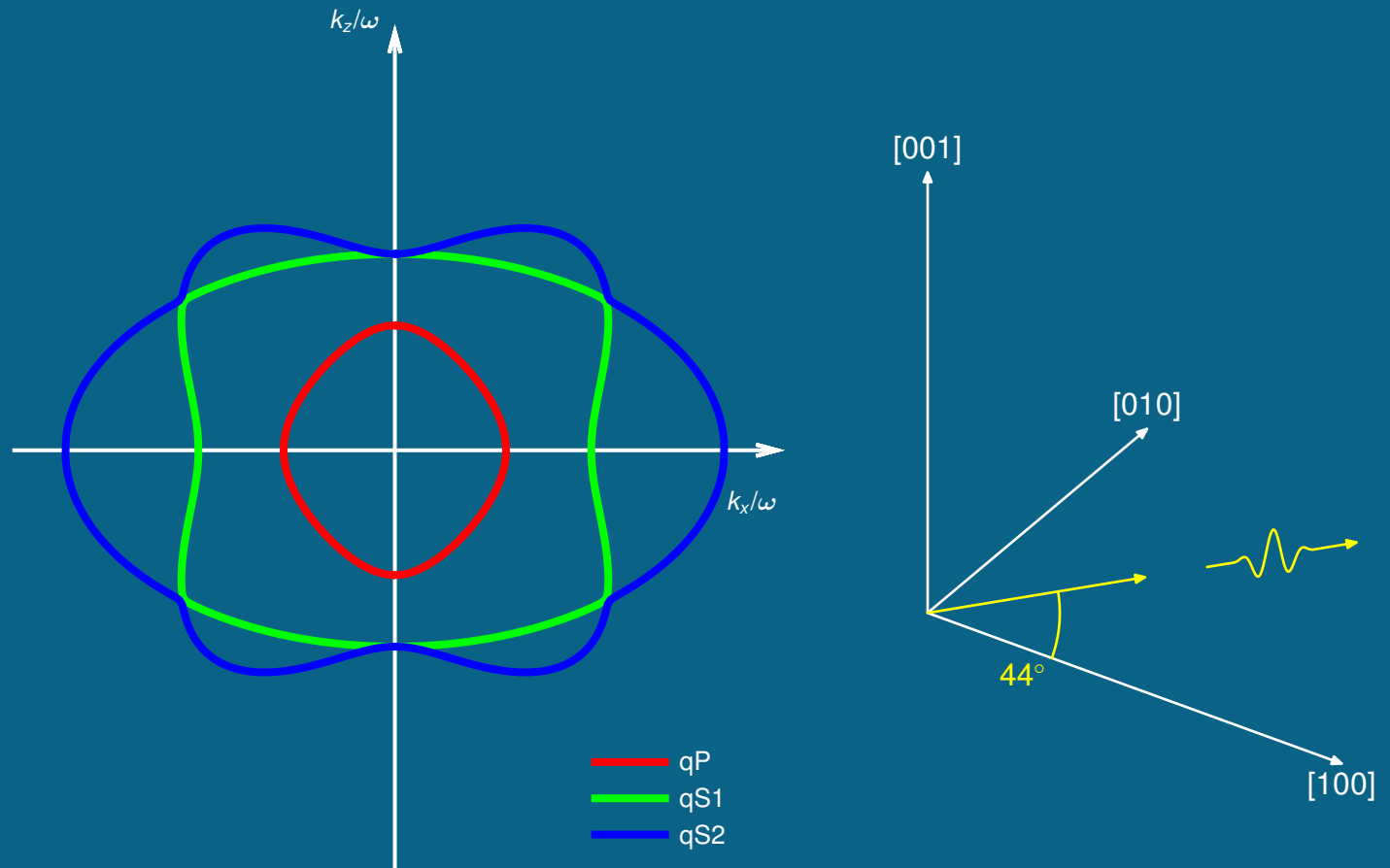
Pomalostní křivky



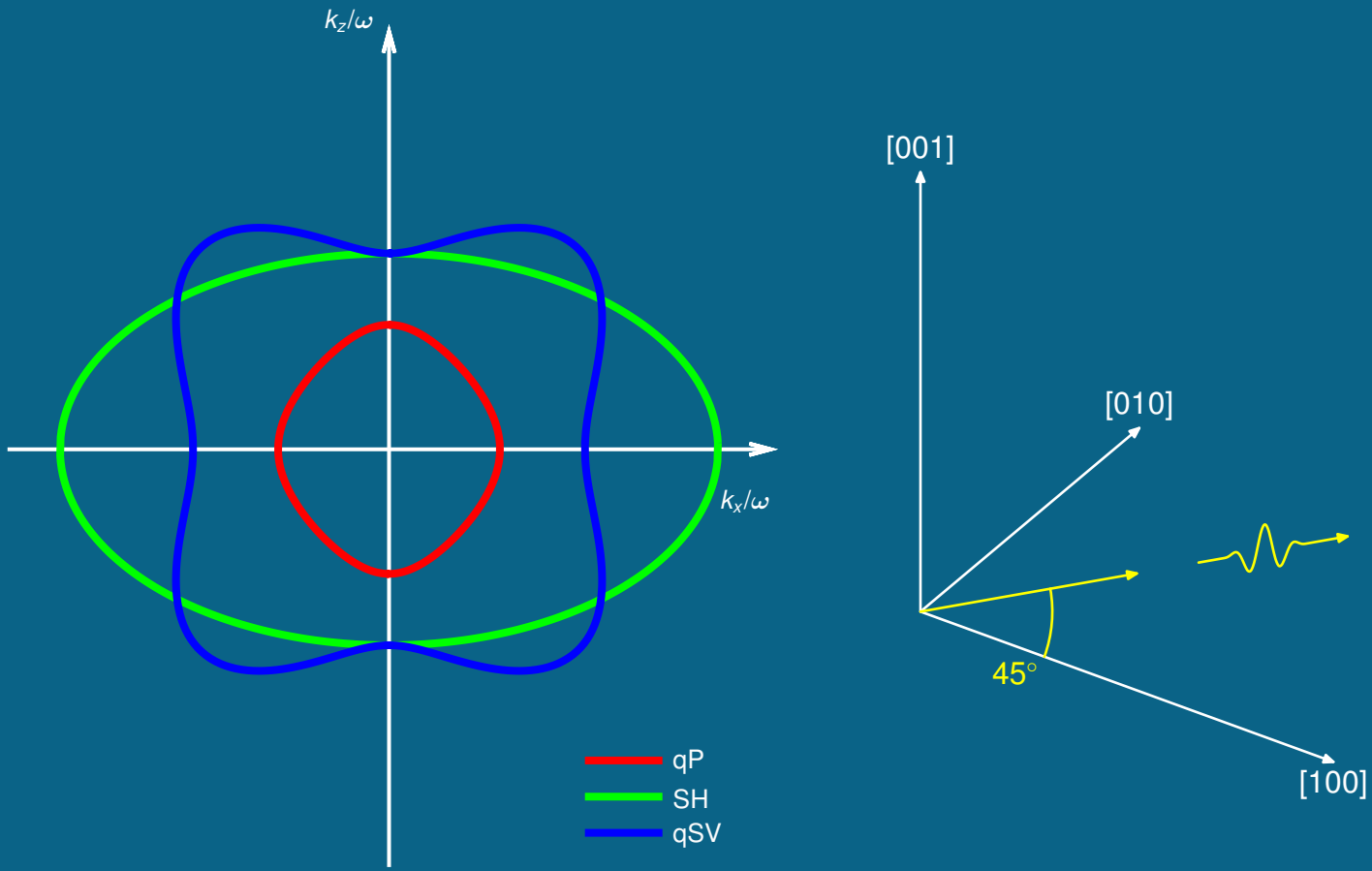
Pomalostní křivky



Pomalostní křivky

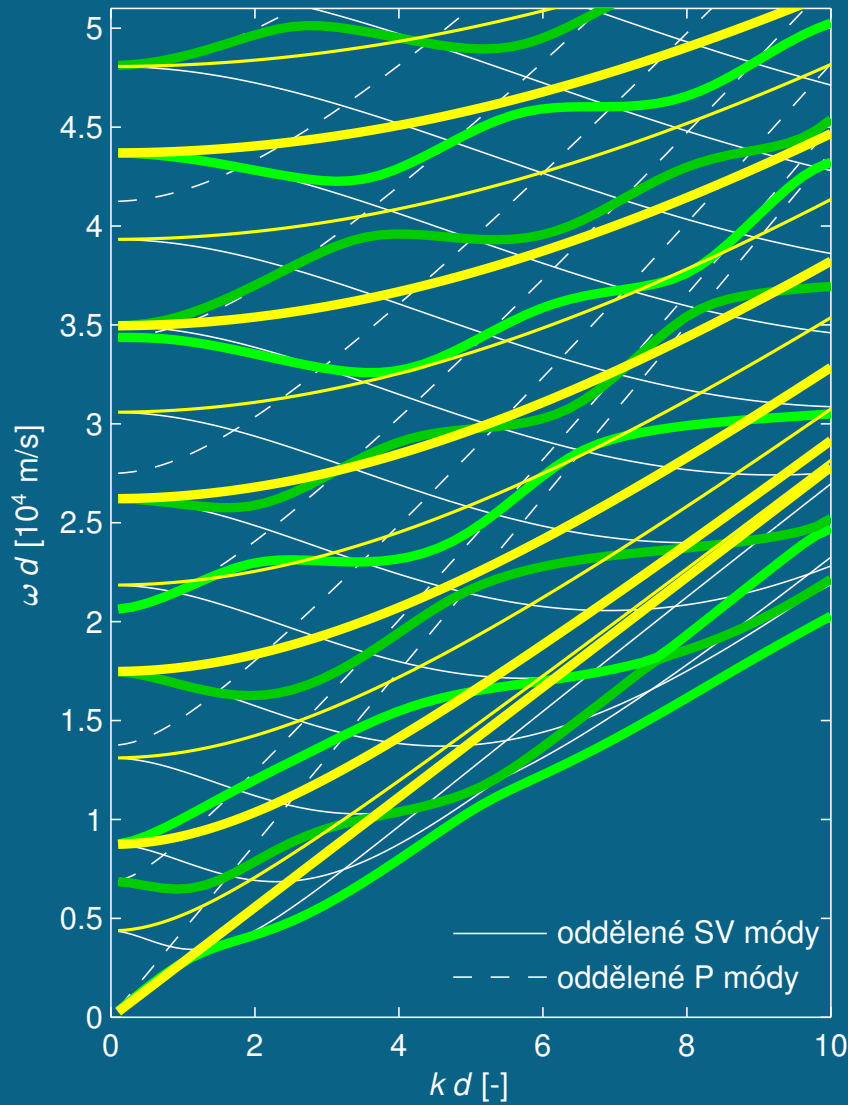


Pomalostní křivky

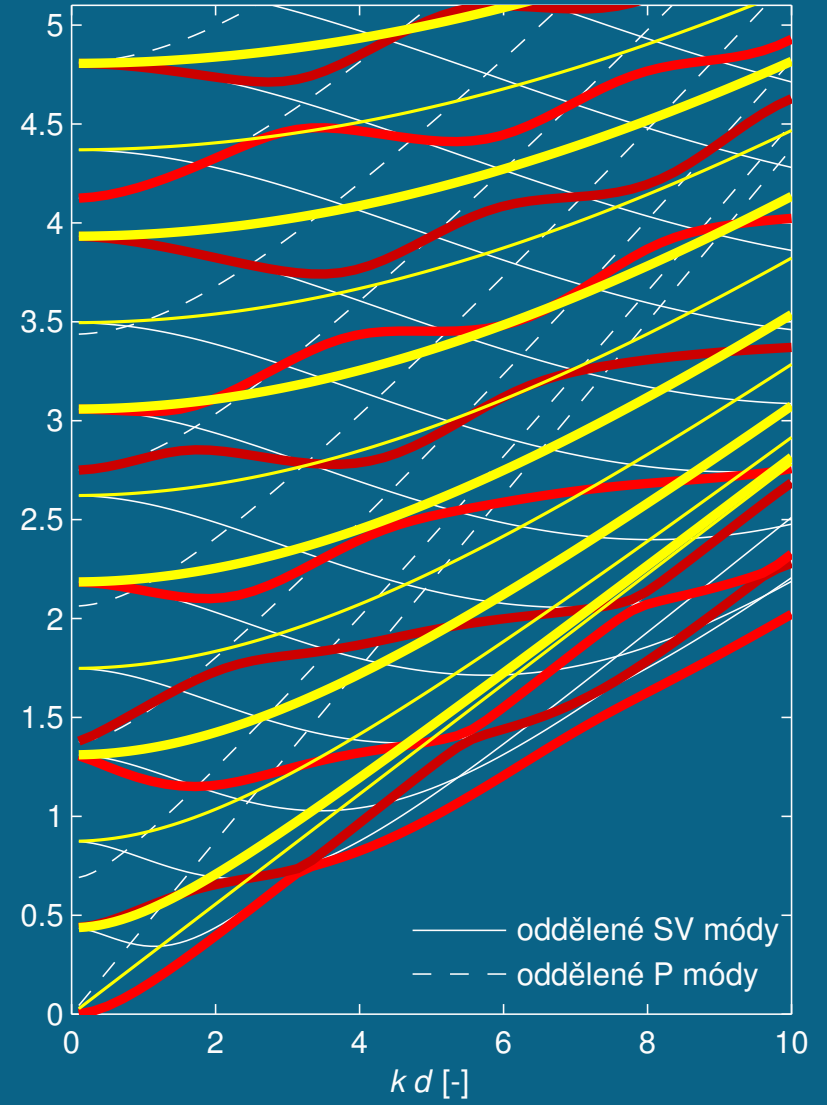


Směr šíření $\phi = 0^\circ$

symetrické módy, SH módy

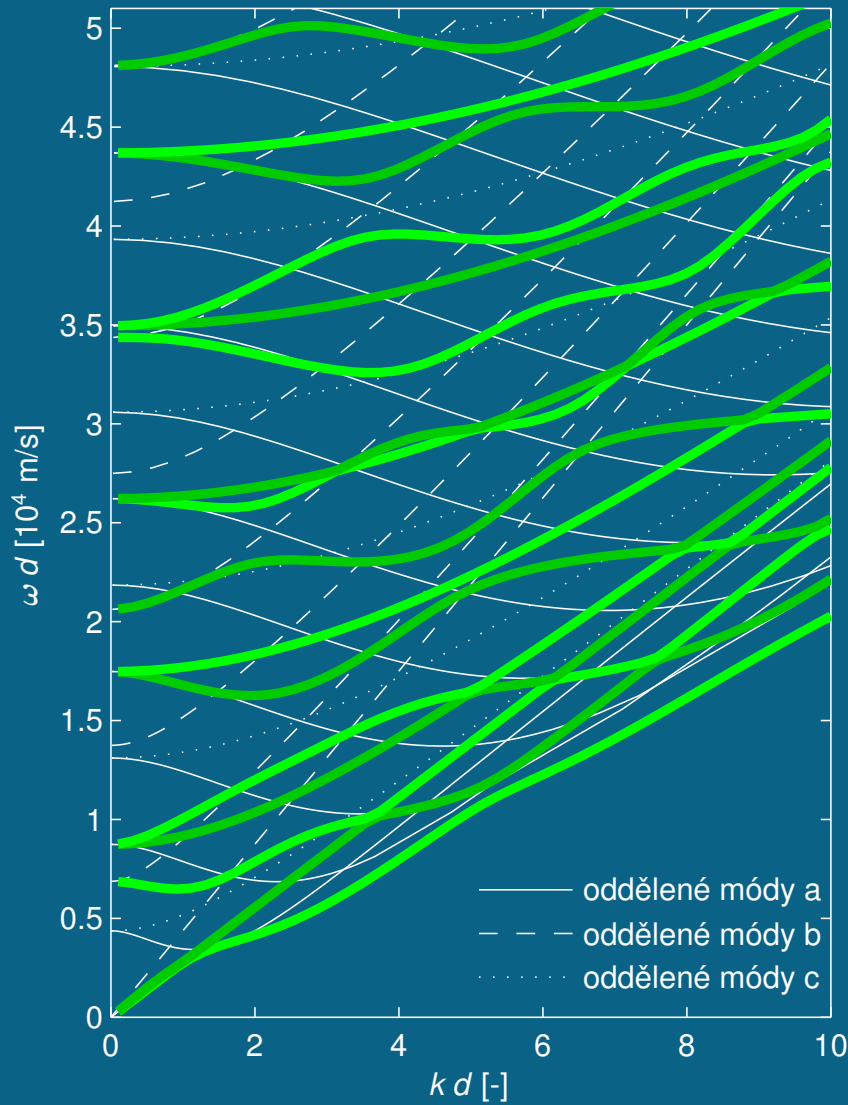


antisymetrické módy, SH módy

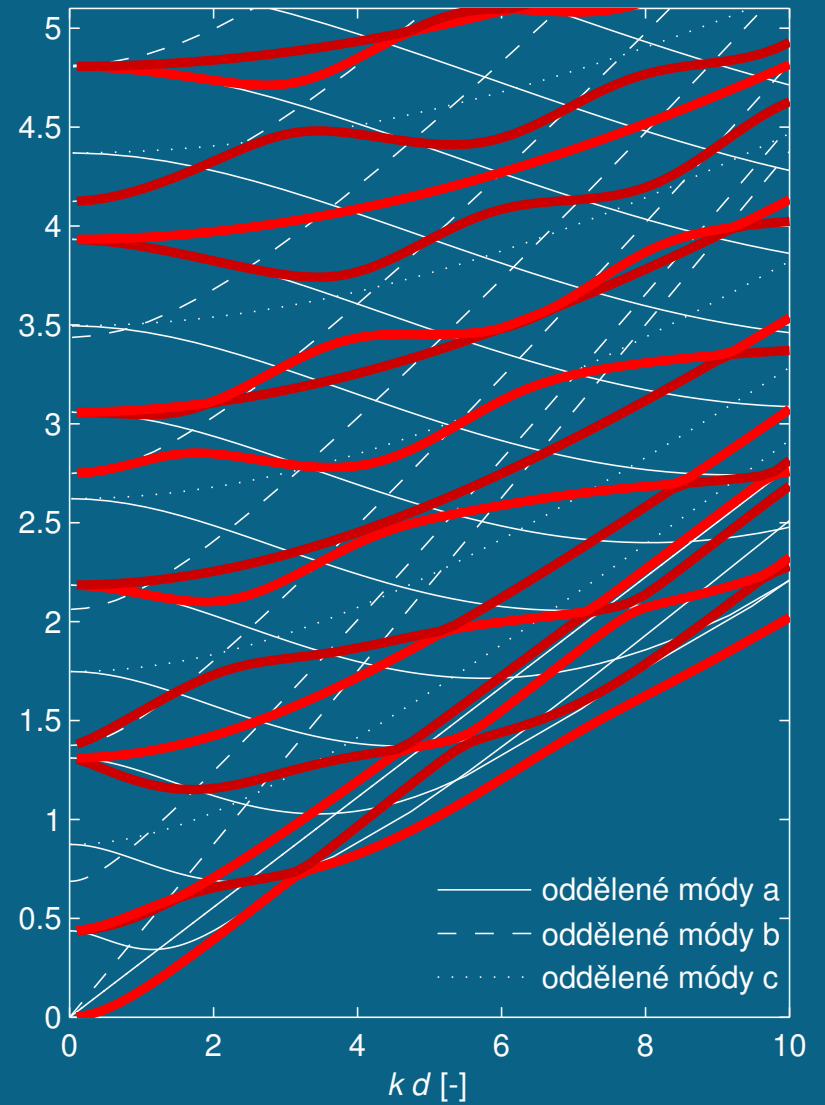


Směr šíření $\phi = 1^\circ$

symetrické módy

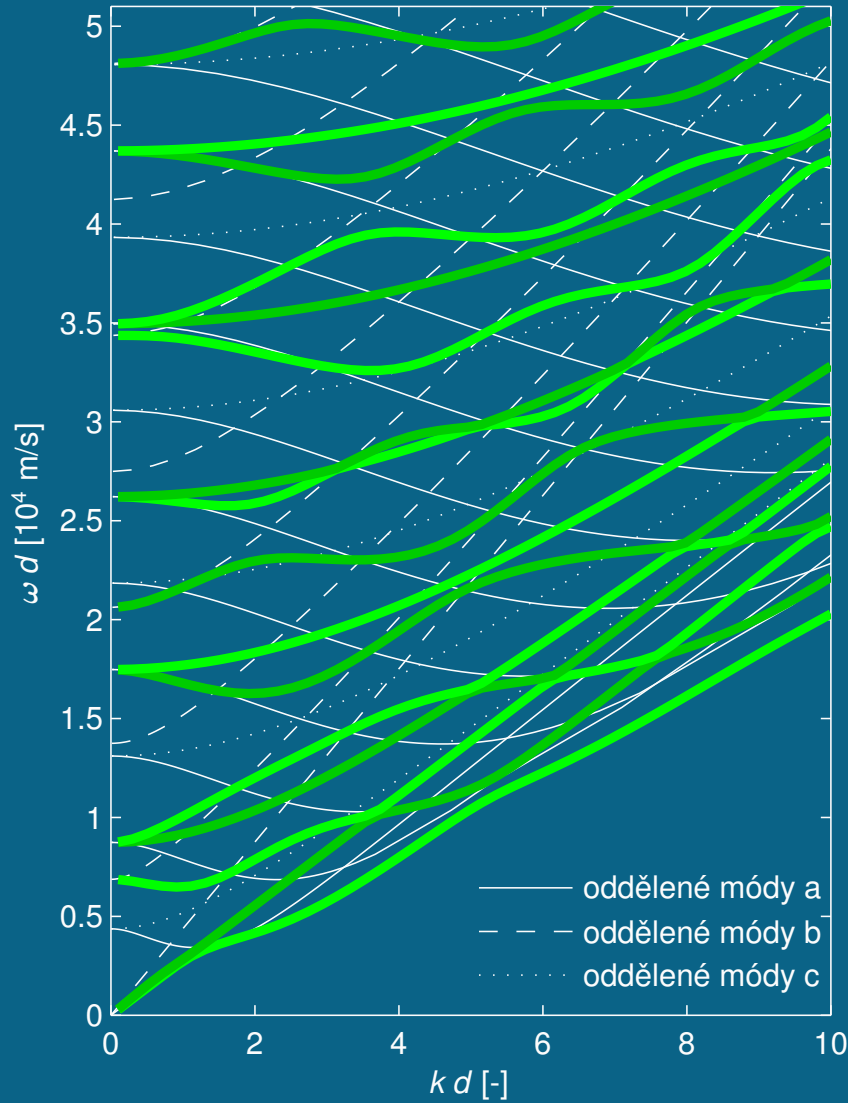


antisymetrické módy

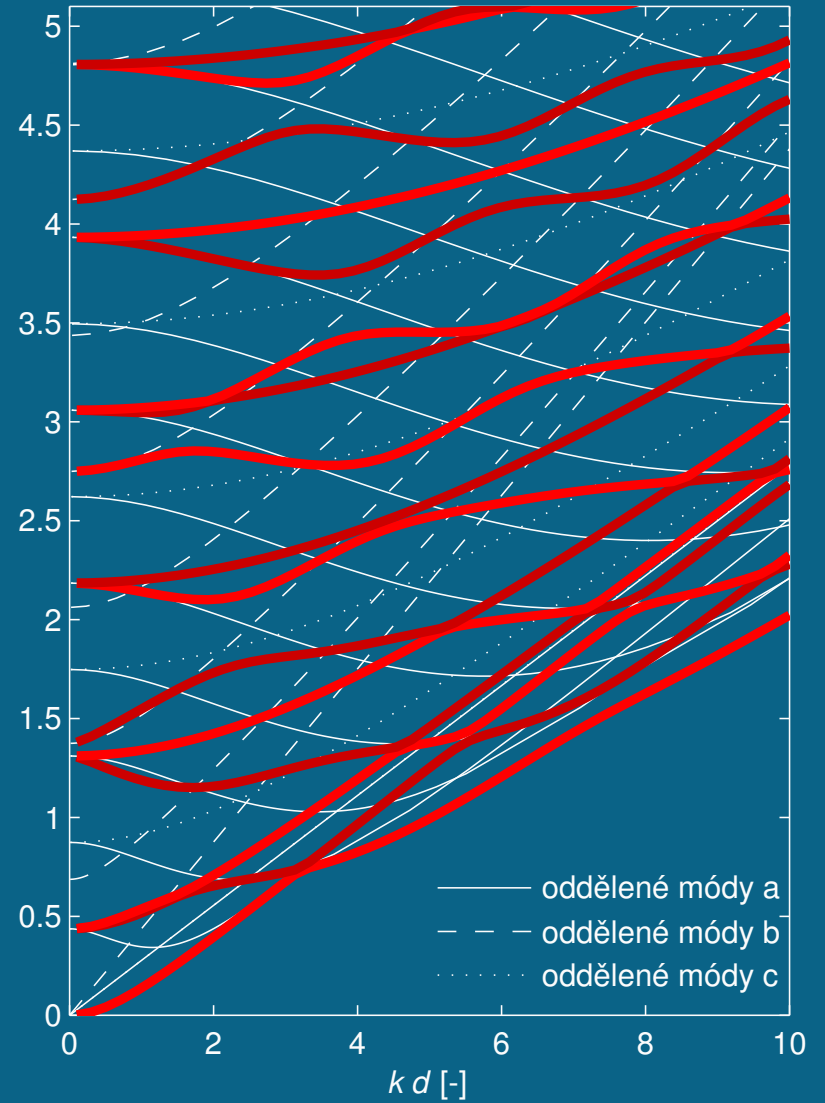


Směr šíření $\phi = 2^\circ$

symetrické módy

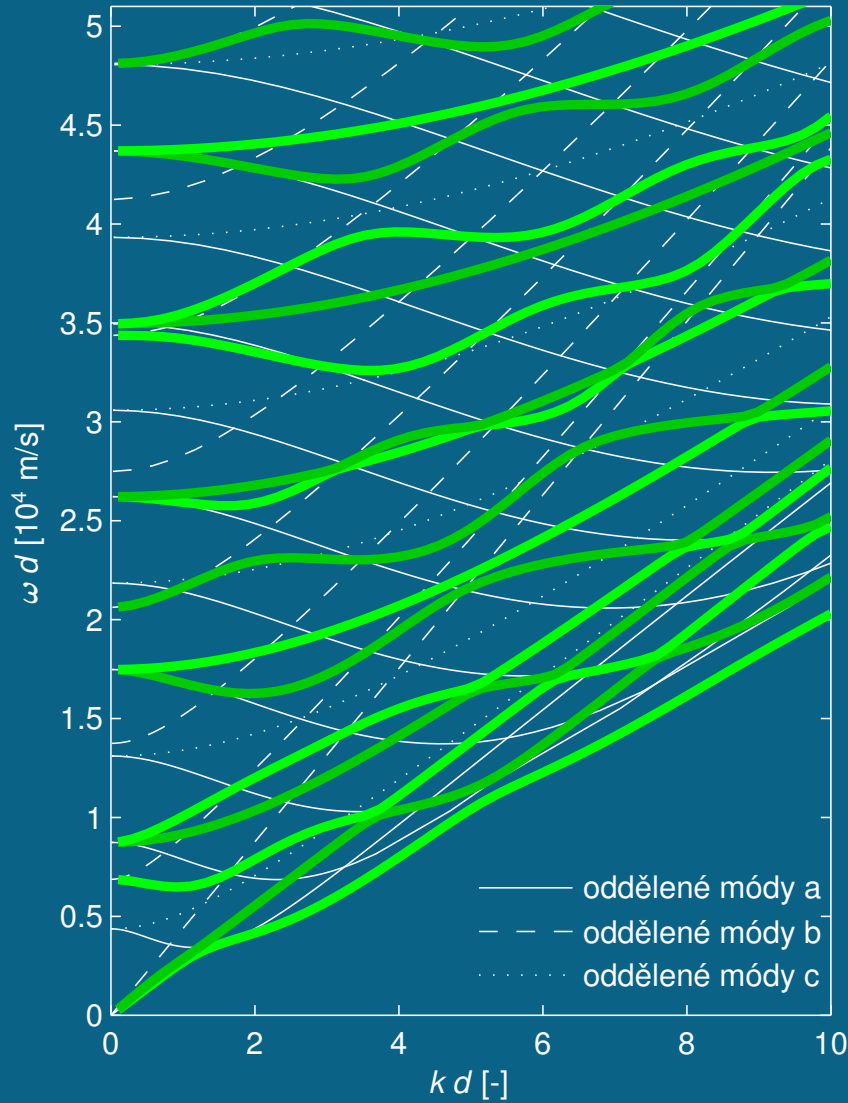


antisymetrické módy

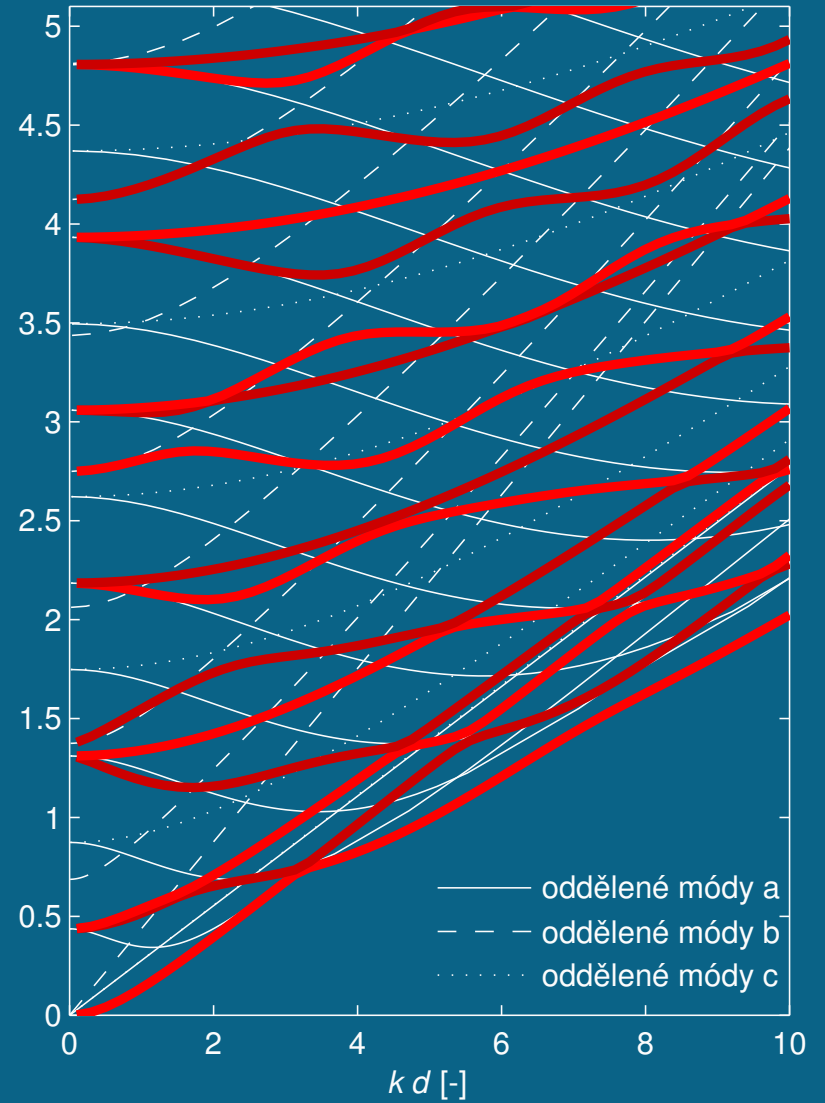


Směr šíření $\phi = 3^\circ$

symetrické módy

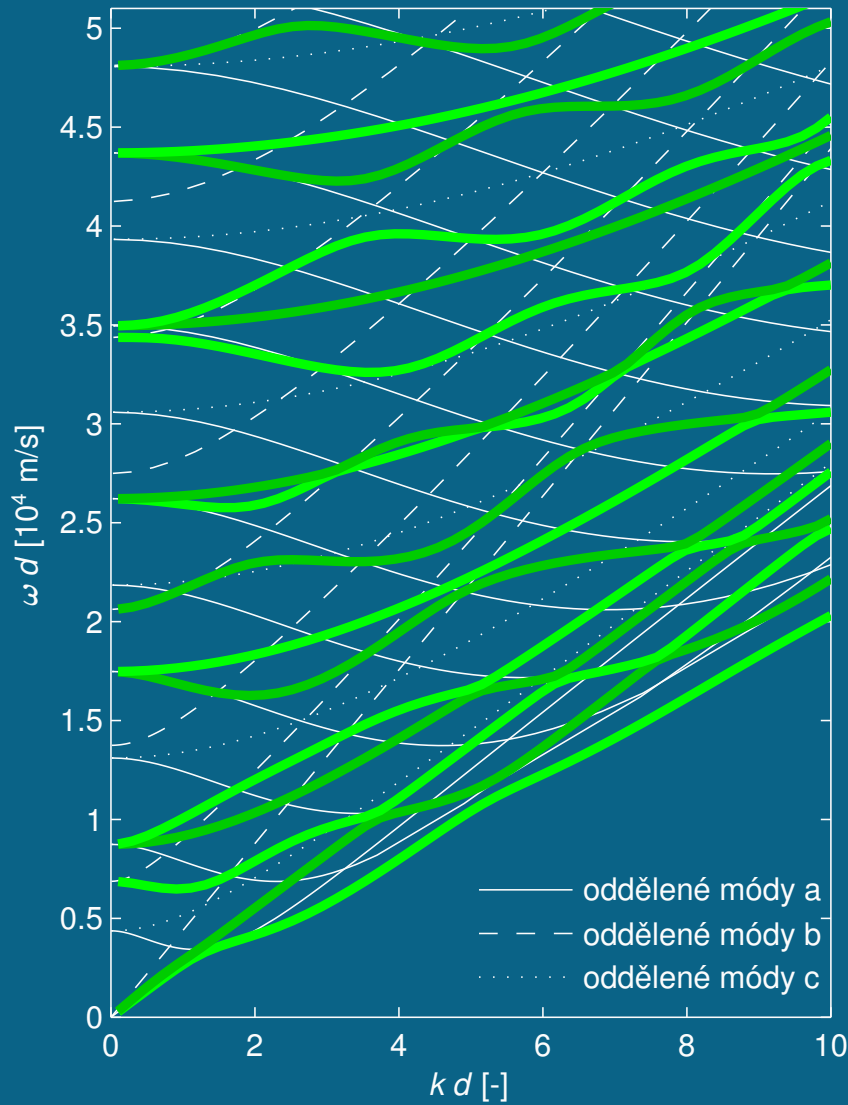


antisymetrické módy

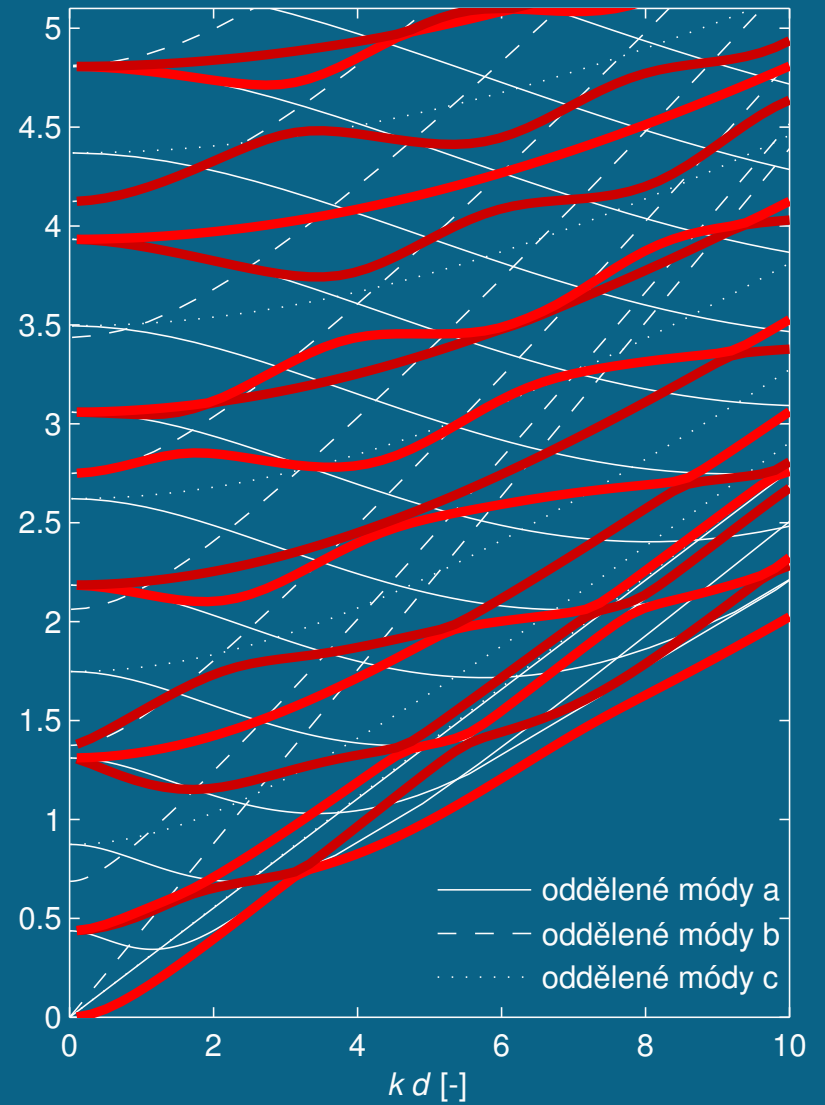


Směr šíření $\phi = 4^\circ$

symetrické módy

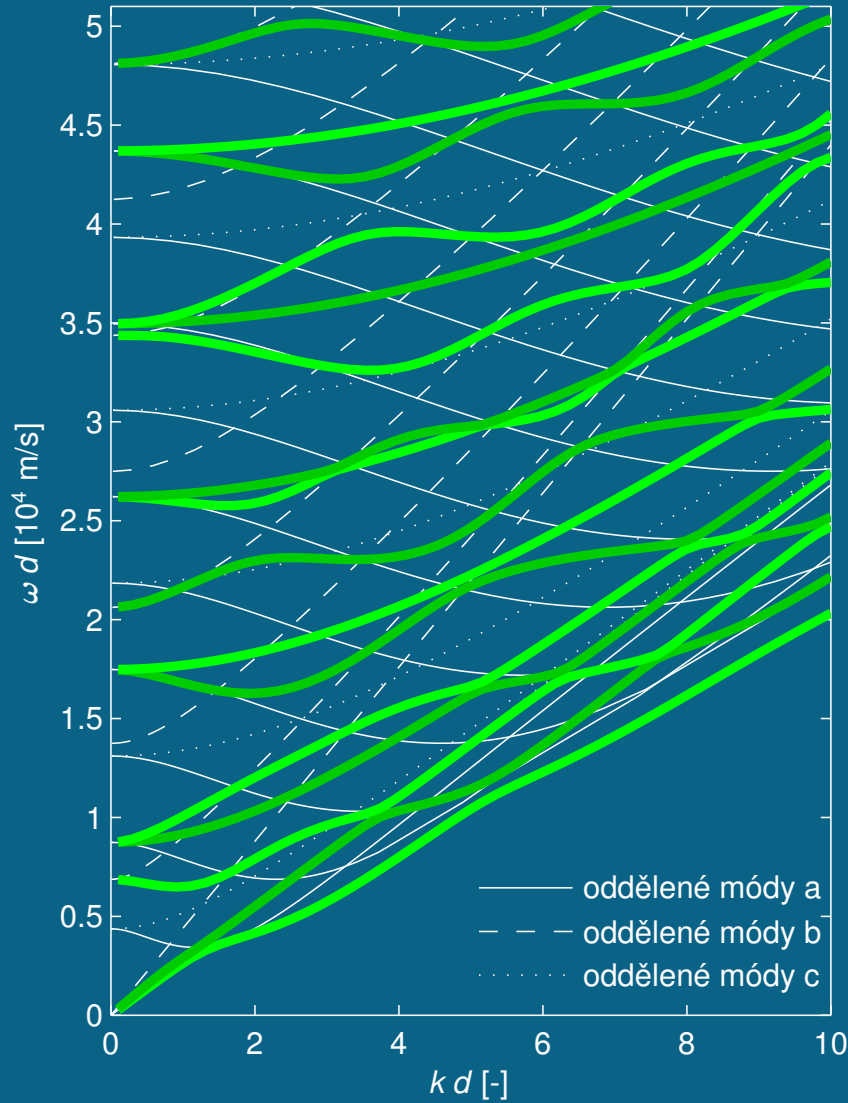


antisymetrické módy

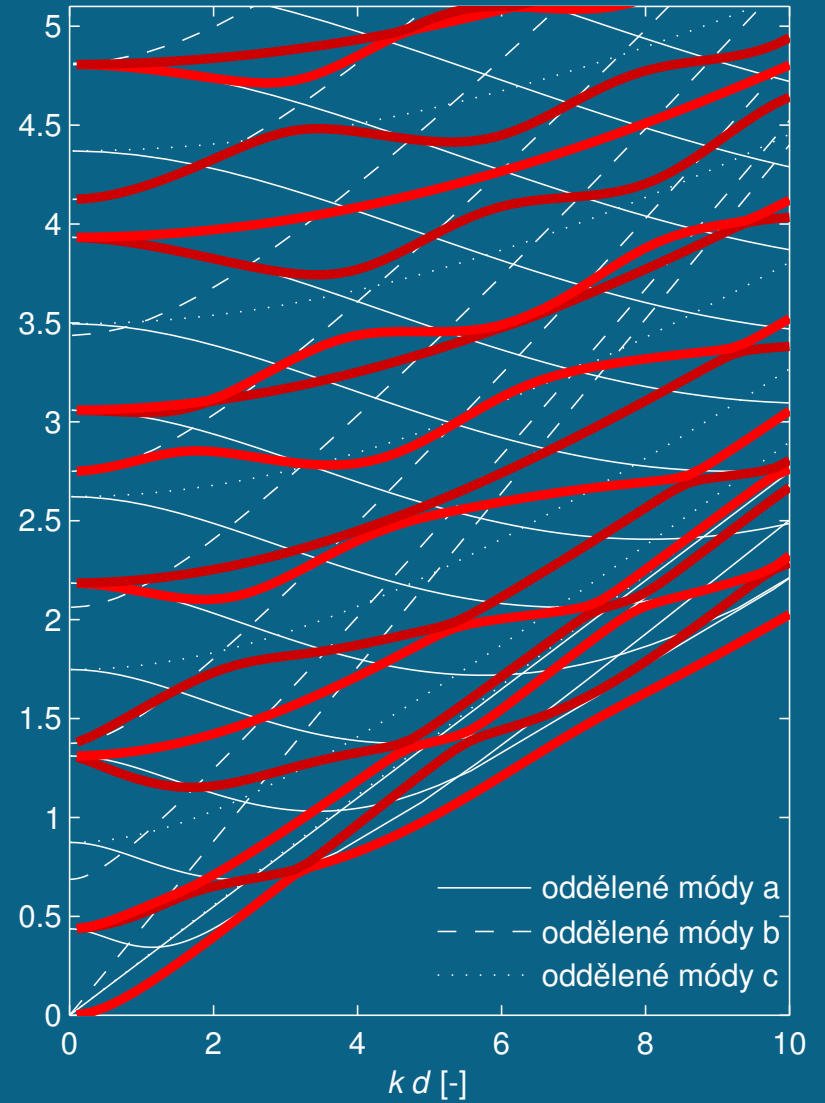


Směr šíření $\phi = 5^\circ$

symetrické módy

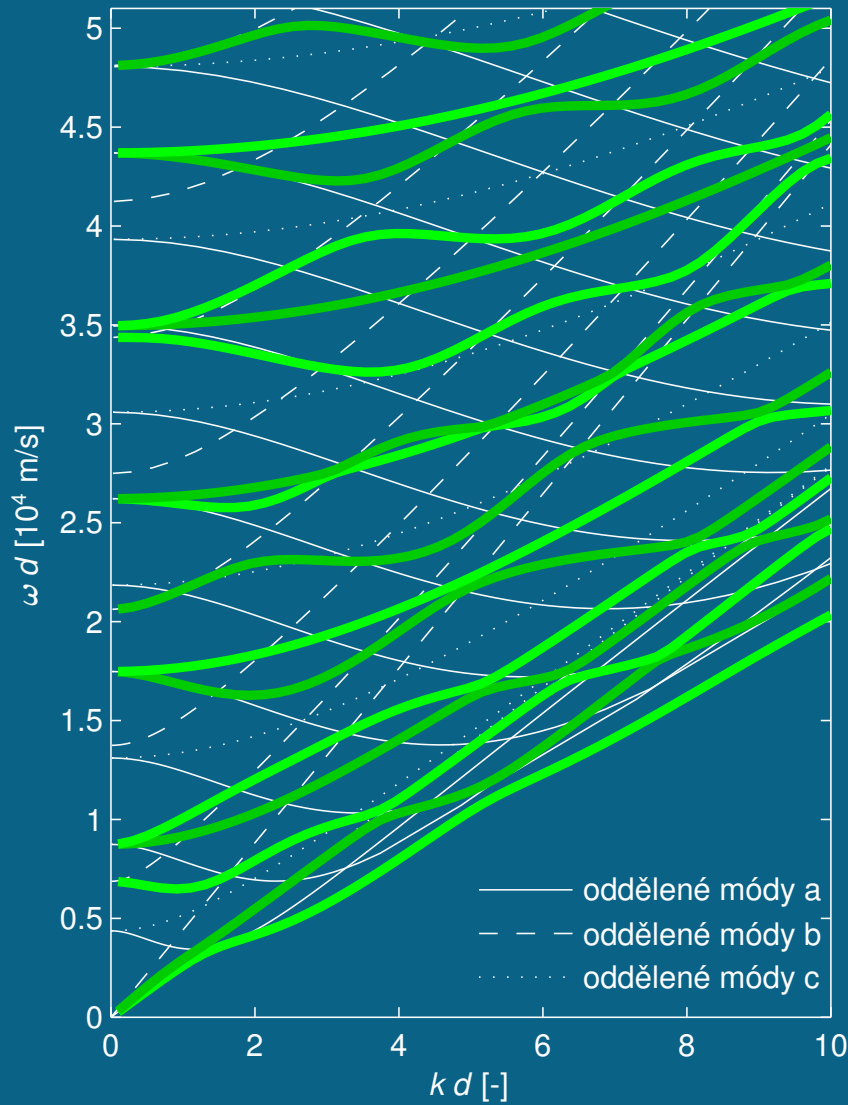


antisymetrické módy

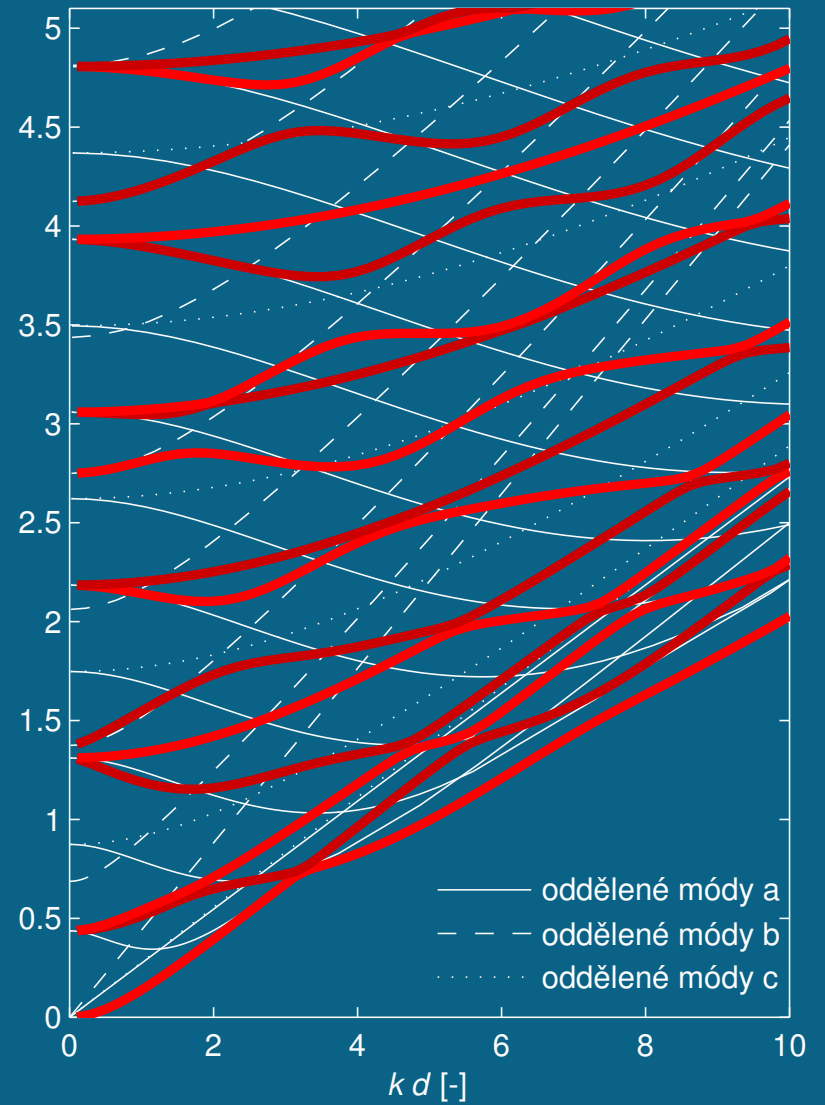


Směr šíření $\phi = 6^\circ$

symetrické módy

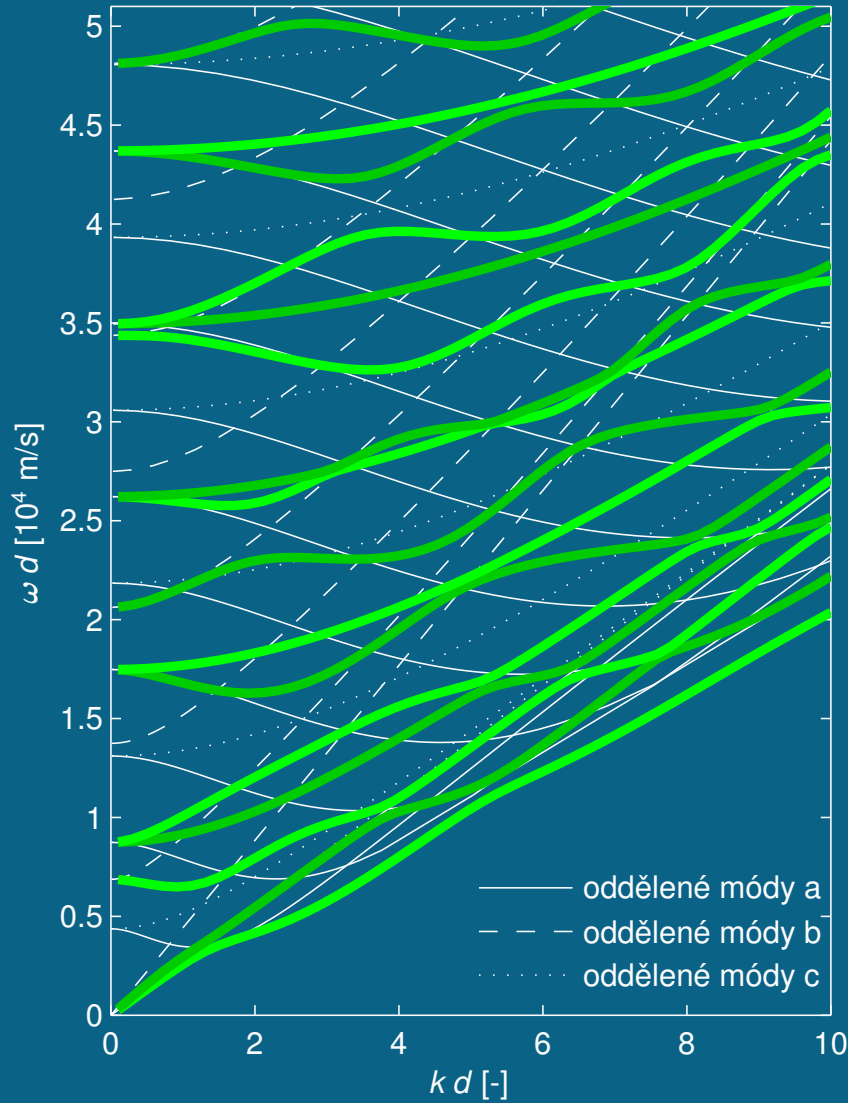


antisymetrické módy

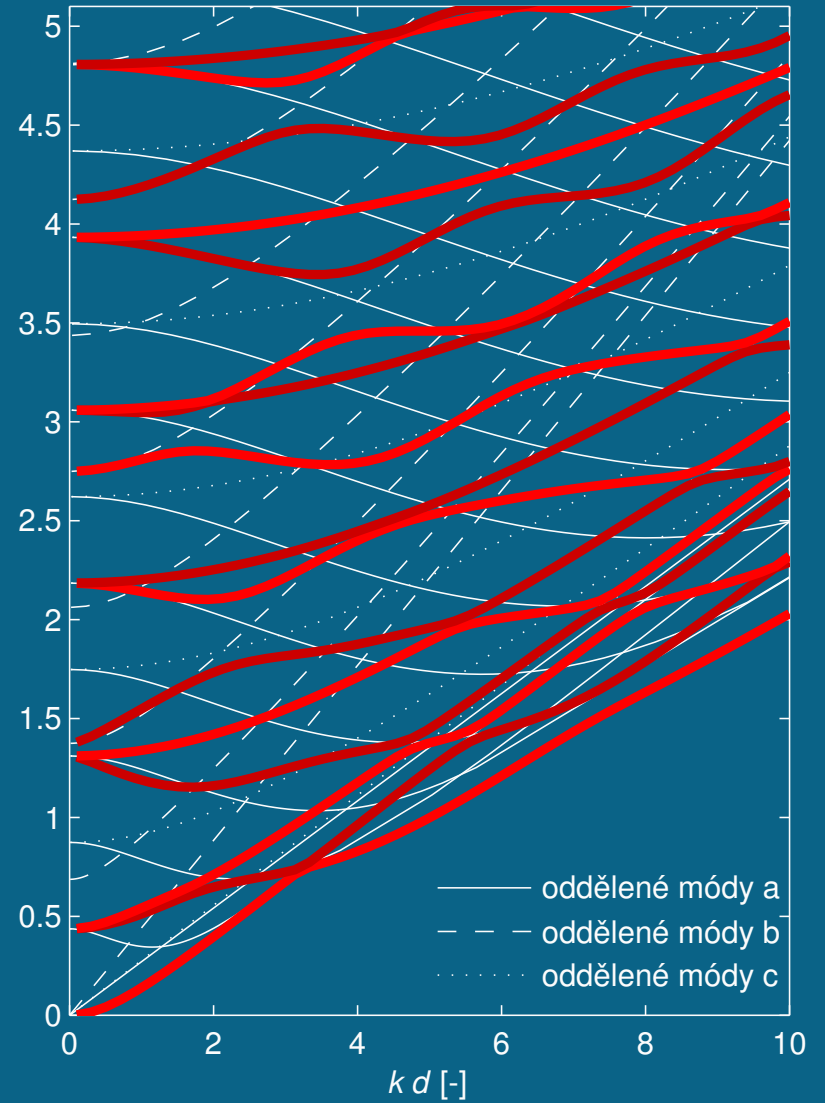


Směr šíření $\phi = 7^\circ$

symetrické módy

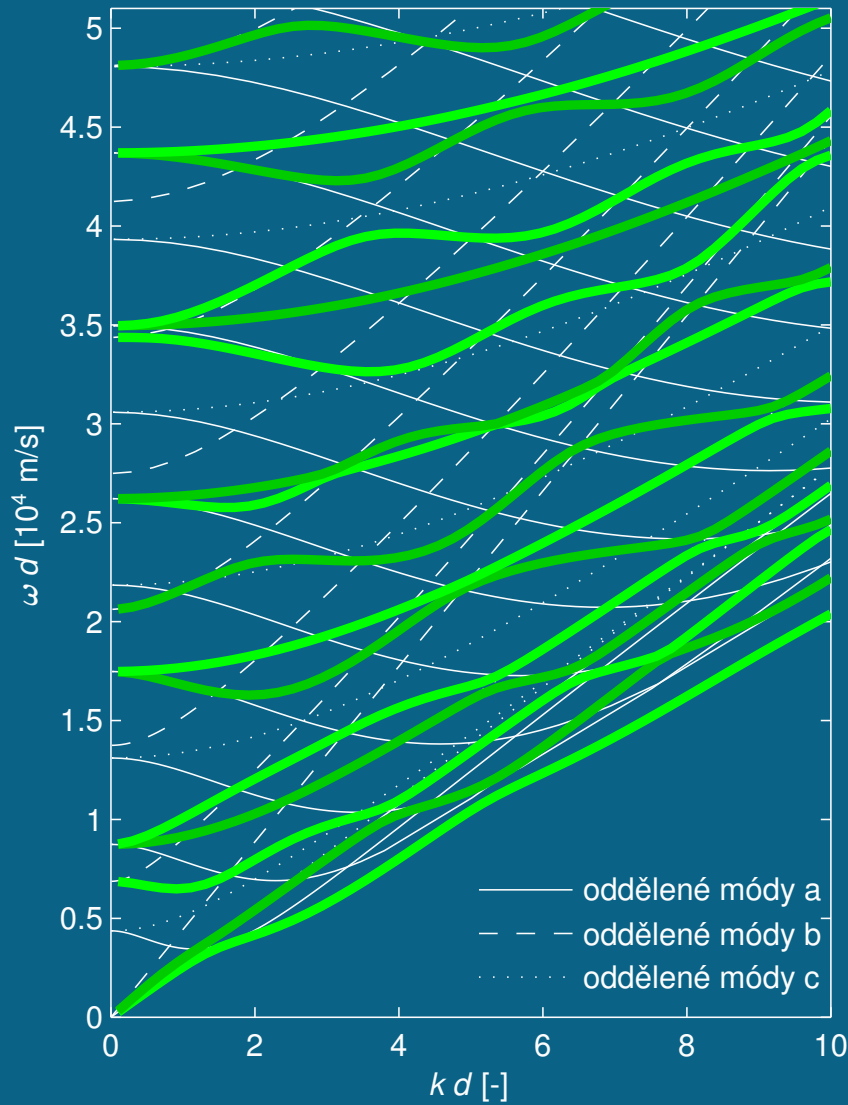


antisymetrické módy

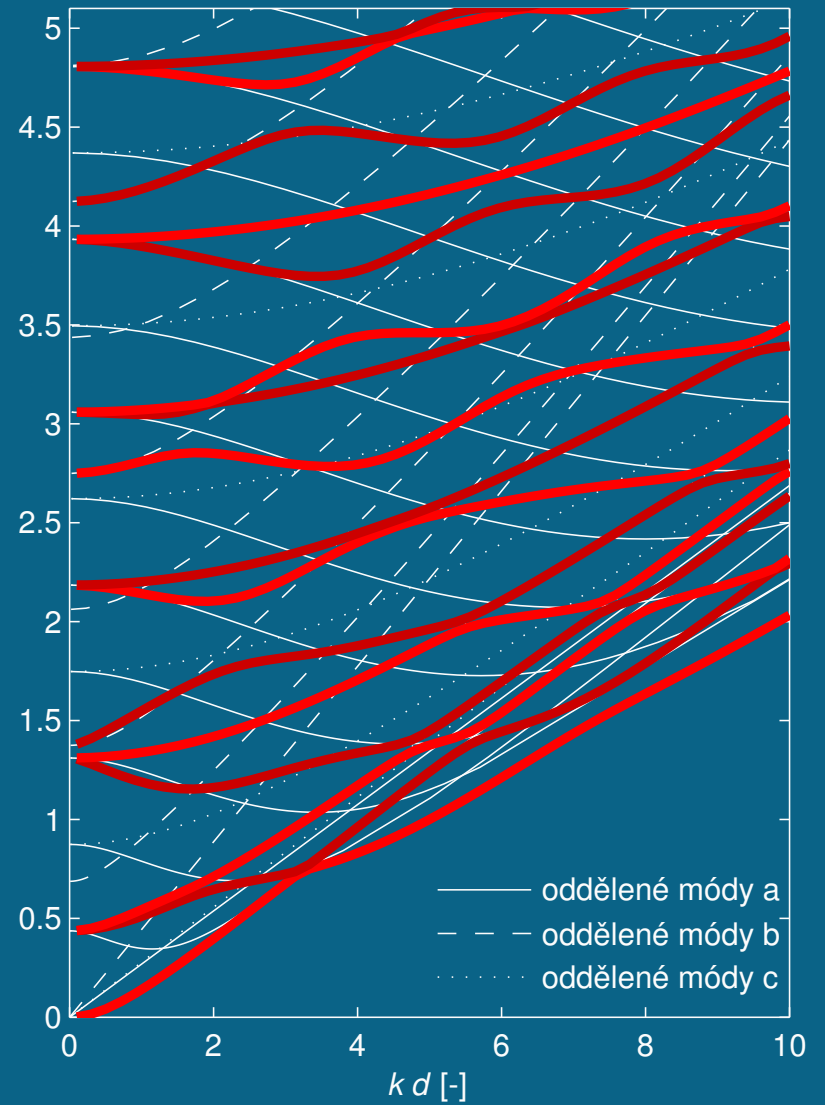


Směr šíření $\phi = 8^\circ$

symetrické módy

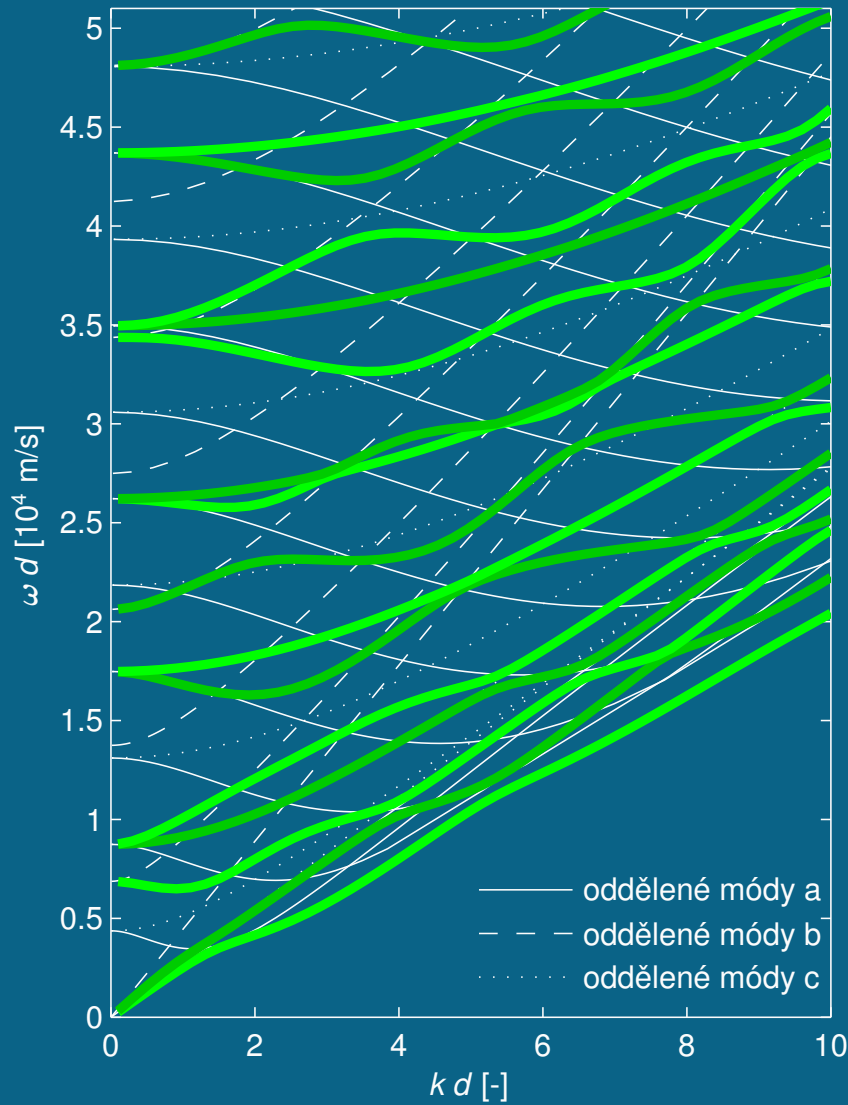


antisymetrické módy

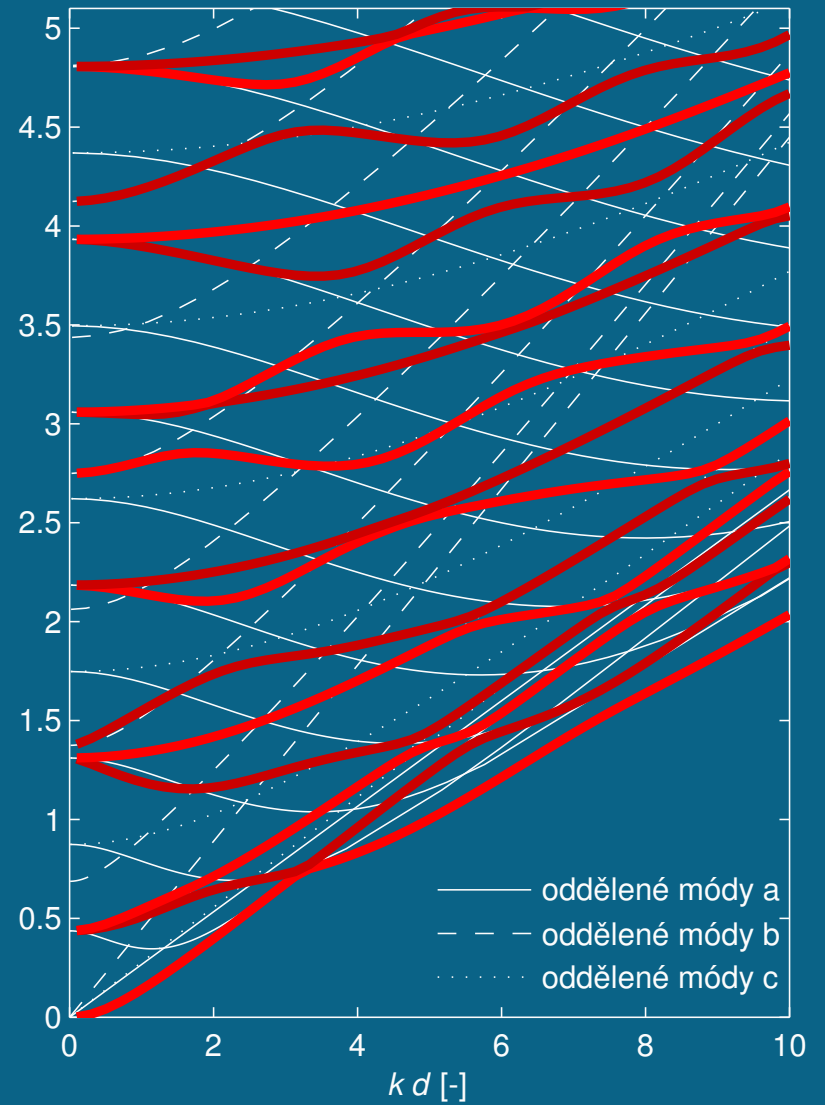


Směr šíření $\phi = 9^\circ$

symetrické módy

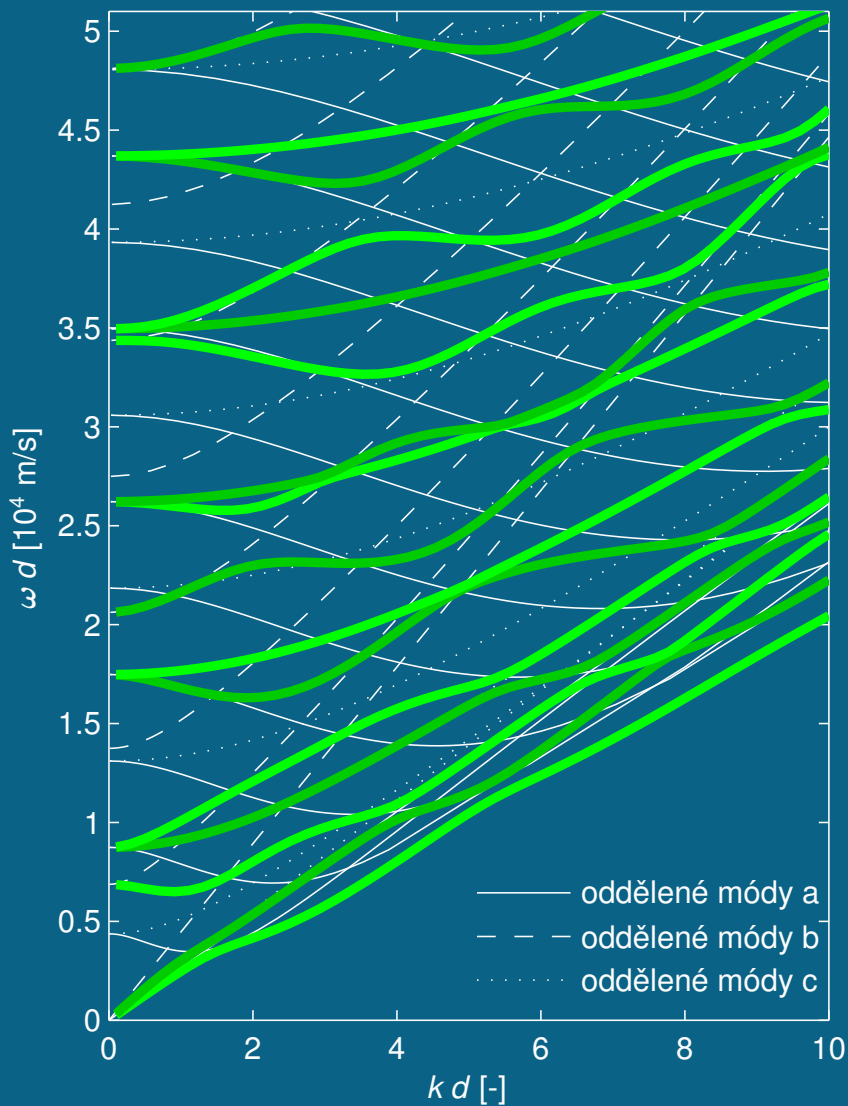


antisymetrické módy

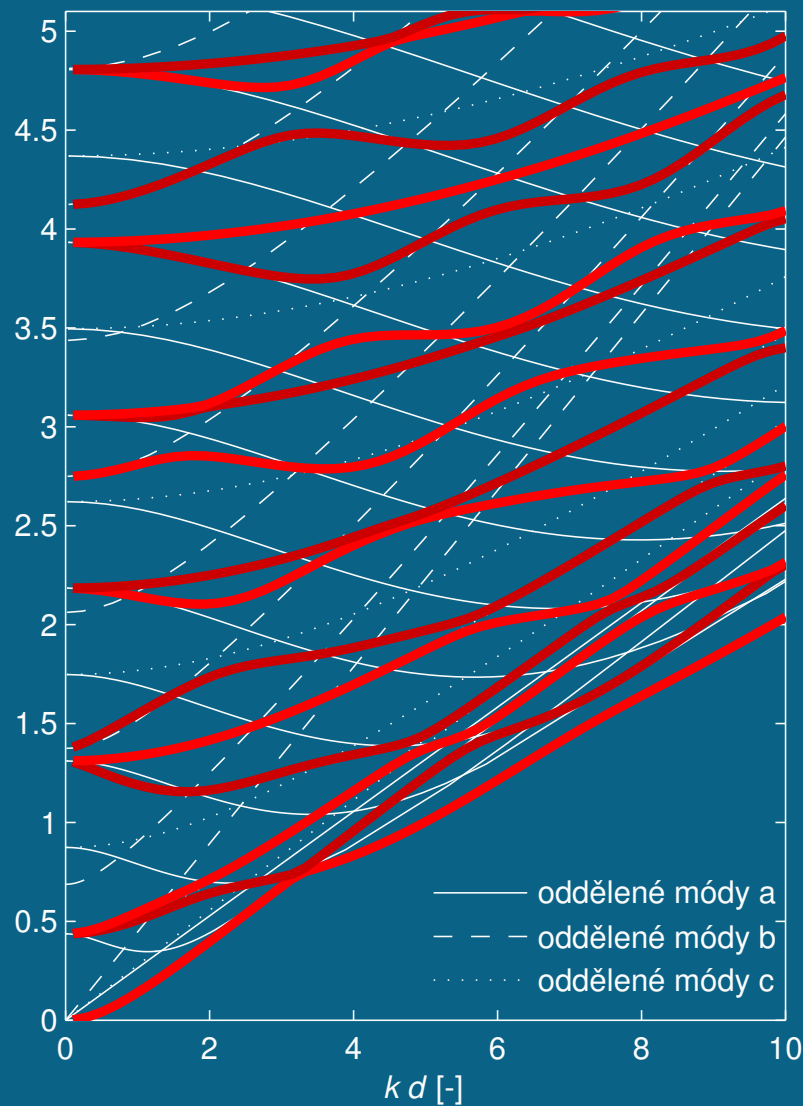


Směr šíření $\phi = 10^\circ$

symetrické módy

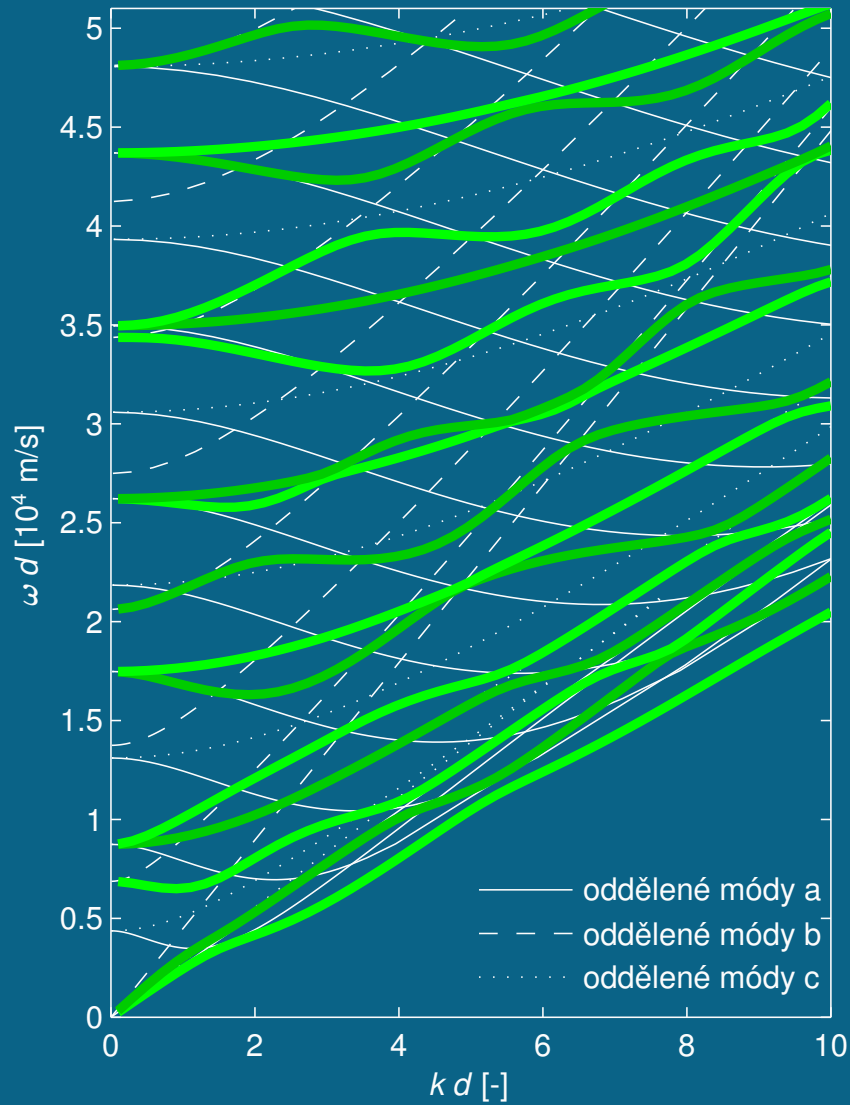


antisymetrické módy

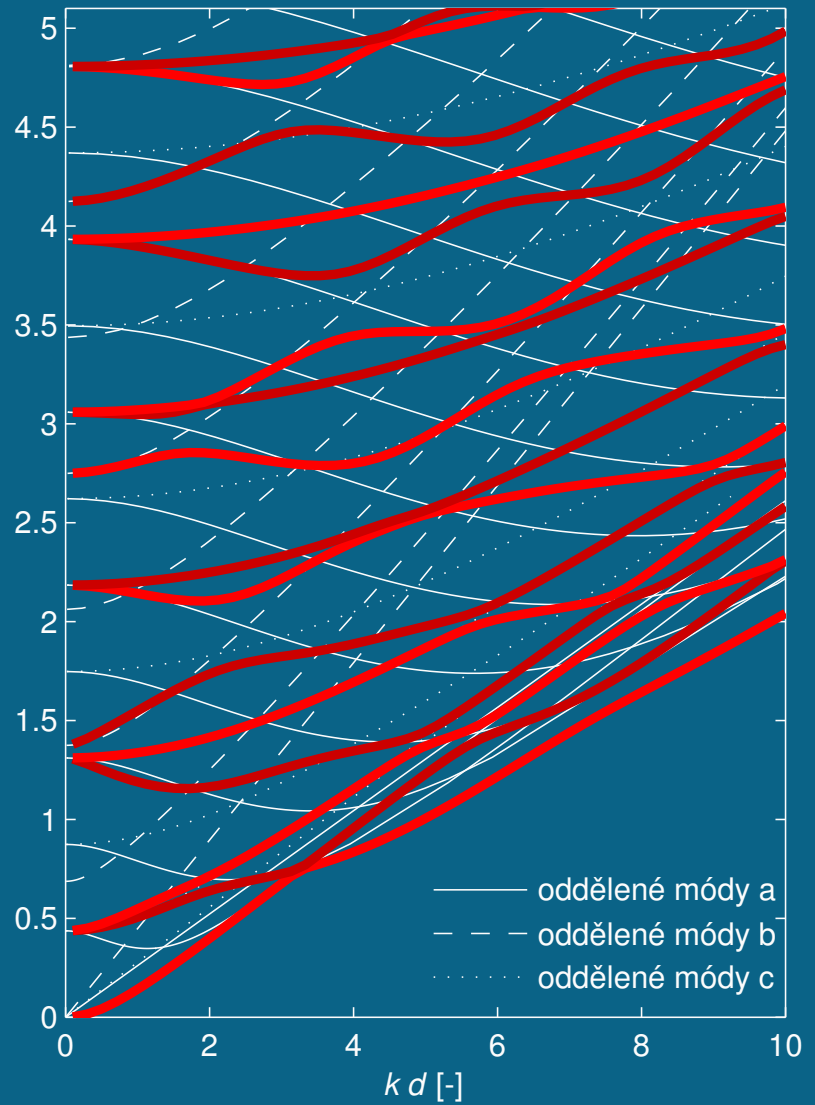


Směr šíření $\phi = 11^\circ$

symetrické módy

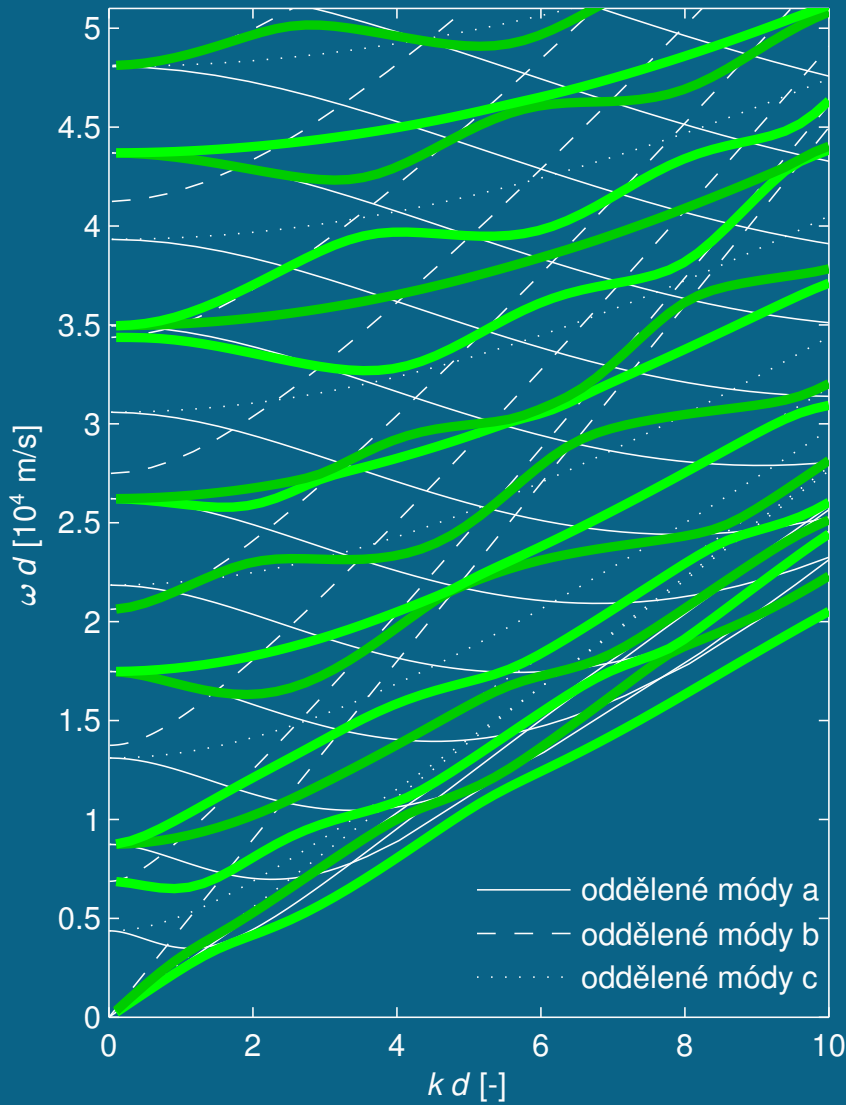


antisymetrické módy

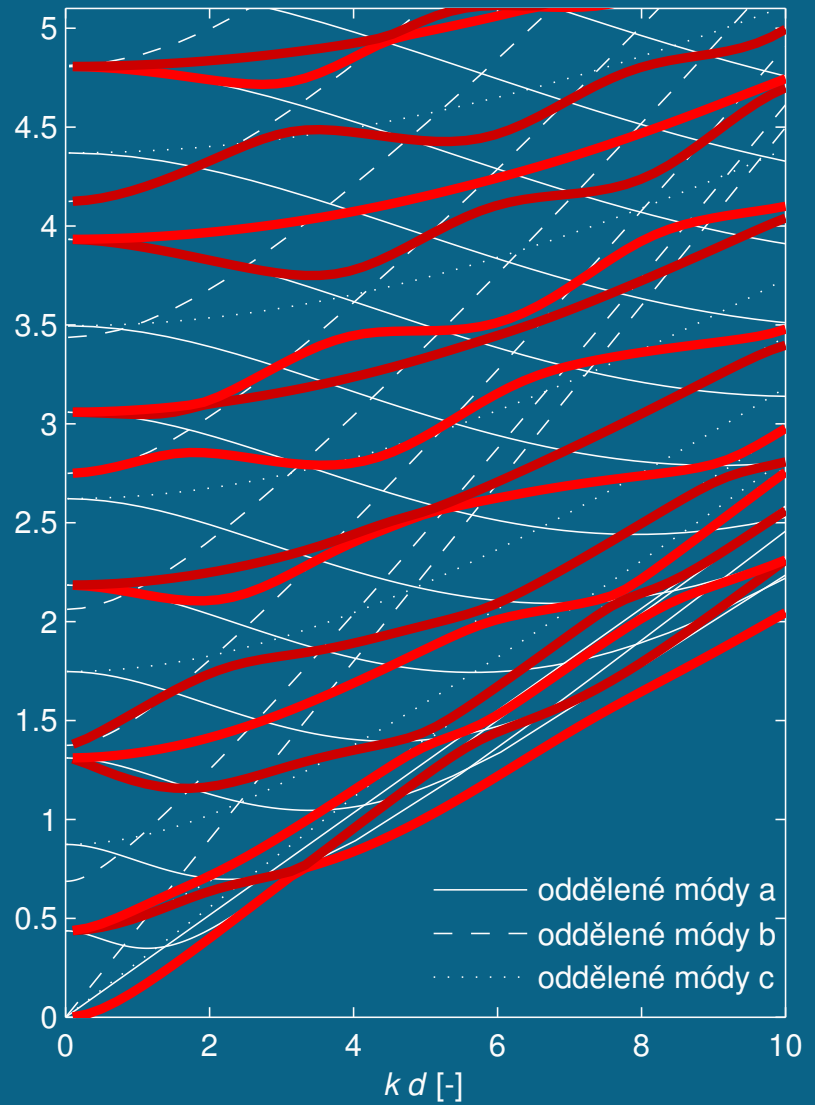


Směr šíření $\phi = 12^\circ$

symetrické módy

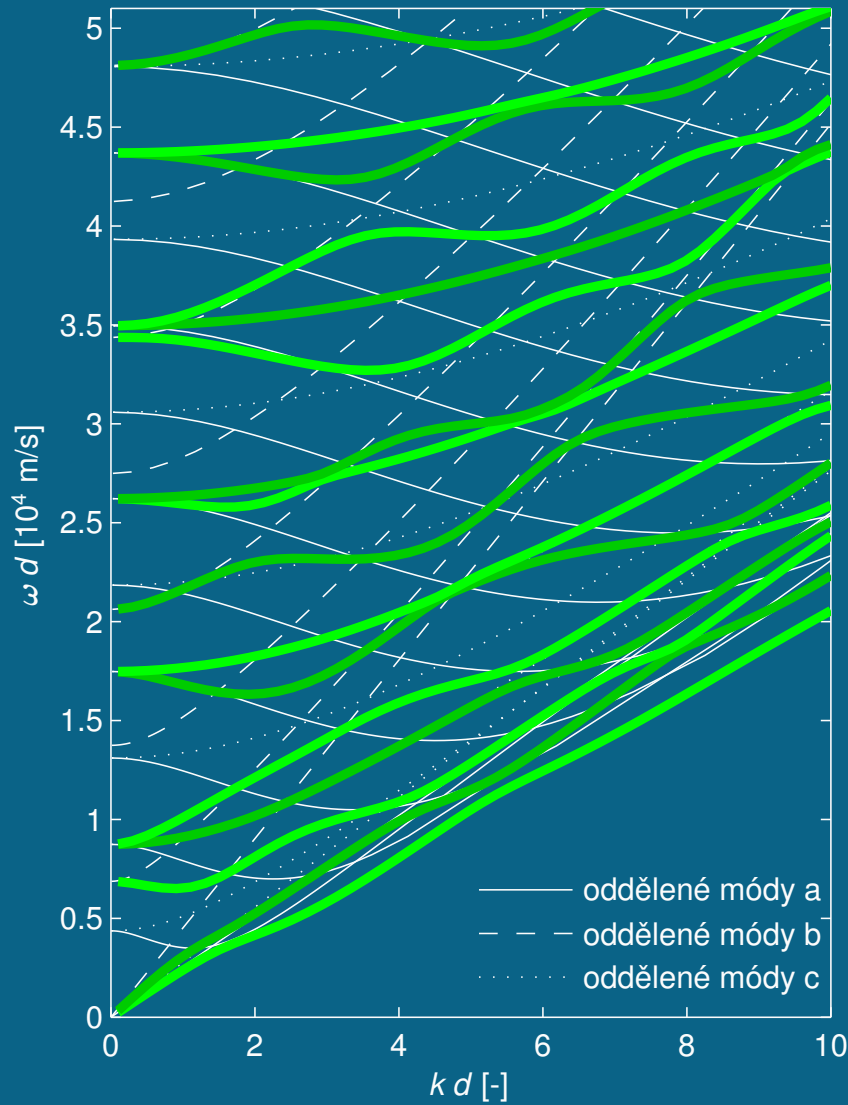


antisymetrické módy

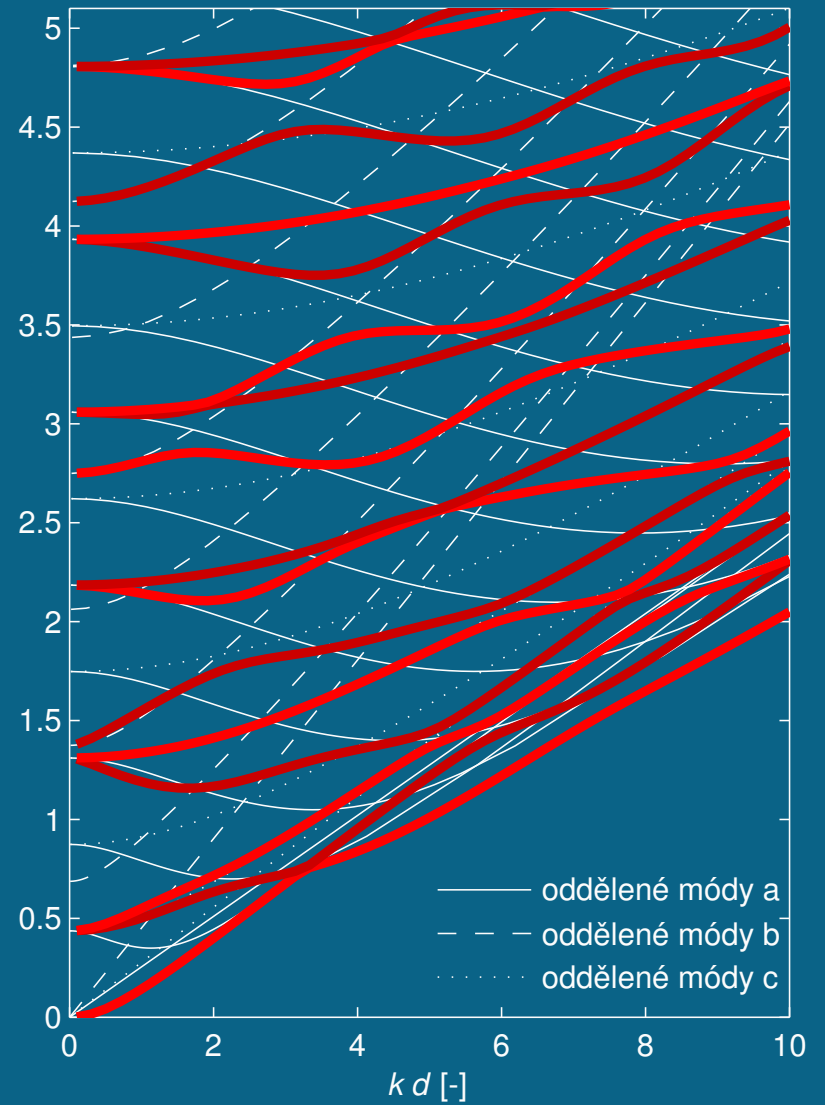


Směr šíření $\phi = 13^\circ$

symetrické módy

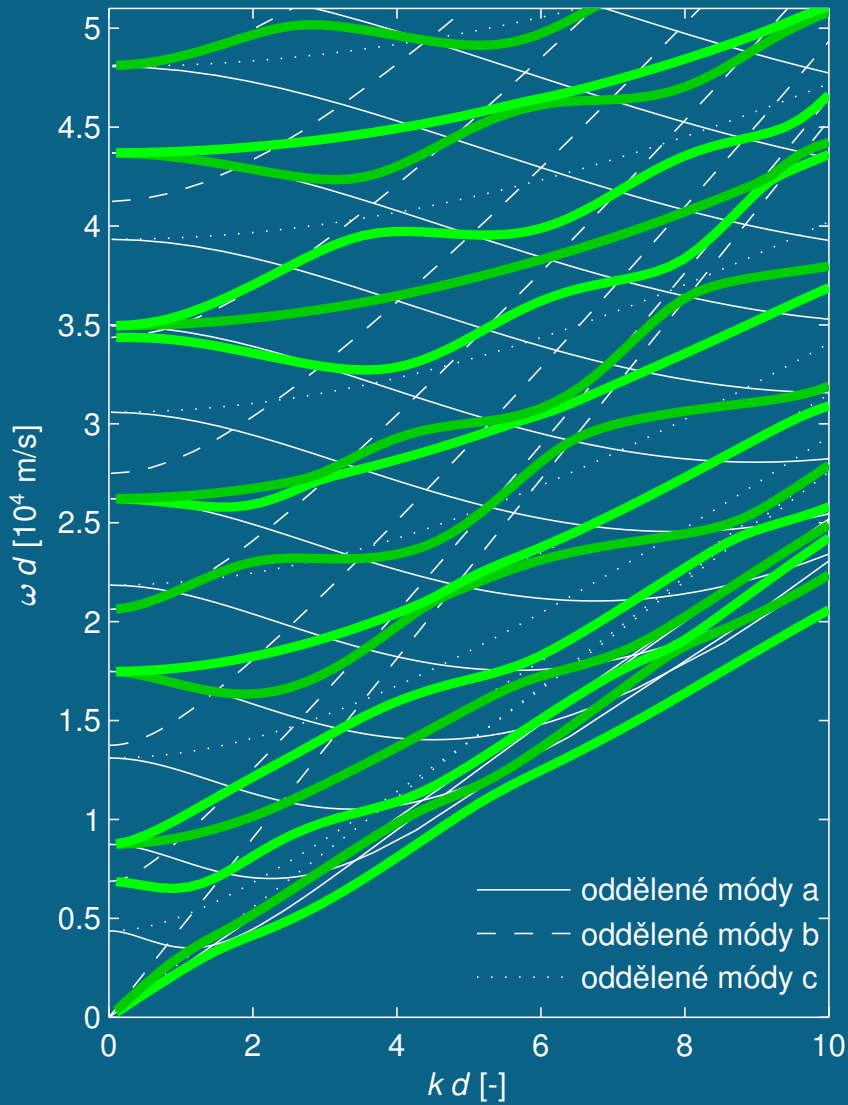


antisymetrické módy

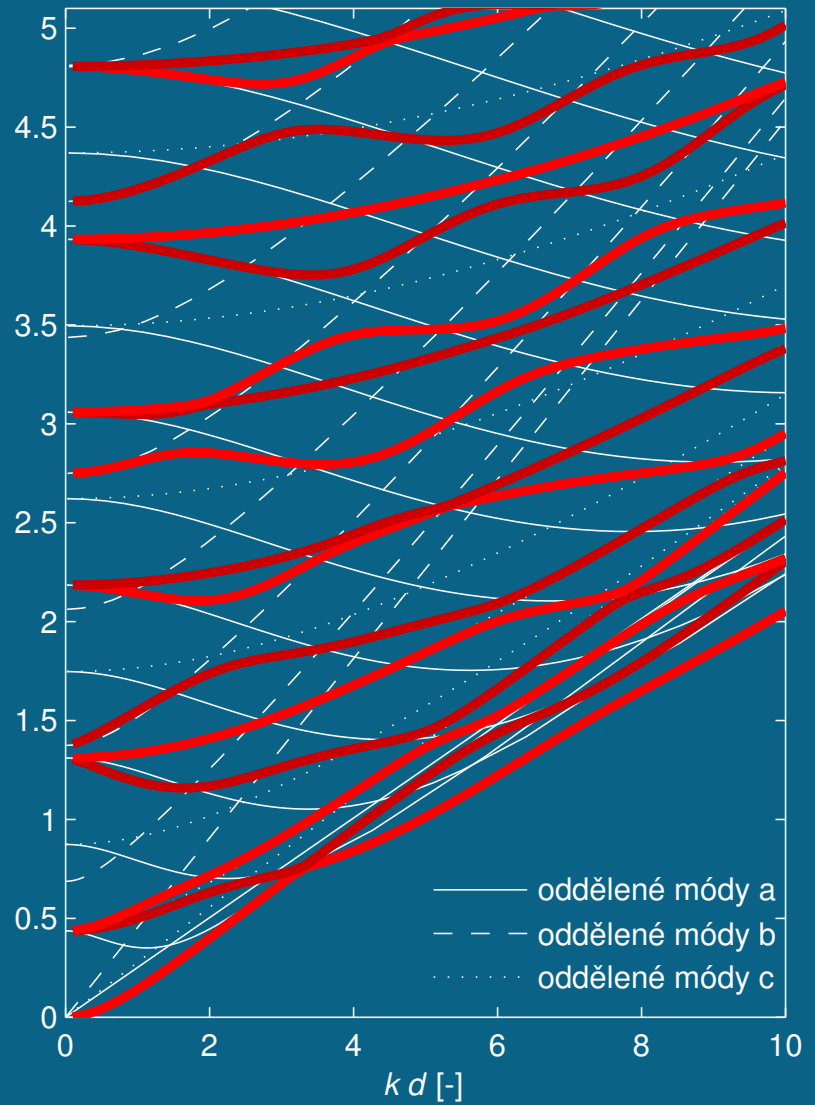


Směr šíření $\phi = 14^\circ$

symetrické módy

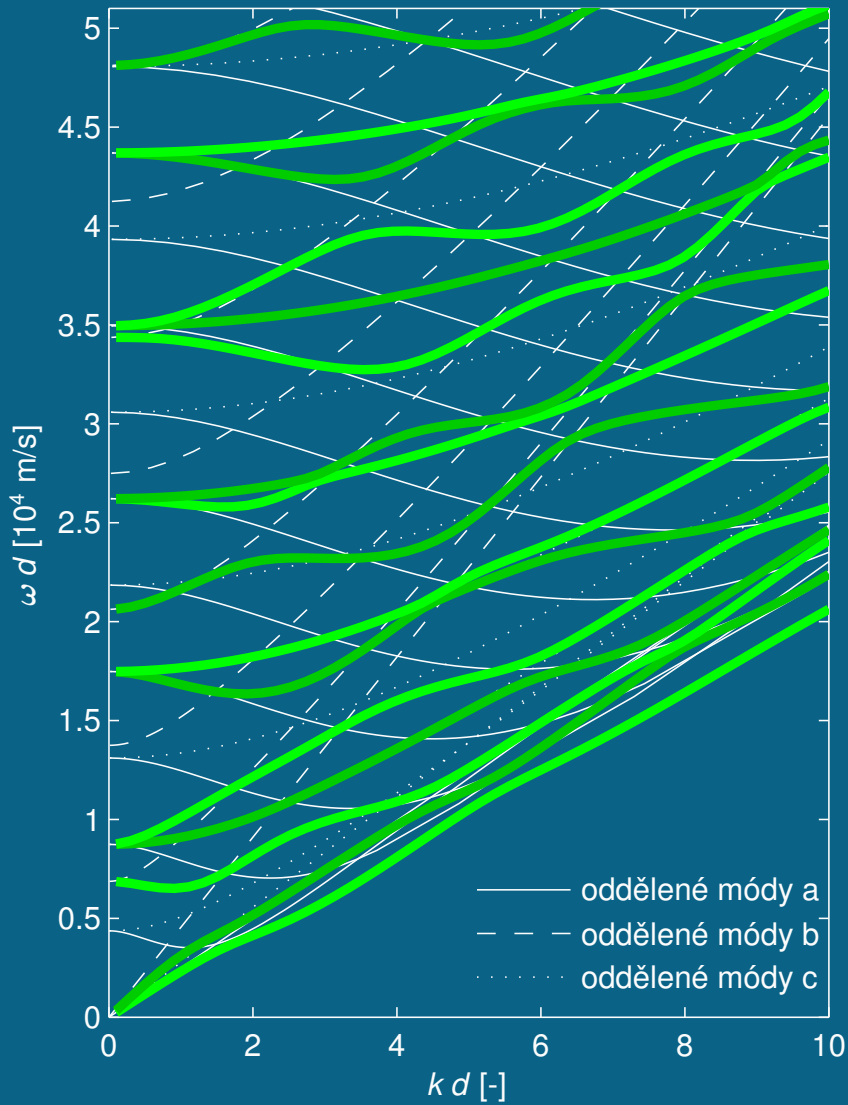


antisymetrické módy

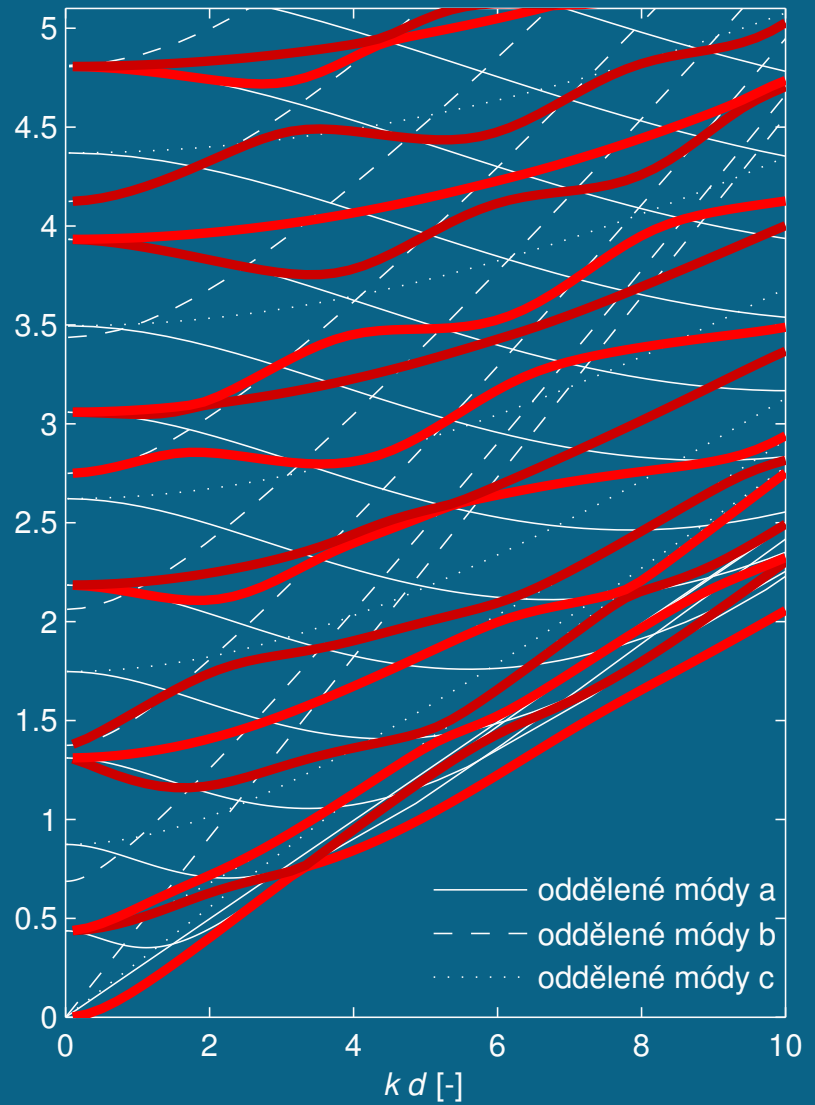


Směr šíření $\phi = 15^\circ$

symetrické módy

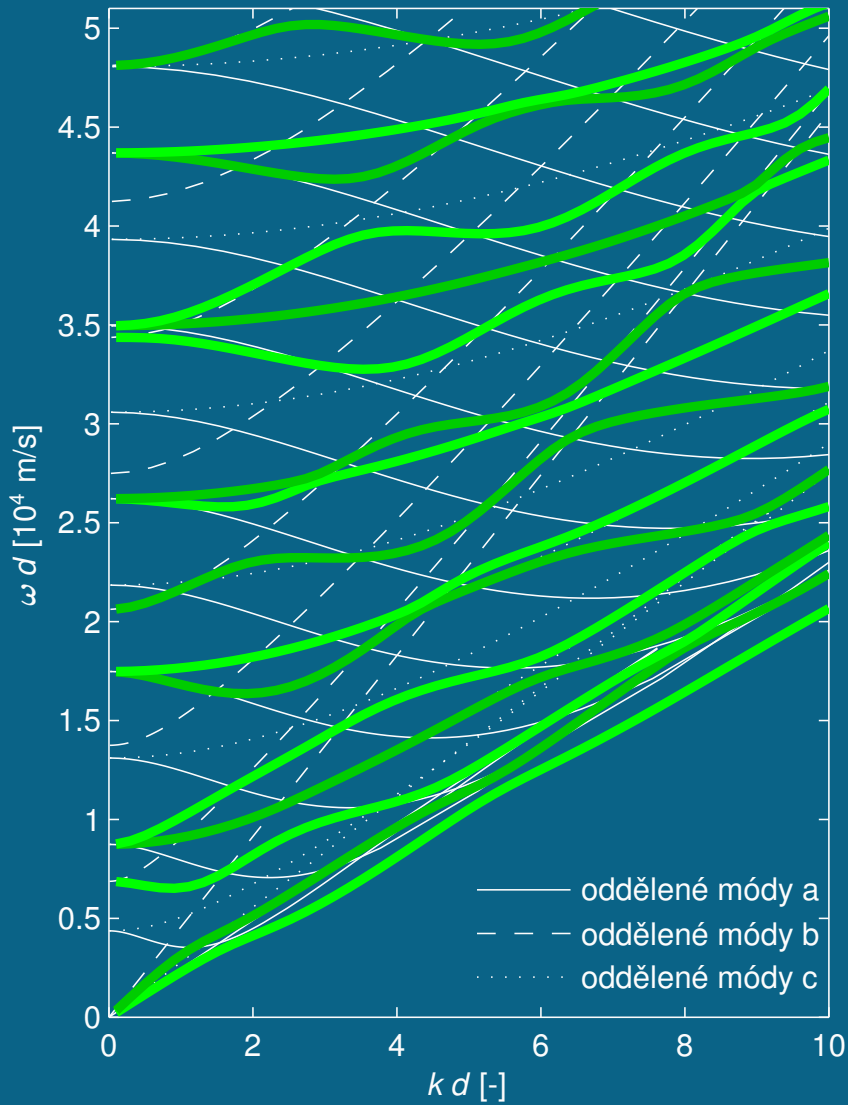


antisymetrické módy

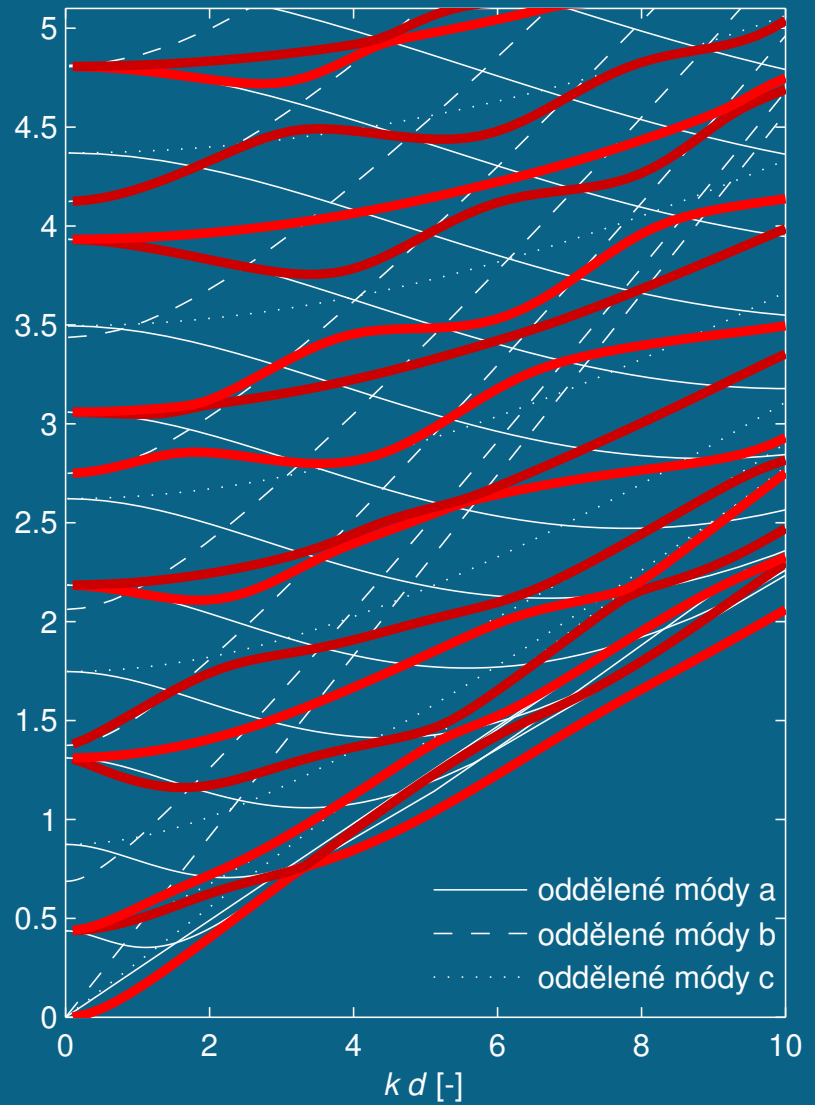


Směr šíření $\phi = 16^\circ$

symetrické módy

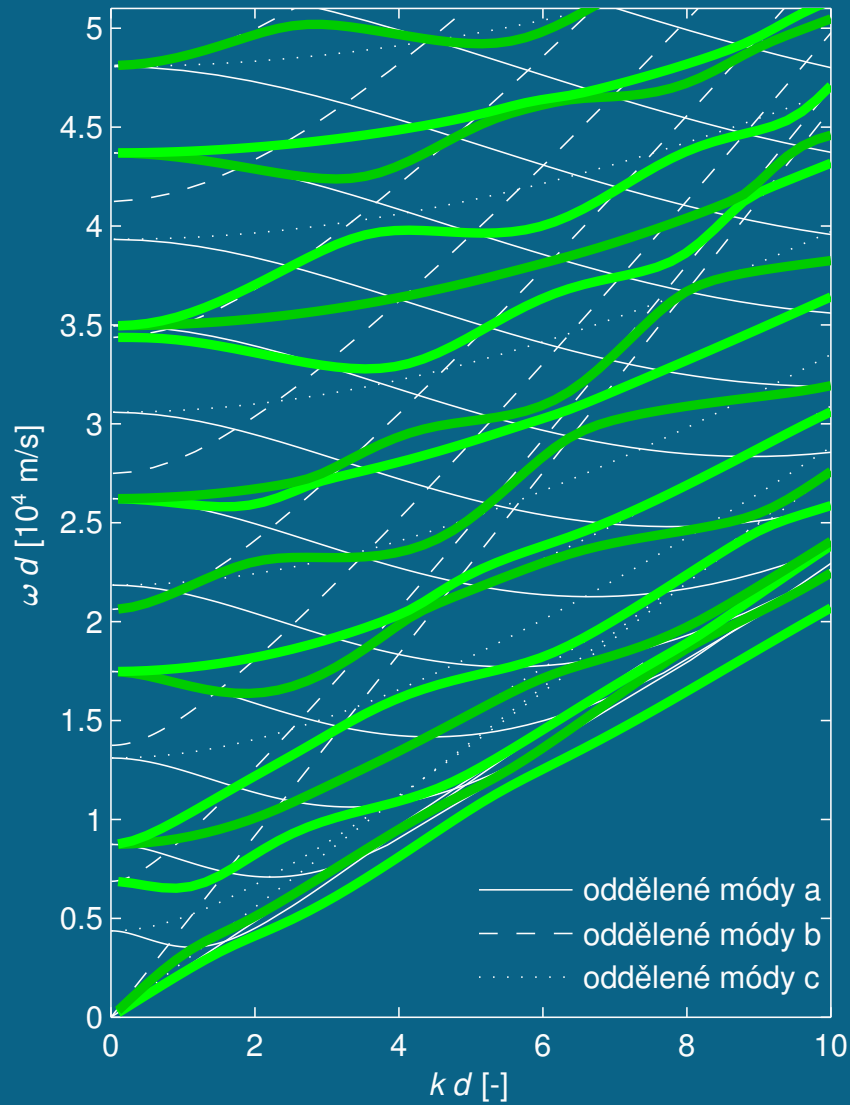


antisymetrické módy

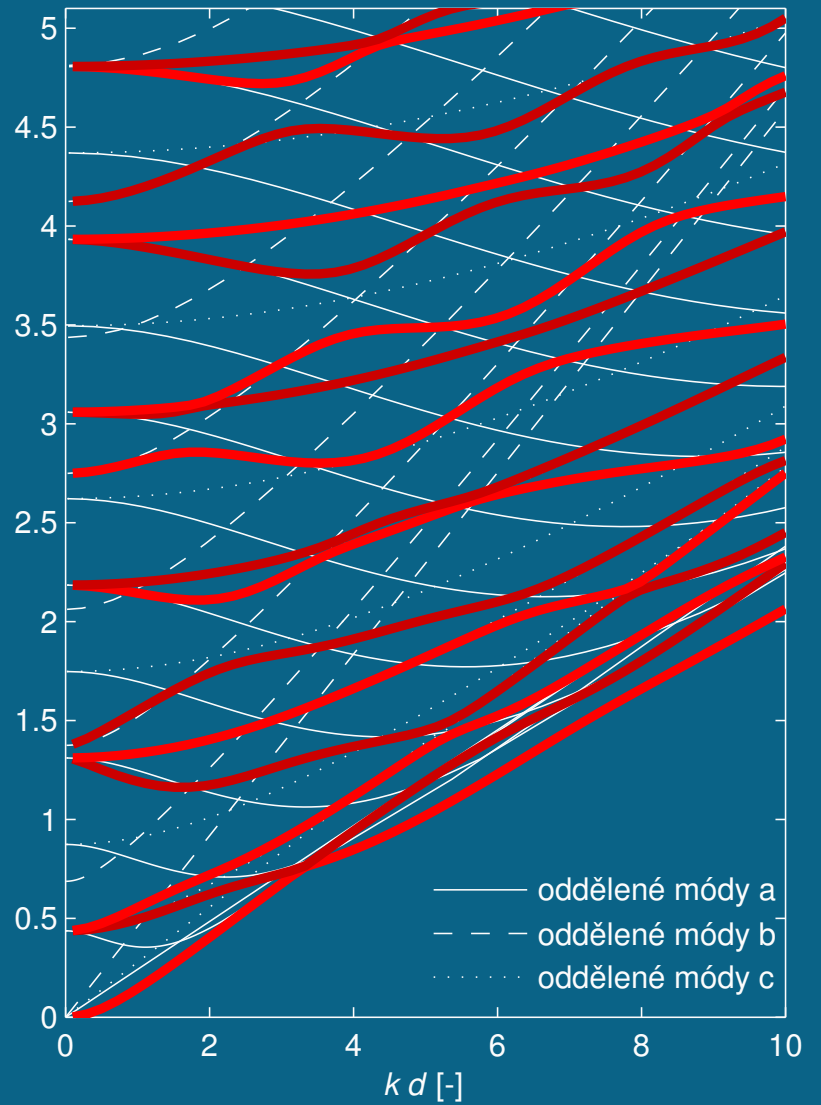


Směr šíření $\phi = 17^\circ$

symetrické módy

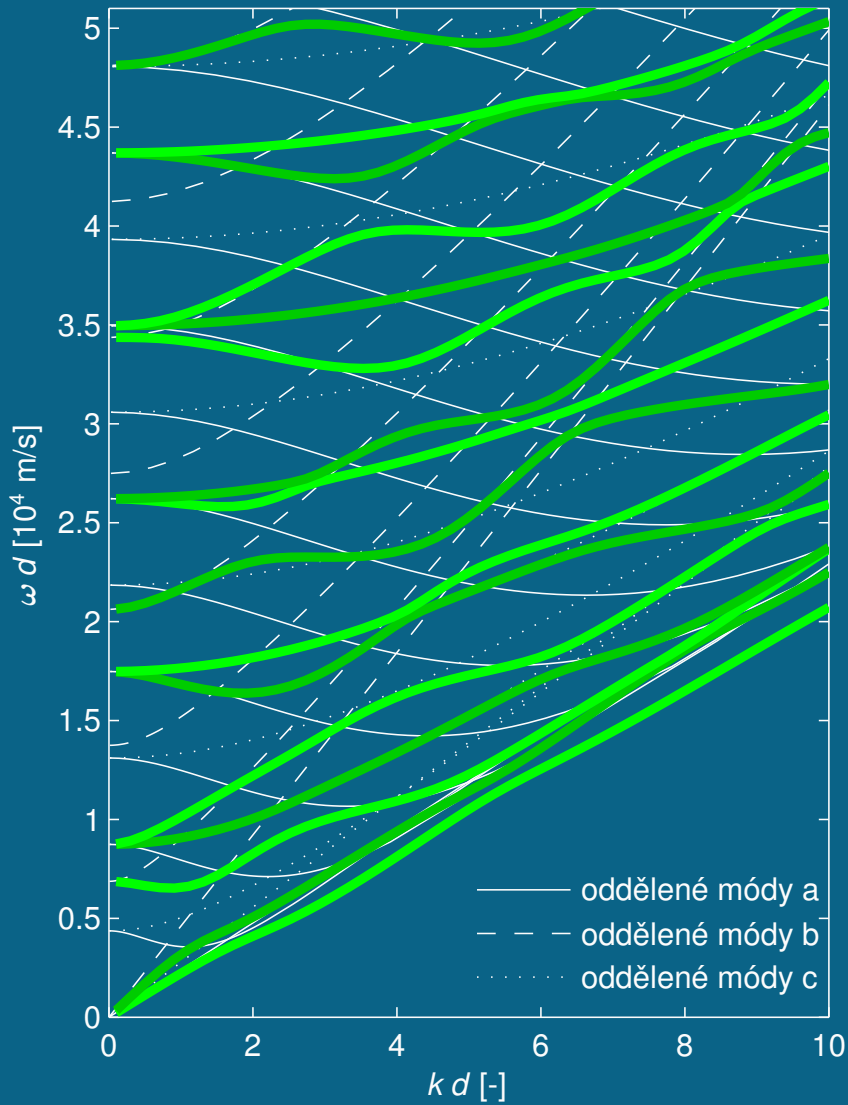


antisymetrické módy

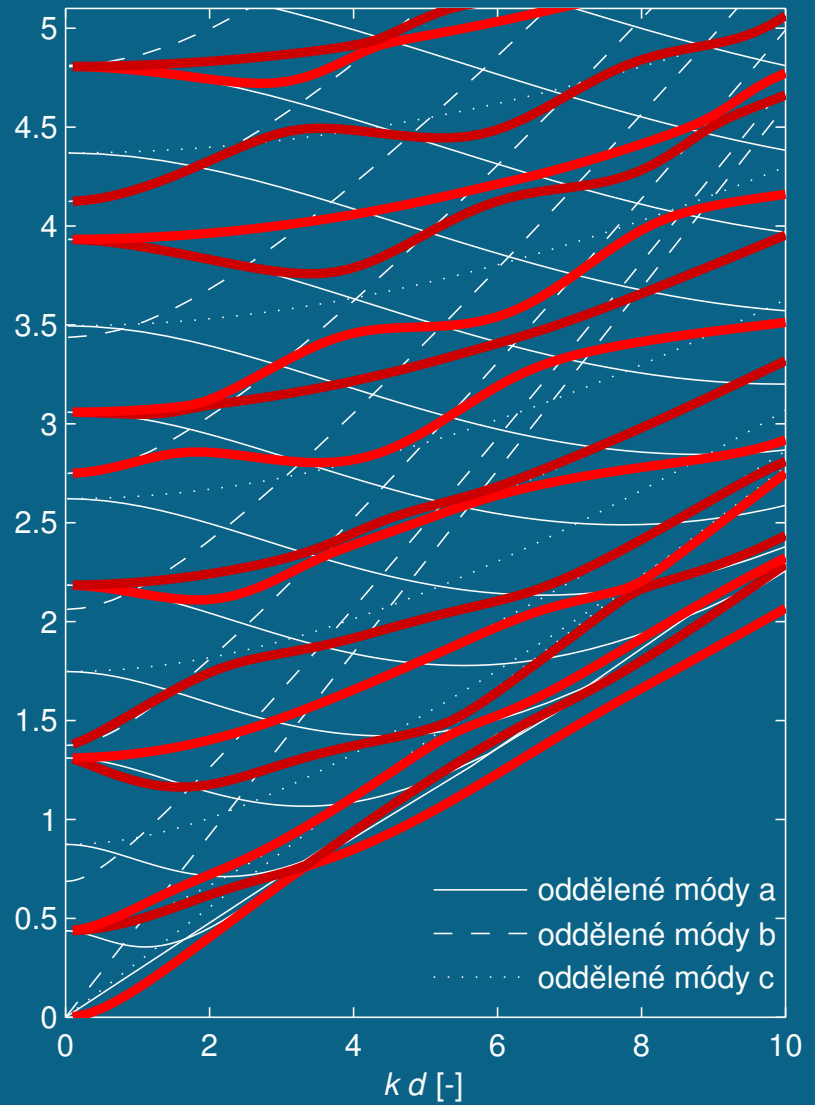


Směr šíření $\phi = 18^\circ$

symetrické módy

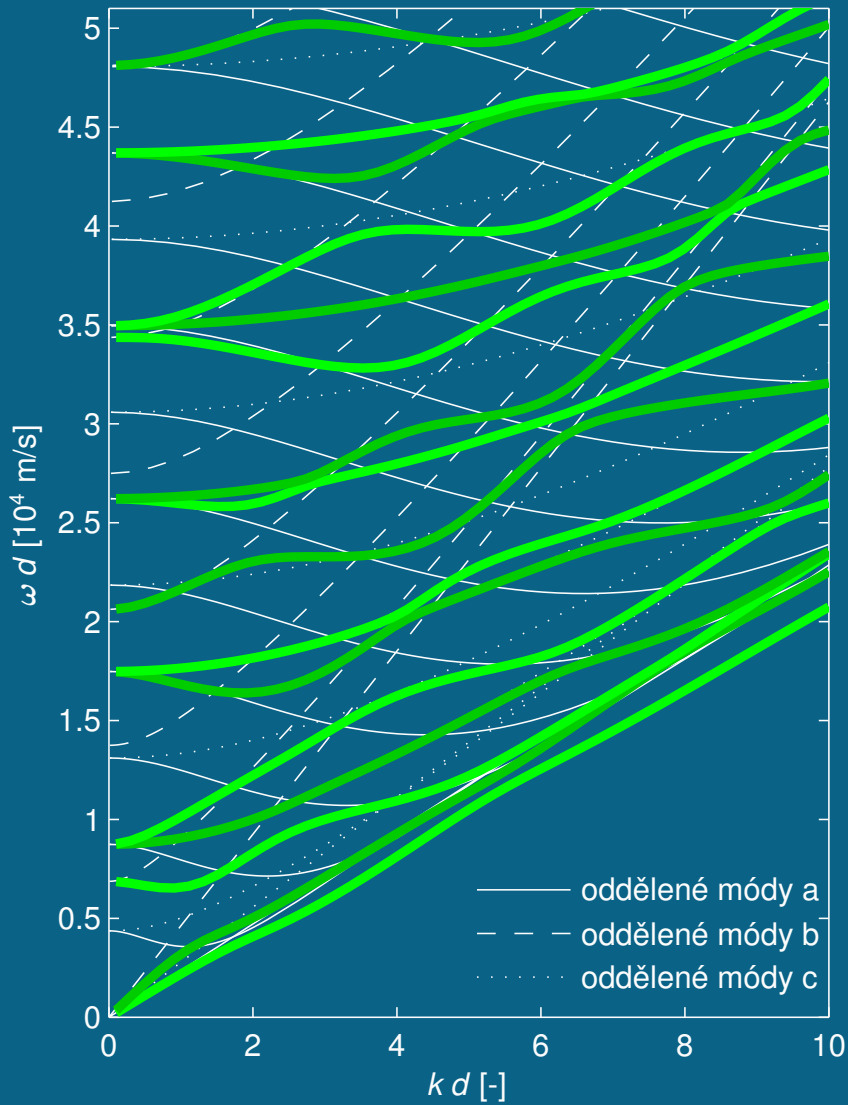


antisymetrické módy

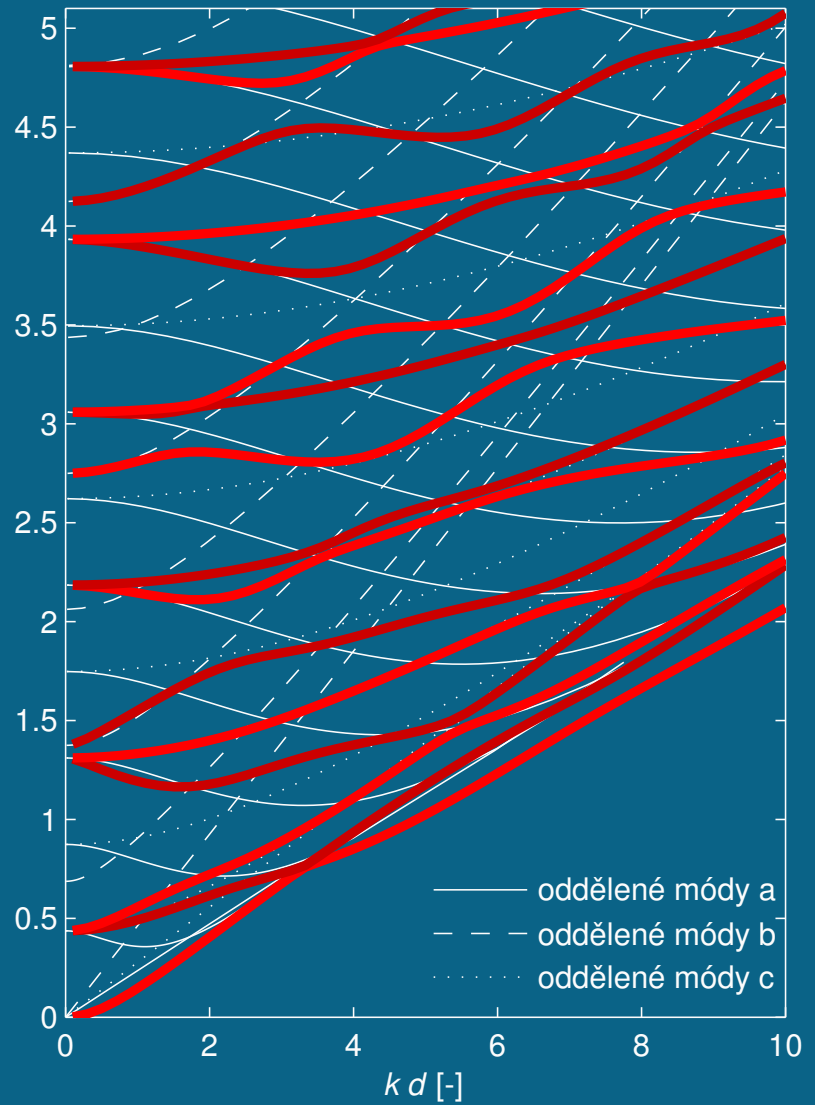


Směr šíření $\phi = 19^\circ$

symetrické módy

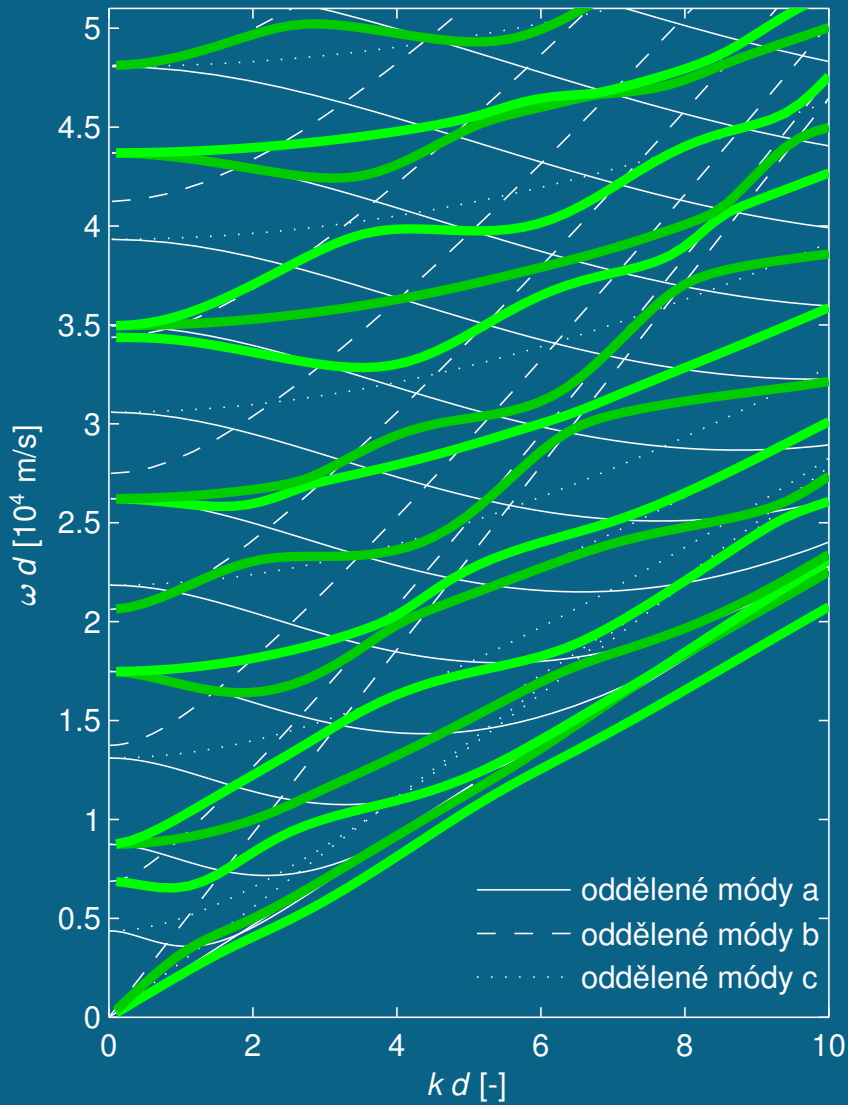


antisymetrické módy

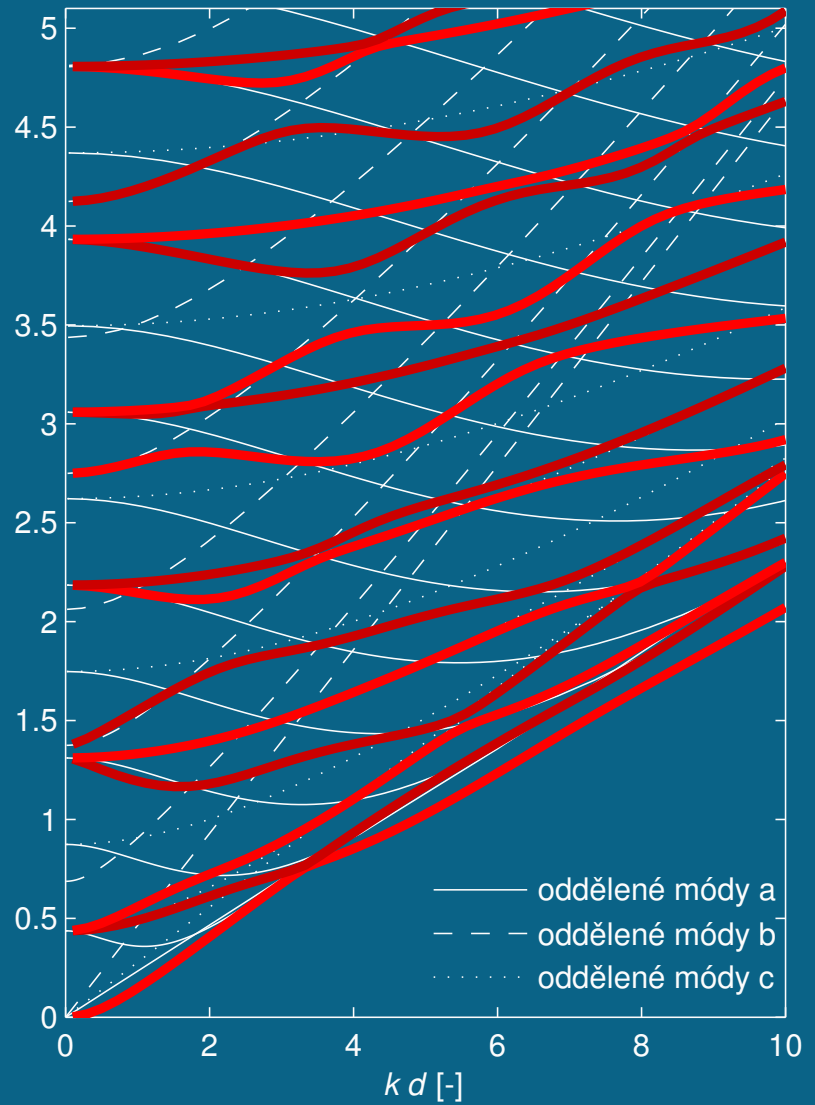


Směr šíření $\phi = 20^\circ$

symetrické módy

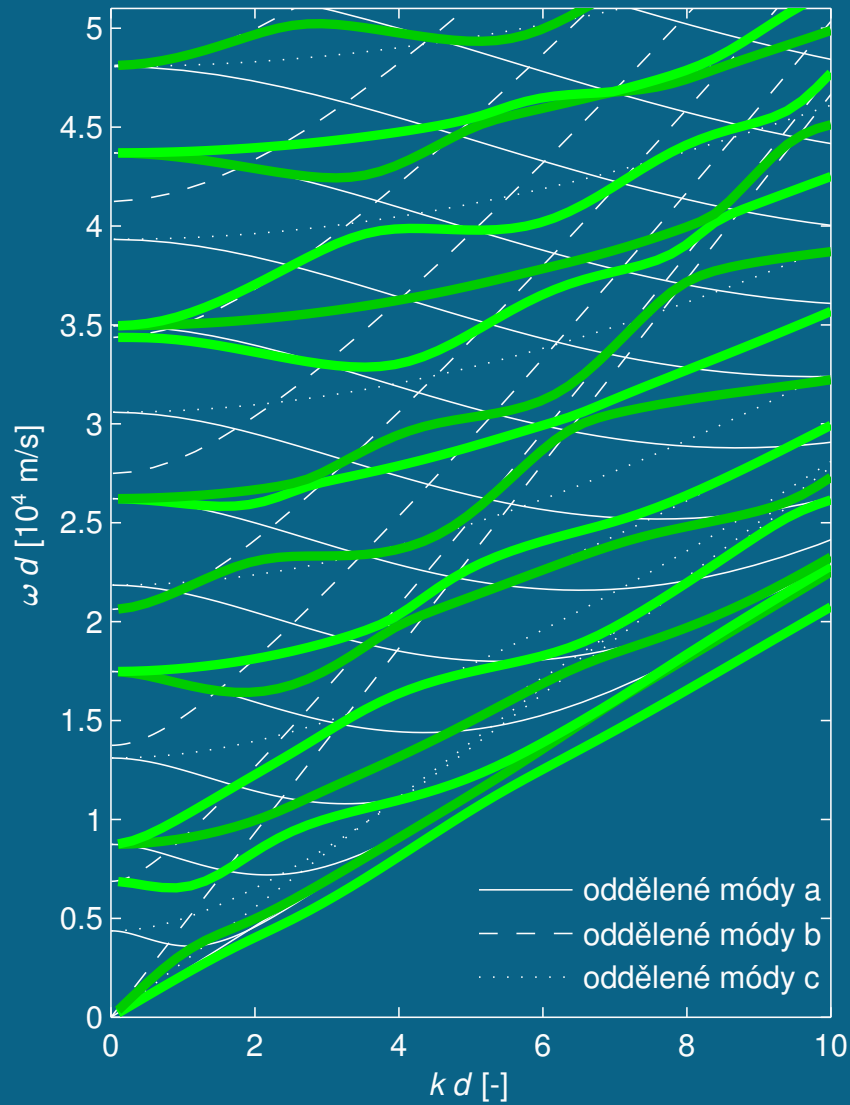


antisymetrické módy

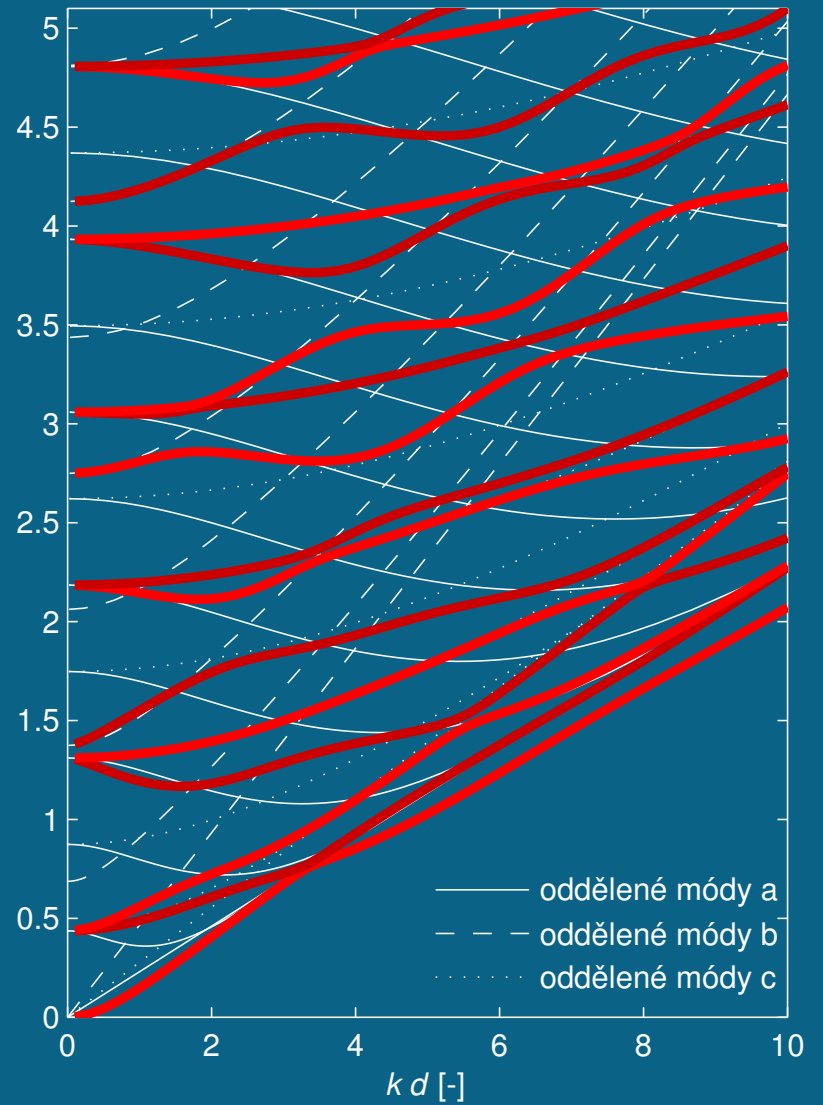


Směr šíření $\phi = 21^\circ$

symetrické módy

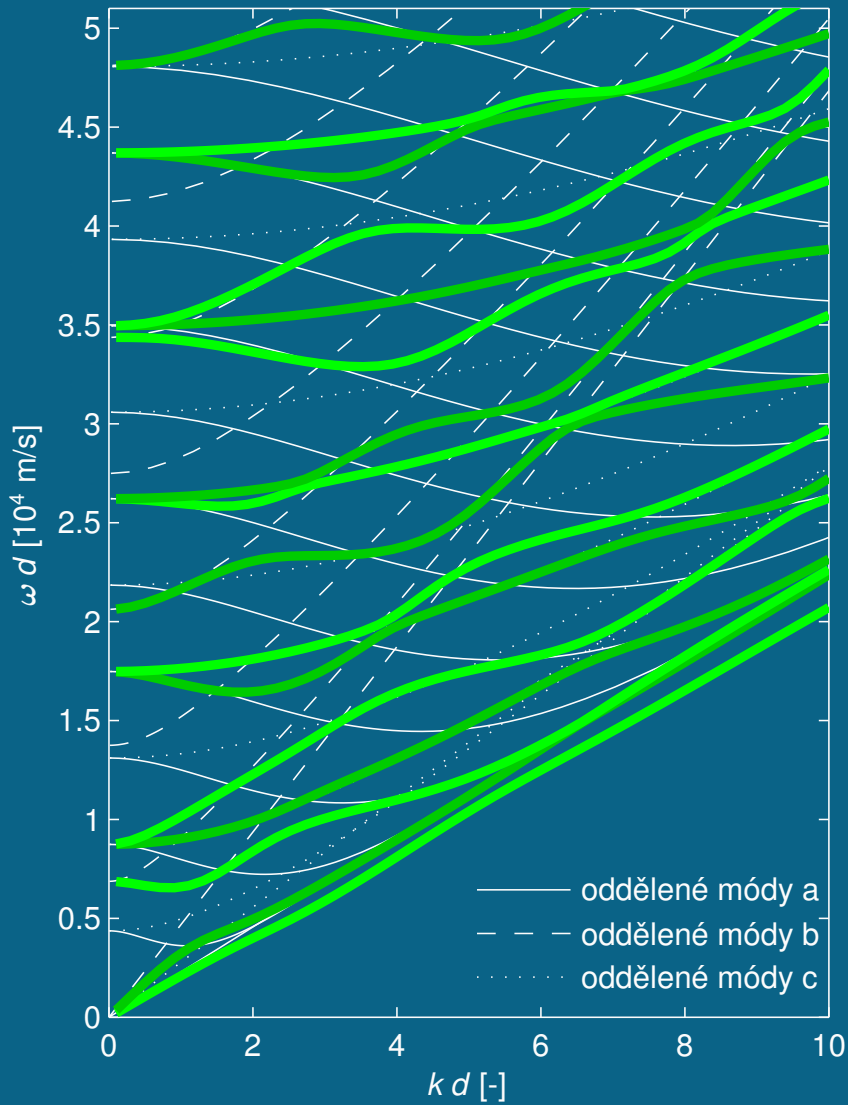


antisymetrické módy

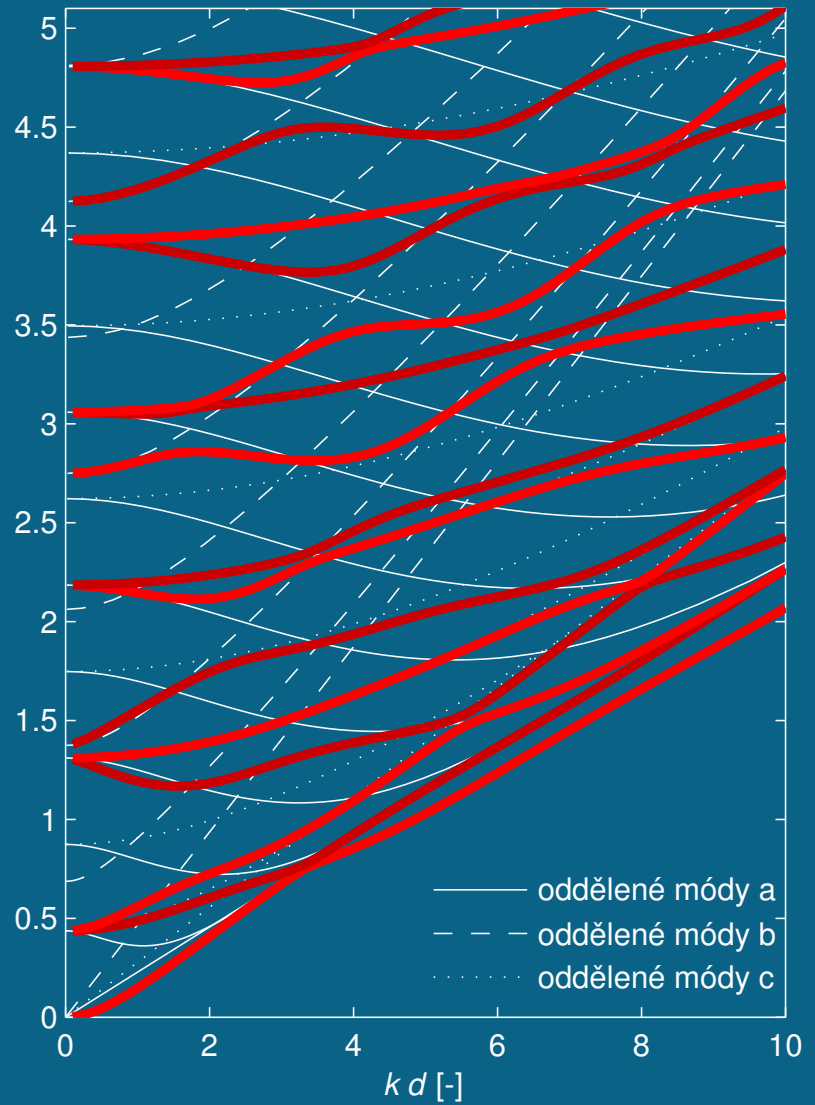


Směr šíření $\phi = 22^\circ$

symetrické módy

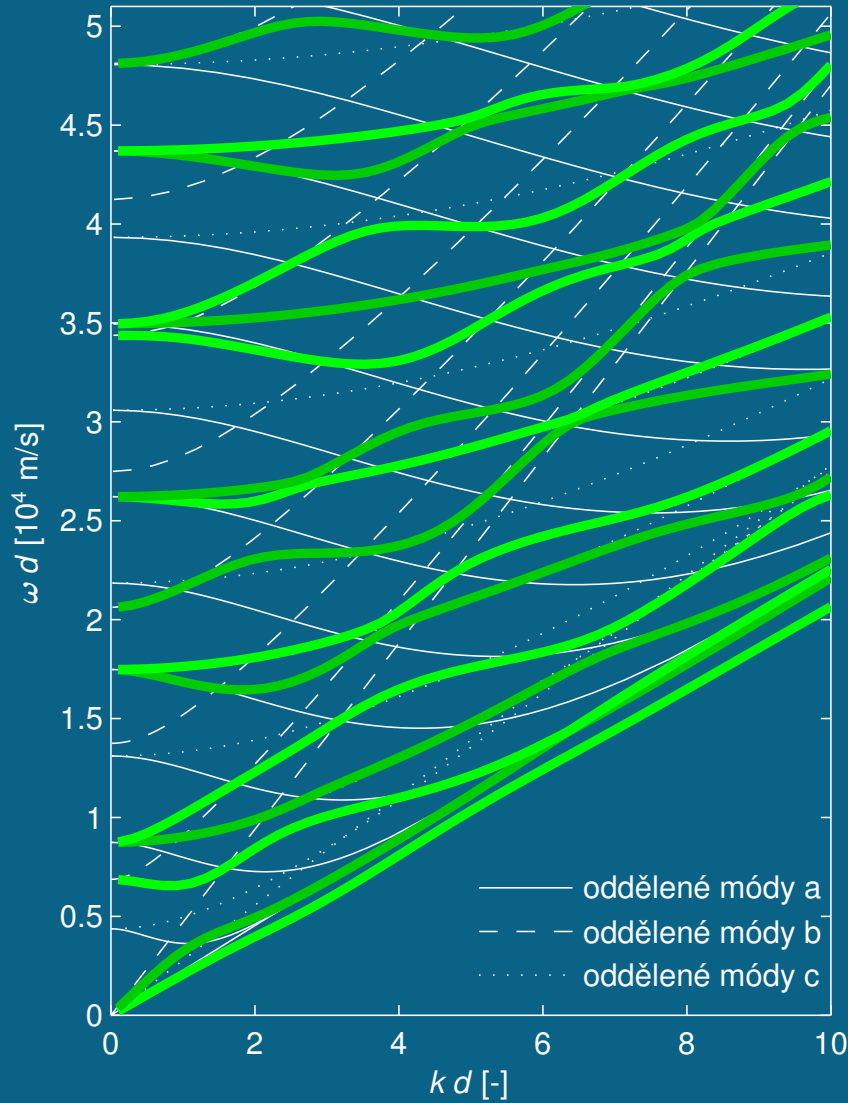


antisymetrické módy

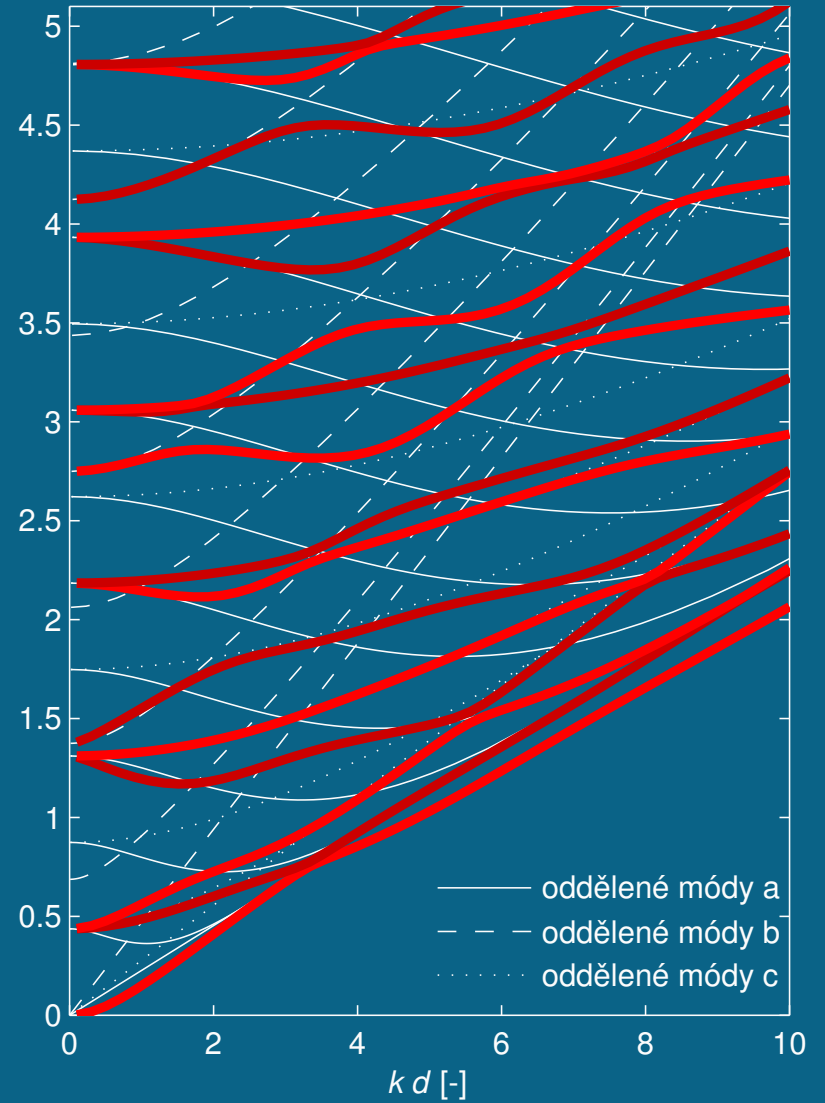


Směr šíření $\phi = 23^\circ$

symetrické módy

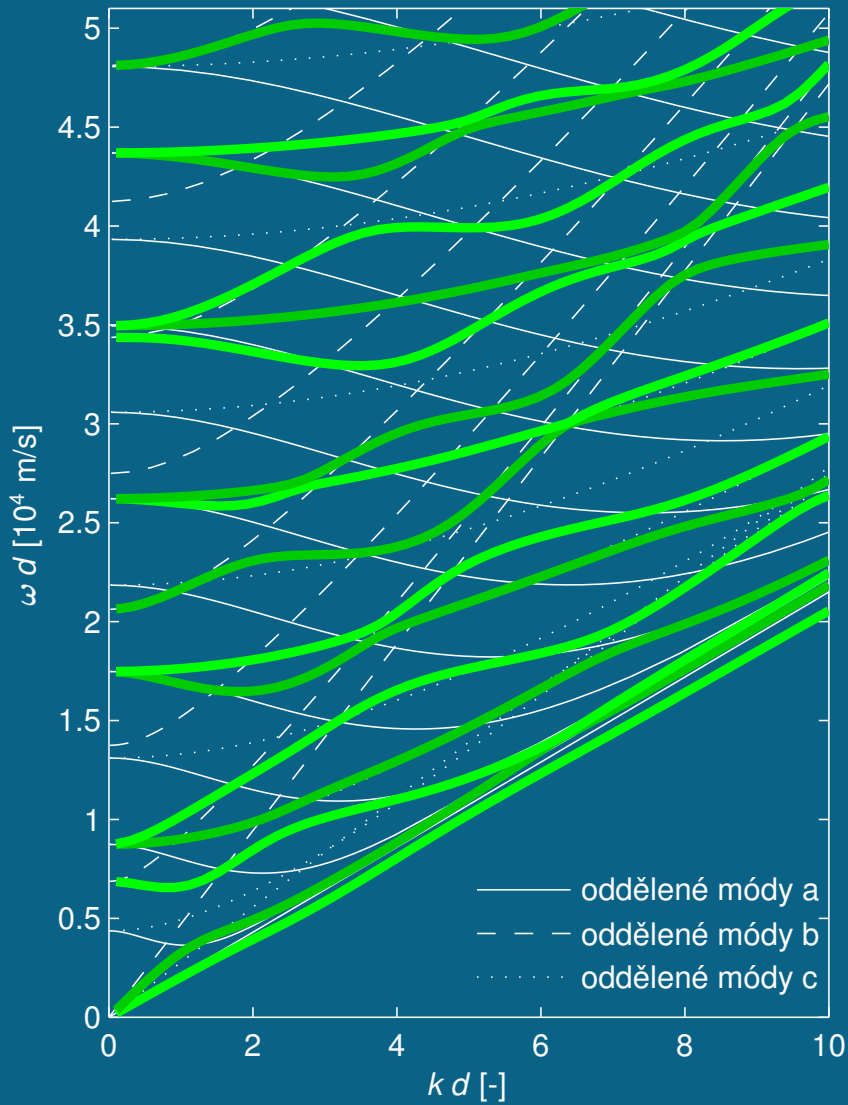


antisymetrické módy

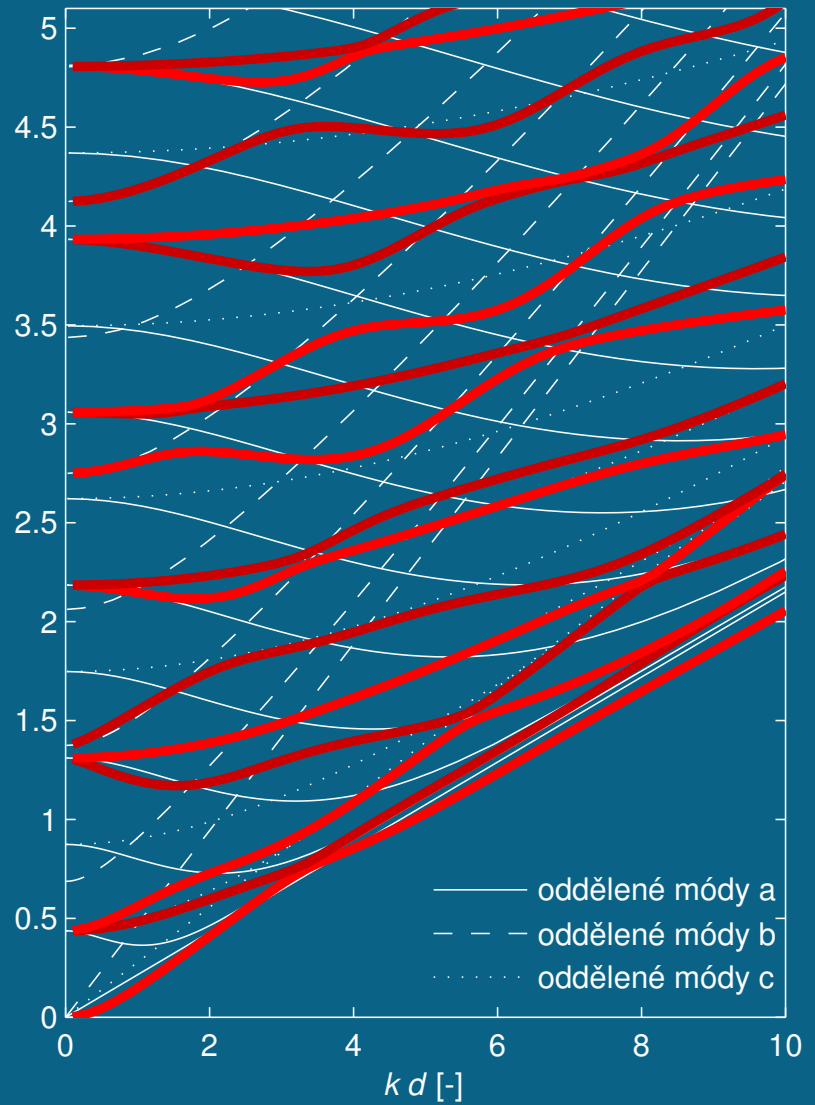


Směr šíření $\phi = 24^\circ$

symetrické módy

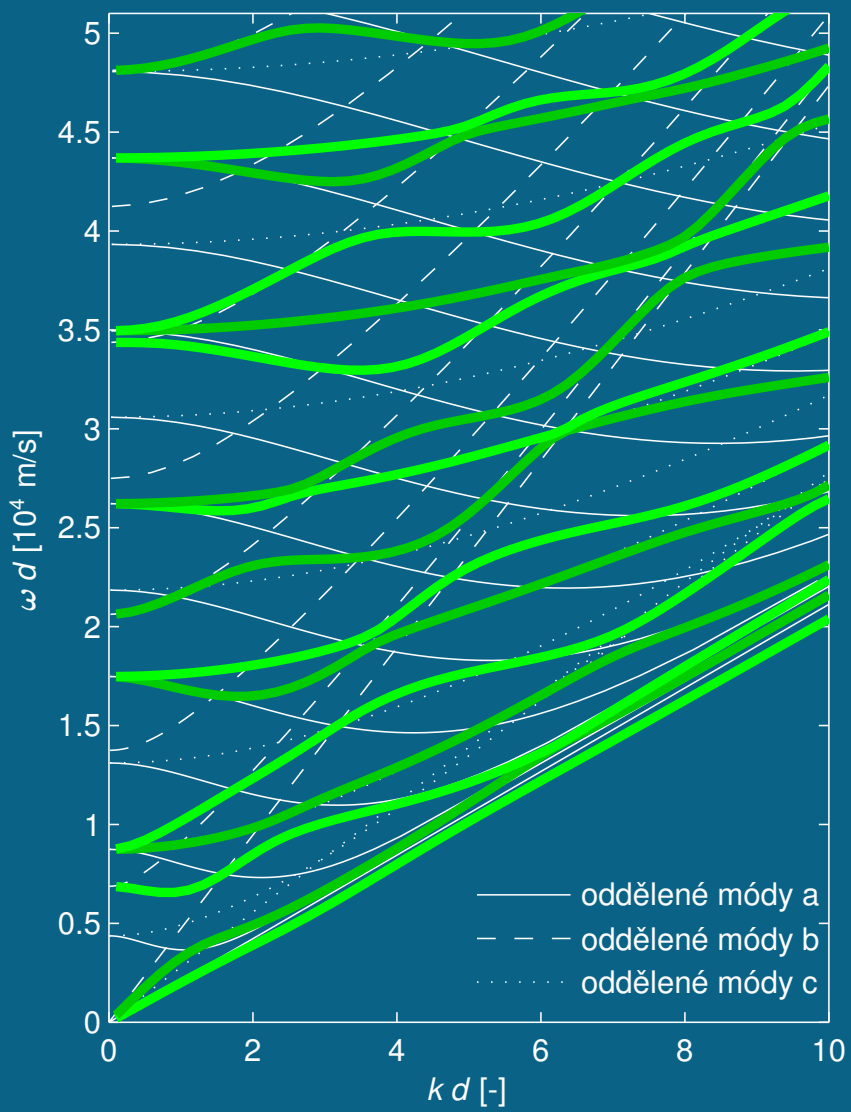


antisymetrické módy

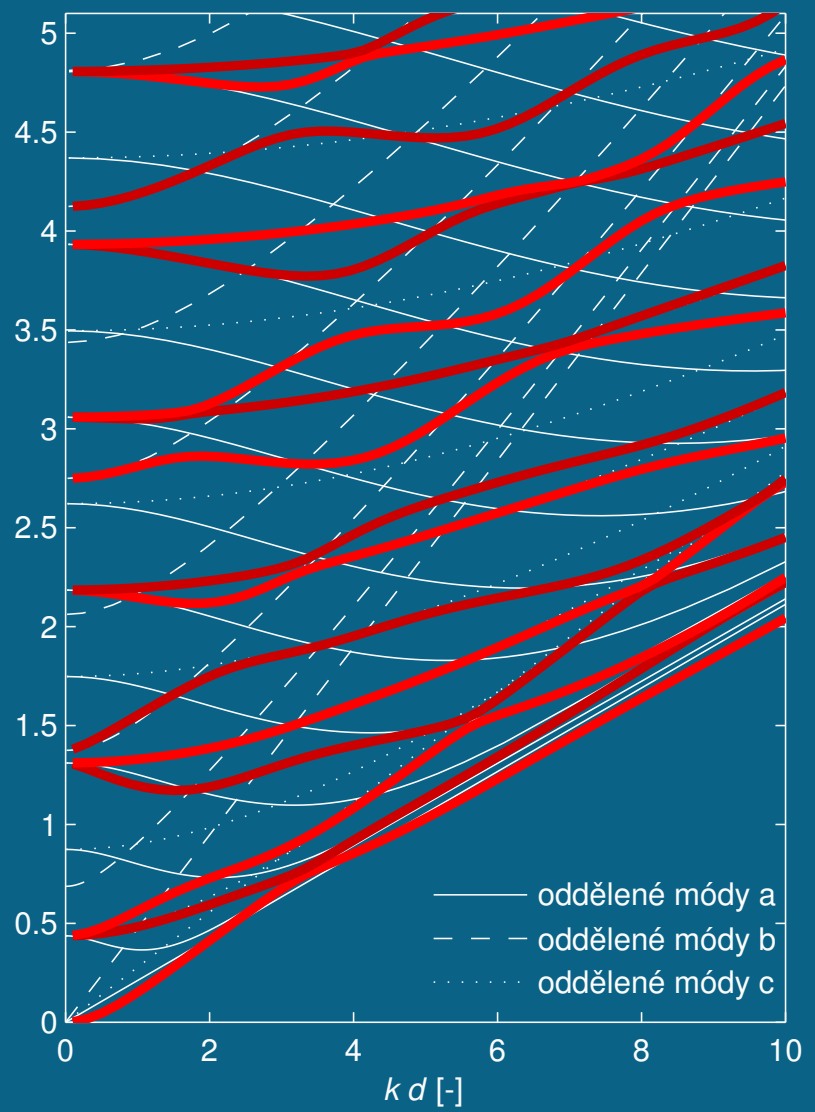


Směr šíření $\phi = 25^\circ$

symetrické módy

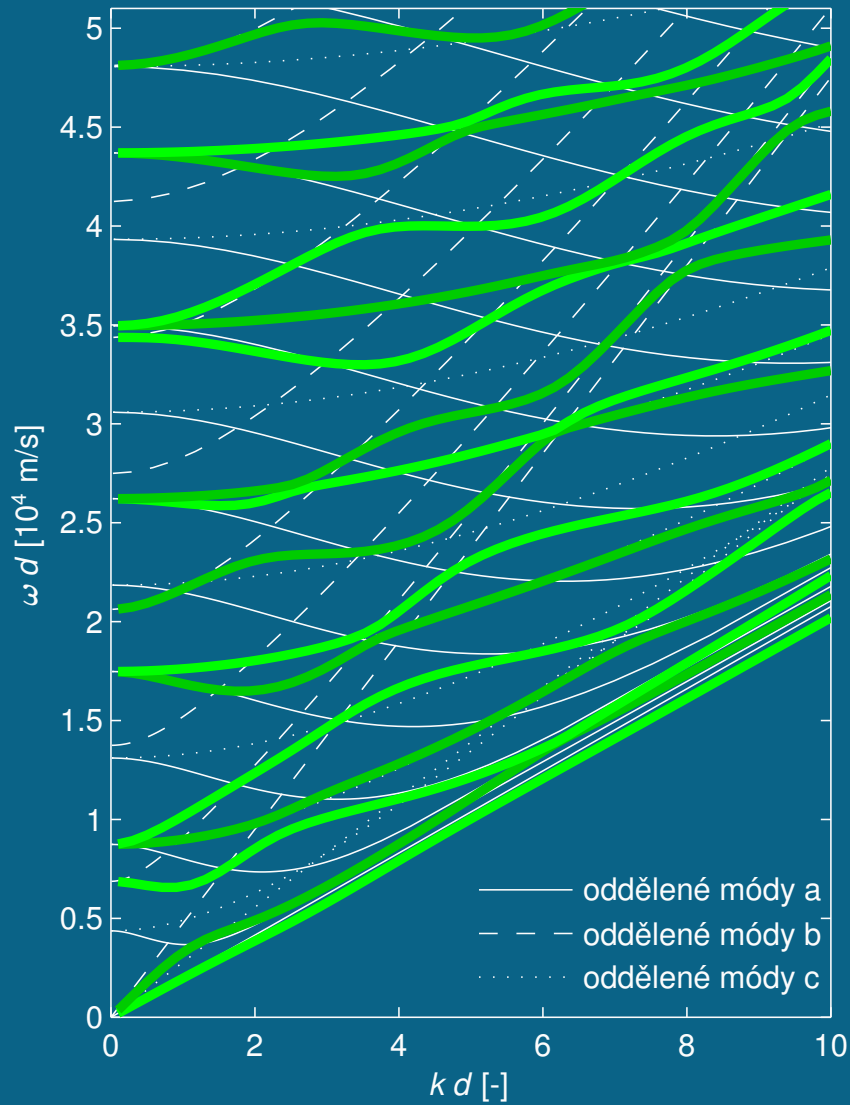


antisymetrické módy

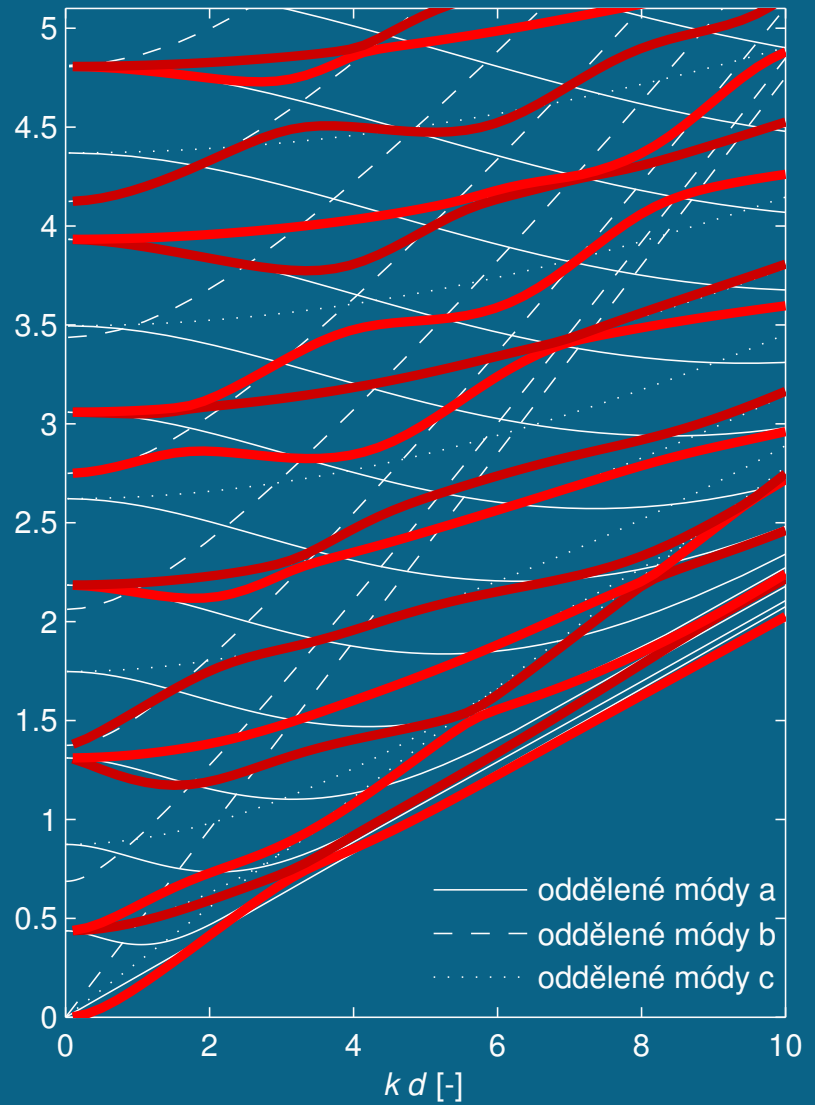


Směr šíření $\phi = 26^\circ$

symetrické módy

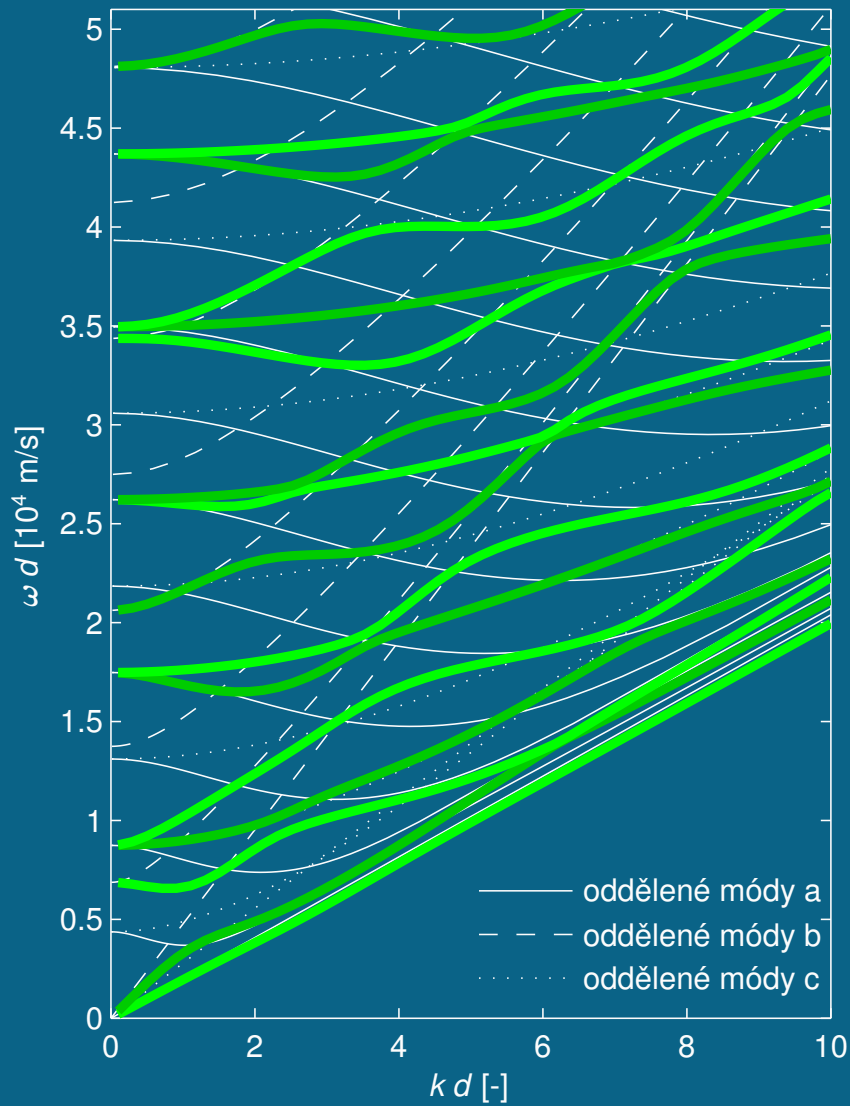


antisymetrické módy

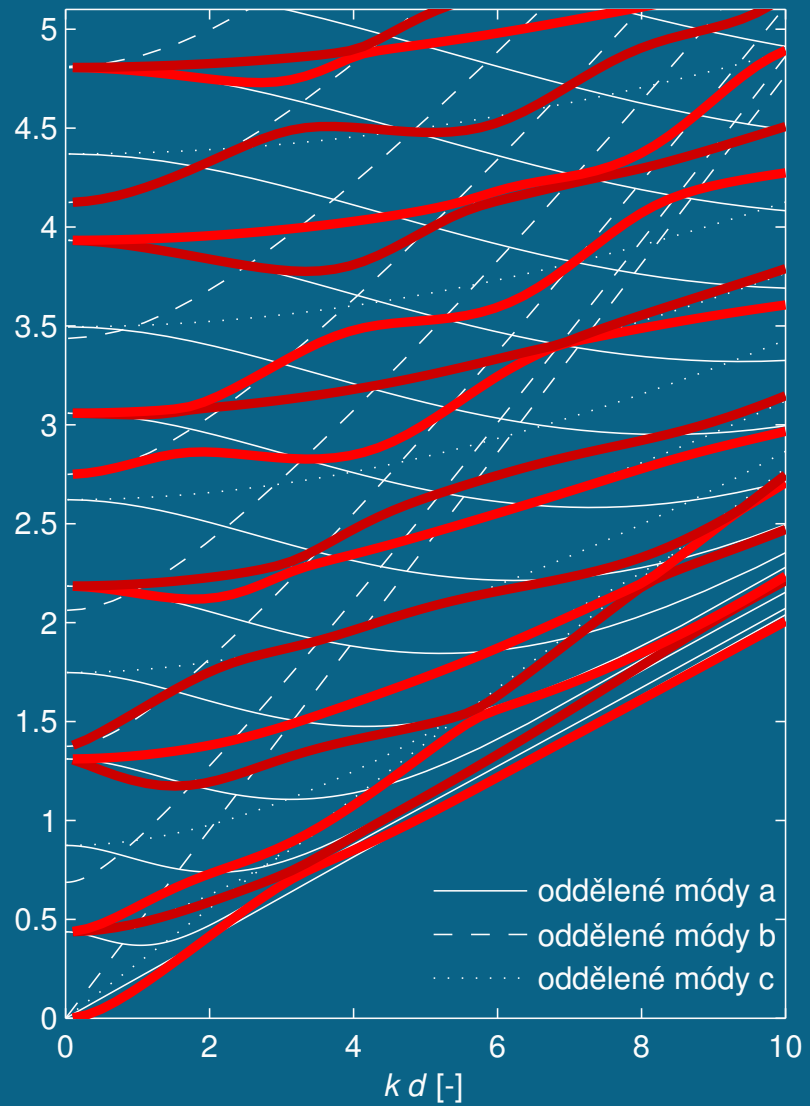


Směr šíření $\phi = 27^\circ$

symetrické módy

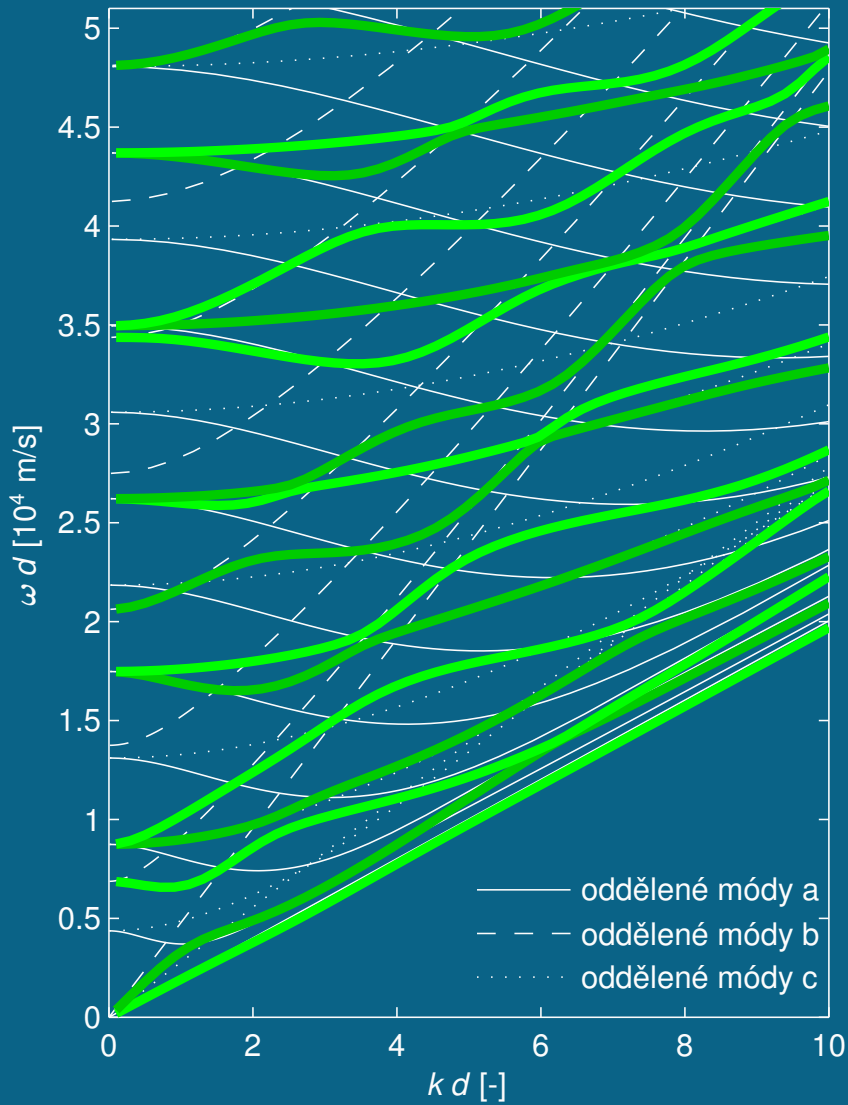


antisymetrické módy

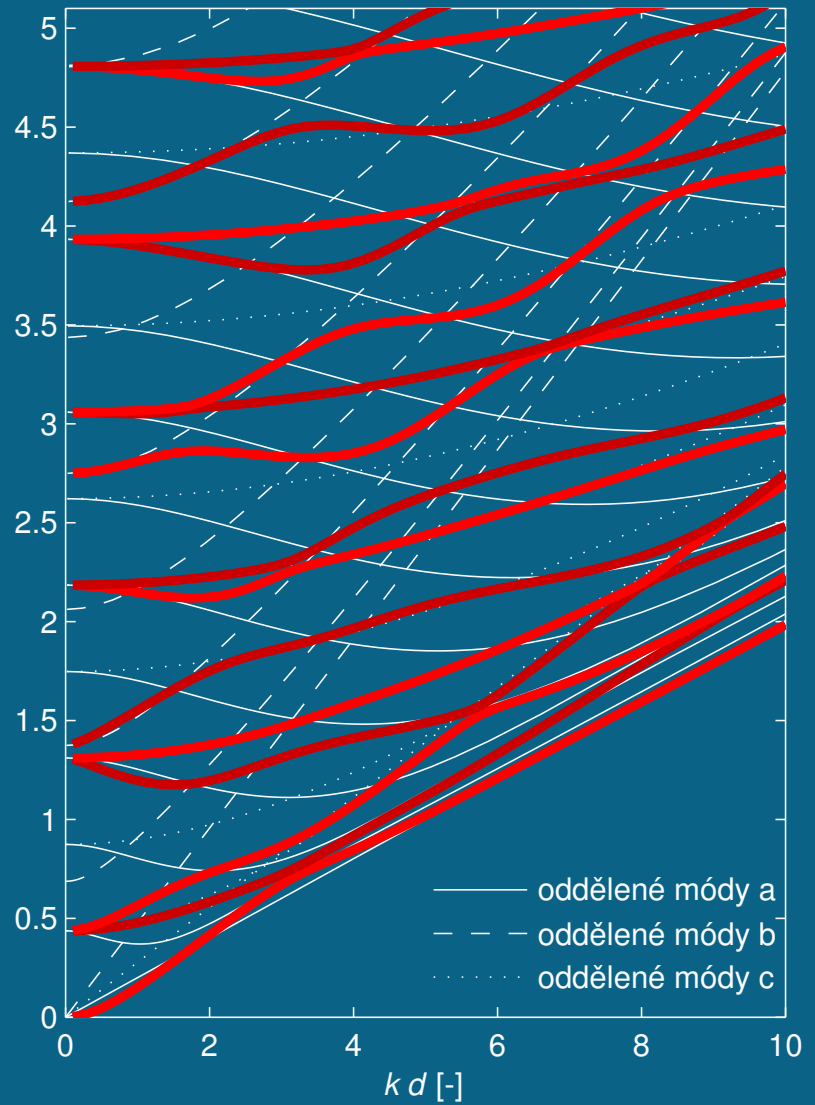


Směr šíření $\phi = 28^\circ$

symetrické módy

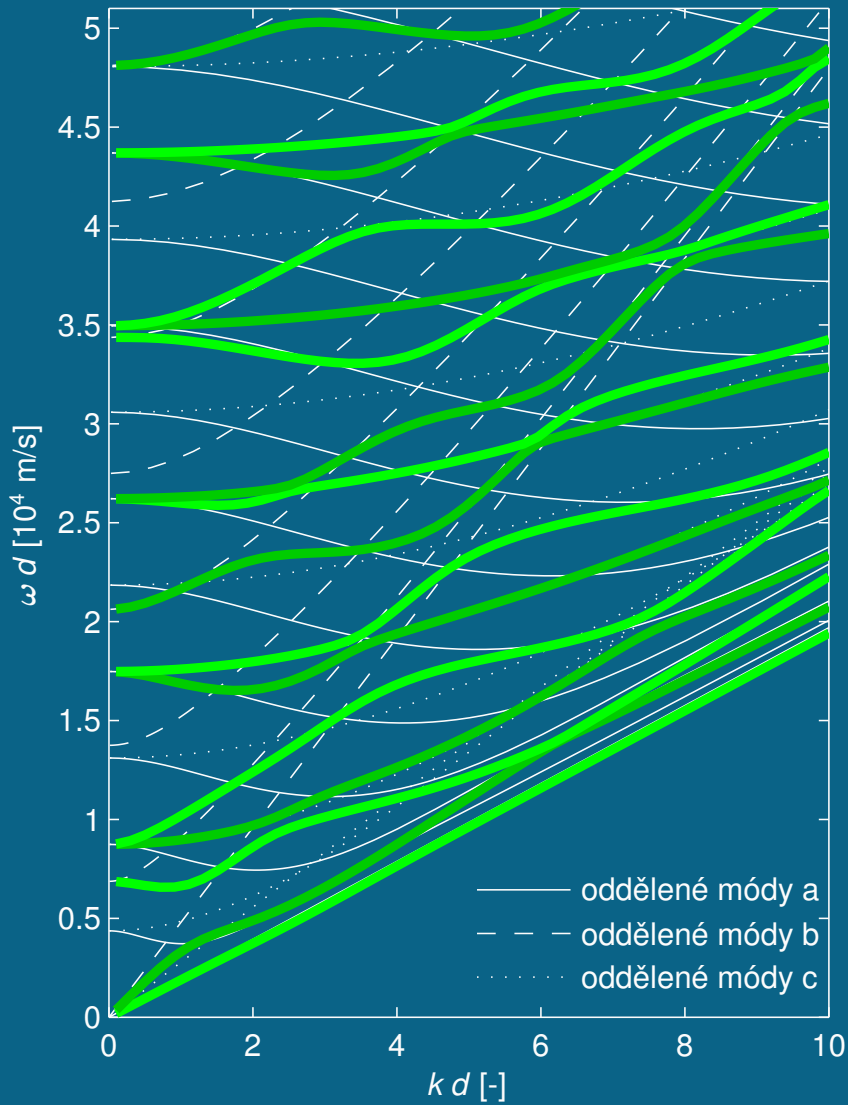


antisymetrické módy

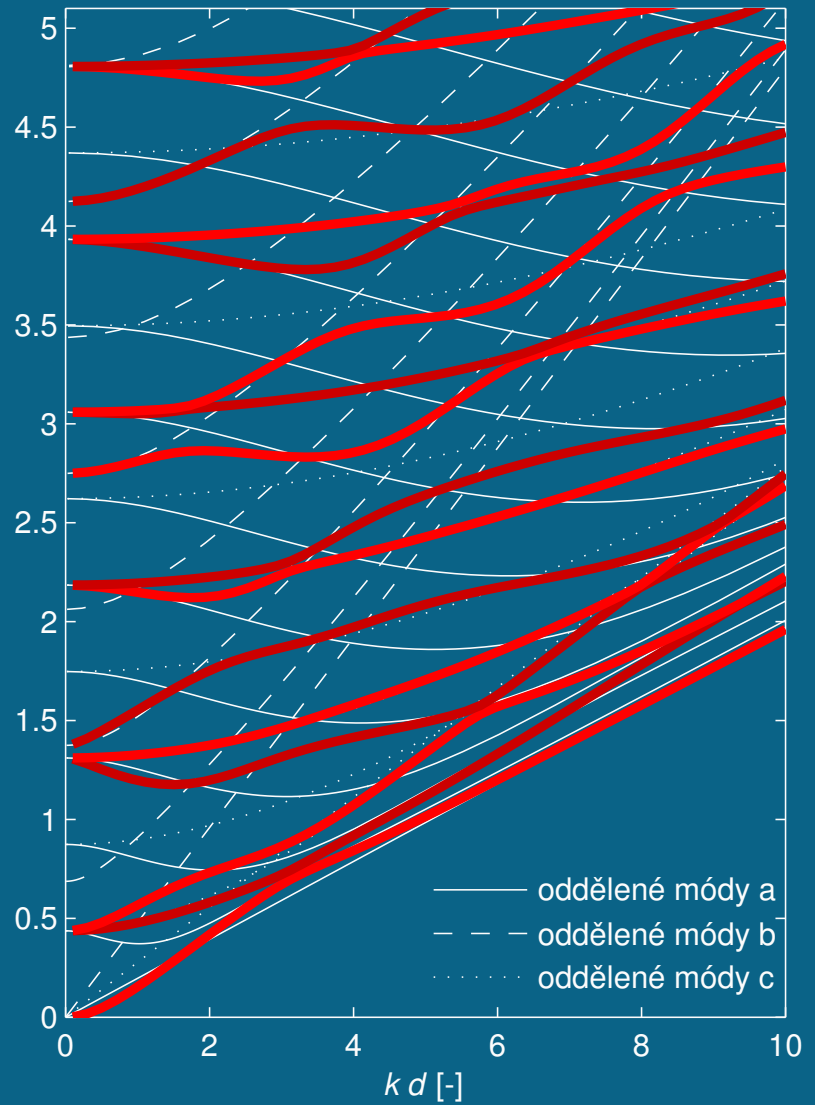


Směr šíření $\phi = 29^\circ$

symetrické módy

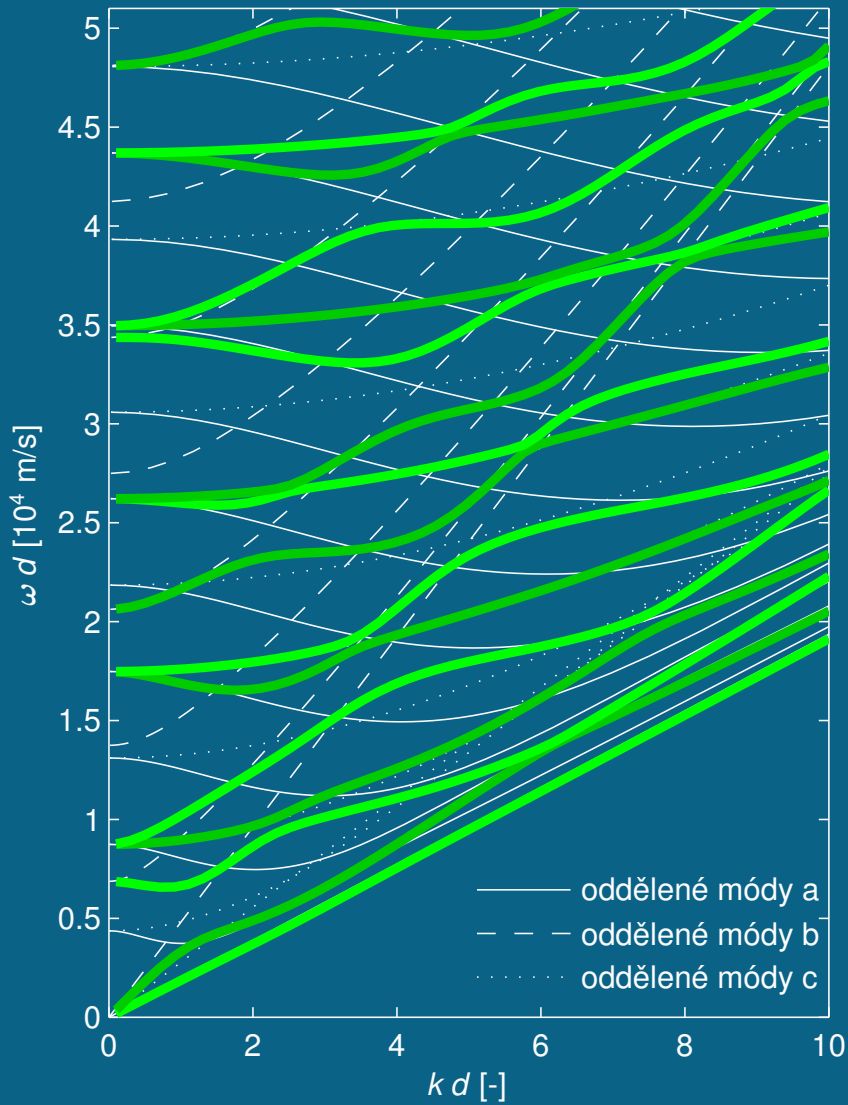


antisymetrické módy

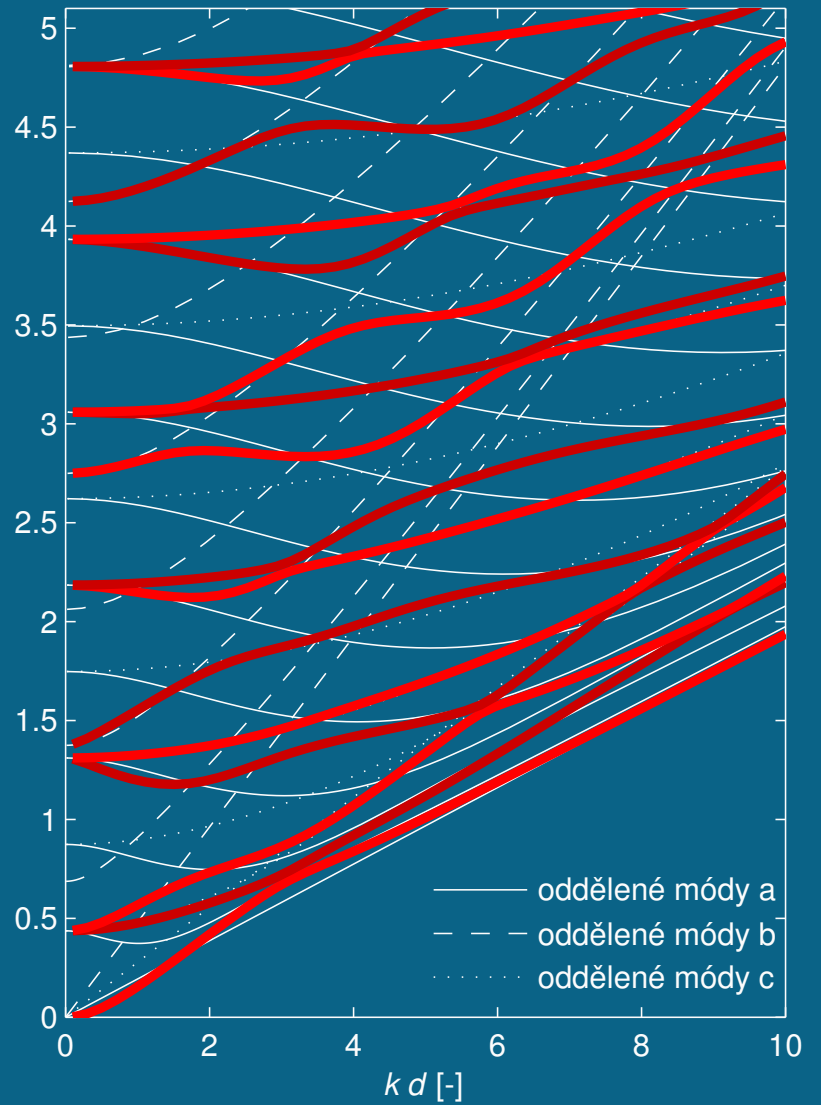


Směr šíření $\phi = 30^\circ$

symetrické módy

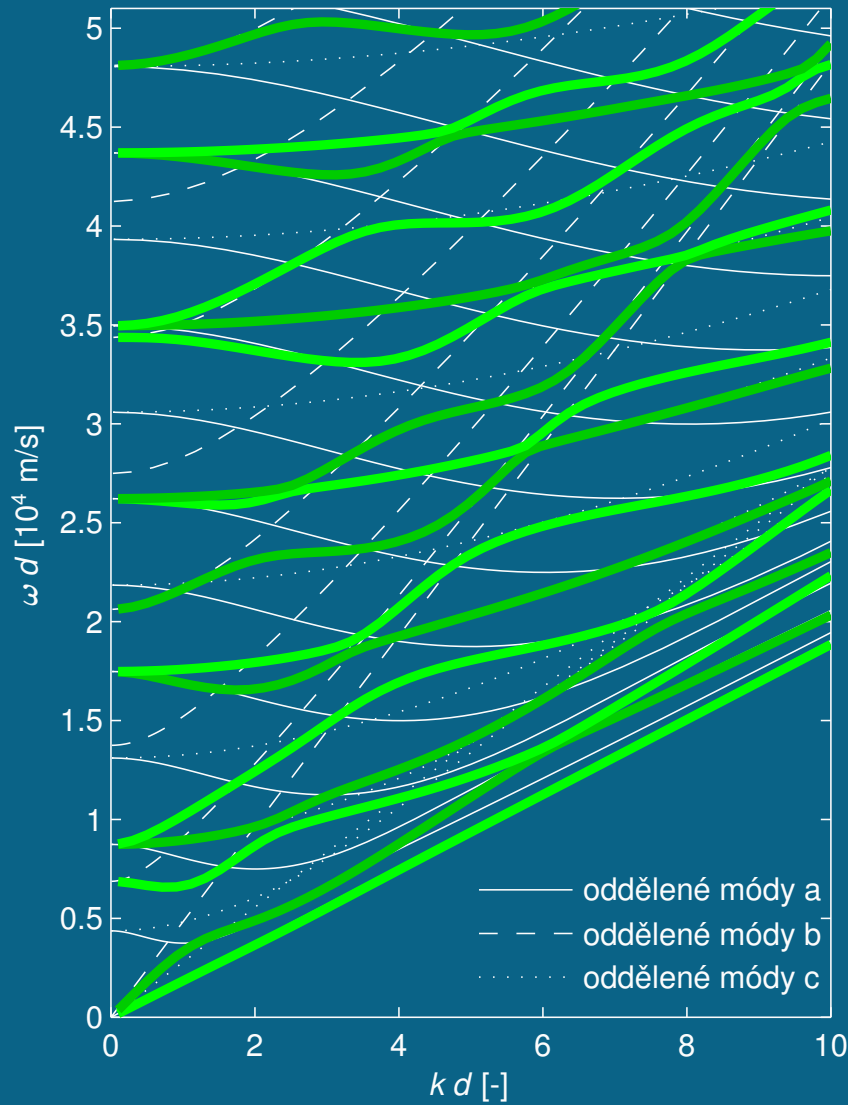


antisymetrické módy

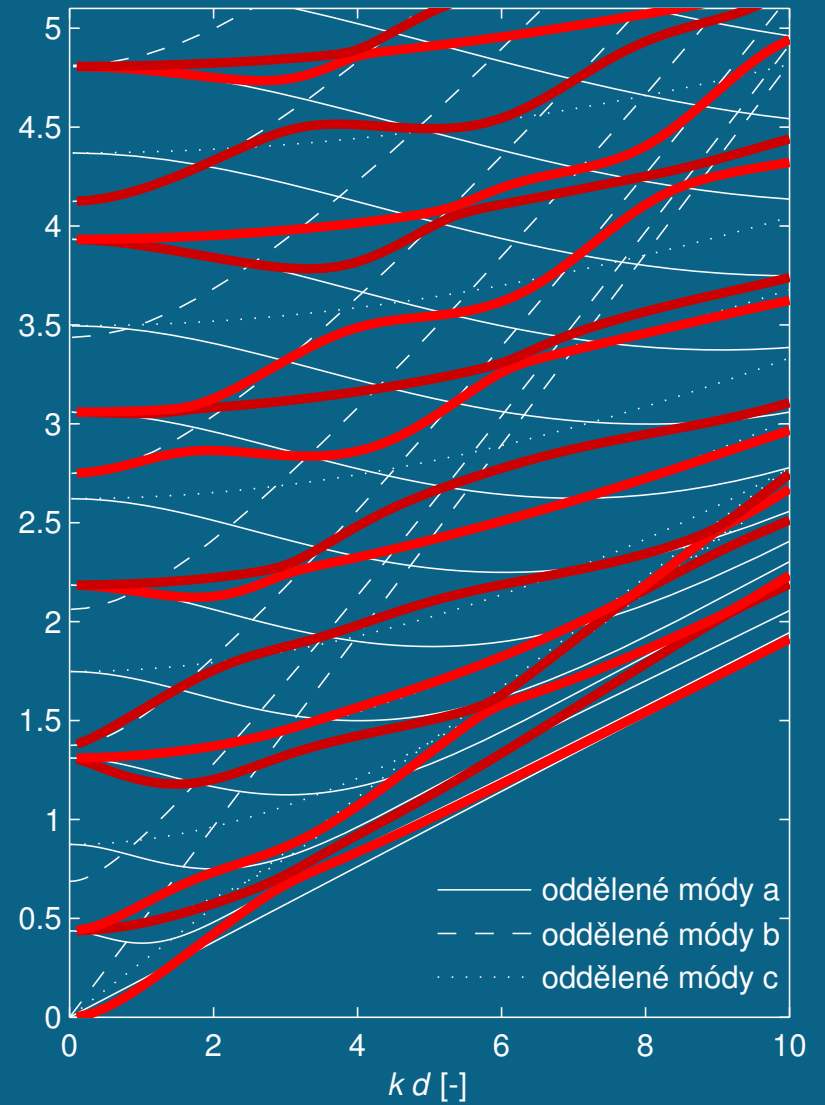


Směr šíření $\phi = 31^\circ$

symetrické módy

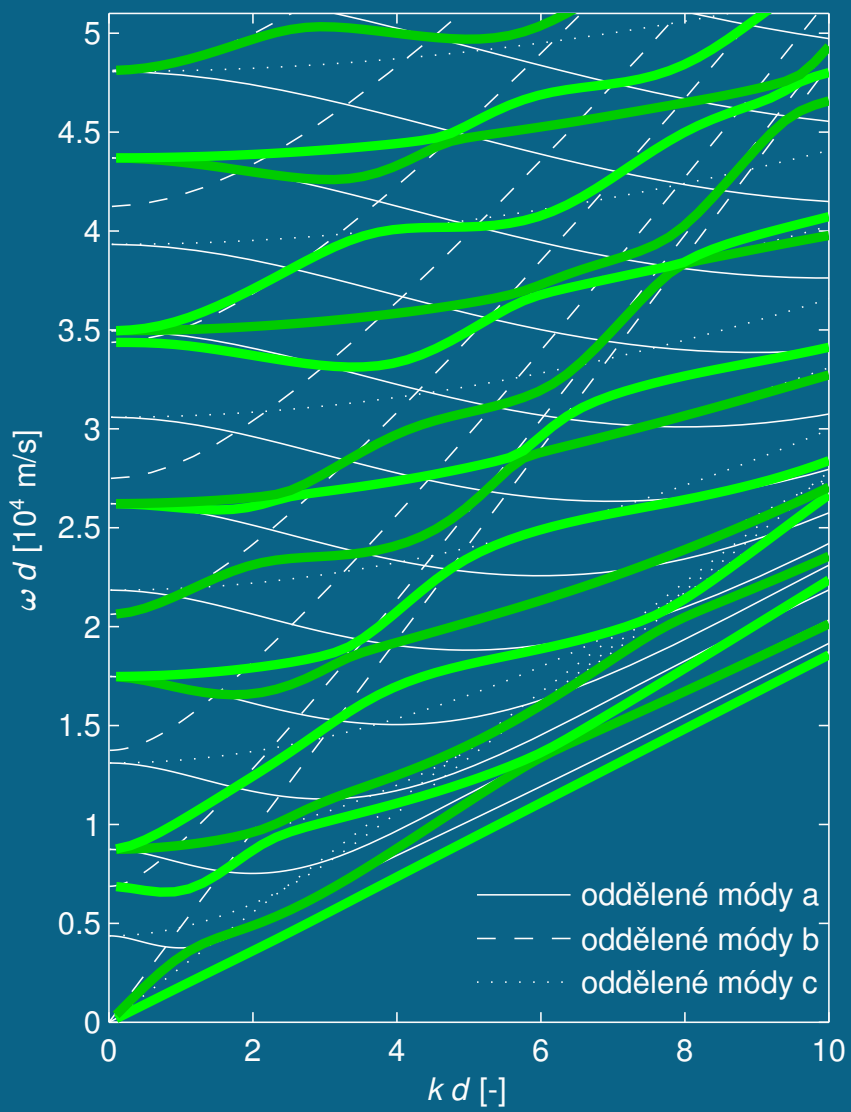


antisymetrické módy

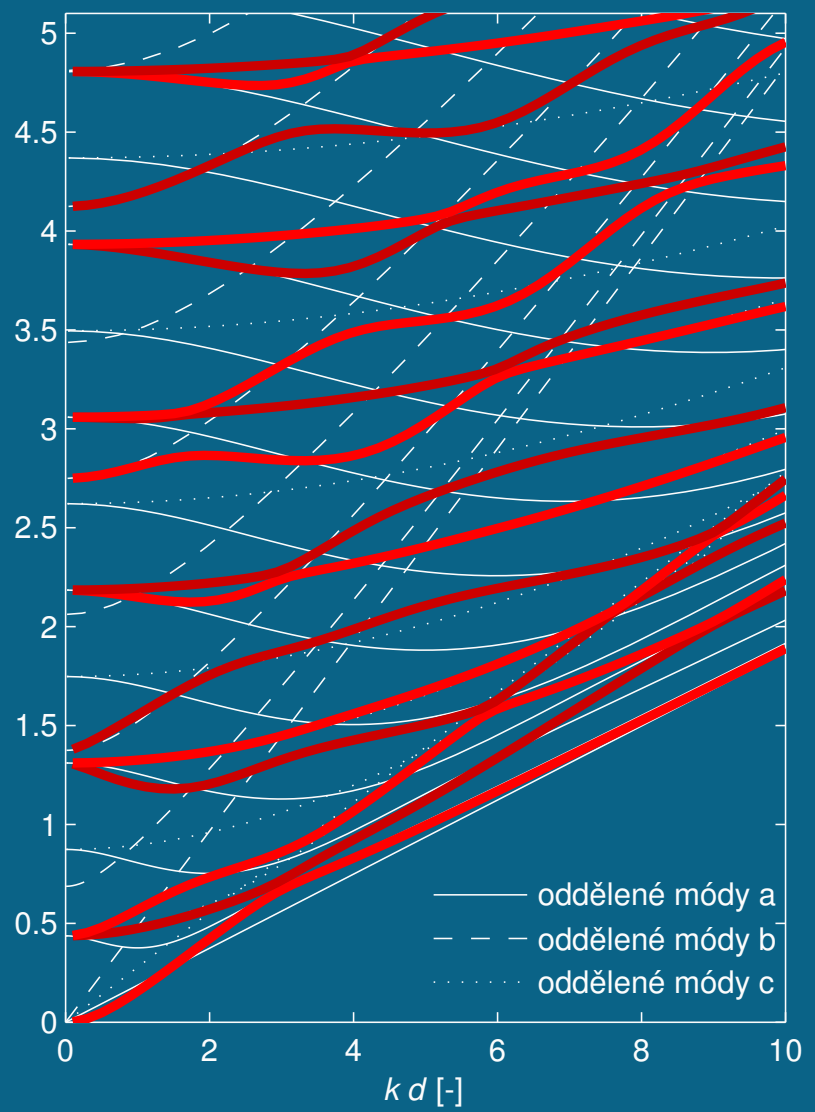


Směr šíření $\phi = 32^\circ$

symetrické módy

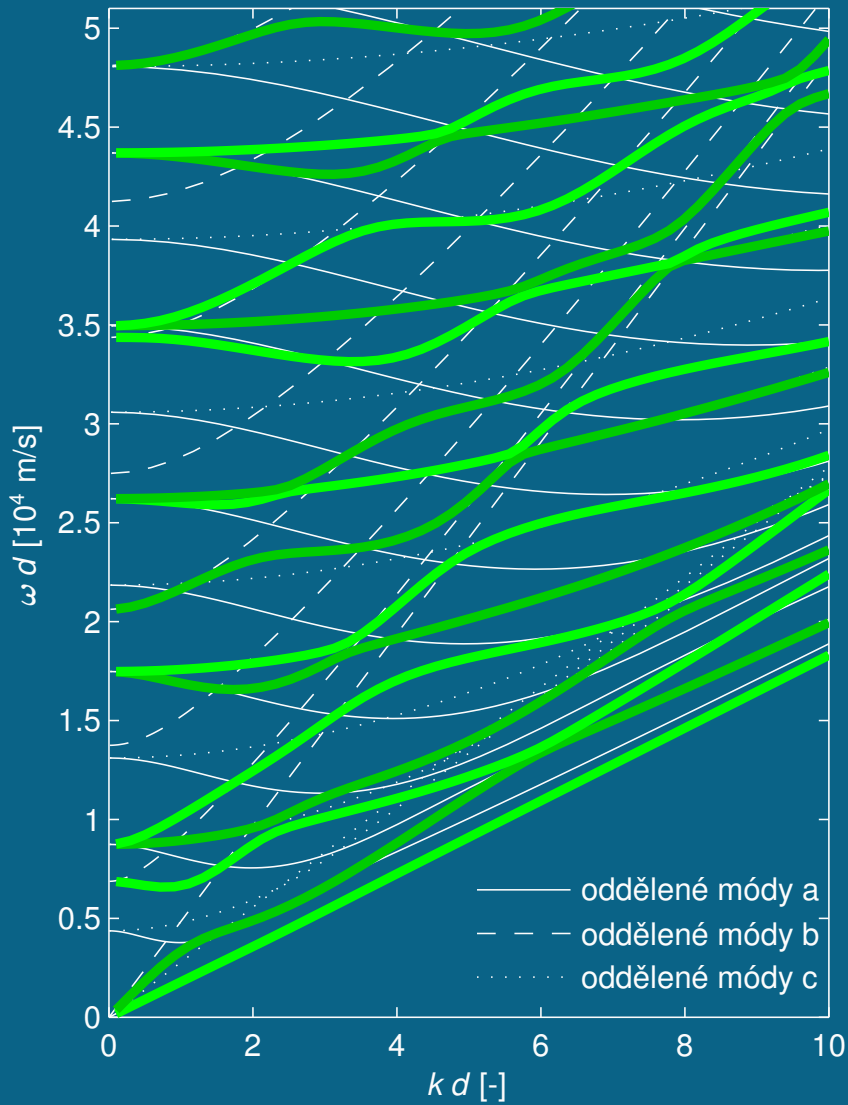


antisymetrické módy

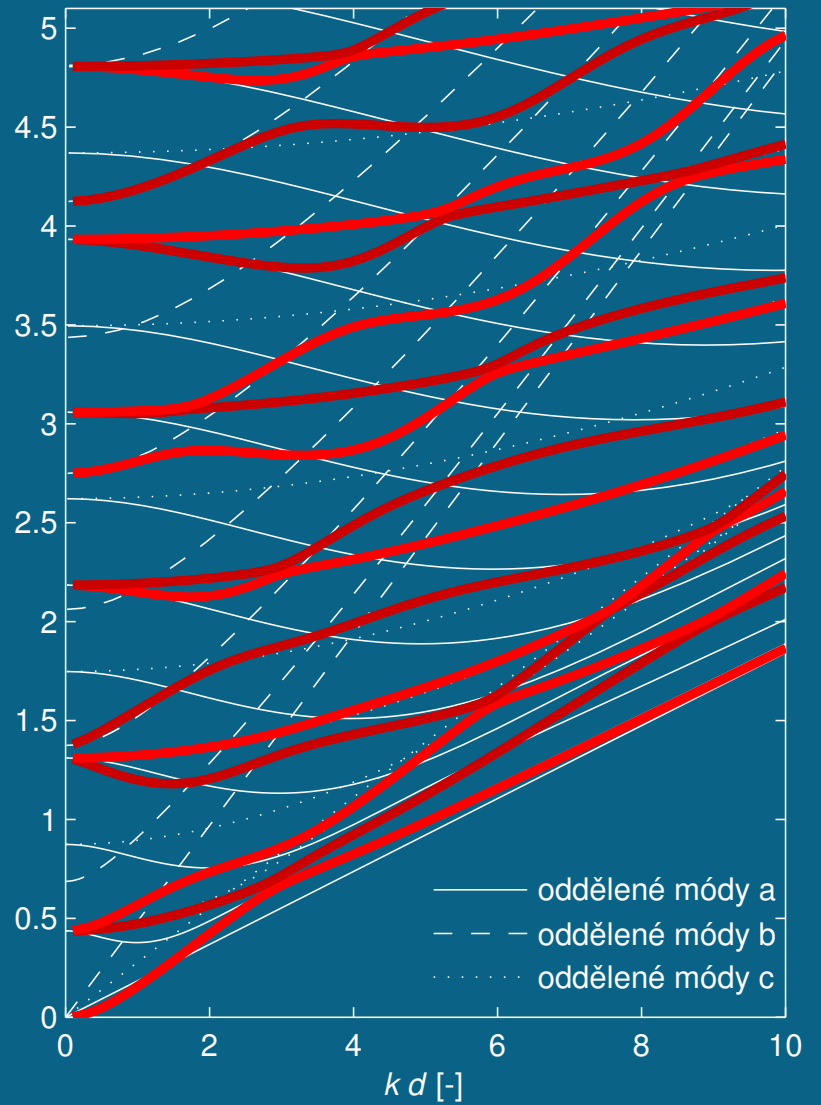


Směr šíření $\phi = 33^\circ$

symetrické módy

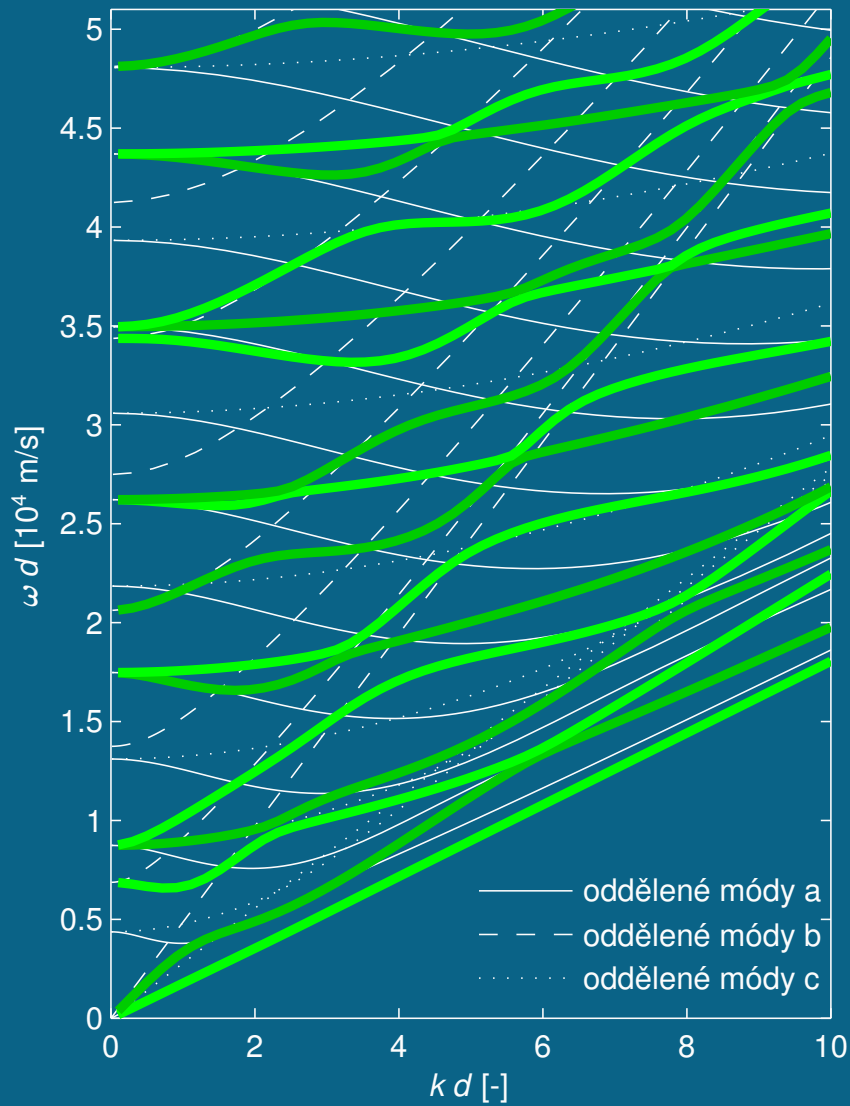


antisymetrické módy

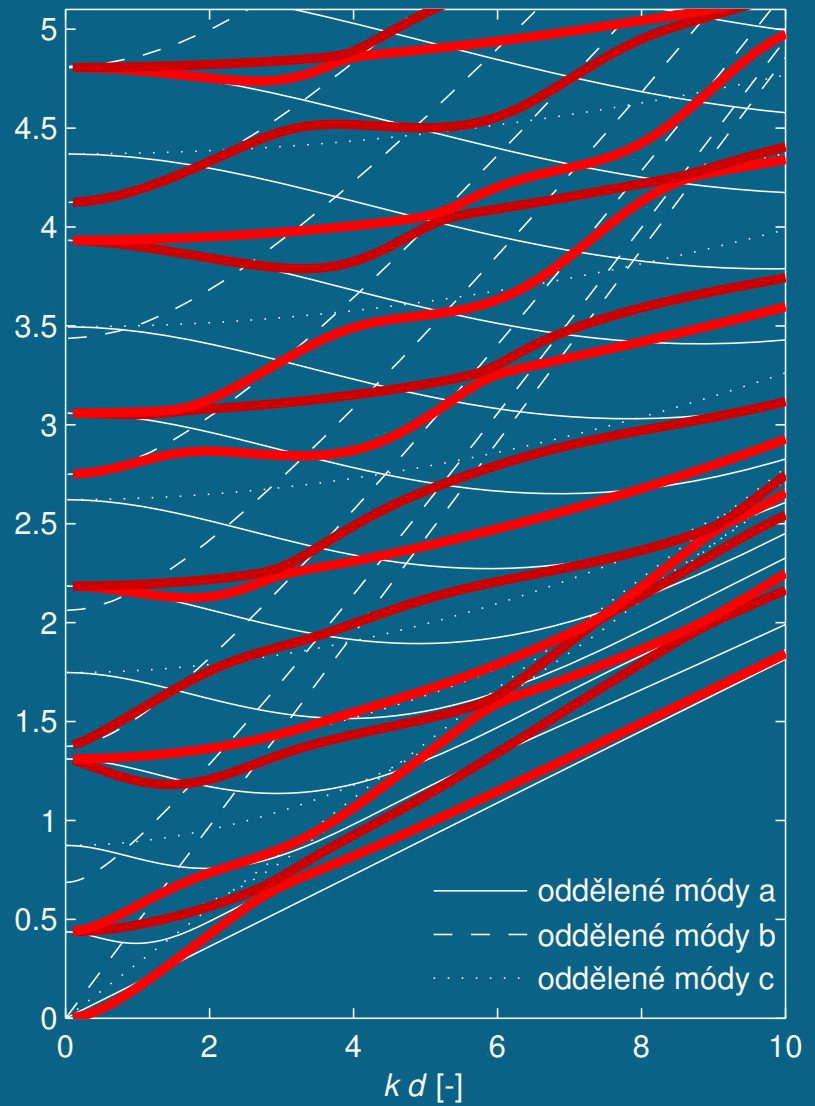


Směr šíření $\phi = 34^\circ$

symetrické módy

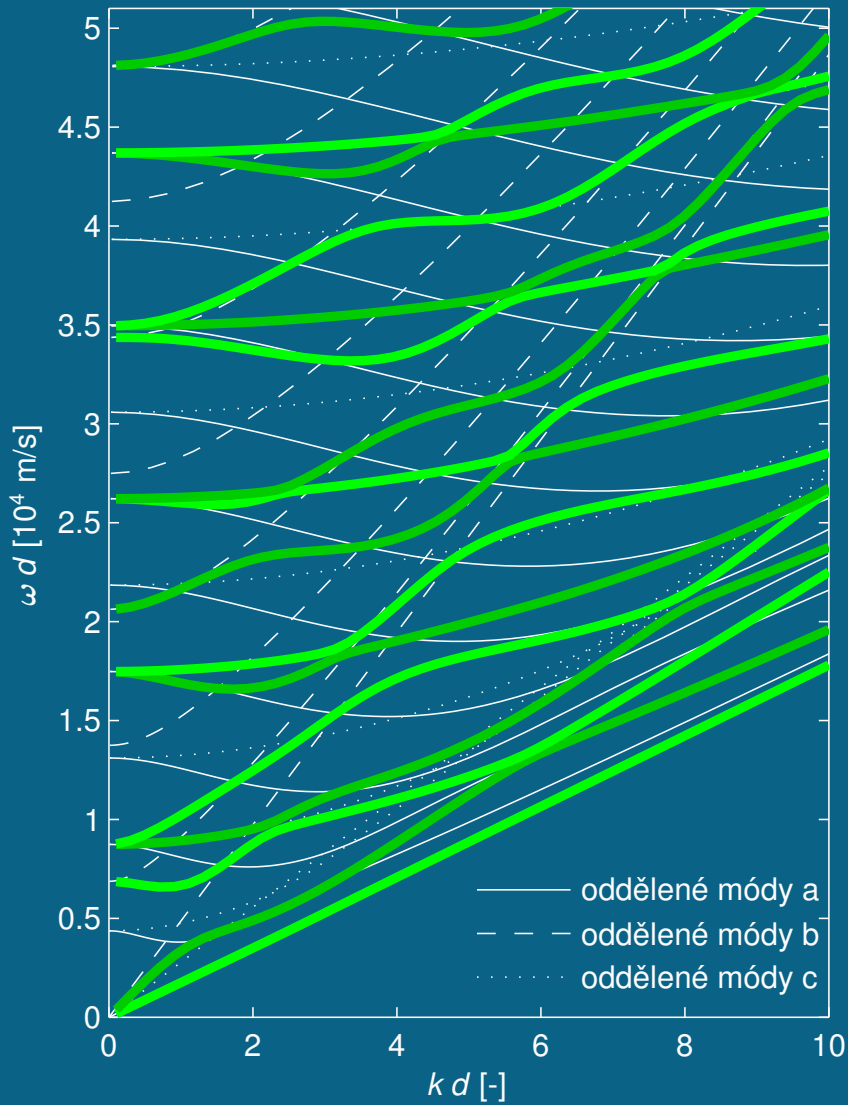


antisymetrické módy

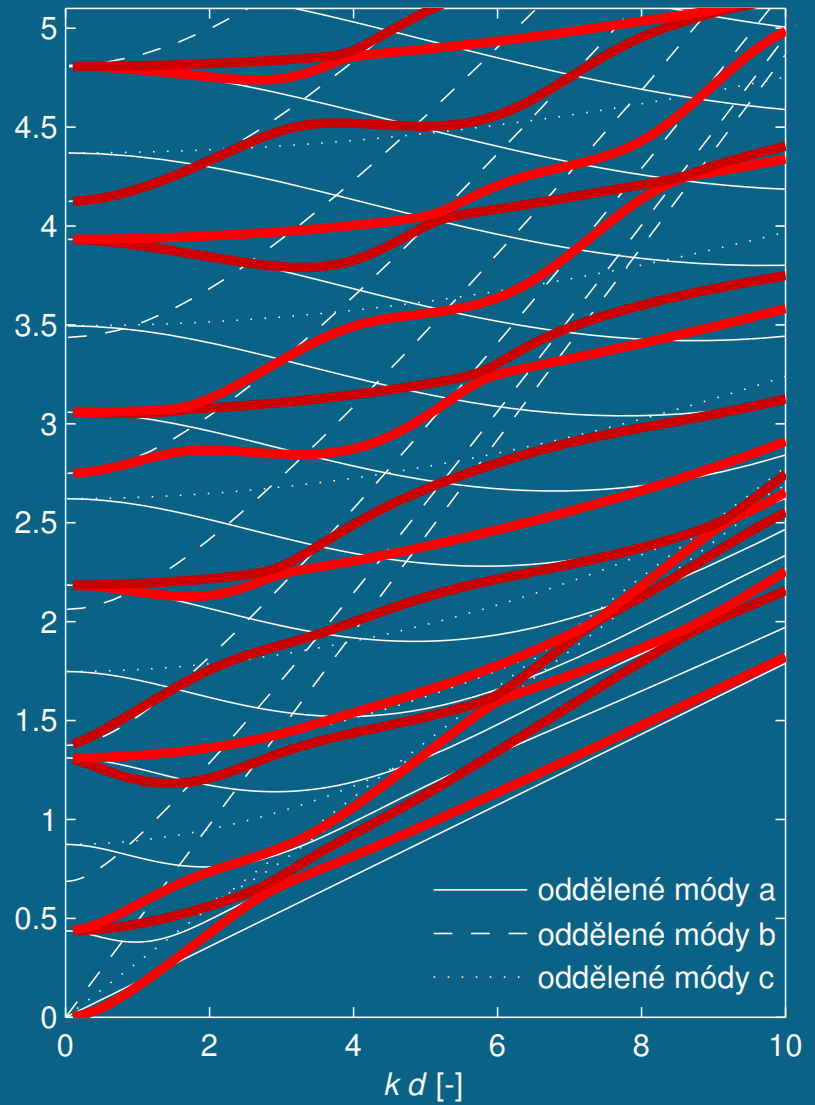


Směr šíření $\phi = 35^\circ$

symetrické módy

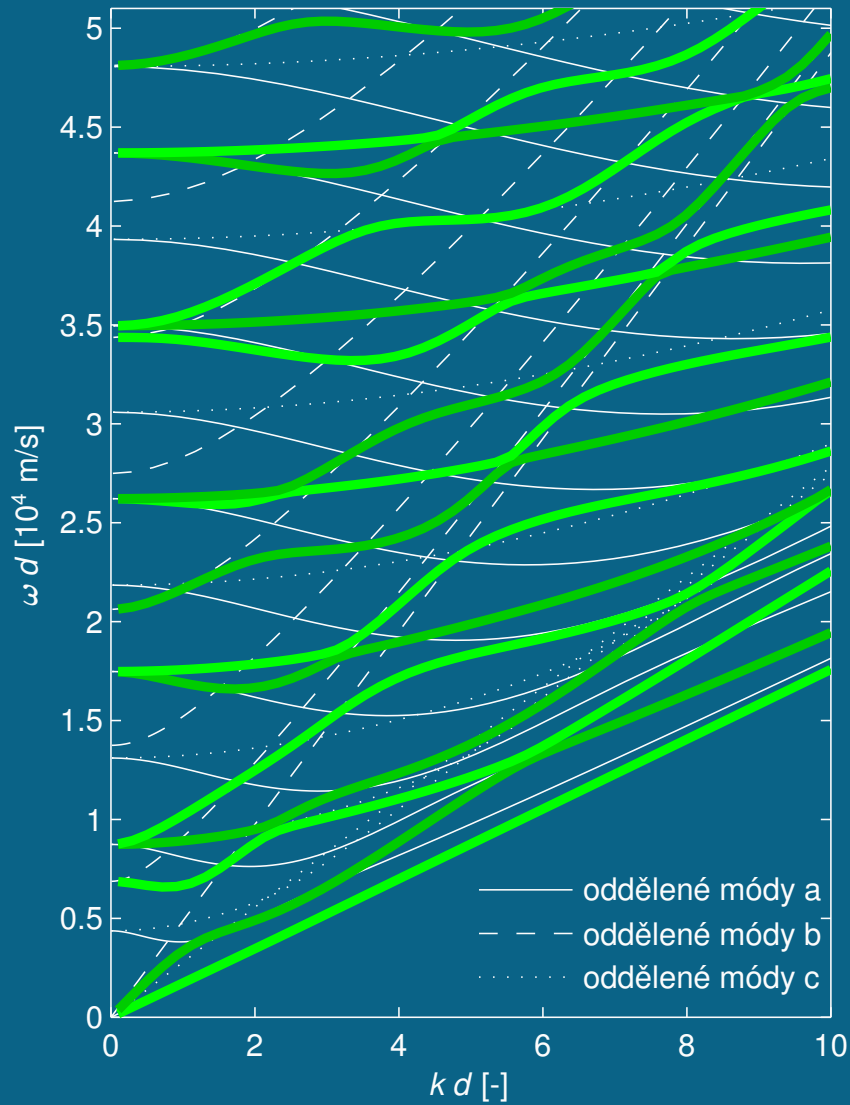


antisymetrické módy

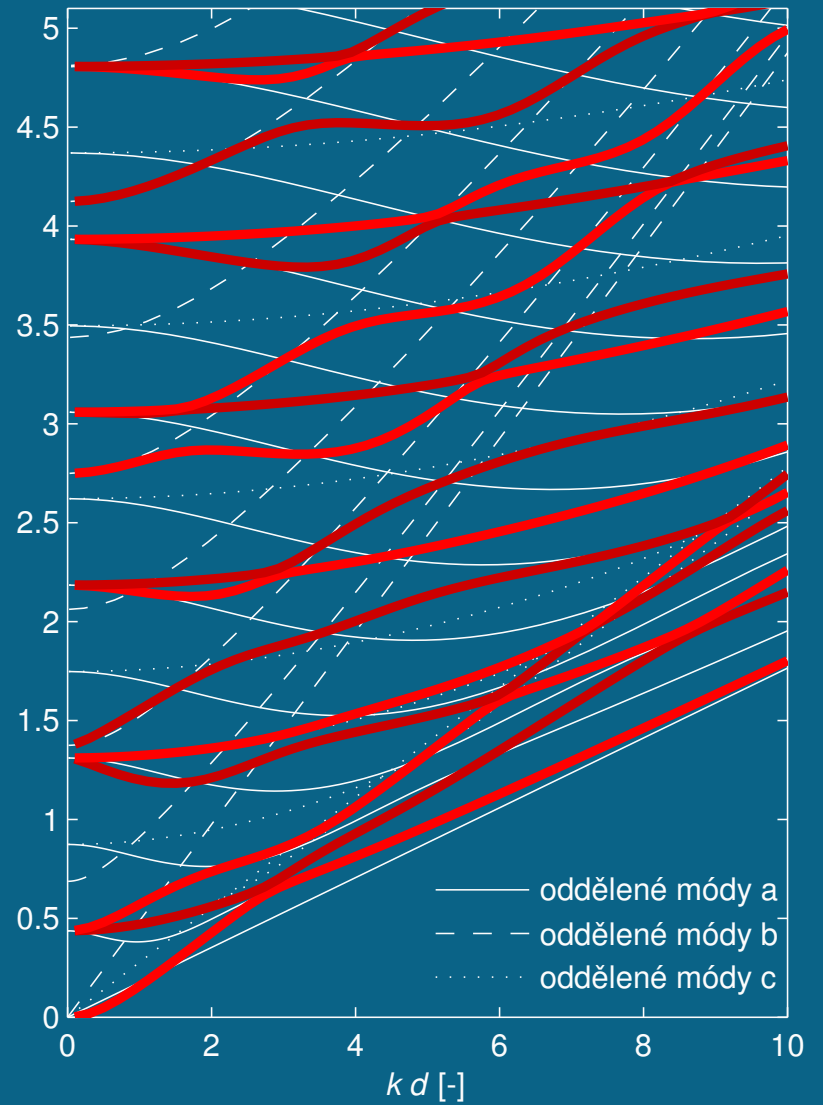


Směr šíření $\phi = 36^\circ$

symetrické módy

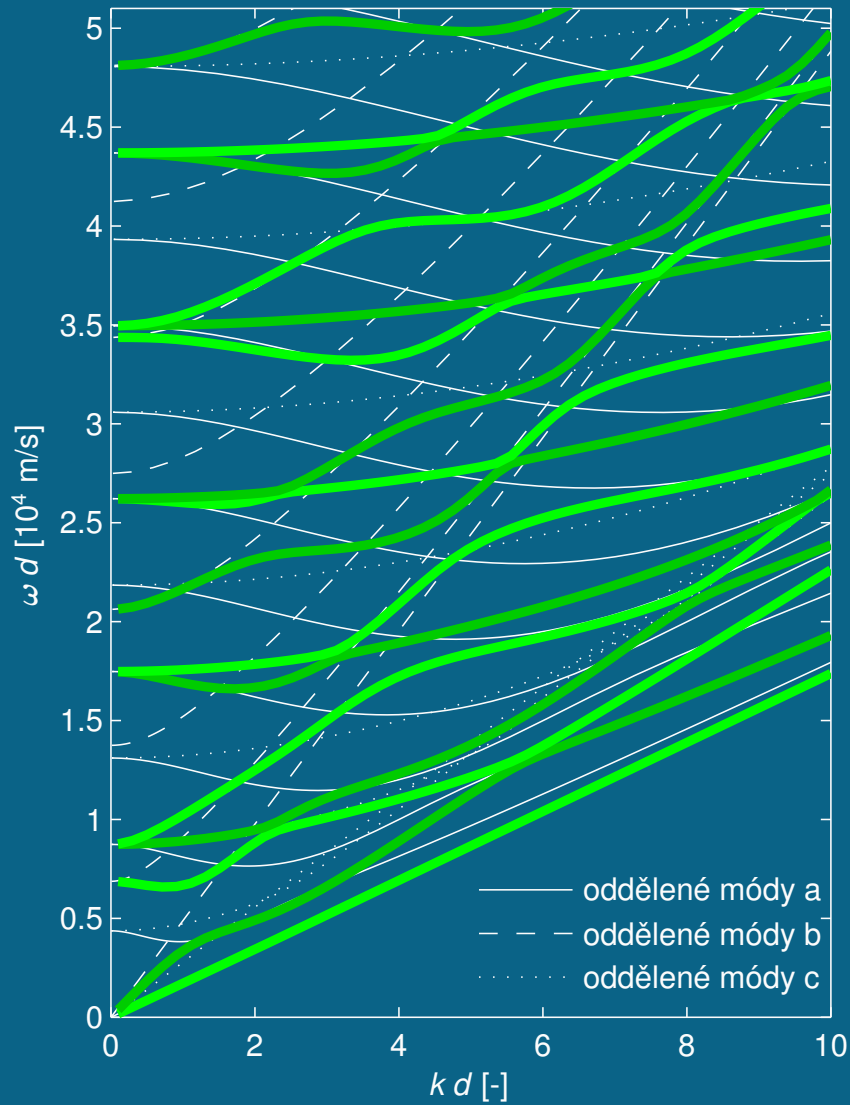


antisymetrické módy

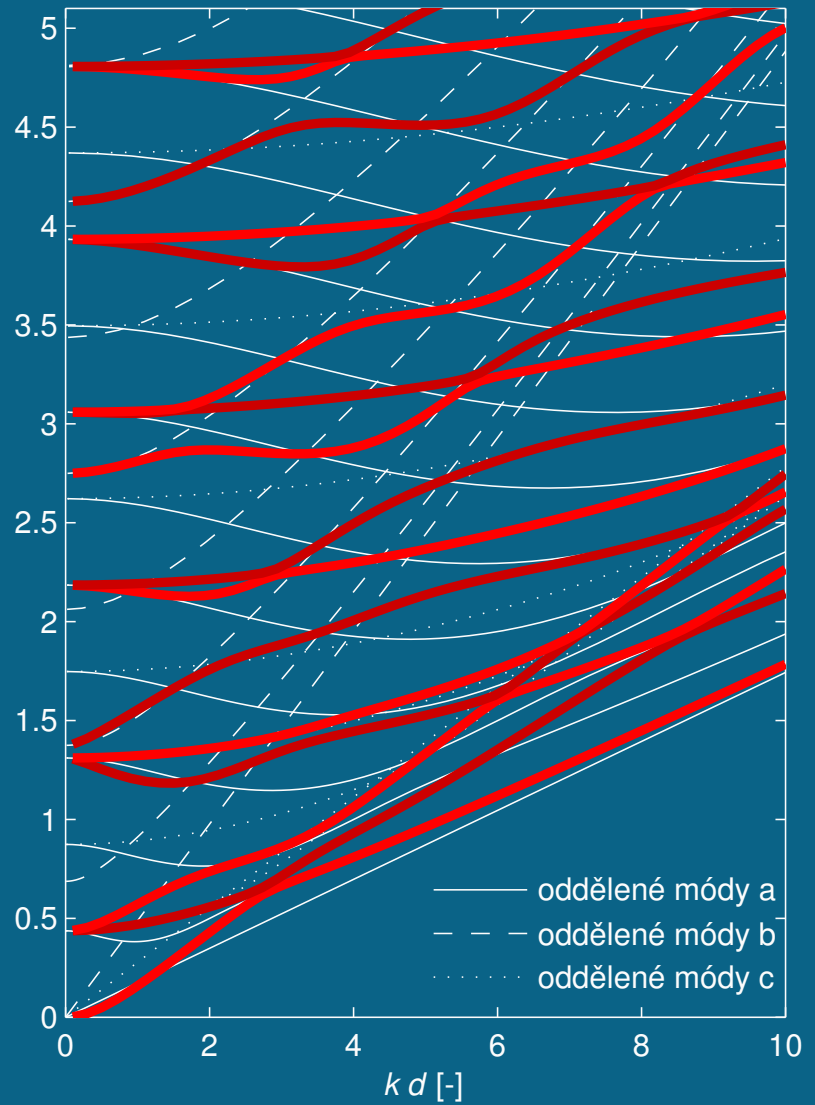


Směr šíření $\phi = 37^\circ$

symetrické módy

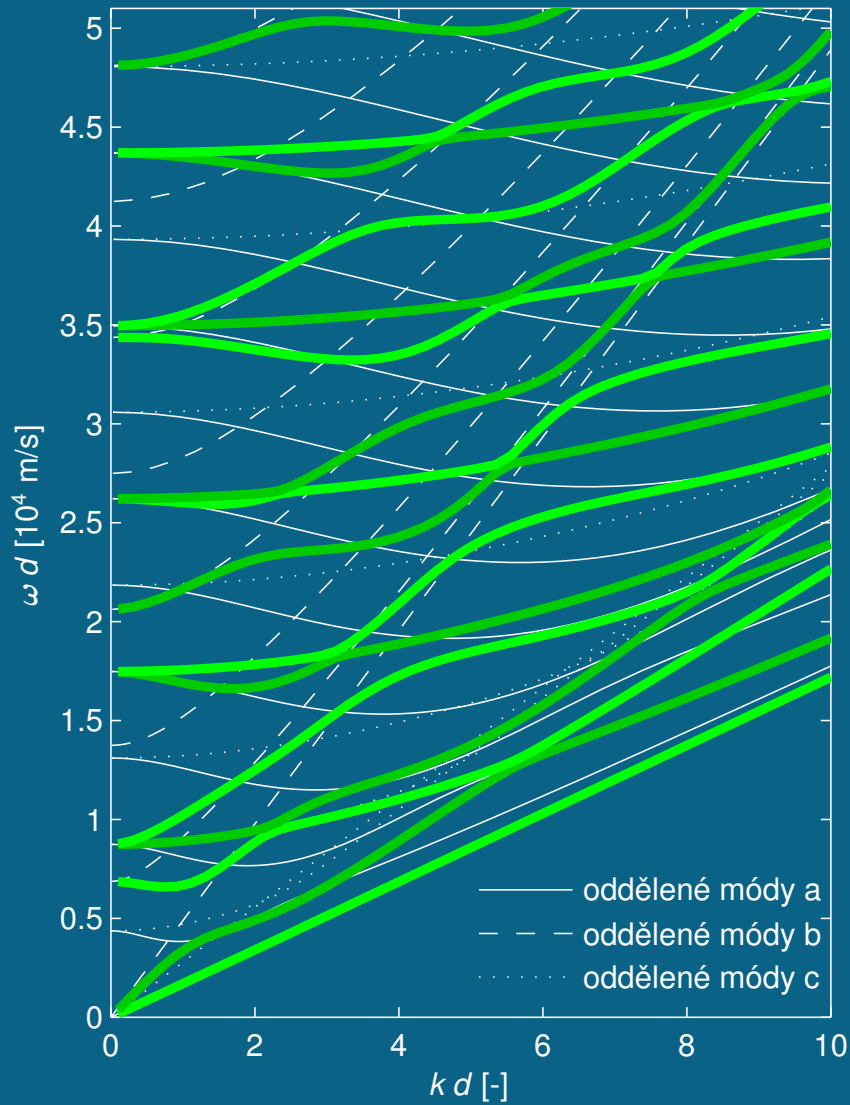


antisymetrické módy

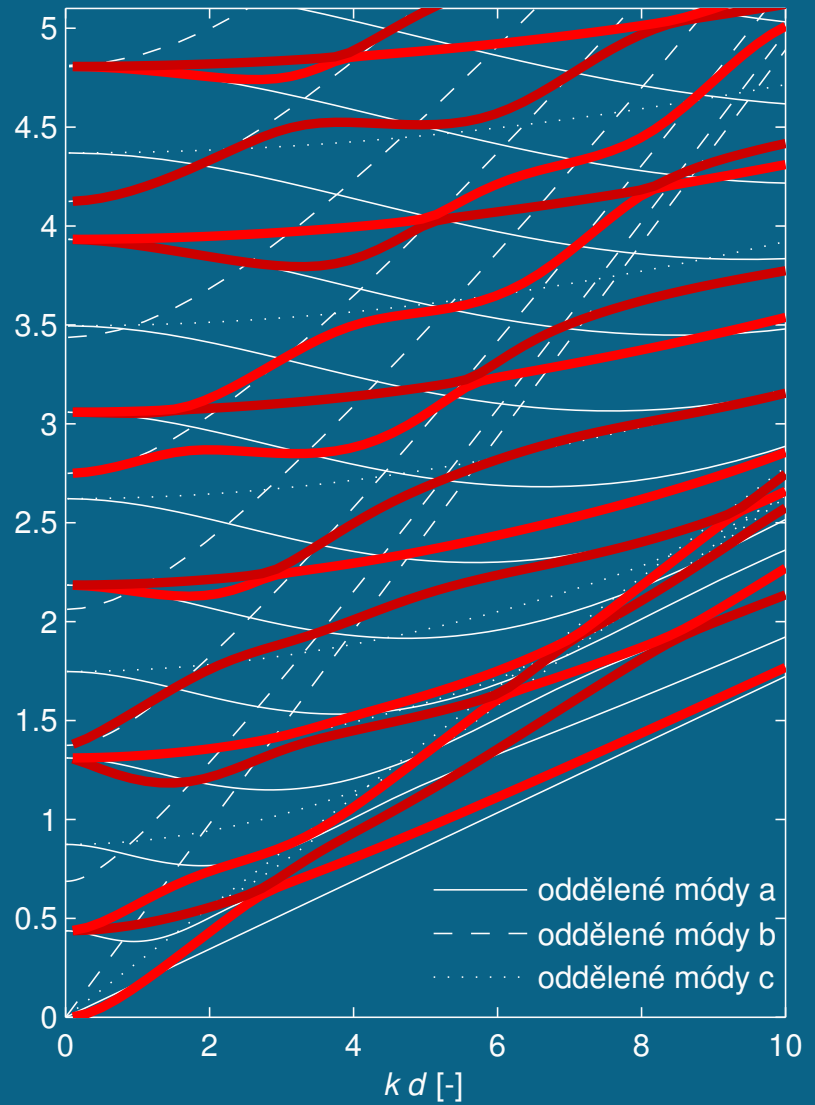


Směr šíření $\phi = 38^\circ$

symetrické módy

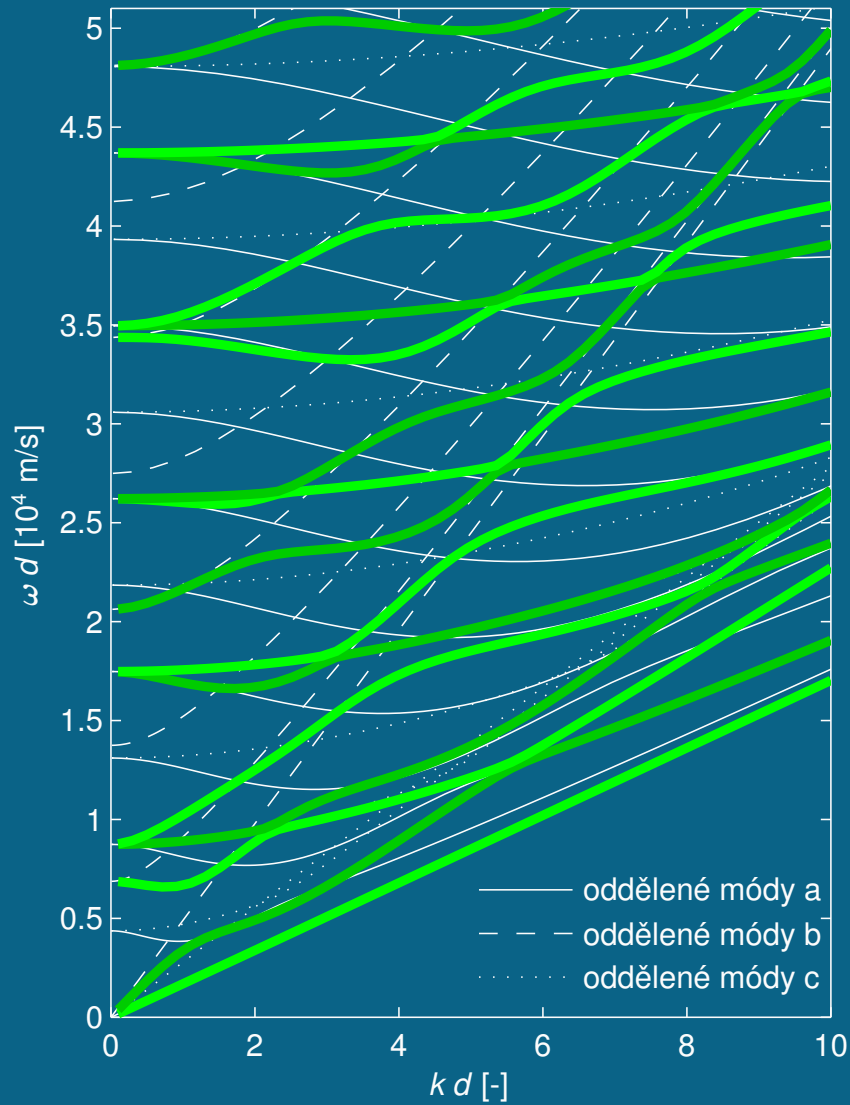


antisymetrické módy

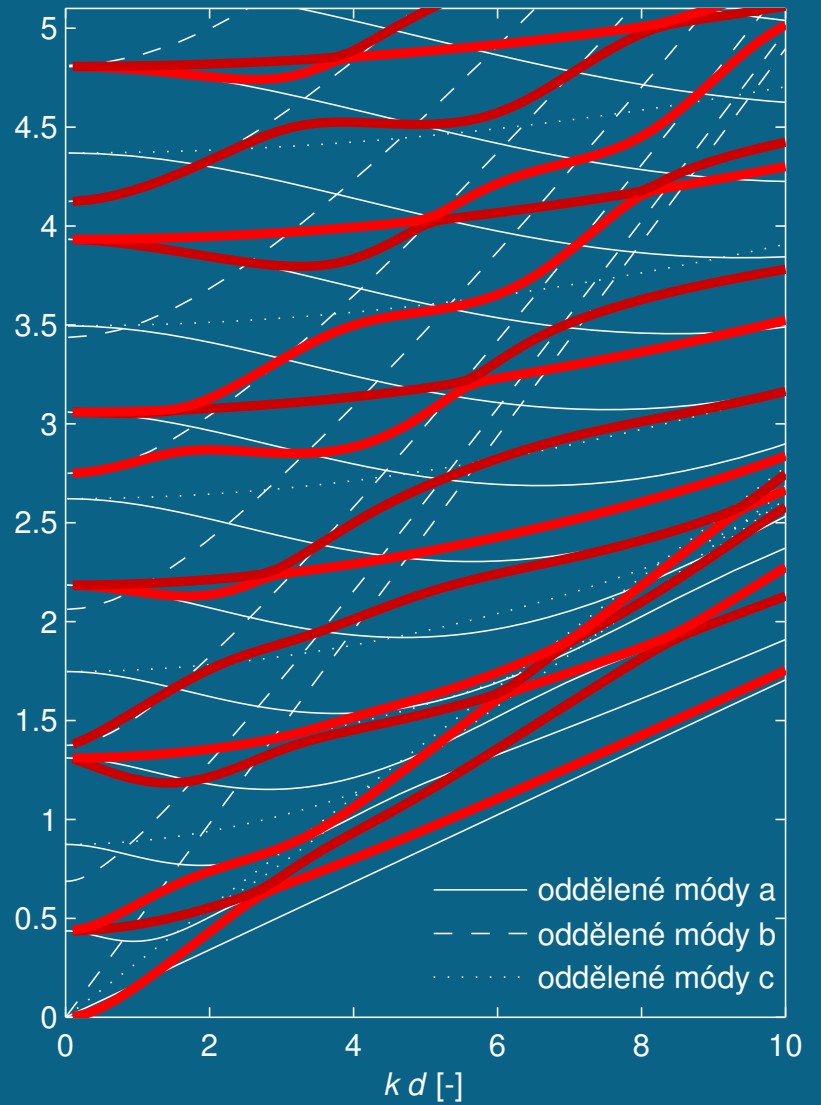


Směr šíření $\phi = 39^\circ$

symetrické módy

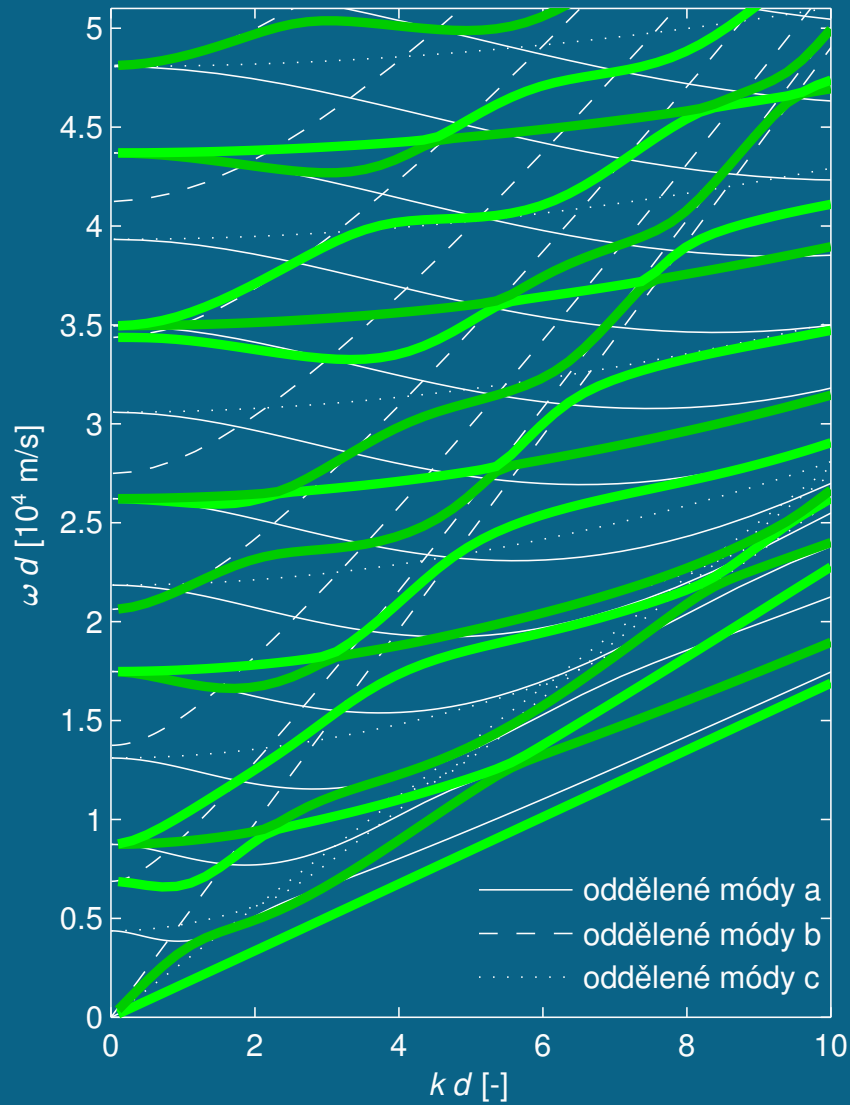


antisymetrické módy

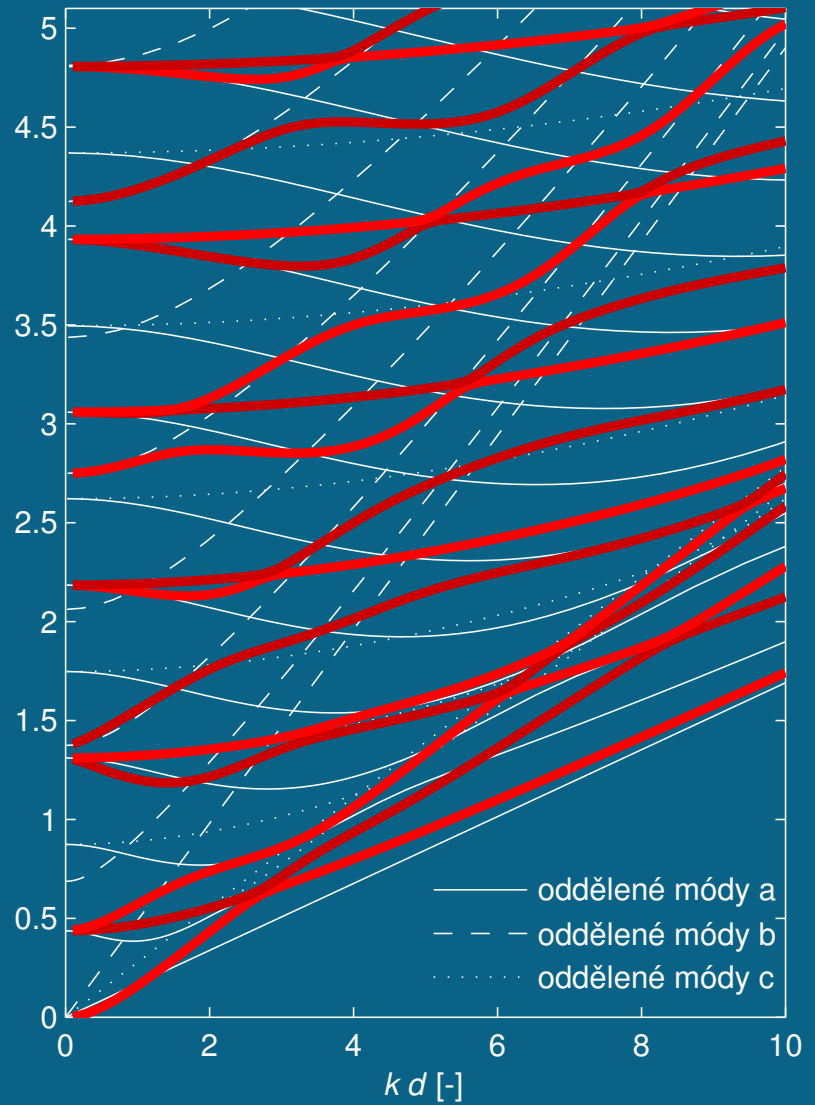


Směr šíření $\phi = 40^\circ$

symetrické módy

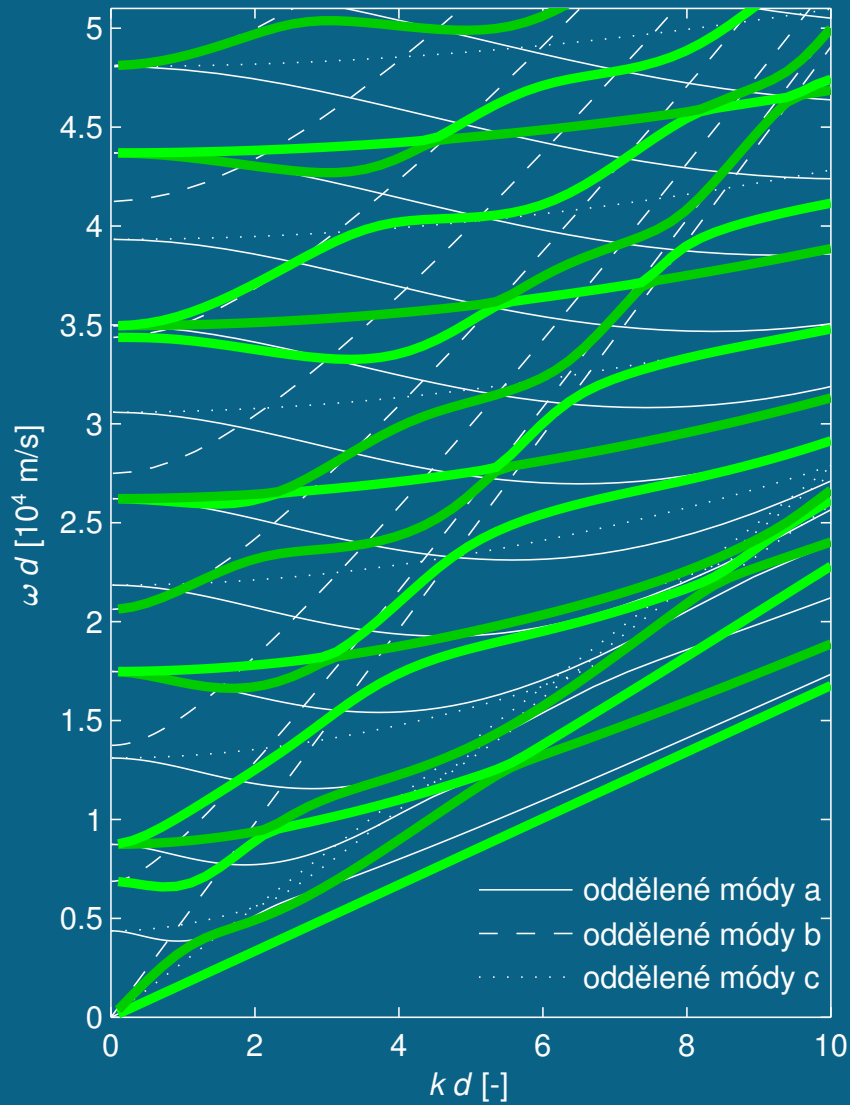


antisymetrické módy

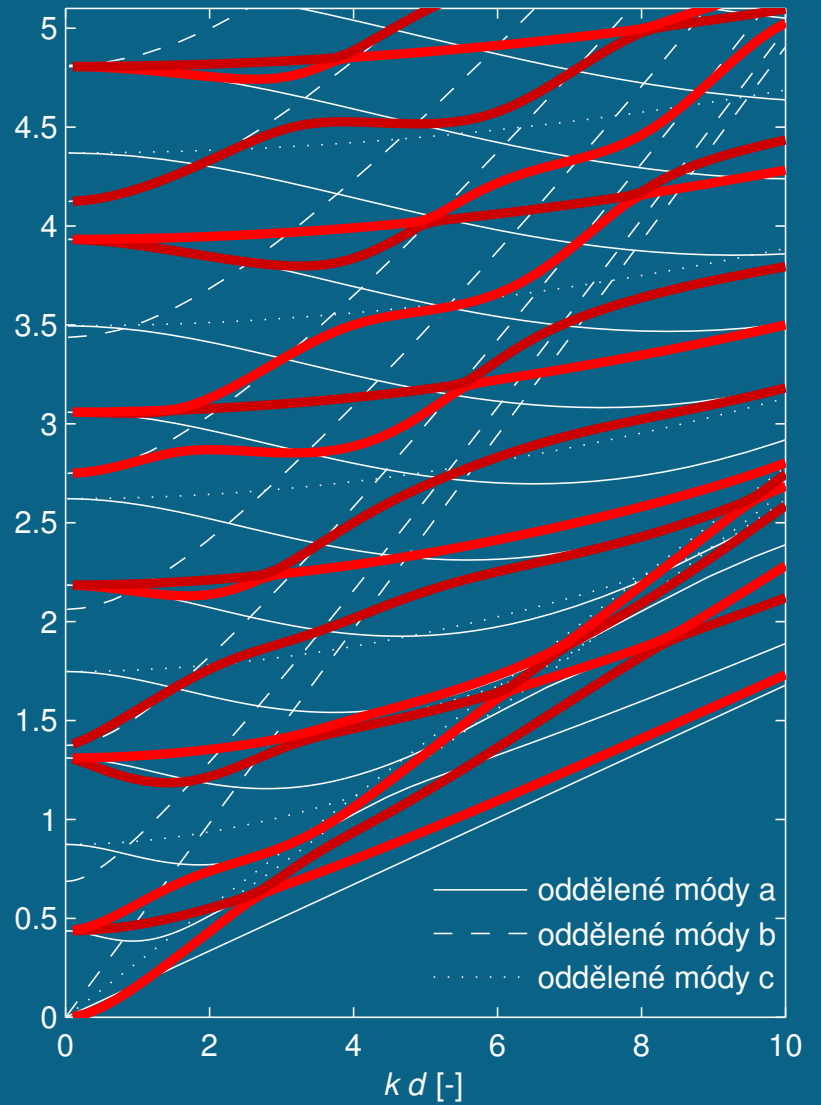


Směr šíření $\phi = 41^\circ$

symetrické módy

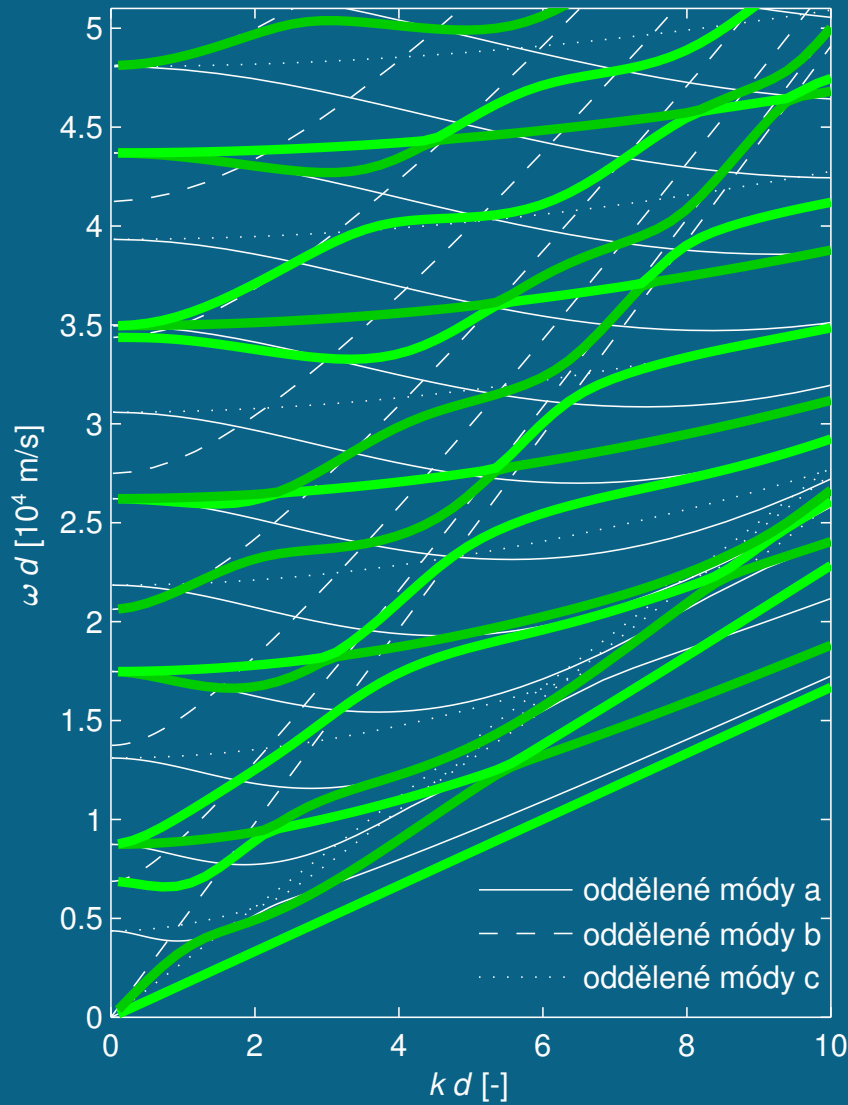


antisymetrické módy

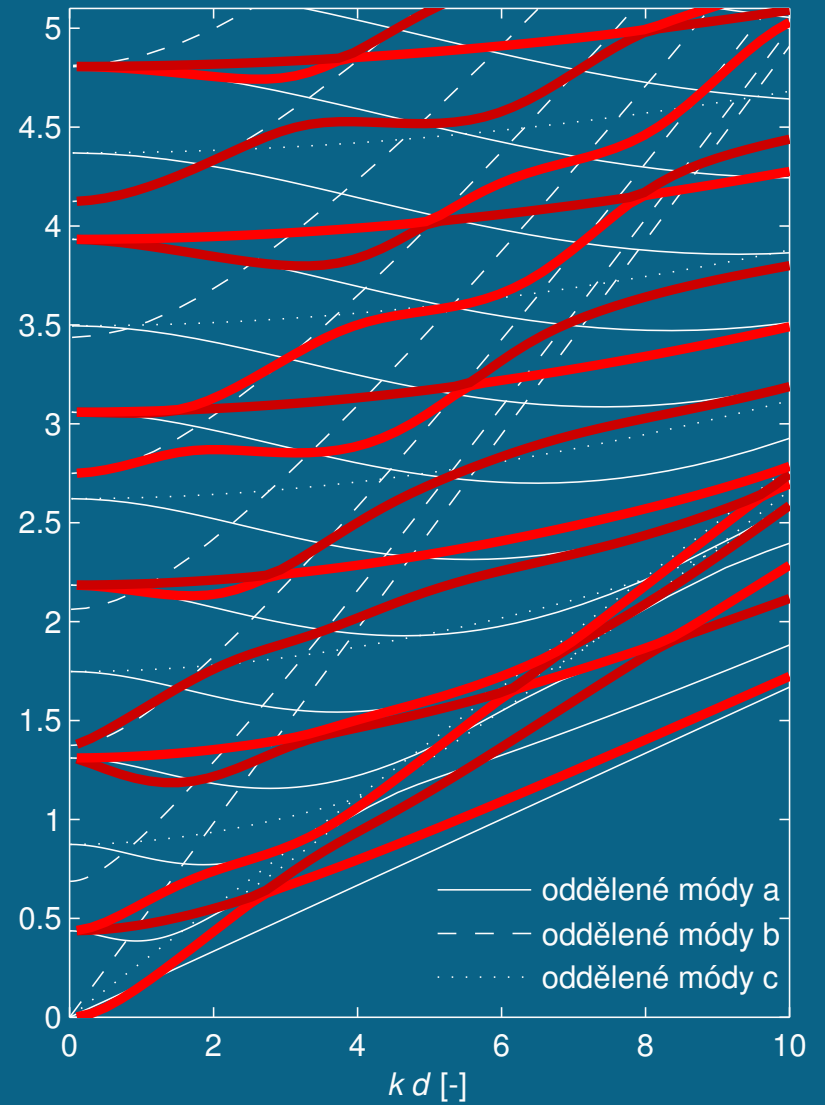


Směr šíření $\phi = 42^\circ$

symetrické módy

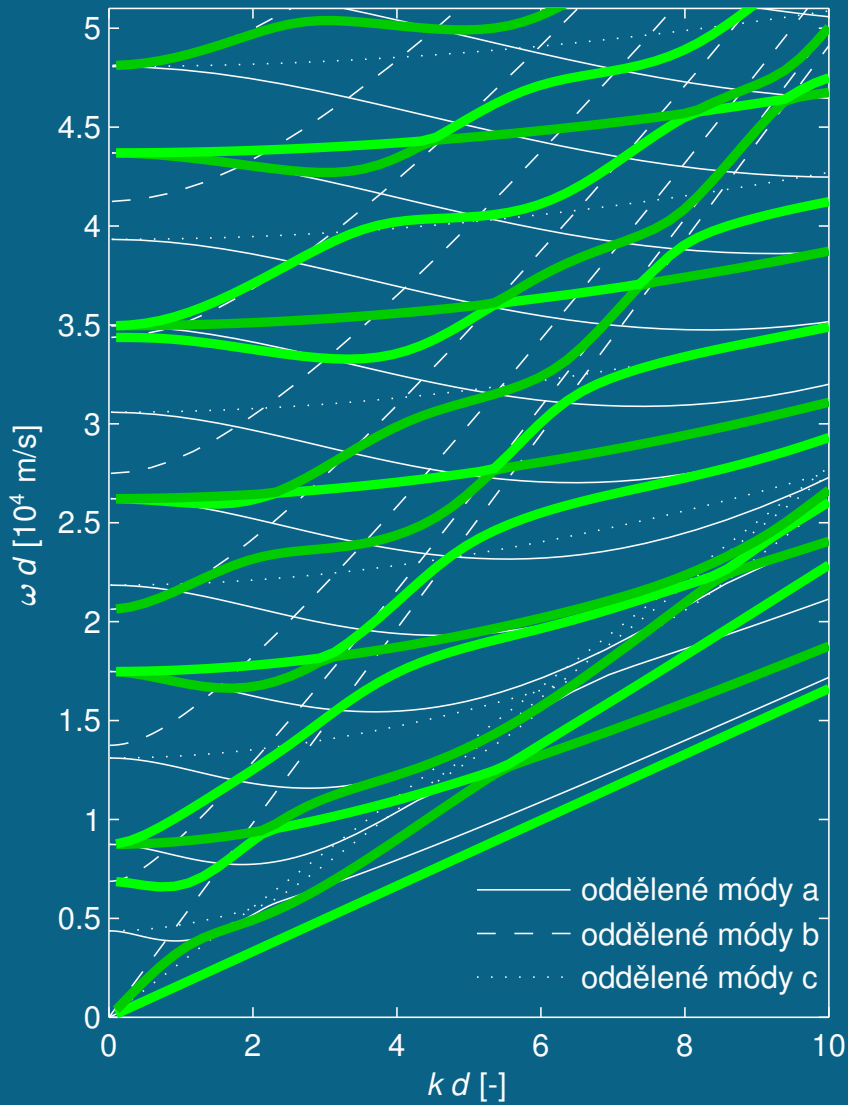


antisymetrické módy

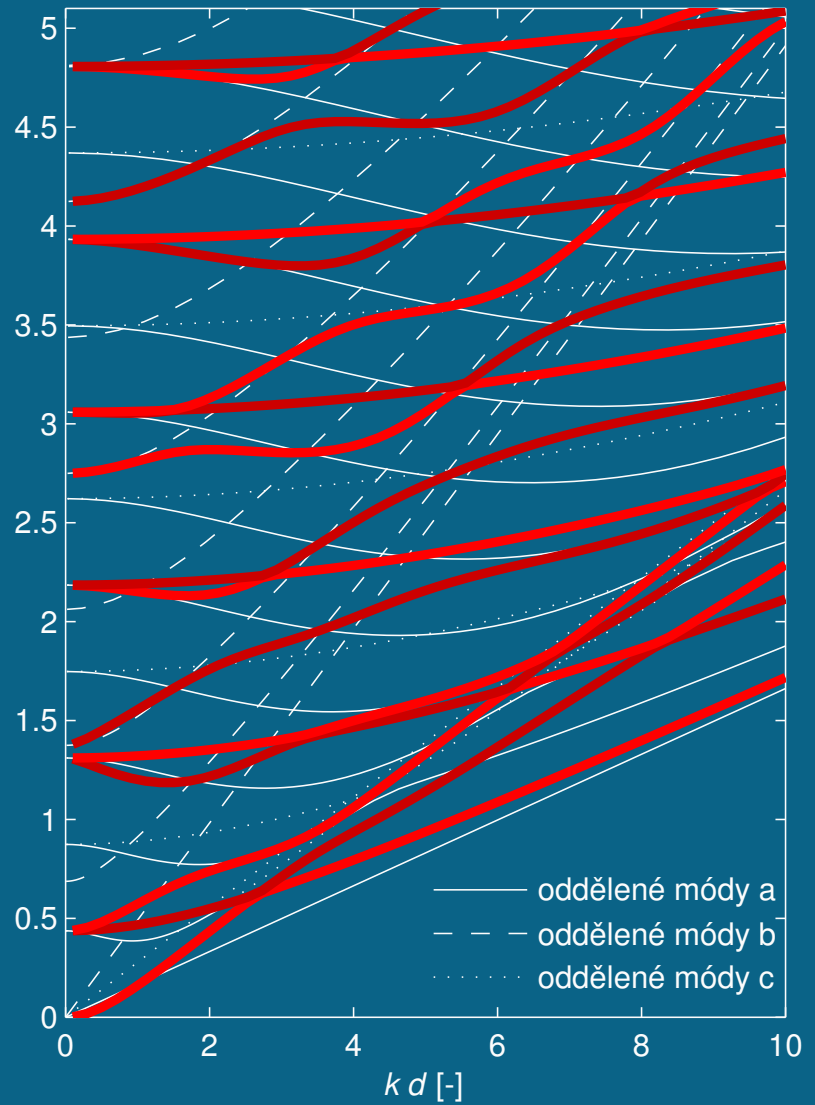


Směr šíření $\phi = 43^\circ$

symetrické módy

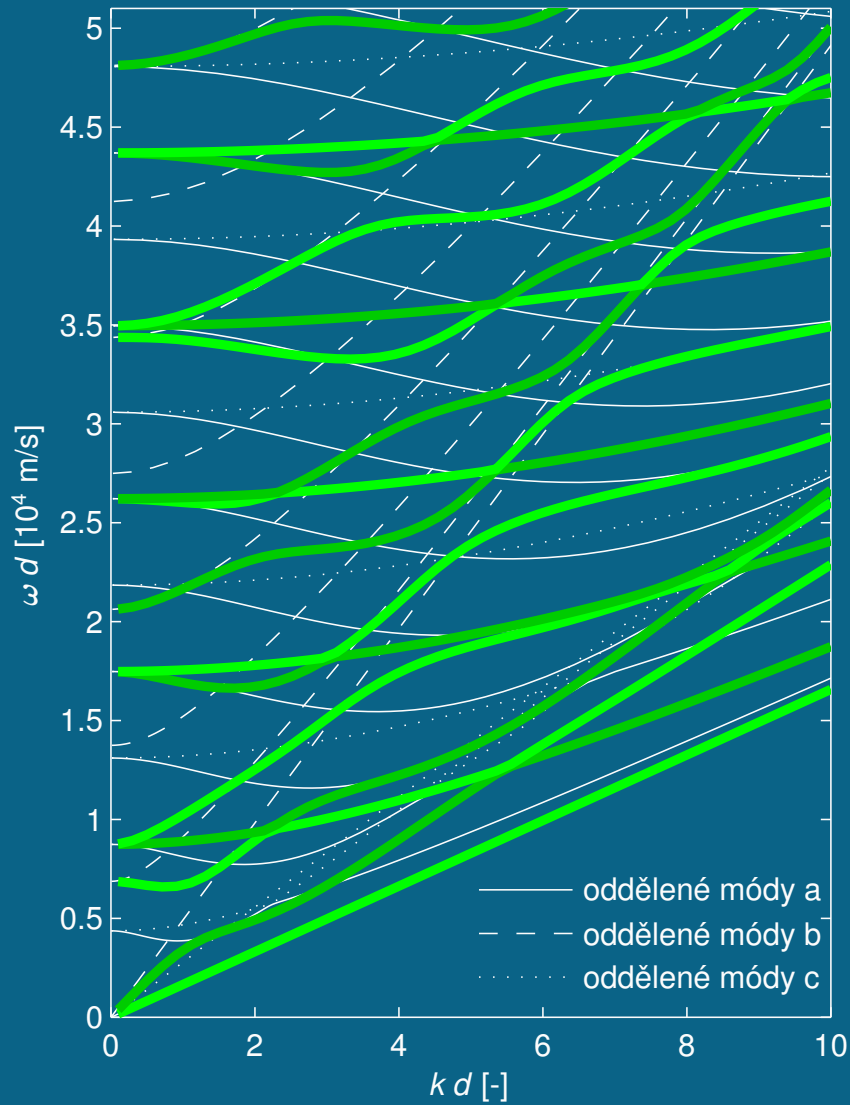


antisymetrické módy

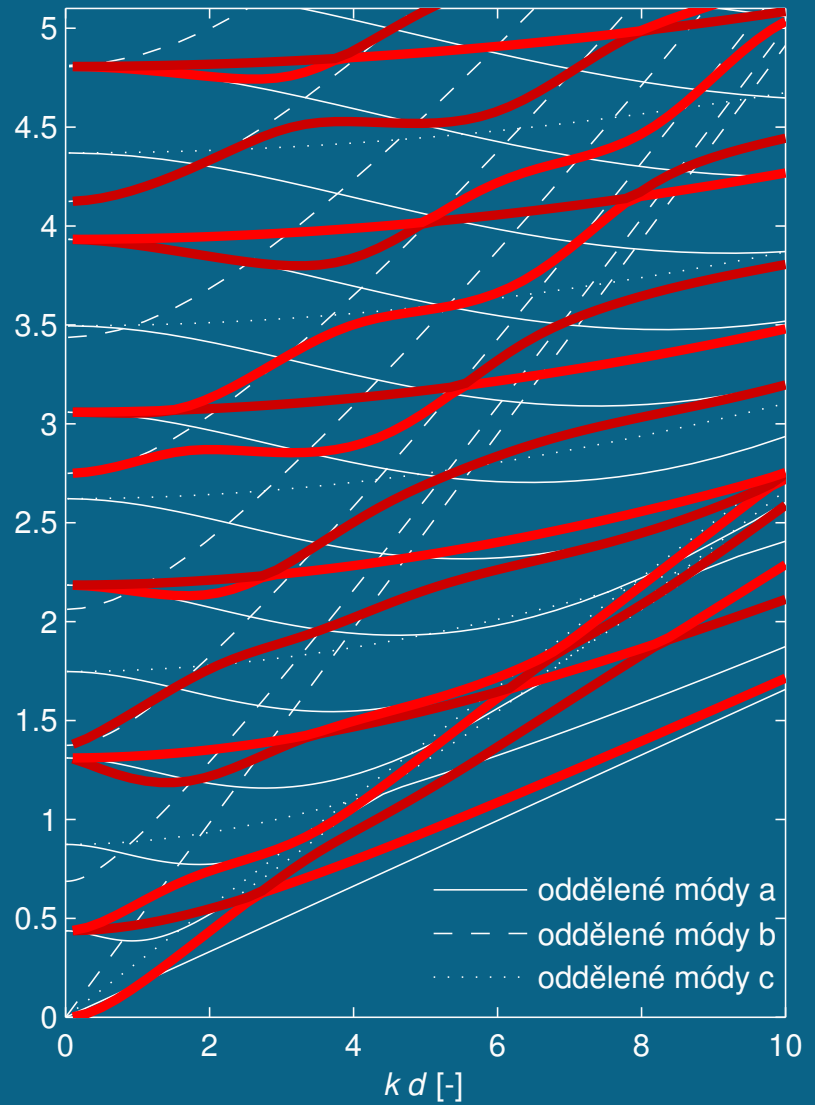


Směr šíření $\phi = 44^\circ$

symetrické módy

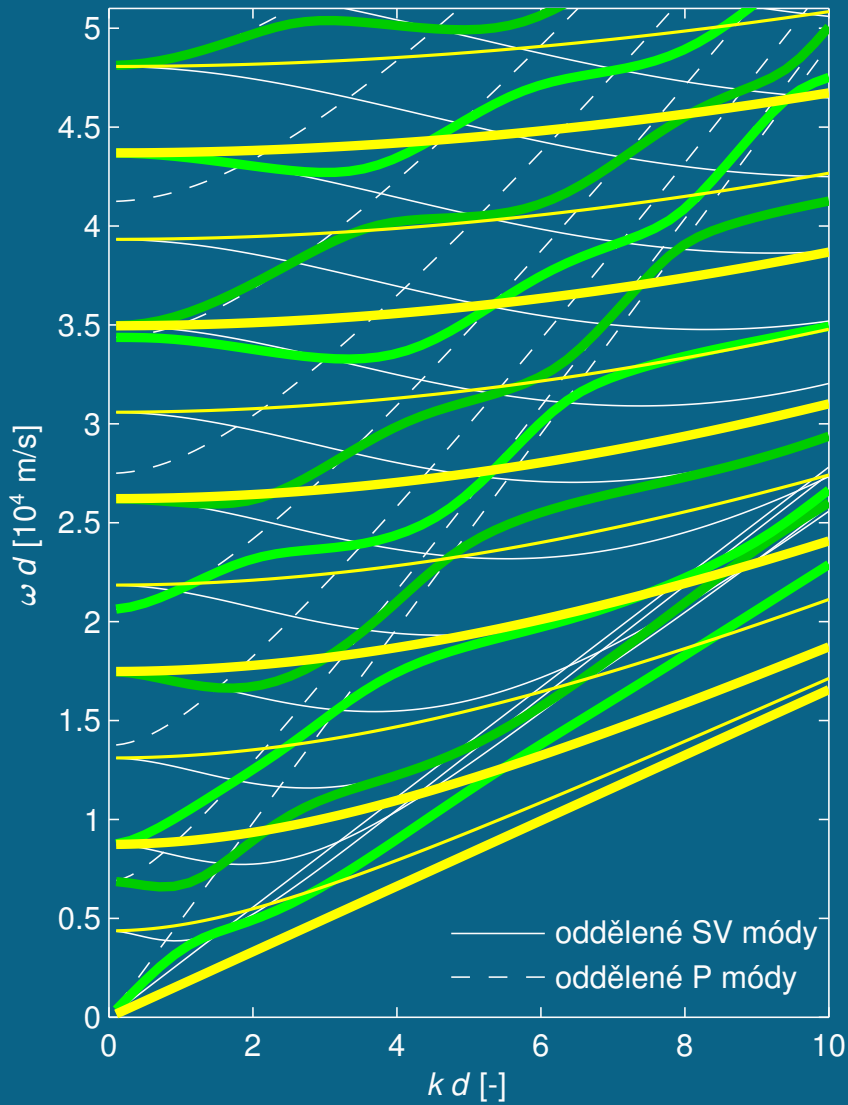


antisymetrické módy

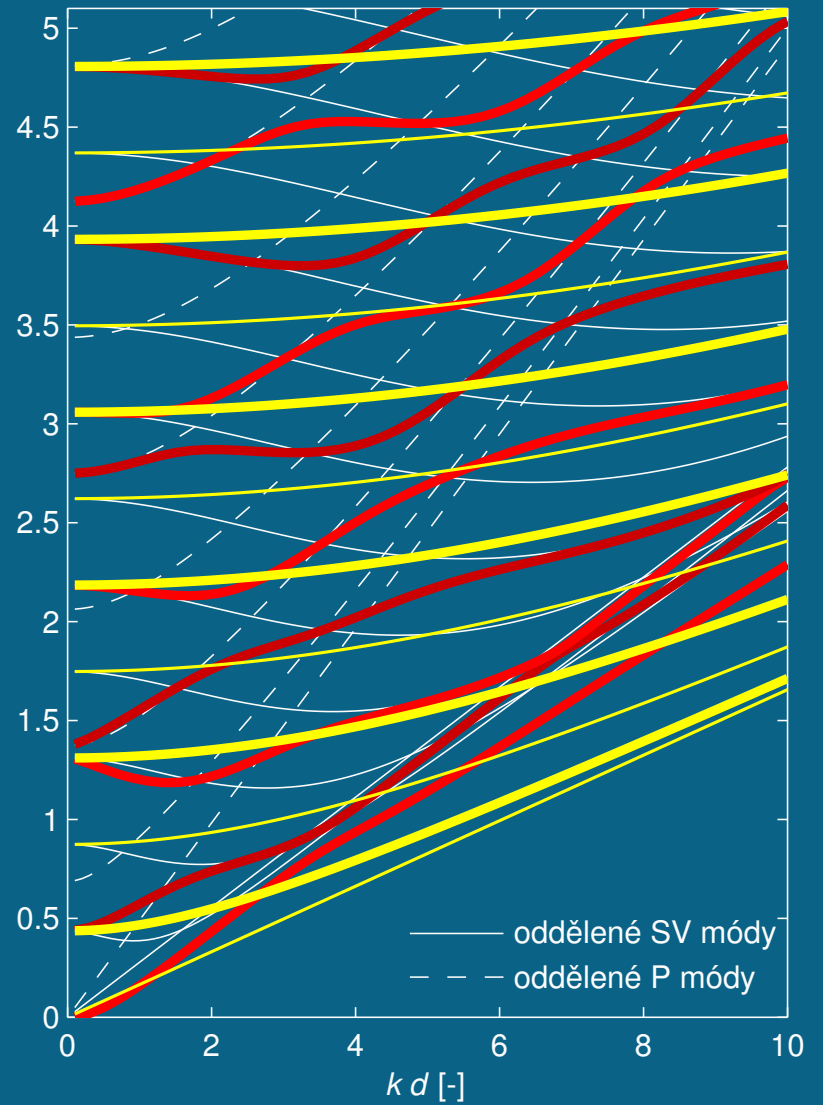


Směr šíření $\phi = 45^\circ$

symetrické módy, SH módy



antisymetrické módy, SH módy



Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.
- ✓ Antisymetrické a symetrické disperzní křivky se protínají:

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.
- ✓ Antisymetrické a symetrické disperzní křivky se protínají:
 - * v průsečících dvou módů **a**, pro které jsou indexy módů M oba sudé nebo oba liché,

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.
- ✓ Antisymetrické a symetrické disperzní křivky se protínají:
 - * v průsečících dvou módů **a**, pro které jsou indexy módů M oba sudé nebo oba liché,
 - * v místech, kde se protínají módy **a** s módy **b**, pokud jsou oba indexy M a N sudé nebo liché. Výjimka: antisymetrické módy neprocházejí průsečíky přímky $N = 0$ se sudými indexy M módů **a**.

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

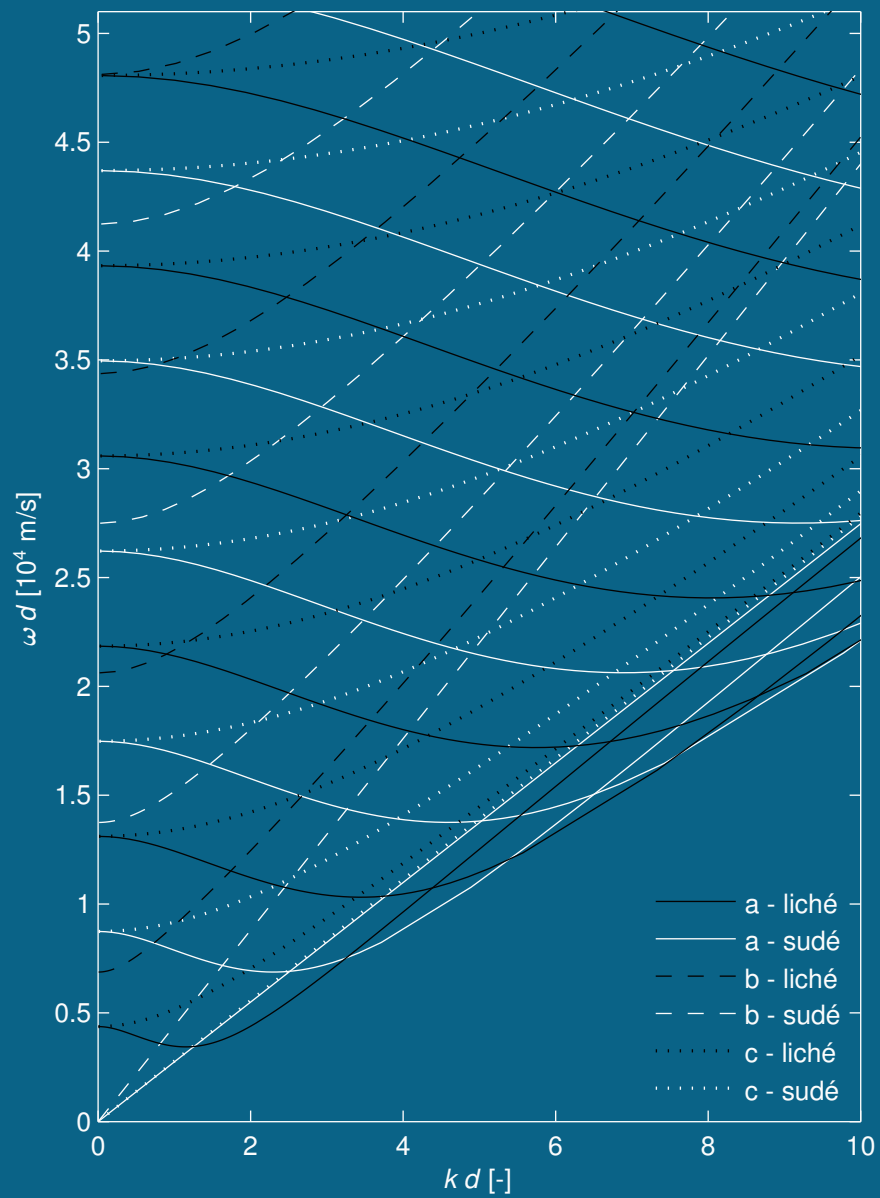
Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

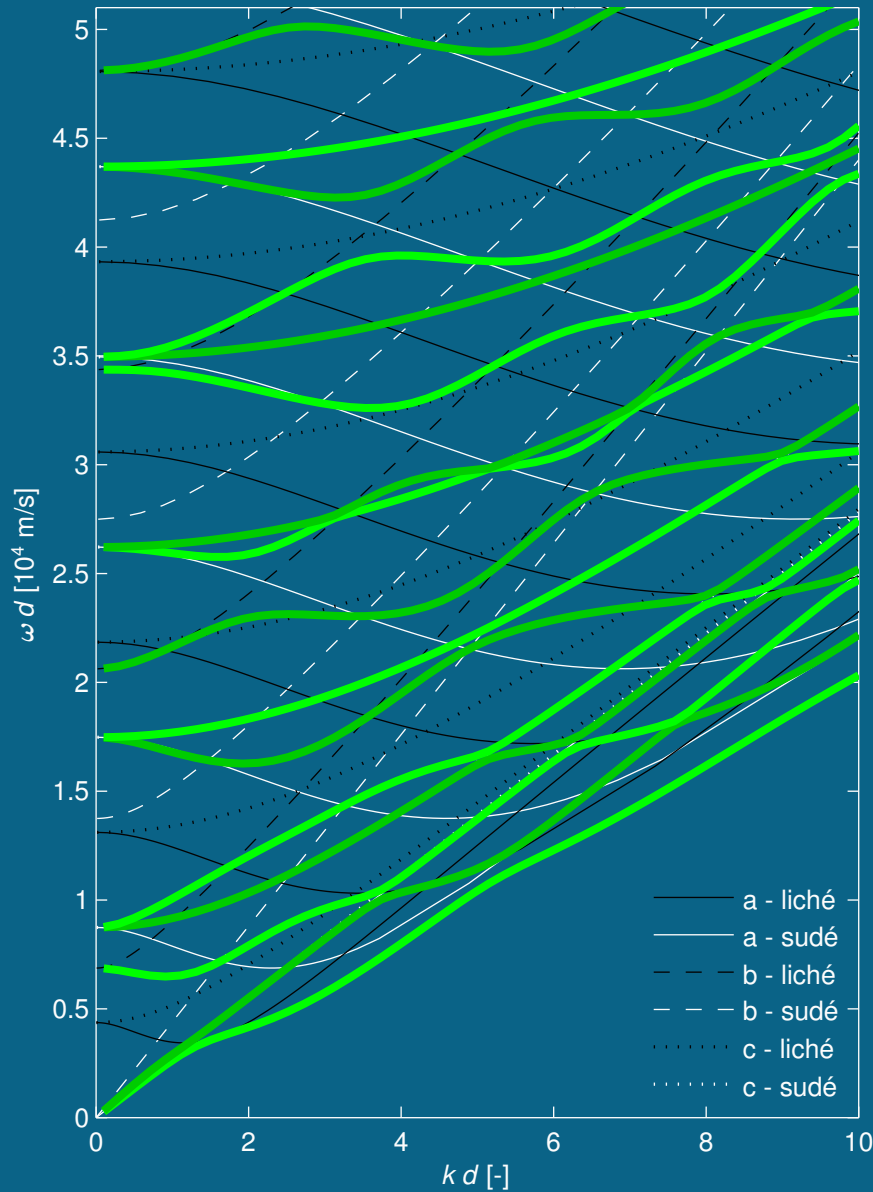
- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.
- ✓ Antisymetrické a symetrické disperzní křivky se protínají:
 - * v průsečících dvou módů **a**, pro které jsou indexy módů M oba sudé nebo oba liché,
 - * v místech, kde se protínají módy **a** s módy **b**, pokud jsou oba indexy M a N sudé nebo liché. Výjimka: antisymetrické módy neprocházejí průsečíky přímky $N = 0$ se sudými indexy M módů **a**.
- ✓ Módy **c** se sudými indexy O kopírují symetrické módy.

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

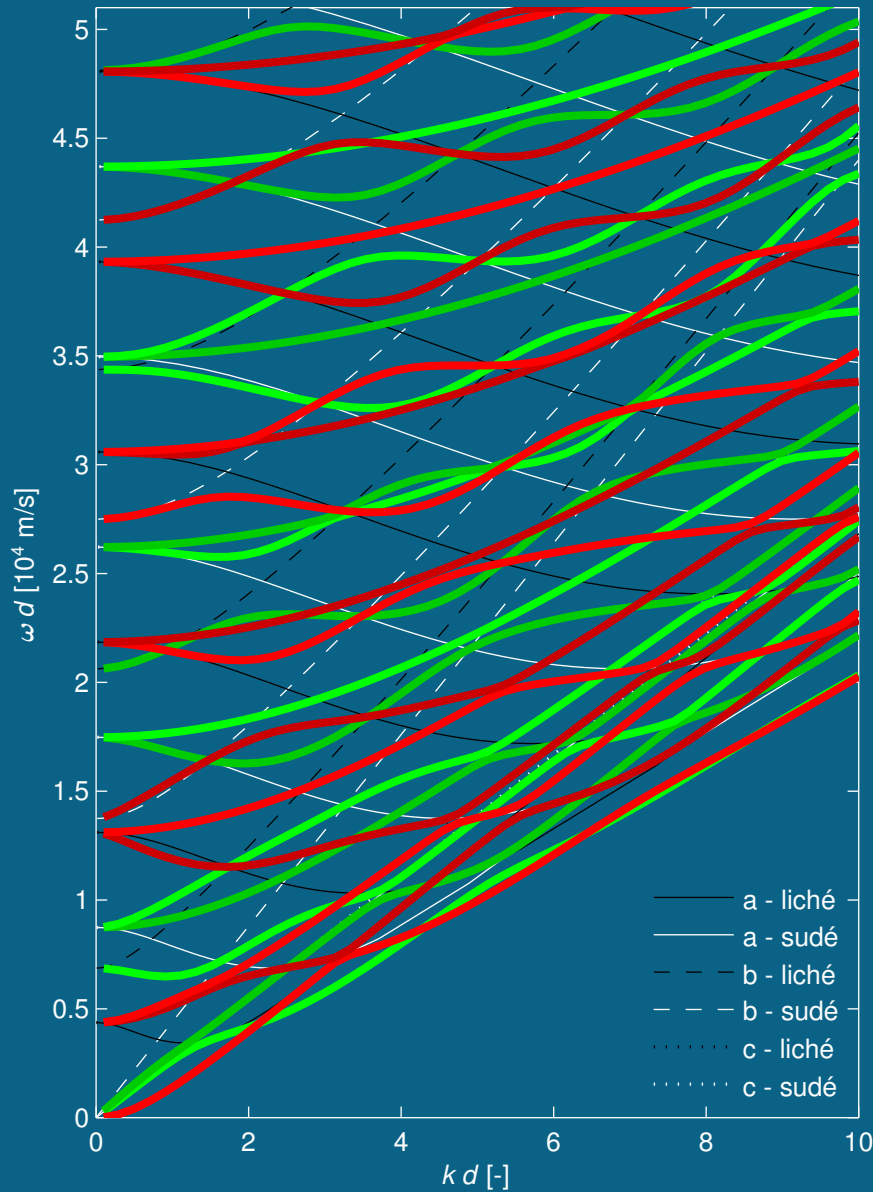
Jestliže si jednotlivé křivky pro módy **a** označíme indexy $M = 0, 1, 2, \dots$, pro módy **b** indexy $N = 0, 1, 2, \dots$ a pro módy **c** indexy $O = 0, 1, 2, \dots$, pak:

- ✓ Symetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je sudé, křivky módů **b**, kde N je liché a křivky módů **c**, kde O je sudé.
- ✓ Antisymetrické módy začínají pro $kd = 0$ stejně jako křivky módů **a**, kde M je liché, křivky módů **b**, kde N je sudé a křivky módů **c**, kde O je liché.
- ✓ Antisymetrické a symetrické disperzní křivky se protínají:
 - * v průsečících dvou módů **a**, pro které jsou indexy módů M oba sudé nebo oba liché,
 - * v místech, kde se protínají módy **a** s módy **b**, pokud jsou oba indexy M a N sudé nebo liché. Výjimka: antisymetrické módy neprocházejí průsečíky přímky $N = 0$ se sudými indexy M módů **a**.
- ✓ Módy **c** se sudými indexy O kopírují symetrické módy.
- ✓ Módy **c** s lichými indexy O kopírují asymetrické módy.



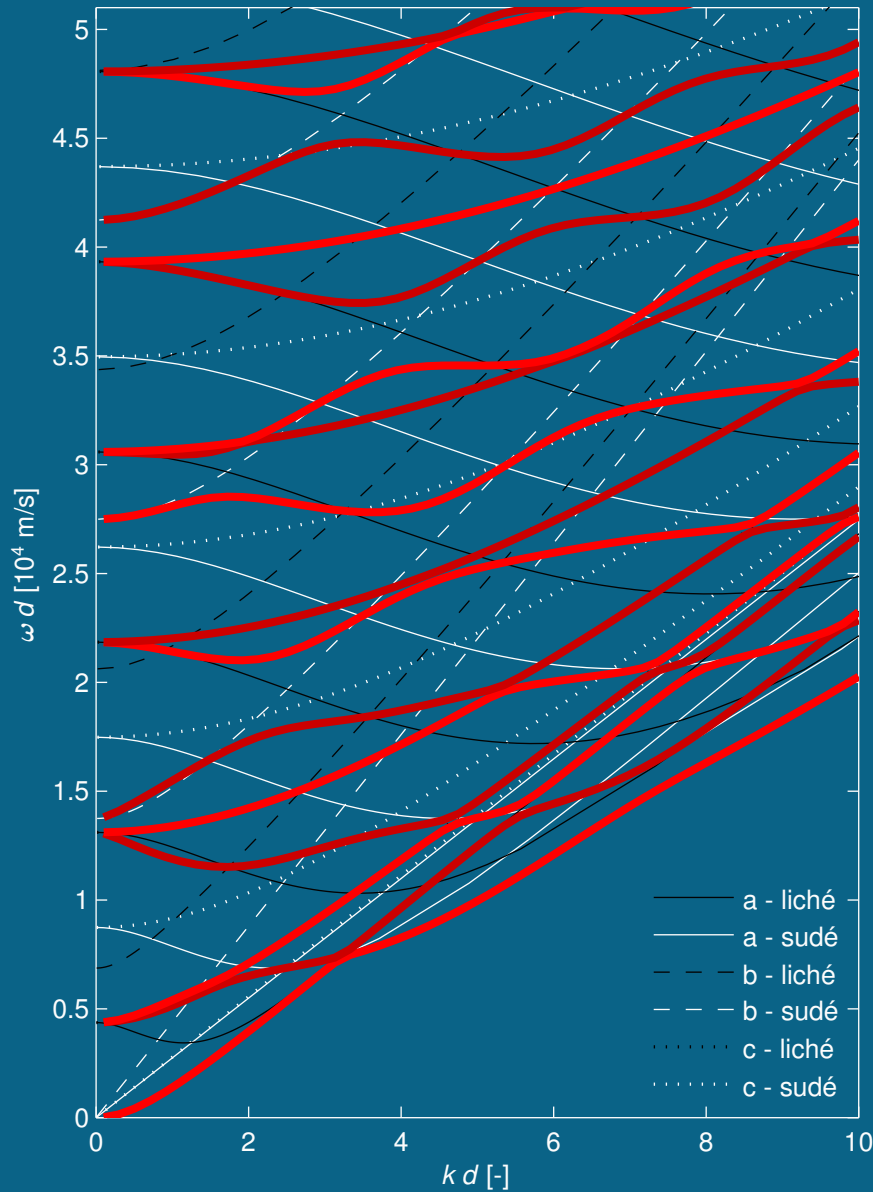


- ✓ Začátky symetrických módů: jako sudé **a** (–) a **c** (...) módy a jako liché **b** (–.) módy.
- ✓ Symetrické módy *kopírují* sudé módy **c**



✓ Křížení módů:
v místech, kde se kříží dva sudé nebo dva liché oddělené módy.

Výjimka:
antisymetrické módy neprocháží průsečíky přímky $N = 0$ se sudými módy **a**.



- ✓ Začátky antisymetrických módů: jako liché **a** (—) a **c** (...) módy a jako sudé **b** (--) módy.
- ✓ Antisymetrické módy *kopírují* liché módy **c**.

Závěr

- Obecný princip získání disperzních vztahů pro nekonečnou tlustou anizotropní desku s volnými okrajovými podmínkami.
- Odvození **analytických** vztahů disperzních závislostí pro desku s kubickou anizotropií a orientací (001).
- Při odvození analytických disperzních vztahů byl použit systém pro symbolické výpočty Maple.
- Vyčíslení disperzních závislostí pro měděnou desku s výše uvedenou orientací pomocí Matlabu.
- K odvození disperzních závislostí bylo použito metody parciálních vln.
- Získané disperzní křivky byly porovnány s výsledky Mindlinovy teorie oddělených módů, která byla zobecněna pro libovolný směr šíření.

Možnosti použití:

- Inverzní algoritmus pro stanovení elastických konstant,
- Výpočet jednotlivých složek posuvů a napětí,
- Aproximace a kontrola výpočtů disperzních závislostí pomocí zobecněných Mindlinových oddělených módů.

OBSAH

Úvod

Metoda parciálních vln

Směr šíření [100]

Směr šíření [110]

Disperzní křivky pro směry šíření $\phi = 0^\circ$ a 45°

Libovolný směr šíření

Mindlinova metoda oddělených módů

Mindlinovy křivky pro směry šíření [100] a [110]

Mindlinovy křivky pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Pomalostní křivky pro kubickou desku

Mindlinovy a disperzní křivky pro kubickou desku

Pravidla pro směry šíření $0 < \phi < 45$

Závěr