IDENTIFIKACE "MIMO" SYSTÉMŮ Z IMPULZNÍCH ODEZEV

M. Balda [1]

1. Úvod

Problém identifikace mechanických soustav se objevuje zhruba před padesáti lety v letectví a automatickém řízení, obvykle na jednoduchých SISO (Single Input – Single Output) systémech. Do této kategorie patří i práce Monastyršina [1] a její maticová programová verze [2]. Pro složitější soustavy s více vstupy a více výstupy, t.zv. MIMO systémy (Multiple Input – Multiple Output), se později objevily metody označované jako přímé, zpracovávající experimentální data z frekvenční oblasti na odhady parametrů diferenciální rovnice. V případě diskrétních modelů lineárních mechanických soustav o m^* stupních volnosti popsaných diferenciální rovnicí

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{B}\,\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

jsou hledanými parametry přímo reálné matice $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{K}$ [3]. Diskrétní lineární dynamický systém může být však charakterizován nejen těmito maticemi, ale i spektrální maticí $\boldsymbol{S}$ a modálními maticemi složených z vlastních vektorů, pravostrannou $\boldsymbol{V}$ a levostrannou $\boldsymbol{W}$, vzešlými z řešení problému vlastních čísel úlohy (1). Nalezení těchto matic je cílem nepřímých identifikačních metod. Ty u nás rozvíjeli Daněk a Kozánek [4]. Lze je rozdělit do dvou skupin podle toho, zda zpracovávají data z frekvenční oblasti nebo z oblasti časové. Zatímco v minulosti převažovaly přístupy frekvenční, v současné době existuje již řada metod zpracovávajících data z časové oblasti. Velmi dobrý přehled o významných metodách z obou oblastí podává Daňkova práce [6].

V nedávné době se objevily dvě Peškovy práce [7] a [8], v nichž se cituje identifikační metoda označovaná jako LSCE (Least Squares Complex Exponential), která byla převzata z literatury [5]. Tato metoda z maticové časové řady impulzních odezev pozorovaného systému vyhodnocuje vlastní čísla matematického modelu a levostrannou modální matici $\boldsymbol{W}$. V druhé z uvedených prací ([8]) se identifikační proces završuje postupem označovaným v původním pramenu [5] jako LSFD (Least Squares Frequency Domain). V ní se minimalizací speciální cílové funkce hledá modální matice $\boldsymbol{V}$ pravostranných vlastních vektorů.

Klíčovou roli ve všech postupech hraje metoda LSCE, která skýtá téměř dokonalou aproximaci vlastních čísel $\boldsymbol{s}$ a levostranné modální matice $\boldsymbol{W}$. Bohužel, ve všech nám dostupných pramenech je popsána způsobem, ve kterém nejsou jednotlivé kroky zdůvodněny, anebo nejsou uvedeny vůbec. Tento fakt byl na překážku jejího širšího využití, protože ji

[1] Prof. Ing. Miroslav BALDA, DrSc., Ústav termomechaniky AVČR a Západočeská univerzita, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, tel.: 019-7221178, fax: 019-7220787 e-mail: mbalda@hera.zcu.cz

nebylo možné podle nich naprogramovat. Proto se dále uvádí vlastní detailní odvození maticové verze této metody, která tvoří první část procedury `Gt2SVW`. Druhá část pro výpočet modální matice $\boldsymbol{V}$ je s první částí konsistentní v tom, že i k tomuto účelu využívá data z časové oblasti – maticovou časovou řadu impulzních odezev.

2. Procedura `Gt2SVW`

Snahou autora bylo co možná sjednotit přístup ke zpracování experimentálních dat získávaných měřením na reálných objektech a následně je zpracovat v jednom kompaktním modulu do požadovaných matic – spektrální $\boldsymbol{S}$ a modálních $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$. Při odvozování celého postupu se dbalo na to, aby každý krok byl řádně zdůvodněn.

Obvyklým výstupem z dynamických experimentů bývá serie matic frekvenčních přenosů (dynamických poddajností) $\boldsymbol{G}(f)\,\epsilon\,\mathcal{C}^{m,n}$. Ty lze získat nejrůznějšími technikami měřením odezev objektu v m místech na libovolné buzení působící na objekt v n bodech. Není rozhodující, zda bylo harmonické, impulzní, přechodové nebo náhodné, anebo zda bylo aplikováno postupně v jednotlivých bodech konstrukce, anebo současně v případě náhodného buzení.

Matice frekvenčních přenosů lze vyjádřit dvěma způsoby (viz např. [9]) pro $\omega = 2\pi f$:

$$\boldsymbol{G}(f) \;=\; [\,\boldsymbol{K} \;-\omega^2\boldsymbol{M} + i\omega\boldsymbol{B}\,]^{-1} \;=\; \boldsymbol{V}\,[\,i\omega\boldsymbol{I} \;-\boldsymbol{S}\,]^{-1}\,\boldsymbol{W}^T\,, \tag{2}$$

kde modální matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}\,\epsilon\,\mathcal{C}^{m^*,2m^*}$ obsahují vlastní vektory výchylek, a spektrální matice $\boldsymbol{S}\,\epsilon\,\mathcal{C}^{2m^*,2m^*}$ vlastní čísla na diagonále. Z matice $\boldsymbol{G}(f)$ lze zpětnou Fourierovou transformací získat matici impulzních odezev

$$\boldsymbol{G}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}\,(f)\,\mathrm{e}^{+i2\pi ft}\mathrm{d}f \;=\; \boldsymbol{V}\exp(\boldsymbol{S}t)\,\boldsymbol{W}^T \tag{3}$$

Protože výsledkem experimentu nejsou spojité funkce, ale časové, příp. frekvenční řady závislé na vzorkovací periodě T, nahražuje se obyčejná Fourierova transformace její diskrétní konečnou verzí (DFT, IDFT). Ať výsledkem experimentu je časová řada matic impulzních odezev odebraných s pevnou periodou vzorkování T o tvaru

$$\boldsymbol{G}(kT) \;=\; \boldsymbol{V}\exp(k\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^T, \qquad k \;= 0,\ldots,N-1\,, \tag{4}$$

kde N je celkový počet submatic $\boldsymbol{G}(kT)$, tedy i vzorků v každém prvku této maticové časové řady.

2.1 Vlastní čísla

Odezva $\boldsymbol{q}(t)$ na libovolné buzení $\boldsymbol{f}(t)$ je konvolucí impulzní odezvy $\boldsymbol{G}(t)$ s $\boldsymbol{f}(t)$, tedy

$$\boldsymbol{q}(t) \;=\; \boldsymbol{G}(t) * \boldsymbol{f}(t) \;=\; \int_0^t \boldsymbol{G}(\tau)\,\boldsymbol{f}(t-\tau)\,d\tau \;=\; \int_0^t \boldsymbol{G}(t-\tau)\,\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

V diskrétní verzi lze odezvu soustavy vyjádřit s využitím posledního vztahu jako

$$\boldsymbol{q}(kT) \;=\; T\sum_{\kappa=0}^{k}\boldsymbol{G}((k-\kappa)T)\,\boldsymbol{f}(\kappa T) \;=\; T\boldsymbol{V}\sum_{\kappa=0}^{k}\exp((k-\kappa)\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^T\,\boldsymbol{f}(\kappa T) \tag{6}$$

Pokud bychom použili postupně n libovolných nezávislých buzení v n vybraných bodech objektu, dostali bychom maticovou časovou řadu buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T)\,\epsilon\,\mathcal{R}^{n,n}$ a jí odpovídající maticovou časovou řadu odezev $\boldsymbol{Q}(kT)\,\epsilon\,\mathcal{R}^{m,n}$:

$$\boldsymbol{Q}(kT) \;=\; T\sum_{\kappa=0}^{k}\boldsymbol{G}((k-\kappa)T)\,\boldsymbol{F}(\kappa T) \;=\; T\boldsymbol{V}\sum_{\kappa=0}^{k}\exp((k-\kappa)\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^T\,\boldsymbol{F}(\kappa T) \tag{7}$$

Předpokládejme nyní, že za buzení byly užity Diracovy impulzy. V diskrétním modelu to znamená, že $\boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{I}_n$ a $\boldsymbol{F}(\kappa T) = \boldsymbol{O}_n$ pro $\kappa > 0$.

Hledejme nyní taková buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T)$, všechna řádu n, která budou schopna systém vybuzený v čase $t=0$ serií impulzů $\boldsymbol{F}(0)=\boldsymbol{I}_n$ uvést do klidu v následujících p vzorkovacích periodách, tedy způsobit, že odezva na počáteční impulzy $\boldsymbol{F}(0)$ bude po následujícím fiktivním buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T)$, $\kappa=1, \dots p$, již nulová, t.j. že $\boldsymbol{Q}(kT)=\boldsymbol{O}_{m,n}$ pro $k=p, p+1, \dots$. Teoreticky by pro mechanickou soustavu popsanou rovnicí (1) mohlo být $p=2$, pokud by se buzení aplikovalo ve všech stupních volnosti a systém byl řiditelný. Protože každému stupni volnosti patří jedna vlastní frekvence a té pak dvě vlastní čísla, lze minimální počet period pro zastavení rozkmitaného systému stanovit jako

$$p \geq \frac{2\, n_f}{n} = \frac{n_e}{n}\,, \tag{8}$$

kde n_f je počet vlastních frekvencí v pozorovaném frekvenčním pásmu a n_e jim odpovídající počet vlastních čísel. Rozepíšeme-li podmínku pro $\boldsymbol{Q}(kT) = \boldsymbol{O}_{m,n}$ pro $k = p, p+1, \dots,$ dostaneme systém rovnic, v němž $\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{G}(kT)$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{p+1}, & \boldsymbol{G}_p, & \cdots, & \boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{G}_{p+2}, & \boldsymbol{G}_{p+1}, & \cdots, & \boldsymbol{G}_2 \\ \vdots, & \vdots, & , & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-1}, & \boldsymbol{G}_{N-2}, & \cdots, & \boldsymbol{G}_{N-p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m,n} \\ \boldsymbol{O}_{m,n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}_{m,n} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

ze kterého lze již snadno vypočítat matice zatím neznámého fiktivního buzení $\boldsymbol{F}_\kappa = \boldsymbol{F}(\kappa T)$, $\kappa=1, \dots, p$ jako

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_p, & \boldsymbol{G}_{p-1}, & \cdots, & \boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{G}_{p+1}, & \boldsymbol{G}_p, & \cdots, & \boldsymbol{G}_2 \\ \vdots, & \vdots, & , & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-2}, & \boldsymbol{G}_{N-3}, & \cdots, & \boldsymbol{G}_{N-p-1} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{p+1} \\ \boldsymbol{G}_{p+2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

kde symbol „+“ u obdélníkové matice vyznačuje pseudoinverzi.

Z druhé části transponované rovnice (7) vyplývá, že pro vynulované odezvy od periody $p+1$ lze s využitím diagonálnosti matice $\boldsymbol{S}$ také psát

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{F}_1^T, \boldsymbol{F}_2^T, \cdots, \boldsymbol{F}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} \exp((p+1)\boldsymbol{S}T) \\ \boldsymbol{W} \exp(p\boldsymbol{S}T) \\ \vdots \\ \boldsymbol{W} \exp(\boldsymbol{S}T) \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_n \tag{11}$$

Při tom jsme mlčky vynásobili celou rovnici zleva regulární maticí $\boldsymbol{V}^+/T$. Zavedeme-li pro submatice neznámých symboly

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{W}\, \exp(k\boldsymbol{S}T)\,, \tag{12}$$

můžeme rovnici (11) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1^T, & \boldsymbol{F}_2^T, & \cdots, & \boldsymbol{F}_{p-1}^T, & \boldsymbol{F}_p^T \\ \boldsymbol{I}_n, & \boldsymbol{O}_n, & & & \\ \boldsymbol{O}_n, & \boldsymbol{I}_n, & \ddots, & & \\ \vdots, & , & \ddots, & \ddots, & \\ \boldsymbol{O}_n, & \boldsymbol{O}_n, & , & \boldsymbol{I}_n, & \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p \\ \boldsymbol{E}_{p-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I}_n & & & & \\ & \boldsymbol{I}_n & & & \\ & & \boldsymbol{I}_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{p+1} \\ \boldsymbol{E}_p \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Protože ze všech submatic $\boldsymbol{E}_k$ na pravé straně lze vytknout $\exp(\boldsymbol{S}T)$ a tedy psát

$$\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{E}_k \exp(\boldsymbol{S}T)\,, \tag{14}$$

lze i systém rovnic (13) zapsat zkráceně jako problém vlastních hodnot $\boldsymbol{Z}$ a jim odpovídajících vlastních vektorů $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{Z} \tag{15}$$

Matice vlastních čísel $\boldsymbol{Z} = \exp(\tilde{\boldsymbol{S}}T)$ nemusí být stejného řádu jako $\boldsymbol{S}$, ale bude při vyšším p, než je nezbytně nutné, obsahovat ještě doplňková vlastní čísla nesouvisející s identifikovaným systémem. Stejné platí o matici vlastních vektorů. Po jeho vyřešení určíme z prvních $n_e = 2n_f$ uspořádaných vlastních hodnot z matice $\boldsymbol{Z}$ spektrální matici $\boldsymbol{S}$ původní úlohy identifikovaného systému s využitím rovnice (14) jako

$$\boldsymbol{S} \;= f_s \ln \boldsymbol{Z} \tag{16}$$

Přesnost odhadu spektrální matice $\boldsymbol{S}$ je u přesných dat tím větší, čím větší je hodnota parametru p, ovšem za cenu paměťových nároků rostoucích s p kvadraticky a výpočetního času narůstajícího s p kubicky. Pro data zatížená chybami je však účelné udržovat p co nejnižší, aby se snížilo nebezpečí nalezení nepravých vlastních frekvencí.

2.2 Modální matice

Nejsnáze se vypočte **levostranná** modální matice $\boldsymbol{W}$, které se v hermitovsky transponované formě někdy říká matice participačních faktorů $\boldsymbol{L}$. Název vystihuje její účinek na příspěvek určitých souřadnic vektoru $\boldsymbol{f}(t)$ k jednotlivým tvarům kmitu. Modální matici $\boldsymbol{W}$ vypočteme z rovnice (12) jako

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}_p\,[\exp(p\,\boldsymbol{S}T)\,]^+ \tag{17}$$

Výpočet **pravostranné** modální matice $\boldsymbol{V}$ lze realizovat různými způsoby. Zatímco při použití metody LSFD popsané v belgickém prameni [5] a užité v Peškově práci [8] se přechází do frekvenční oblasti, v proceduře `Gt2SVW` se i pro odhad pravostranné modální matice zůstává v časové oblasti. Za tím účelem se z rovnice (4) vytvoří pro $k = 0,\, 1,\, \cdots,\, N{-}1$ přeurčený systém algebraických rovnic, ze kterého se získá řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců ve tvaru

$$\boldsymbol{V} \;\;=\;\; \{[\,\boldsymbol{W}\exp(k\boldsymbol{S}T)\,]^+\;\boldsymbol{G}^T(kT)\}^T \tag{18}$$

v němž výrazy v hranatých závorkách jsou obdélníkové matice vzniklé při k probíhajícím již zmíněný interval. Je snad vhodné zde upozornit, že identifikované modální matice jsou submaticemi úplných modálních matic, protože $\boldsymbol{V} \in \mathcal{C}^{m,n_e}$ a $\boldsymbol{W} \in \mathcal{C}^{n,n_e}$. Pokud by se měly určit celé modální matice, bylo by zapotřebí budit i měřit ve všech stupních volnosti.

2.3 Programová realizace

Procedura `Gt2SVW` uvedená v předchozích odstavcích byla naprogramována v jazyku MATLAB 5.3. Pro ukládání maticových časových řad se použily obyčejné matice, ačkoliv využití vícerozměrných polí by se mohlo zdát výhodnější. Důvodem pro toto rozhodnutí byla skutečnost, že ani v uvedené verzi MATLABu nejsou nad poli definovány všechny operátory a funkce, takže je zapotřebí chybějící naprogramovat pomocí cyklů. Zavedli jsme proto standardní tvar pro uložení maticové časové řady. V něm její submatice patřící k-té vzorkovací periodě tvoří k-tou řádku vyplněnou jejími sloupci. Časová řada prvku tak vytváří sloupec výsledné matice. Tak např. prvek $g_{ij}(kT)$ submatice $\boldsymbol{G}(kT)$ lze nalézt v k-té řádce a $((j-1)\,m+i)$-tém sloupci. Z celé plejády funkcí sestavených pro práci s maticovými časovými řadami se v dále uvedeném modulu `Gt2SVW` použily jen dvě

- `tstrn` pro transpozici matice časových řad,
- `tsresize` pro převedení matice časových řad ze standardního tvaru do posloupnosti submatic řazených pod sebou.

Kromě nich se v uvedeném modulu vyskytuje ještě volání funkce `inp`, která je rozšířením standardní funkce `input` o implicitní nabídku zadání hodnoty proměnné. Parametry funkce `Gt2SVW` jsou

Vstupní

- `Gt` maticová časová řada impulzních odezev $\boldsymbol{G}(t)$,
- `m, n` počet bodů měření, resp. buzení,
- `fs` vzorkovací frekvence f_s [Hz],
- `nf` počet rezonancí n_f v měřeném frekvenčním intervalu.

Výstupní

- `s` vektor-sloupec n_e vlastních hodnot,
- `V, W` modální matice s levostrannými, resp. pravostrannými vlastními vektory.

Protože pro $p > n_e/n$ vznikají ve spektrální matici doplňková vlastní čísla, která nepatří k vlastnostem identifikovaného systému, byla velká pozornost věnována uspořádání a výběru vlastních čísel a následně i vlastních vektorů. Pro snadné srovnávání dosažených výsledků s teoretickými, jsou všechny vlastní vektory normovány tak, že prvky s největším modulem ve vektorech mají jednotkovou hodnotu.

2.4 Příklad použití

Funkce a chování procedury `Gt2SVW` se testovaly na simulovaném měření systému o 4 stupních volnosti o parametrech uvedených v tabulce. Pro testování byl sestaven zvláštní modul, který z uvedených koeficientových matic vypočítal cyklický frekvenční přenos v 512 bodech na frekvenčním intervalu 0 až 50 [Hz]. Ten se zatížil pseudonáhodnými relativními chybami o modulech s normálním rozložením a rovnoměrným rozložením fází. Uživatel může volit směrodatnou odchylku těchto chyb. Zpětnou DFT se získala cyklická impulzní odezva, jejíž první polovina o 256 bodech byla použita pro identifikaci. Doba řešení této úlohy se měří ve zlomcích sekundy. Z přiložených otisků řešení je patrno, že při zkoušce se srovnávala „teoretická“ a identifikovaná vlastní čísla a modální (sub)matice bez šumu. Zkoušel se vliv měřicího šumu a parametru p na přesnost řešení.

```
M = inp('M ',diag([5,8,12,16]));
B = inp('B ',[80,-50, -10, -20
             -50,250, -70, -30
             -10,-70, 250,-100
             -20,-30,-100, 500])/10;
K = inp('K ',[149, -80,  -3,  -4
              -80, 288,-180,  -8
               -3,-180, 393,-180
               -4,  -8,-180, 442])*100;
```

```
         M  =   5.0000 ... 16.0000 =>
         B  =  80.0000 ...  500.0000 =>
         K  =  149.0000 ...  442.0000 =>
         fs =  50.0000 =>
         N  =       256 =>
         err % =      0 =>                                        No noise
         seed  = 3.141593e+006 =>
         Measured points =     1 ...       4 =>
         Excited  points =     1 ...       4 =>
         tol % =      3 =>
         nf =         4 =>
         p  =         2 =>

      s(MBK)               s(LSCE)            f(LSCE) [Hz]

  -0.5591 +27.0230i  -0.5585 +27.0213i  -0.0889 + 4.3006i
  -1.1489 +49.0183i  -1.1520 +49.0146i  -0.1833 + 7.8009i
  -1.4419 +60.6253i  -1.4485 +60.6221i  -0.2305 + 9.6483i
  -1.8167 +76.1645i  -1.8288 +76.1667i  -0.2911 +12.1223i
  -0.5591 -27.0230i  -0.5585 -27.0213i  -0.0889 - 4.3006i
  -1.1489 -49.0183i  -1.1520 -49.0146i  -0.1833 - 7.8009i
  -1.4419 -60.6253i  -1.4485 -60.6221i  -0.2305 - 9.6483i
  -1.8167 -76.1645i  -1.8288 -76.1667i  -0.2911 -12.1223i

   maxerr s = 0.0036799                                 max |s(MBK)-s(LSCE)|

Wt =                                                               Theoretical
  Columns 1 through 4
   0.7529 - 0.0655i   1.0000              1.0000 - 0.0000i  -0.5581 + 0.0007i
   1.0000             0.3936 + 0.0349i  -0.4473 + 0.0223i   1.0000 - 0.0000i
   0.9150 - 0.0268i  -0.2109 + 0.0132i  -0.4530 + 0.0094i  -0.7435 - 0.0022i
   0.5408 + 0.0003i  -0.5324 - 0.0439i   0.5525 - 0.0308i   0.2631 + 0.0003i
  Columns 5 through 8
   0.7529 + 0.0655i   1.0000              1.0000 - 0.0000i  -0.5581 - 0.0007i
   1.0000             0.3936 - 0.0349i  -0.4473 - 0.0223i   1.0000
   0.9150 + 0.0268i  -0.2109 - 0.0132i  -0.4530 - 0.0094i  -0.7435 + 0.0022i
   0.5408 - 0.0003i  -0.5324 + 0.0439i   0.5525 + 0.0308i   0.2631 - 0.0003i
W =                                                                 Identified
  Columns 1 through 4
   0.7548 + 0.0124i   1.0000 + 0.0000i   1.0000             -0.5580 + 0.0043i
   1.0000             0.3944 - 0.0262i  -0.4467 - 0.0382i   1.0000
   0.9157 + 0.0010i  -0.2107 - 0.0132i  -0.4529 - 0.0154i  -0.7433 + 0.0114i
   0.5409 - 0.0024i  -0.5335 + 0.0243i   0.5517 + 0.0456i   0.2631 + 0.0010i
  Columns 5 through 8
   0.7548 - 0.0124i   1.0000 + 0.0000i   1.0000             -0.5580 - 0.0043i
   1.0000             0.3944 + 0.0262i  -0.4467 + 0.0382i   1.0000 + 0.0000i
   0.9157 - 0.0010i  -0.2107 + 0.0132i  -0.4529 + 0.0154i  -0.7433 - 0.0114i
   0.5409 + 0.0024i  -0.5335 - 0.0243i   0.5517 - 0.0456i   0.2631 - 0.0010i
Vt =                                                               Theoretical
  Columns 1 through 4
   0.7548 + 0.0124i   1.0000 + 0.0000i   1.0000             -0.5580 + 0.0045i
   1.0000             0.3945 - 0.0264i  -0.4465 - 0.0384i   1.0000 + 0.0000i
   0.9158 + 0.0010i  -0.2107 - 0.0132i  -0.4529 - 0.0153i  -0.7433 + 0.0112i
   0.5409 - 0.0024i  -0.5336 + 0.0245i   0.5515 + 0.0457i   0.2631 + 0.0012i
  Columns 5 through 8
   0.7548 - 0.0124i   1.0000              1.0000             -0.5580 - 0.0045i
   1.0000             0.3945 + 0.0264i  -0.4465 + 0.0384i   1.0000
   0.9158 - 0.0010i  -0.2107 + 0.0132i  -0.4529 + 0.0153i  -0.7433 - 0.0112i
   0.5409 + 0.0024i  -0.5336 - 0.0245i   0.5515 - 0.0457i   0.2631 - 0.0012i
V =                                                                 Identified
  Columns 1 through 4
   0.7549 + 0.0129i   1.0000              1.0000 - 0.0000i  -0.5569 + 0.0011i
   1.0000 + 0.0000i   0.3937 - 0.0270i  -0.4484 - 0.0368i   1.0000
   0.9157 + 0.0006i  -0.2108 - 0.0125i  -0.4533 - 0.0129i  -0.7434 + 0.0141i
   0.5408 - 0.0027i  -0.5329 + 0.0265i   0.5529 + 0.0421i   0.2634 - 0.0004i
  Columns 5 through 8
   0.7549 - 0.0129i   1.0000              1.0000             -0.5569 - 0.0011i
   1.0000 + 0.0000i   0.3937 + 0.0270i  -0.4484 + 0.0368i   1.0000
   0.9157 - 0.0006i  -0.2108 + 0.0125i  -0.4533 + 0.0129i  -0.7434 - 0.0141i
   0.5408 + 0.0027i  -0.5329 - 0.0265i   0.5529 - 0.0421i   0.2634 + 0.0004i
```

```
% GT2SVW.M       Identification of S, V & W
% ~~~~~~~~

function [s,V,W] = gt2svw(Gt,m,n,fs,nf)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ne = 2*nf; %                                     # of eigenvalues
p  = inp('p ',ceil(ne/n),'%9d'); %  Periods of hypothetical excitation
%    ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
[N,mn] = size(Gt);
iG = p+2:N;
B  = -Gt(iG,:);
A  = zeros(N-p-1,p*mn);
iA = 1:N-p-1;
jA = 1:mn;
for k = 1:p
   iG = iG-1;
   A(iA,jA) = Gt(iG,:);
   jA = jA+mn;
end
F = tsresize(A,m)\tsresize(B,m); %  Excitation matrix

%   Eigenvalue problem:
%   %%%%%%%%%%%%%%%%%%

pn = (p-1)*n;
[E,Z] = eig([F.'; eye(pn), zeros(pn,n)], ...
   [-eye(n), zeros(n,pn); zeros(pn,n), eye(pn)]);

s = log(diag(Z))*fs;
E = E(1:n,imag(s)~=0);
s = s(imag(s)~=0);
[s,I] = sort(s); %                        Ordering
s  = s(1:ne); %                           S
xs = exp(s/fs); %                          exp(sT)
xs = [xs(imag(s)>0);xs(imag(s)<0)];
E  = E(:,I);
E  = E(:,1:ne);

%   Left modal matrix W
%   ~~~~~~~~~~~~~~~~~
W  = [E(:,imag(s)>0),E(:,imag(s)<0)]*diag(1./xs.^p);
W  = W*diag(1./max(W)); %             Left modal matrix

s  = [s(imag(s)>0);s(imag(s)<0)]; % Ordered eigenvalues

%   Right modal matrix V
%   ~~~~~~~~~~~~~~~~~~
GT = Tstrn(Gt(1:N,:),m);
WE = zeros(N,n*ne);
sr = ones(size(W))*diag(xs);
sr = sr(:).'; %         Auxiliary row vector of eigenvalues
WE(1,:) = W(:).';
%
for k=2:N
   WE(k,:) = WE(k-1,:).*sr;
end
k = 1:k;
V  = (pinv(Tsresize(WE(k,:),n))*Tsresize(GT(k,:),n)).';
V  = V*diag(1./max(V)); %             Right modal matrix
% ---------------------------------------------------------------------------------
```

```
% TSRESIZE.M
% ~~~~~~~~~~
function B = tsresize(A,mA)
%          ~~~~~~~~~~~~~~~~~
[N,mn] = size(A);
nA = mn/mA;
b  = zeros(mA,nA);
B  = zeros(N*mA,nA);
iB = 1:mA;

for iA=1:N
   b(:) = A(iA,:);
   B(iB,:) = b;
   iB = iB+mA;
end
```

```
% TSTRN.M    Transposition of TS
% ~~~~~~~
function B = tstrn(A,mA)
%          ~~~~~~~~~~~~~~
[N,mn] = size(A);
nA = mn/mA;
jA = 1:mA:mn;
jB = 1:nA;

for k=0:mA-1
   B(:,jB) = A(:,jA+k);
   jB = jB+nA;
end
```

3 Závěr

V příspěvku je popsáno odvození metody identifikace lineárních diskrétních soustav z maticové časové řady impulzních odezev. Tato řada je použita jak k odhadu vlastních čísel soustředěných do spektrální matice, tak i obou modálních matic. Z úvodního testování programové realizace do matlabovské funkce nazvané `Gt2SVW` vyplývá, že metoda je velmi rychlá i dostatečně přesná i při měření zatíženém běžnými náhodnými chybami (několik procent). Zatím dosažené výsledky jsou velmi dobré a dokazují, že lze zpracovat globální informaci obsaženou v rozsáhlých souborech měřených dat.

Metodu lze použít pro analýzu experimentálních dat sejmutých na dynamických systémech a využít ke zpřesňování jejich matematických modelů. Přesnější modely pak umožňují spolehlivější návrhy konstrukcí a tím i snížení rizik vyplývajících z blízkostí rezonančních stavů a z nich vyplývajících únavových poruch způsobených vysokou úrovní dynamických napětí vyvolaných nadměrnými vibracemi.

Literatura

[1] Monastyršin G. J.: Obrabotka eksperimentalnych častotnych charakteristik. Avtomatika i telemechanika, *21*, 1960, č.3, 422-428

[2] Balda M.: Zpracování experimentálních frekvenčních charakteristik (Program 61-14). ŠKODA Plzeň - ÚVZÚ, SV 3080, 1966

[3] Balda M.: Identifikace a zpracování měření dynamických soustav. Část I. ŠKODA Plzeň - ÚVZÚ, Sz 3941 V, 1976

[4] Kozánek J.: Vyhodnocení parametrů přenosové funkce z naměřených dat. ÚT ČSAV, Z735/80, Praha, 1980

[5] Heylen W., Lammens S., Sas P.: Modal analysis theory and testing. Katholieke Universiteit Leuven, Belgie, 1994

[6] Daněk O.: Identifikační metody v dynamice strojů. Strojnícky časopis, *48*, 1997, č. 5, 297-314

[7] Pešek L.: Polyreferenční identifikace mechanických systémů v časové oblasti. Kolokvium „Diagnostika a aktivní řízení '98“, Brno, 1998, 99-104

[8] Pešek L.: Globální MIMO identifikační metoda v časové a frekvenční oblasti. Konference „Inženýrská mechanika '99“, Svratka, 1999, 183-188

[9] Balda M.: Vyvažování rotorových soustav - 1. část. Seminář „Dynamika rotorových soustav“, VUT Brno, 1999

IDENTIFICATION OF MIMO SYSTEMS OUT OF IMPULSE RESPONSES

The contribution describes a method of estimating spectral and modal matrices of linear discrete systems by means of processing their matrix time series of impulse responses. The contribution includes the full description of the LSCE method, which creates the first part of the new MATLAB function named Gt2SVW. Its second part complements the estimates of the spectral matrix and a modal matrix of left eigenvectors by finding a right modal matrix.

Tento příspěvek vznikl v rámci řešení projektů 101/97/0226 a 101/99/0103 Grantové agentury ČR.