

POUŽITÍ SPOJITÉ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE PRO ČASOFREKVENČNÍ ANALÝZU DISPERZNÍCH NAPĚŤOVÝCH VLN

P. Hora*

Úvod

Analýza šíření napětových vln v konstrukcích je základním předmětem v řadě problémů, jako např. analýza odezvy konstrukce na ráz, charakterizace vibrací konstrukce, ultrazvuková identifikace materiálových vlastností apod. Napětové vlny v tělesech mají často disperzní charakter, je tedy zapotřebí prozkoumat šíření vlny ve všech frekvencích, to znamená provést časofrekvenční analýzu.

Mezi nejdůležitější (tj. nejpoužívanější) metody časofrekvenční analýzy signálů patří okénková Fourierova transformace (short-time Fourier transform), Wigner-Villeova distribuce a waveletová transformace. V tomto článku se zaměříme na použití spojité waveletové transformace pro časofrekvenční analýzu disperzních napětových vln v tenké tyči.

Spojité waveletová transformace

Spojité waveletová transformace (CWT) funkce $f(t)$ je popsána

$$(Wf)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1)$$

kde $a > 0$ a nadtržení označuje komplexně sdruženou hodnotu.

Aplikací Parsevalovy rovnosti na (1) dostáváme

$$(Wf)(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega, \quad (2)$$

kde $\hat{f}(\omega)$ označuje Fourierovu transformaci $f(t)$ definovanou

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

* Ing. Petr Hora, CSc., Centrum diagnostiky materiálů ÚT AV ČR Plzeň, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň (tel.: 019-7236415, fax.: 019-7220787, e-mail: hora@ufy.zcu.cz).

Funkce $\psi(t)$ se nazývá analyzující wavelet a aby byla spojitá waveletová transformace invertabilní musí $\psi(t)$ splňovat podmínku přípustnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (4)$$

Z podmínky přípustnosti vyplývá, že analyzující wavelet nemá stejnosměrnou složku, tj. $\hat{\psi}(0) = 0$. V praxi může být analyzující wavelet považován za okénkovou funkci v čase i frekvenci. Předpokládejme, že časové okénko $\psi(t)$ má střed pro $t = 0$ a frekvenční okénko $\hat{\psi}(\omega)$ pro $\omega = \omega_0$. Funkce $\psi((t-b)/a)$ je pak rozložena okolo $t = b$ a její Fourierova transformace $[a \times \exp(-ib\omega)\hat{\psi}(a\omega)]$ okolo $\omega = \omega_0/a$. Z rovnic (1) a (2) je zřejmé, že $(Wf)(a,b)$ odpovídá časofrekvenční složce $f(t)$ v okolí $t = b$ a $\omega = \omega_0/a$. Jestliže jsou parametry a a b měněny nezávisle, poskytuje b - a -rovina (časofrekvenční rovina) distribuci každé časofrekvenční složky. Tedy CWT umožňuje časofrekvenční analýzu.

Podle vzorovací věty je pro přiměřenou charakterizaci nízkofrekvenčních signálů vyžadováno dostatečně široké časové okénko. Naopak pro úspěšné stanovení pozice vysokofrekvenčních složek signálu na časové ose je vyžadováno dostatečně úzké časové okénko. Tyto požadavky CWT automaticky splňuje, poněvadž šířka časového okénka $\psi((t-b)/a)$ je úměrná parametru a , který je nepřímo úměrný frekvenci. Tento charakter CWT je užitečný pro analýzu napět'ových vln, které obvykle obsahují mnoho frekvenčních složek.

V tomto článku budeme používat modifikovanou verzi Morletova waveletu, kterou nazývá Sadowsky Morletovým pseudowaveletem [SADO96] a Kishimoto waveletem Gaborovým [KISH95]. Tento wavelet byl úspěšně používán pro analýzu zvuku nebo pro analýzu hudebních nástrojů. Jeho obecná forma je

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t^2/2) + i\omega_0 t}. \quad (5)$$

kde ω_0 je parametr, kterým může být nastaven střed waveletu na vhodný rozsah frekvencí, v našem případě $\omega_0 = 2\pi$. Striktně řečeno, Morletův pseudowavelet není analyzujícím wavelet, neboť lze ukázat, že nesplňuje podmínku přípustnosti. Ačkoliv pseudowavelet nelze použít pro rekonstrukci signálu z jeho CWT, je docela vhodný pro časofrekvenční zobrazení signálů a je výpočetně daleko jednodušší než Morletův wavelet.

Waveletová analýza disperzních vln

Uvažujme dvě harmonické vlny jednotkové amplitudy a různých frekvencí ω_1 a ω_2 šířících se ve směru x

$$u(x,t) = e^{-i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{-i(k_2 x - \omega_2 t)}, \quad (6)$$

kde k_1 a k_2 jsou vlnová čísla. Rovnice (14) může být upravena na

$$u(x,t) = 2 \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) e^{-i(k_c x - \omega_c t)}, \quad (7)$$

kde

$$k_c = (k_1 + k_2)/2, \quad \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad \Delta k = (k_1 - k_2)/2 \quad \text{a} \quad \Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)/2. \quad (8)$$

Pokud je $\Delta\omega$ dostatečně malé, takže $\omega_1 \cong \omega_2$, může být definována fázová rychlost c_p resp. grupová rychlost c_g o frekvenci ω_c jako

$$c_p = \omega_c / k_c, \quad c_g = \Delta\omega / \Delta k. \quad (9)$$

CWT $u(x,t)$ je dána

$$(Wu)(x,a,b) = \sqrt{a} \left[e^{-i(k_1x-\omega_1b)} \overline{\hat{\psi}(a\omega_1)} + e^{-i(k_2x-\omega_2b)} \overline{\hat{\psi}(a\omega_2)} \right]. \quad (10)$$

Modul CWT je potom

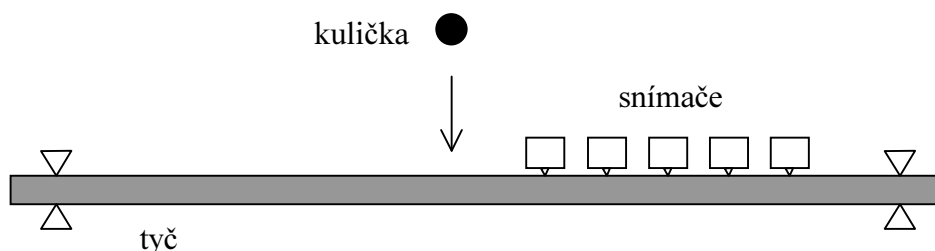
$$|(Wu)(x,a,b)| = \sqrt{a} \left\{ [\hat{\psi}(a\omega_1)]^2 + [\hat{\psi}(a\omega_2)]^2 + 2\hat{\psi}(a\omega_1)\hat{\psi}(a\omega_2)\cos(2\Delta kx - 2\Delta\omega b) \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

kde se předpokládá, že $\hat{\psi}(\omega)$ je reálná funkce. V [HORA98] bylo uvedeno, že v případě malého $\Delta\omega$ odpovídá maximum modulu CWT šíření vlny grupovou rychlostí c_g při frekvenci ω_c a v případě dostatečně velkého $\Delta\omega$ jsou dvě frekvenční složky reprezentovány jako dvě separátní špičky v časofrekvenční rovině.

CWT ohybových vln v tenké tyči

Typickým příkladem dispersního chování vln je experiment se šířením ohybových vln v tenké tyči kruhového průřezu. Na obr. 1 je zobrazeno schéma experimentu: jednoduše podepřená hliníková tyč (průměr 1 cm a délka 90 cm), na jejíž střed dopadá ocelová kulička (průměr 2 mm, doba rázu 6 μ s). Pět snímačů (širokopásmové snímače s kónickým piezoelementem) jsou měřeny výchylky. První snímač je vzdálen 10 cm od místa dopadu kuličky a další jsou v 5-ti centimetrových odstupech.

Data ze snímačů byla vzorkována s krokem 1 μ s digitálním osciloskopem ADAM (fa Maurer Instruments Ltd.) a po sběrnici GPIB přenesena do počítače.



Obr. 1 Schéma experimentu

Identifikace grupové rychlosti

Pro experimentální identifikaci rychlosti vln jako funkce frekvence existuje několik metod. Jednou z nejběžnějších je metoda rezonanční, při které je fázová rychlost určována z naměřených rezonančních frekvencí konstrukce. To však vyžaduje mnoho opakovaných měření pro různé frekvence.

Jak již bylo uvedeno, waveletová analýza disperzních vln poskytuje okamžik příchodu každé frekvenční složky. Pokud využijeme této skutečnosti, můžeme identifikovat grupovou rychlost v každé frekvenci.

Uvažujme dva body P_1 a P_2 , jejich vzdálenosti od místa buzení označme l_1 a l_2 . Předpokládejme, že okamžik příchodu vlny do bodu P_k je určen waveletovou analýzou a označme ho $b_k(a)$. Poznamenejme, že počáteční čas je libovolný, neznámou časovou prodlevu označme $b_0(a)$. Z tohoto získáme následující vztahy:

$$b_k(a) = b_0(a) + l_k / c_g(a), \quad (k = 1, 2) \quad (12)$$

kde $c_g(a)$ je grupová rychlost.

Odečtením $b_1(a)$ od $b_2(a)$ dostaneme

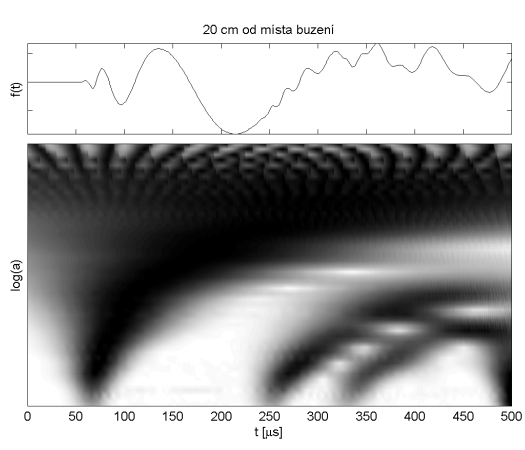
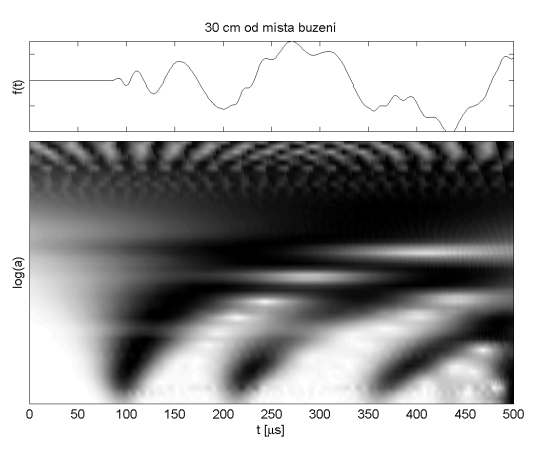
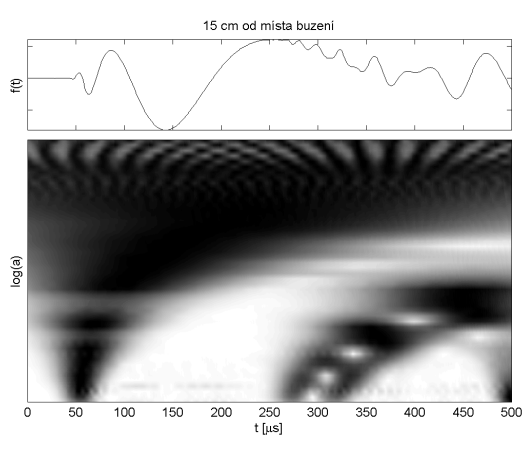
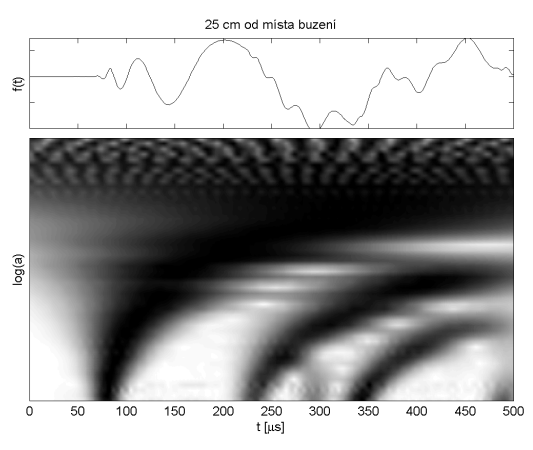
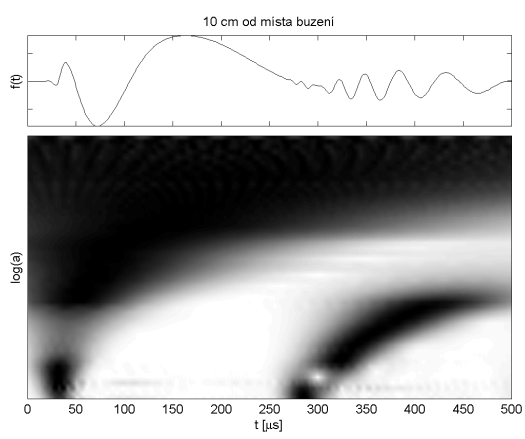
$$c_g(a) = \frac{l_2 - l_1}{b_2(a) - b_1(a)}. \quad (13)$$

Poněvadž $b_1(a)$ a $b_2(a)$ jsou získány waveletovou analýzou experimentálních dat a navíc $l_2 - l_1$ je známé, může být grupová rychlost $c_g(a)$ identifikovaná pro každou hodnotu a (tedy i pro každou frekvenci).

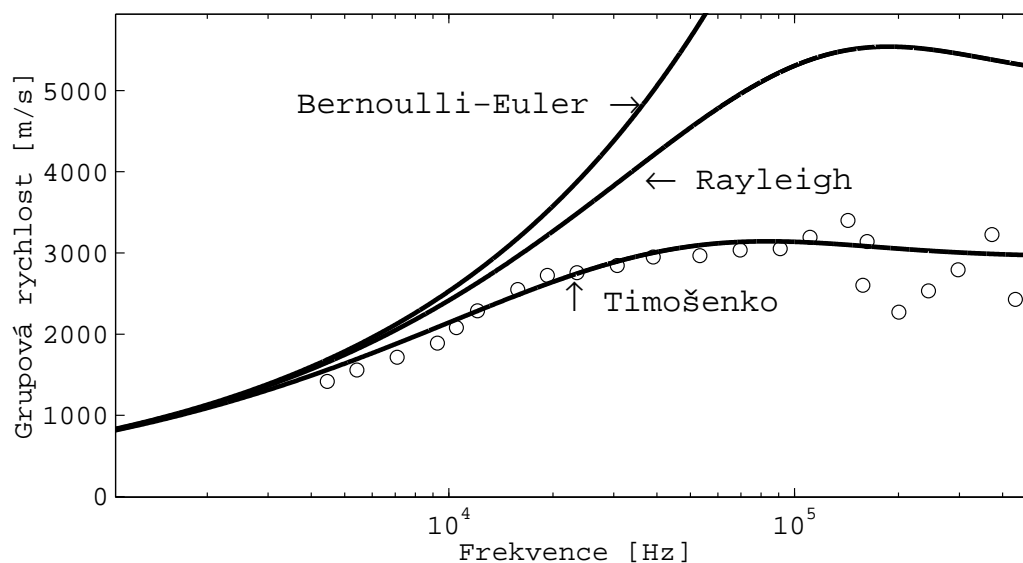
Na obr. 2 jsou uvedeny jak časové průběhy vertikálních výchylek na všech pěti snímačích, tj. ve vzdálenostech 10, 15, 20, 25 a 30 cm od místa buzení, tak jim odpovídající moduly spojitě waveletové transformace. Zobrazeno je prvních 500 μ s odezvy.

Ze zobrazených modulů spojitě waveletové transformace je zřejmý disperzní charakter napětřových vln šířících se tenkou tyčí (první zahnutý průběh; všimněte si změny jeho polohy pro jednotlivé snímače). Z obrázků jsou také krásně patrné odrazy od koncových čel tyče (menší zahnuté průběhy; opět si všimněte změny poloh odrazů pro jednotlivé snímače, odrazy jsou rozmístěny symetricky vzhledem k 300 μ s a se zvětšující se vzdáleností od místa buzení se od této hodnoty vzdalují).

Na obr. 3 jsou uvedeny výsledky stanovení grupové rychlosti pomocí waveletové analýzy (kolečka). Do obrázku jsou zakresleny disperzní závislosti pro tenkou tyč kruhového průřezu, jak je odvodil Bernoulli-Euler, Rayleigh a Timošenko (první disperzní větve). Identifikovaná rychlost se celkem dobře shoduje s Timošenkovou teorií, u které se první disperzní větve téměř shoduje s exaktní Pochhammerovou teorií.



Obr. 2 Časové průběhy vertikálních výchylek na všech pěti snímačích a jim odpovídající absolutní hodnoty spojitě waveletové transformace.



Obr. 3 Výsledky stanovení grupové rychlosti pomocí waveletové analýzy (kolečka).

Literatura

[HORA98] Hora, P.:

Analýza disperzních napěťových vln spojitou waveletovou transformací.

Dynamika strojů '98, ÚT AV ČR Praha 1998, 79-86

[KISH95] Kishimoto, K.:

Wavelet Analysis of Dispersive Stress Waves.

JSME International Journal, Series A, Vol 38, No. 4, 416-424, (1995)

[SADO96] Sadowsky, J.:

Investigation of Signal Characteristics Using the Continuous Wavelet Transforms.

Johns Hopkins Apl Technical Digest, Vol. 17, No. 3, 258-269, (1996)

Práce popsaná v tomto článku byla podporována Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č.101/97/1074 "Charakterizace zdrojů AE v ocelových konstrukcích" a uskutečněna ve společném pracovišti ÚT AVČR Praha a ZČU Plzeň.

Using of the Continuous Wavelet Transform to the Time-frequency Analysis of the Dispersive Stress Waves

The time-frequency analysis of dispersive stress waves is reviewed. It is shown that the wavelet transform using the Morlet pseudowavelet effectively decomposes the strain response into its time-frequency components and that the wavelet transform enables us to identify the dispersion relation of the group velocity.