

THE INFLUENCE OF THE MINDLIN'S BOUNDARY CONDITIONS ON WAVE PROPAGATION IN THICK ANISOTROPIC PLATE

O. Červená, P. Hora¹

Summary: *This paper deals with analytical formulation of dispersion curves for stress waves in a free (001)-cut cubic and orthotropic plate. The direction of wave propagation is arbitrary and it is defined by the angle ϕ , the angle between the [100] axis and the wave vector. The dispersion curves for Cu and carbon reinforced composite are presented. These results are compared to the uncoupled Mindlin modes. This work is very important for determination of the elastic coefficients of anisotropic materials.*

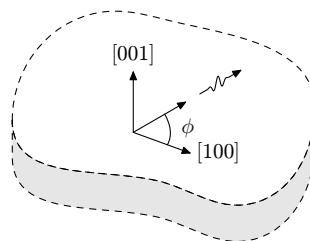
1. Úvod

Stanovení elastických konstant anizotropních materiálů je velice obtížné, zejména má-li se jednat o nedestruktivní metodu. Při metodě nedestruktivního určování elastických konstant anizotropních desek se používá porovnávání disperzních křivek tlusté desky, vyrobené ze zkoumaného materiálu, získaných měření s vypočtenými disperzními křivkami tlusté nekonečně rozlehlé desky s volnými okrajovými podmínkami, u níž se postupně mění hodnoty elastických konstant, až dojde ke shodě. Tato metoda je časově velice náročná, neboť vyžaduje opakovaný výpočet disperzních křivek. Z tohoto důvodu jsme odvodili aproximační disperzní vztahy pro kubické a ortotropní desky, které jsou založeny na zobecněných Mindlinových okrajových podmínkách (Červená 2006).

Kromě aproximačních vztahů jsme odvodili i analytické vztahy pro disperzní křivky kubických a ortotropních desek tloušťky $2d$ pro libovolný směr šíření ϕ (viz obr. 1).

Pro odvození analytických disperzních vztahů jsme použili metodu parciálních vln (Auld 1973). V příspěvku je uvedeno vyčíslení disperzních vztahů pro měď (kubická anizotropie) a uhlíkový kompozitní materiál (ortotropní anizotropie).

Při odvozování disperzních vztahů jsme využívali systém pro symbolické výpočty Maple, bez kterého bychom hledané vztahy jen těžko získali. Největší pomocí systému Maple byla jeho schopnost rozložit determinant složité matice řádu 6 na součin dvou členů, z nichž jeden reprezentuje symetrické módy a druhý antisymetrické módy disperzních křivek.



Obr. 1: Směr šíření v rovině (001).

¹RNDr. Olga Červená, Doc. Ing. Petr Hora, CSc.: Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.,
Centrum diagnostiky materiálu; Veleslavínova 11; 301 14 Plzeň; tel.: +420.377 236 415, fax: +420.377 220 787;
e-mail: cervena@cdm.it.cas.cz

2. Použité metody řešení

K získání analytických disperzních vztahů jsme použili metodu parciálních vln, která předpokládá, že se řešení skládá z jednoduchých vln exponenciálního typu, které putují mezi okraji desky. Každá parciální vlna musí mít stejnou hodnotu $k_x = k = \omega/v$, kde v je fázová rychlost vlny v desce. Řešení má tvar $u_j = \alpha_j \exp [ik(x + l_z z)]$, ($j = x, y, z$ a $l_z = k_z/k_x$), pro každé parciální vlnové řešení. u_j jsou složky výchylek, k_j složky vlnového vektoru a α_j složky polarizace parciálních vln. Substitucí předpokládaného řešení do Christoffelovy rovnice získáme soustavu tří homogenních lineárních rovnic pro α_x, α_y a α_z (Hora 2005). Netriviální řešení existuje, pouze pokud je determinant soustavy nulový. To vede na polynom šestého řádu pro l_z , který má šest kořenů $l_z^{(n)}$, $n = 1, \dots, 6$. Parciální vlnové řešení definované těmito kořeny odpovídá třem dopadajícím a třem odraženým vlnám. Vztahy pro parciální vlny jsou nyní

$$u_j = \sum_{n=1}^6 C_n \alpha_j^{(n)} \exp [ik(x + l_z^{(n)} z)], \quad (j = x, y, z). \quad (1)$$

Vazba mezi parciálními vlnami na okraji desky je dána okrajovými podmínkami pro napětí T

$$T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0, \quad \text{pro} \quad z = \pm d. \quad (2)$$

Substitucí vztahů (1) do okrajových podmínek (2) dostaneme soustavu šesti homogenních lineárních rovnic, ve kterých jsou koeficienty C_n funkcemi $\rho, c_{IJ}, \omega/k = v$ a kd . Zde ρ je hustota a c_{IJ} jsou elastické konstanty. Opět netriviální řešení existuje, pouze pokud determinant soustavy je roven nule, což určuje disperzní vztah mezi ω a k .

Pro odvození aproximačních disperzních vztahů (oddělených módů) byly použity Mindlinovy okrajové podmínky (Solie a Auld 1973)

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{nebo} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0. \quad (3)$$

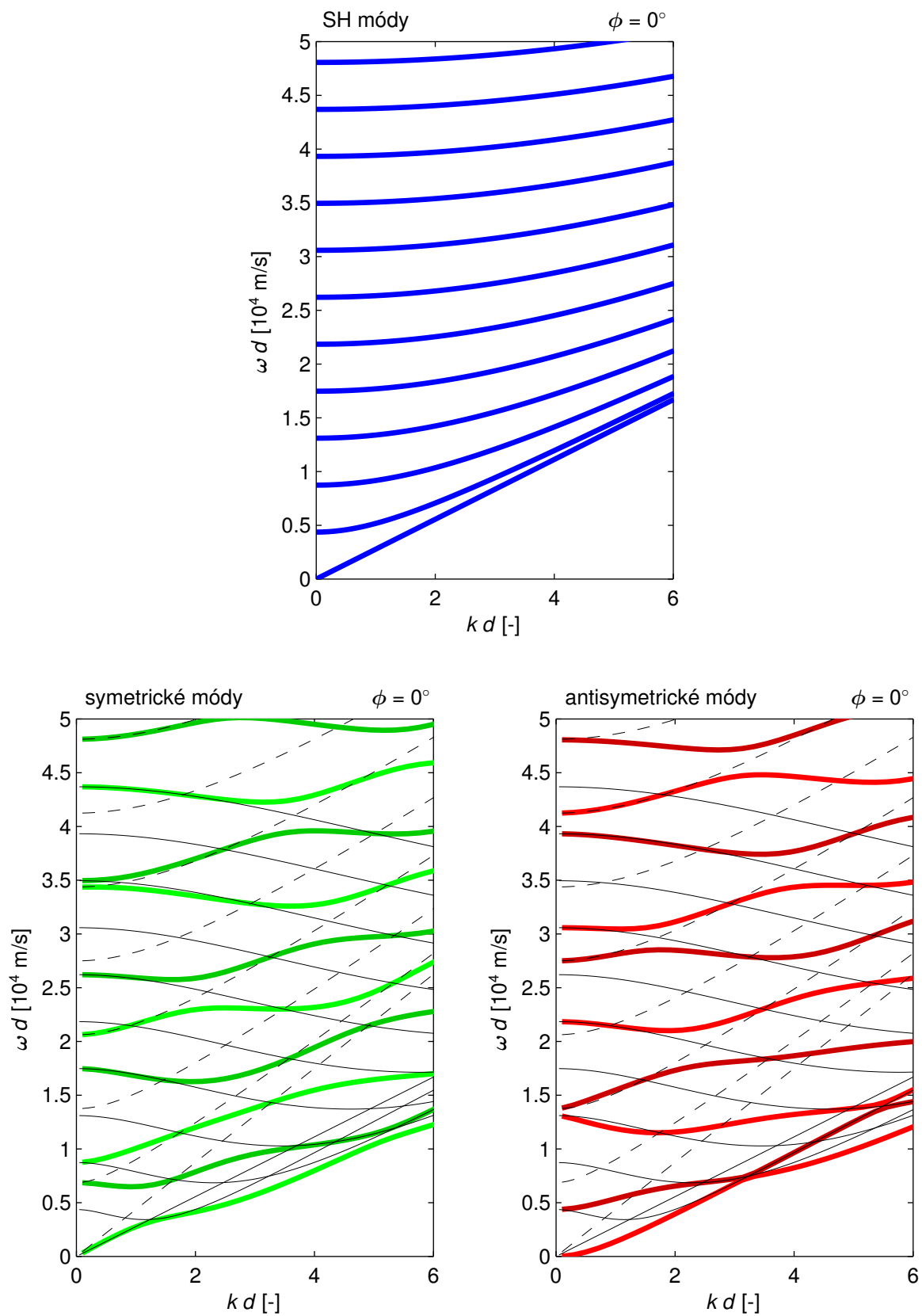
Tyto okrajové podmínky lze použít pro oddělování módů při $\phi = 0^\circ$ a $\phi = 45^\circ$ (pro kubickou) a při $\phi = 0^\circ$ a $\phi = 90^\circ$ (pro ortotropní) desku, kdy sagitální rovina tvoří rovinu symetrie krystalu a lze tedy oddělit příčné horizontálně polarizované (SH) módy. Pro obecný úhel šíření jsme k získání oddělených módů doplnili okrajové podmínky (3) o podmínku $u_y = 0$ (Červená 2006).

3. Výsledky

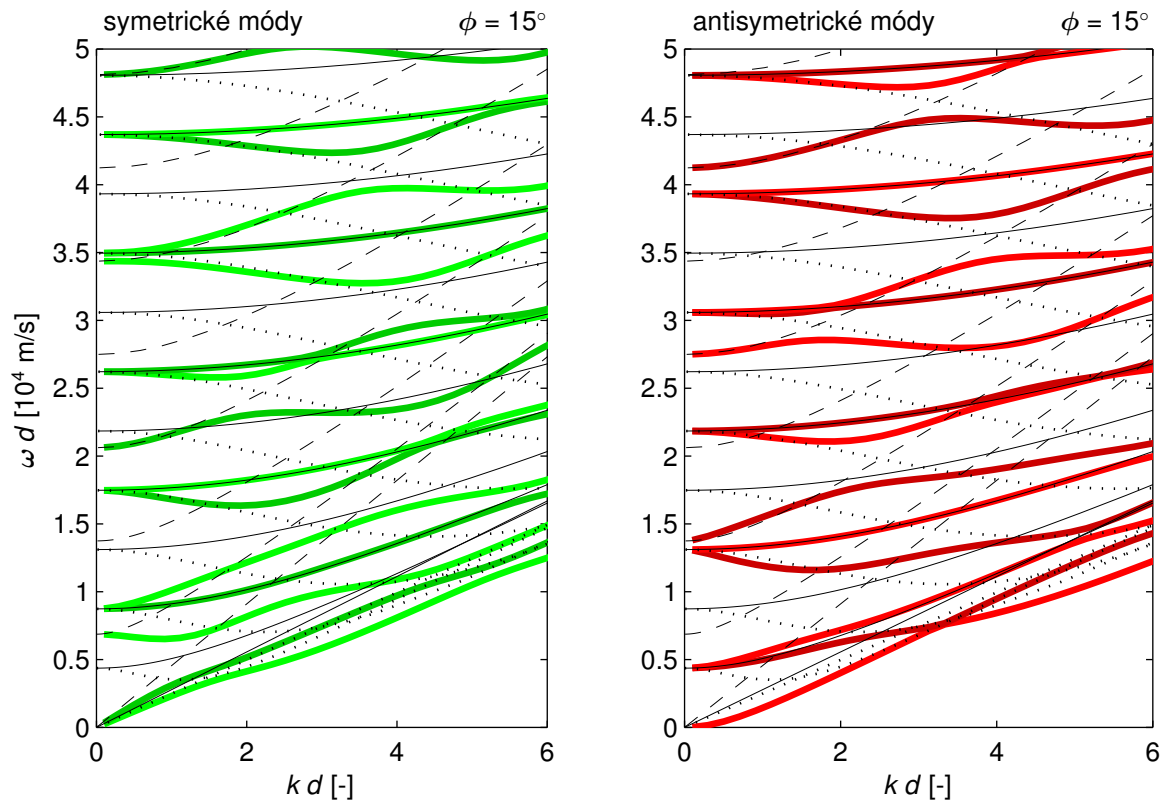
Byly odvozeny analytické disperzní vztahy pro kubickou a ortotropní anizotropii. Vždy jsme vyšetřovali zvláště směry, které tvoří rovinu symetrie krystalu. Tj. $\phi = 0$ a 45° pro kubickou anizotropii a $\phi = 0$ a 90° pro ortotropní anizotropii. V těchto směrech lze oddělit SH-módy. Dále jsme získali vztahy pro obecné úhly.

Grafické znázornění disperzních závislostí pro kubickou desku a směr šíření $\phi = 0^\circ$ je znázorněno na obr. 2 a pro směr šíření $\phi = 45^\circ$ je znázorněno na obr. 5. Pro ortotropní desku a směr šíření $\phi = 0^\circ$ je znázorněno na obr. 6 a pro směr šíření $\phi = 90^\circ$ je znázorněno na obr. 9. Na těchto obrázcích jsou vždy nahoře SH-módy, vlevo dole symetrické módy společně s oddělenými příčnými vertikálně polarizovanými (SV) módy a podélnými (P) módy vpravo dole antisymetrické módy společně s oddělenými módy. SV-módy jsou zobrazeny plnou čarou a P-módy přerušovanou.

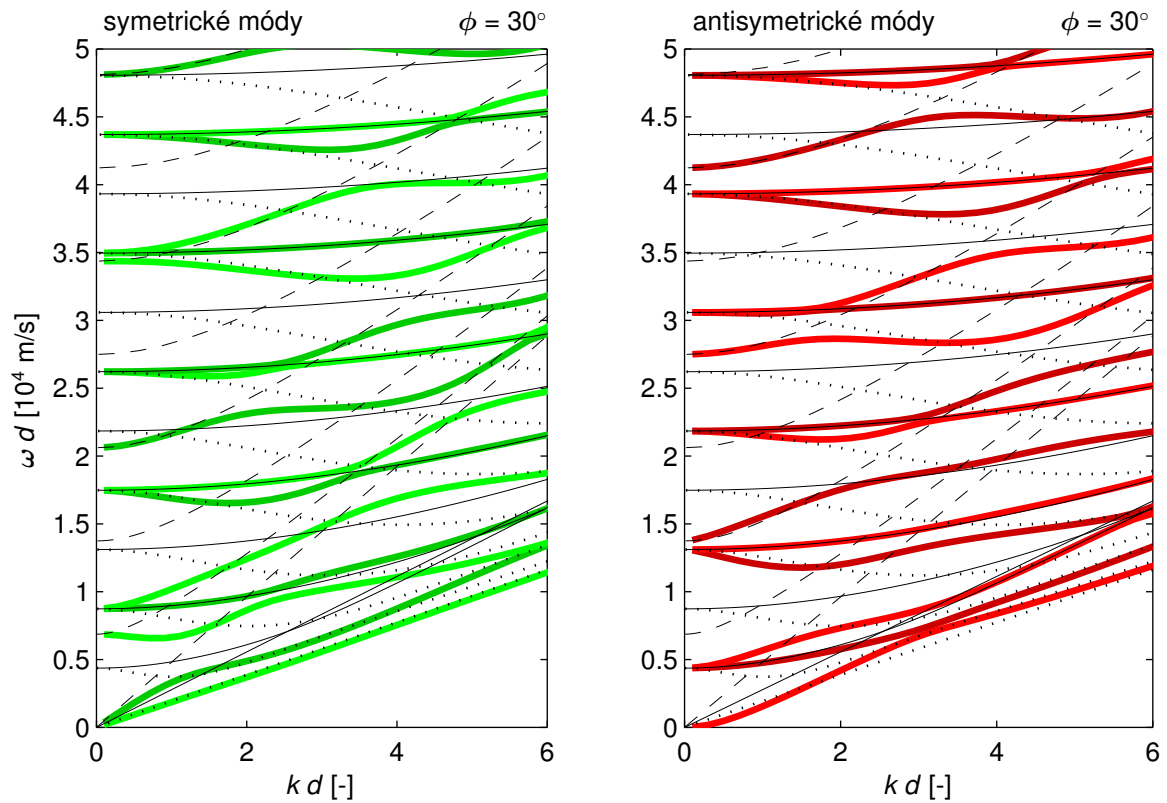
Grafické znázornění disperzních závislostí pro kubickou desku a směr šíření $\phi = 15^\circ$ je znázorněno na obr. 3 a pro směr šíření $\phi = 30^\circ$ je znázorněno na obr. 4. Pro ortotropní desku a směr šíření $\phi = 30^\circ$ je znázorněno na obr. 7 a pro směr šíření $\phi = 60^\circ$ je znázorněno na obr. 8. Vlevo jsou vždy znázorněny symetrické módy, vpravo antisymetrické módy společně s trojicí oddělených módů. Ty jsou zobrazeny postupně plnou, přerušovanou a tečkovanou čarou.



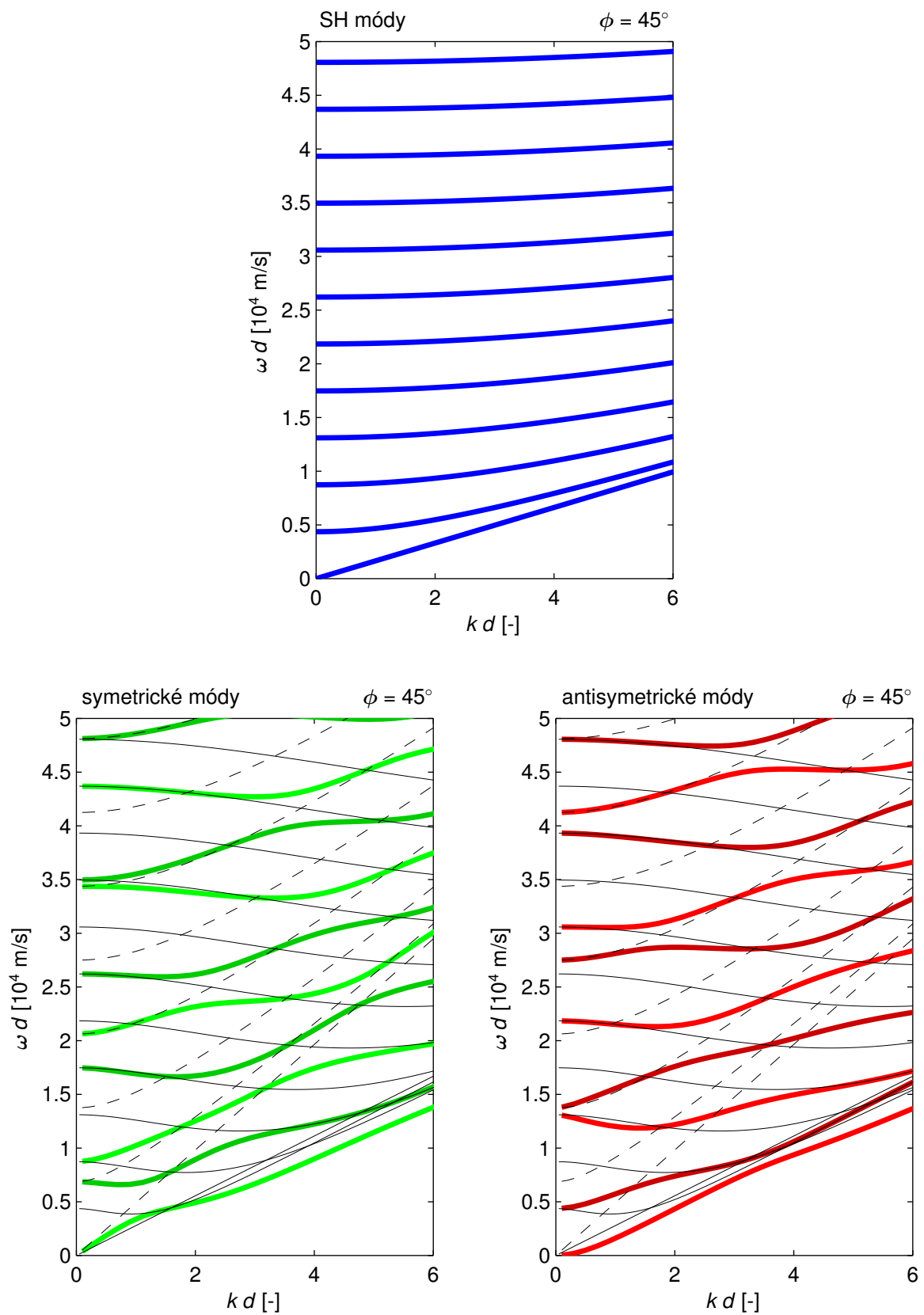
Obr. 2: Disperzní křivky pro směr šíření 0° . SH módy – nahoře, symetrické, antisymetrické módy a Mindlinovy křivky – dole.



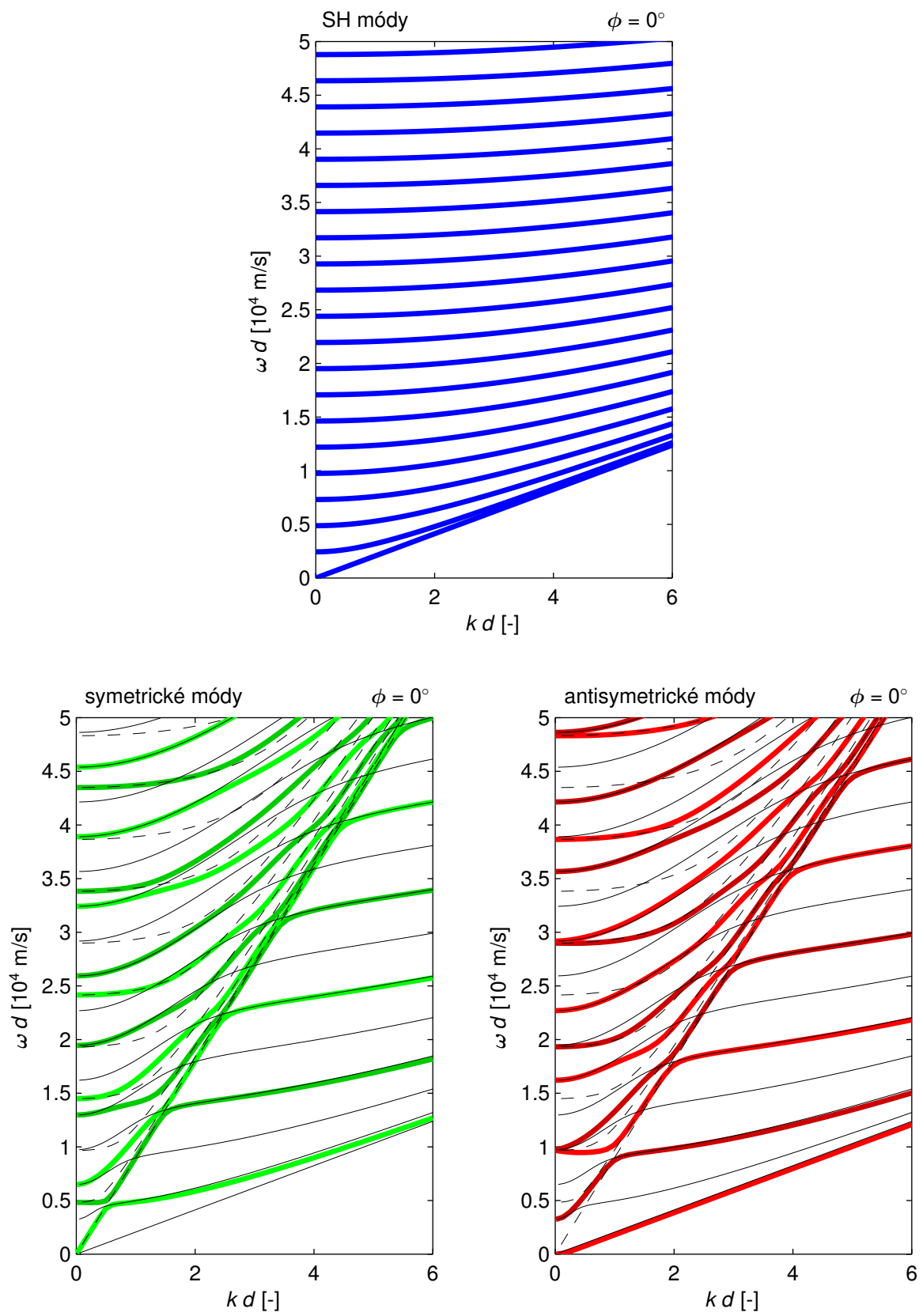
Obr. 3: Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 15°



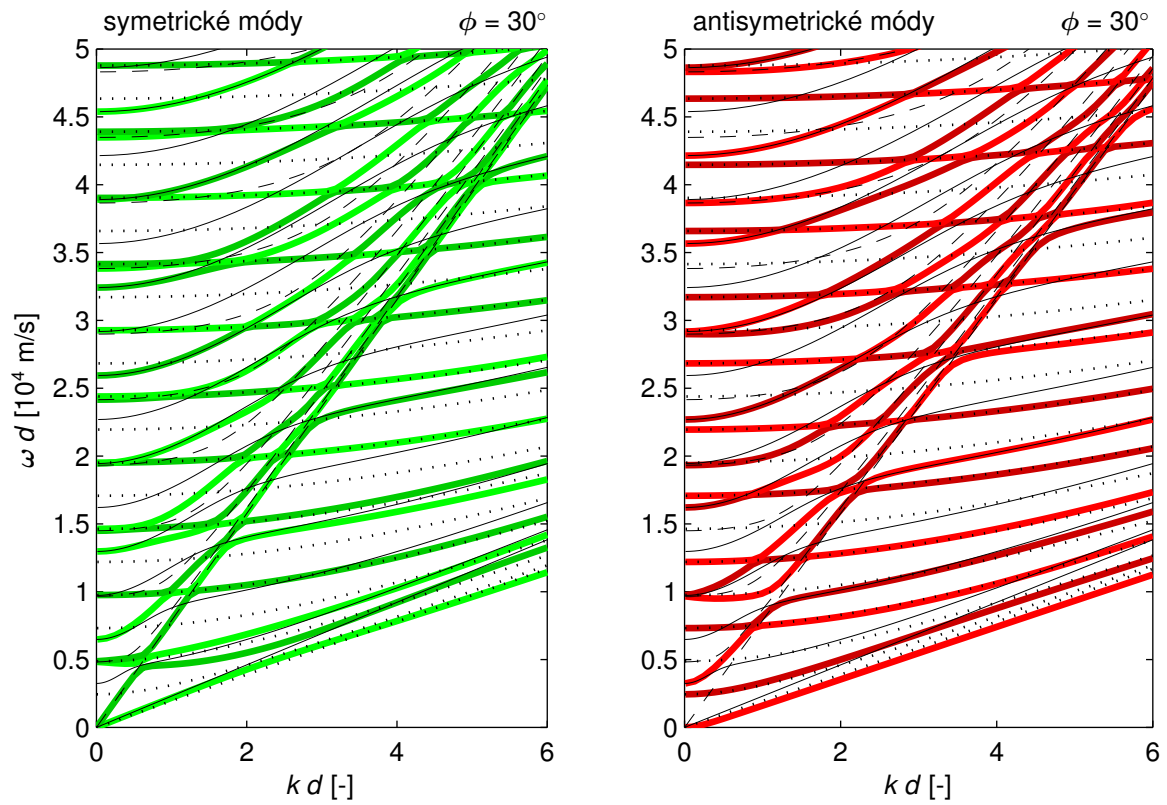
Obr. 4: Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 30°



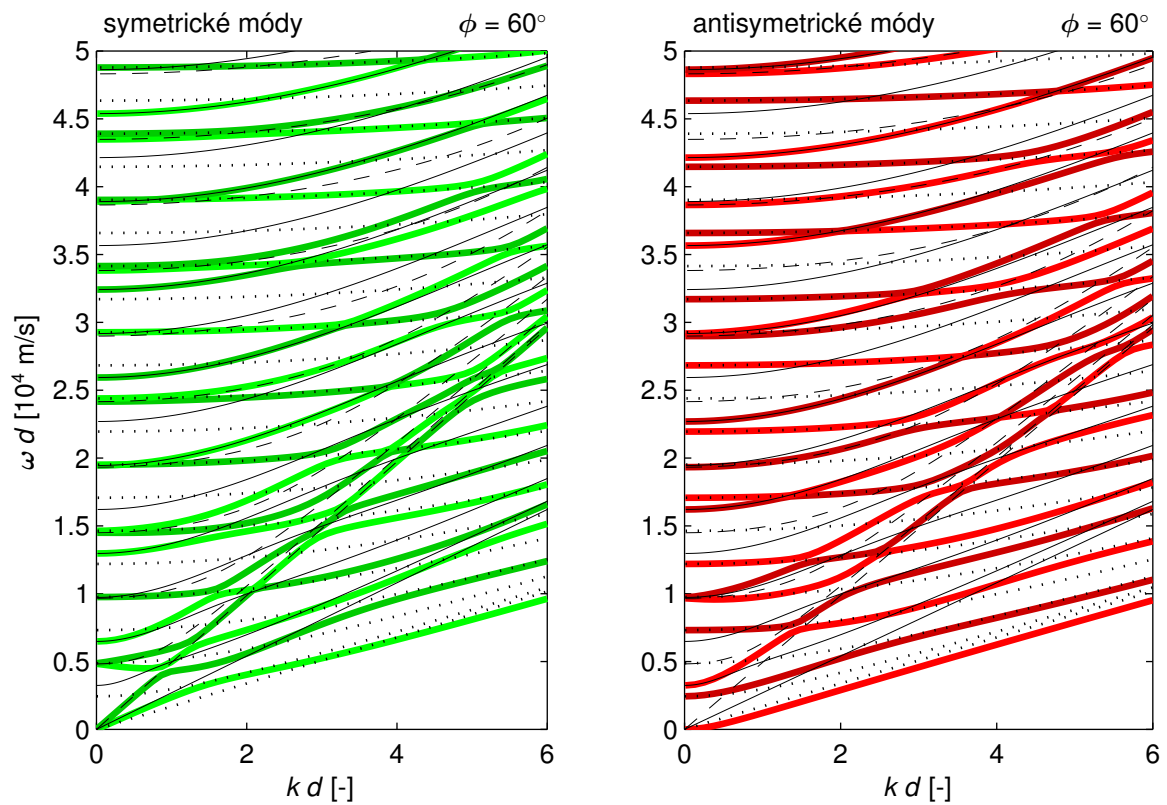
Obr. 5: Disperzní křivky pro směr šíření 45° . SH módy – nahoře, symetrické, antisymetrické módy a Mindlinovy křivky – dole.



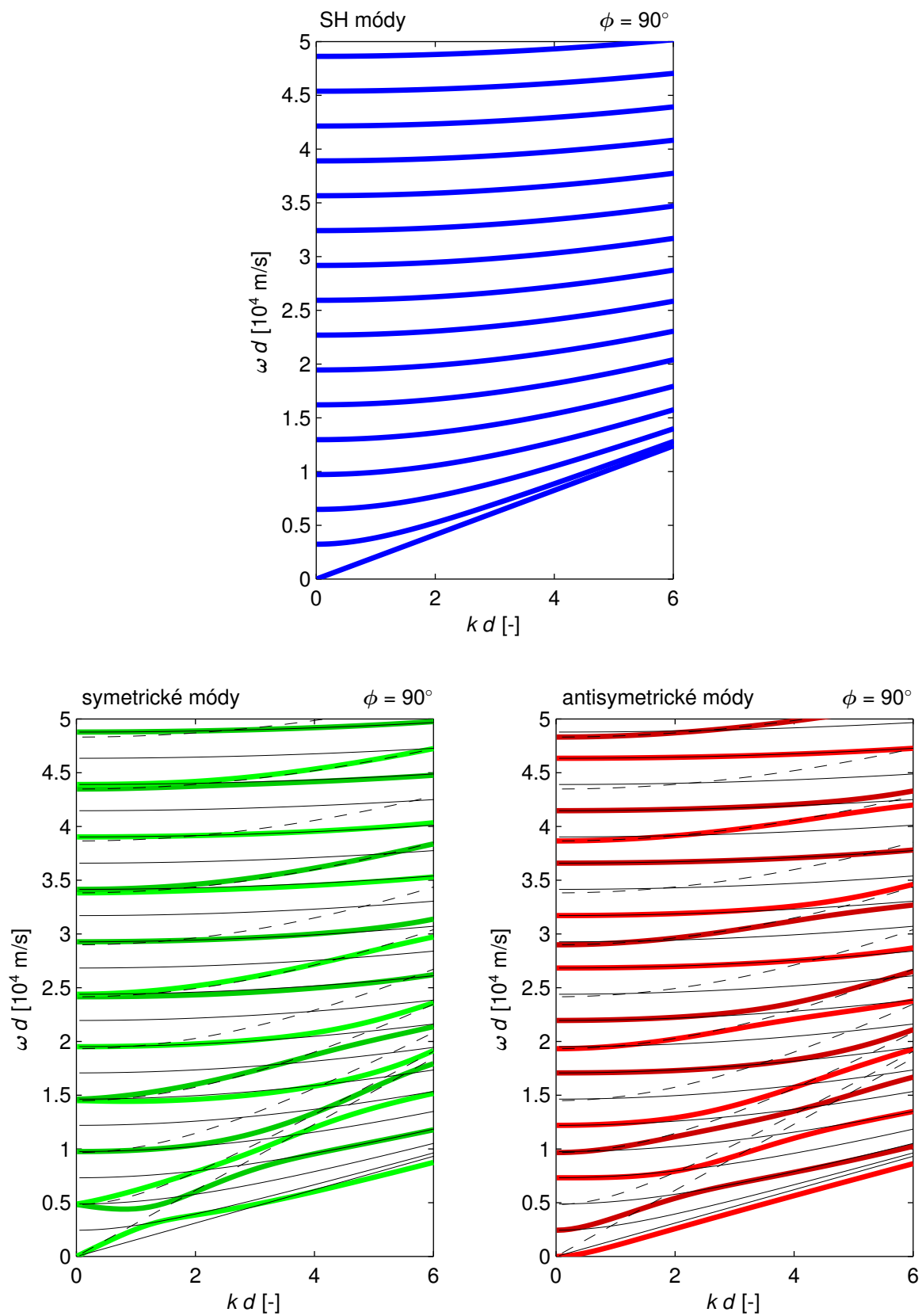
Obr. 6: Disperzní křivky pro směr šíření 0° . SH módy – nahoře, symetrické, antisymetrické módy a Mindlinovy křivky – dole.



Obr. 7: Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 30°



Obr. 8: Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 60°



Obr. 9: Disperzní křivky pro směr šíření 90° . SH módy – nahoře, symetrické, antisymetrické módy a Mindlinovy křivky – dole.

4. Deska s kubickou anizotropií

- směr šíření $\phi = 0$ a 45°

Disperzní vztahy jsou následující (symetrické módy $j = 1$, antisymetrické módy $j = -1$):

$$\frac{\operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \left[\frac{\left(c_{12}\alpha_x^{(1)} + c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{12}\alpha_x^{(3)} + c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \right]^j, \quad (4)$$

kde pro $\phi = 0^\circ$:

$$\alpha_x^{(n)} = -(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}, \quad \alpha_z^{(n)} = c_{11} + c_{44}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1, 3$$

a pro $\phi = 45^\circ$:

$$\alpha_x^{(n)} = -(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}, \quad \alpha_z^{(n)} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1, 3.$$

Disperzní závislost pro SH-módy pro oba směry šíření je dána vztahem:

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } N = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin\left(2l_z^{(n)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } n = 1, 3 \quad \text{a } N = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Rovnice (6) pro $n = 1$ představuje disperzní závislost pro oddělené SV-módy a pro $n = 3$ závislost pro oddělené P-módy.

- směr šíření $0 < \phi < 45^\circ$

Disperzní vztahy jsou následující:

$$\begin{aligned} \text{symetrické módy:} \quad & \operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right) A + \operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right) B + \operatorname{tg}\left(l_z^{(5)}kd\right) C = 0 \\ \text{antisymetrické módy:} \quad & \operatorname{cotg}\left(l_z^{(1)}kd\right) A + \operatorname{cotg}\left(l_z^{(3)}kd\right) B + \operatorname{cotg}\left(l_z^{(5)}kd\right) C = 0 \end{aligned}, \quad (7)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \left(c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)} + c_{12}\right) \left[\alpha_y^{(5)}l_z^{(5)}\left(\alpha_z^{(3)} + l_z^{(3)}\right) - \alpha_y^{(3)}l_z^{(3)}\left(l_z^{(5)} + \alpha_z^{(5)}\right)\right], \\ B &= \left(c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)} + c_{12}\right) \left[\alpha_y^{(1)}l_z^{(1)}\left(\alpha_z^{(5)} + l_z^{(5)}\right) - \alpha_y^{(5)}l_z^{(5)}\left(l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)\right], \\ C &= \left(c_{11}\alpha_z^{(5)}l_z^{(5)} + c_{12}\right) \left[\alpha_y^{(3)}l_z^{(3)}\left(\alpha_z^{(1)} + l_z^{(1)}\right) - \alpha_y^{(1)}l_z^{(1)}\left(l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\alpha_y^{(n)} = \frac{(1 - 2\cos^2\phi)(c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\sin\phi\cos\phi}{-2\sin^2\phi\cos^2\phi(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) + \rho v^2 - \left(l_z^{(n)2} + 1\right)c_{44}}, \quad \alpha_z^{(n)} = \frac{(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}}{\rho v^2 - c_{44} - c_{11}l_z^{(n)2}}$$

pro $n = 1, 3, 5$.

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin\left(2l_z^{(n)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } n = 1, 3, 5 \quad \text{a } N = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

5. Ortotropní deska

- směr šíření $\phi = 0^\circ$

Disperzní vztahy jsou následující (symetrické módy $j = 1$, antisymetrické módy $j = -1$):

$$\frac{\operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \left[\frac{\left(c_{13}\alpha_x^{(1)} + c_{33}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{13}\alpha_x^{(3)} + c_{33}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \right]^j, \quad (9)$$

$$\text{kde } \alpha_x^{(n)} = -(c_{13} + c_{55})l_z^{(n)}, \quad \alpha_z^{(n)} = c_{11} + c_{55}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1, 3.$$

Disperzní závislost pro SH-módy je dána vztahem:

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } N = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin\left(2l_z^{(n)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } n = 1, 3 \quad \text{a } N = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Rovnice (11) pro $n = 1$ představuje disperzní závislost pro oddělené SV-módy a pro $n = 3$ závislost pro oddělené P-módy.

- směr šíření $\phi = 90^\circ$

Disperzní vztahy jsou následující (symetrické módy $j = 1$, antisymetrické módy $j = -1$):

$$\frac{\operatorname{tg}\left(l_z^{(1)}kd\right)}{\operatorname{tg}\left(l_z^{(3)}kd\right)} = \left[\frac{\left(c_{23}\alpha_x^{(1)} + c_{33}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)}\right)\left(\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)}\right)}{\left(c_{23}\alpha_x^{(3)} + c_{33}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)}\right)\left(\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)}\right)} \right]^j, \quad (12)$$

$$\text{kde } \alpha_x^{(n)} = -(c_{23} + c_{44})l_z^{(n)}, \quad \alpha_z^{(n)} = c_{22} + c_{44}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \quad \text{pro } n = 1, 3.$$

Disperzní závislost pro SH-módy je dána vztahem:

$$\sin\left(2l_z^{(5)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } N = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin\left(2l_z^{(n)}kd\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N\pi/2kd \quad \text{pro } n = 1, 3 \quad \text{a } N = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Rovnice (14) pro $n = 1$ představuje disperzní závislost pro oddělené SV-módy a pro $n = 3$ závislost pro oddělené P-módy.

- směr šíření $0^\circ < \phi < 90^\circ$

Disperzní vztahy jsou následující:

$$\begin{aligned} \text{symetrické módy:} \quad & \operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right) A + \operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right) B + \operatorname{tg} \left(l_z^{(5)} kd \right) C = 0 \\ \text{antisymetrické módy:} \quad & \operatorname{cotg} \left(l_z^{(1)} kd \right) A + \operatorname{cotg} \left(l_z^{(3)} kd \right) B + \operatorname{cotg} \left(l_z^{(5)} kd \right) C = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \left(D_x^{(1)} D_y^{(3)} - D_x^{(3)} D_y^{(1)} \right) \left[D_z^{(5)} + \left(E_x^{(5)} - E_y^{(5)} \right) \cos \phi \left(c_{1,3} - c_{2,3} \right) \right] c_{44} c_{55}, \\ B &= \left(D_x^{(5)} D_y^{(1)} - D_x^{(1)} D_y^{(5)} \right) \left[D_z^{(3)} + \left(E_x^{(3)} - E_y^{(3)} \right) \cos \phi \left(c_{1,3} - c_{2,3} \right) \right] c_{44} c_{55}, \\ C &= \left(D_x^{(3)} D_y^{(5)} - D_x^{(5)} D_y^{(3)} \right) \left[D_z^{(1)} + \left(E_x^{(1)} - E_y^{(1)} \right) \cos \phi \left(c_{1,3} - c_{2,3} \right) \right] c_{44} c_{55}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} D_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)} l_z^{(n)} + \alpha_z^{(n)}, \\ D_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)} l_z^{(n)}, \\ D_z^{(n)} &= \alpha_z^{(n)} l_z^{(n)} c_{33} + \alpha_x^{(n)} c_{23}, \\ E_x^{(n)} &= \alpha_x^{(n)} \cos \phi, \\ E_y^{(n)} &= \alpha_y^{(n)} \sin \phi, \\ \alpha_x^{(n)} &= c_{3,3} g_1 l_z^{(n)4} + (g_1 g_2 + c_{3,3} g_3 - g_4^2) l_z^{(n)2} + g_2 g_3, \\ \alpha_y^{(n)} &= -c_{3,3} g_5 l_z^{(n)4} + (g_4 g_6 + c_{3,3} g_7 - g_2 g_5) l_z^{(n)2} + g_2 g_7, \\ \alpha_z^{(n)} &= \left((g_4 g_5 - g_1 g_6) l_z^{(n)2} - (g_3 g_6 + g_4 g_7) \right) l_z^{(n)}, \end{aligned} \right\} \text{ pro } n = 1, 3, 5,$$

$$g_1 = \sin^2 \phi c_{5,5} + \cos^2 \phi c_{4,4},$$

$$g_2 = \sin^2 \phi c_{4,4} + \cos^2 \phi c_{5,5} - \rho v^2,$$

$$g_3 = \sin^2 \phi \cos^2 \phi \left(c_{1,1} - 2 c_{1,2} + c_{2,2} - 4 c_{6,6} \right) + c_{6,6} - \rho v^2,$$

$$g_4 = \sin \phi \cos \phi \left(c_{2,3} - c_{1,3} + c_{4,4} - c_{5,5} \right),$$

$$g_5 = \sin \phi \cos \phi \left(c_{4,4} - c_{5,5} \right),$$

$$g_6 = \sin^2 \phi \left(c_{2,3} + c_{4,4} \right) + \cos^2 \phi \left(c_{1,3} + c_{5,5} \right),$$

$$g_7 = \sin \phi \cos \phi \left(c_{1,2} - c_{2,2} + 2 c_{6,6} + \left(c_{1,1} - 2 c_{1,2} + c_{2,2} - 4 c_{6,6} \right) \cos^2 \phi \right).$$

Disperzní závislosti pro oddělené módy jsou následující:

$$\sin \left(2 l_z^{(n)} kd \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_z^{(n)} = N \pi / 2 kd \quad \text{pro } n = 1, 3, 5 \quad \text{a} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

6. Závěr

V příspěvku jsou uvedena analytická vyjádření disperzních vztahů pro nekonečně rozlehlou tlustou desku s kubickou resp. ortotropní anizotropií a volnými okrajovými podmínkami. Analytické vztahy disperzních závislostí byly odvozeny pro libovolný směr šíření v rovině desky s orientací (001). K odvození disperzních závislostí bylo použito metody parciálních vln a s výhodou použit systém pro symbolické výpočty (Maple). Analytické výsledky pro kubickou anizotropii jsou ve shodě s prací (Solie a Auld 1973), kde však byly disperzní vztahy počítány numericky pomocí obecného programu pro výpočet vrstevnatého anizotropního prostředí. Analytické výsledky pro ortotropní anizotropii jsou ve shodě s knihou (Rose 1999) i článkem (Pelts a Rose 1996), kde je však ve výsledných vztazích chyba.

Pro účely stanovení elastických konstant anizotropních materiálů byly odvozeny aproximační disperzní vztahy pro kubické a ortotropní desky založené na zobecněných Mindlinových okrajových podmínkách (Červená 2006).

7. Poděkování

Příspěvek vznikl na základě podpory projektu GA ČR č.101/06/1689 *Analýza komponent modelu systému pro metodiku akustické emise* a záměru ÚT AV ČR, v.v.i., AV0Z20760514.

8. Literatura

Auld, B.A., 1973. *Acoustic fields and waves in solids, vol. 1*. John Wiley, New York.

Červená O., Hora, P., (2006). Analytické vyjádření disperzních křivek v desce s kubickou anizotropií pro libovolný směr šíření, in: *Proc. 22nd Int. Conference Computational mechanics 2006* University of West Bohemia in Pilsen, pp 99–106.

Hora, P., Červená O., (2005). Disperzní křivky v desce s kubickou anizotropií, in: *Proc. 21th Int. Conference Computational mechanics 2005* University of West Bohemia in Pilsen, pp 219–226.

Maplesoft™,

<http://www.maplesoft.com>

Pelts, S.P., and Rose, J.L., (1996). Source influence parameters on elastic guided waves in an orthotropic plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 99. pp 2124-2129.

Rose, J.L.,(1999). *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge Univ. Press, London.

Solie, L.P., and Auld, B.A., (1973). Elastic waves in free anisotropic plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54. pp 50-65.