

Výzkumná zpráva k pilotnímu projektu:  
„Analýza disperzních jevů při ultrazvukovém  
nedestruktivním hodnocení materiálů“

## **Modelování elastických vln ve vrstevnatém prostředí**

Petr Hora

Akademie věd České republiky  
Ústav termomechaniky  
Centrum diagnostiky materiálu

dedication

# Obsah

<b>1</b>	<b>Vlnové rovnice v izotropním prostředí</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Šíření vln v izotropních materiálech pro případ kartézské souřadné soustavy</b>	<b>12</b>
2.1	Rovinné vlny v neohrazeném elastickém prostředí . . . . .	12
2.2	Rovinné vlny ve dvourozměrném prostoru . . . . .	15
2.3	Superpozice rovinných vln ve vrstevnaté desce . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Metoda přenosové matice pro elastické vlny a pravé módy</b>	<b>19</b>
3.1	Řešení odezvy . . . . .	22
3.2	Modální řešení pro pravé módy . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Metoda globální matice</b>	<b>25</b>
4.1	Řešení odezvy . . . . .	28
4.2	Modální řešení . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Analytická řešení pro případ pravých a rozptylových Lambových vln</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>Ukázky výpočtů disperzních křivek</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Přehled často používaných vztahů</b>	<b>38</b>
7.1	Vztahy pro rychlosti a vztahy mezi materiálovými konstantami . . . . .	38
7.2	Vztahy pro napětí a přetvoření . . . . .	39

<b>8</b>	<b>Vlastnosti materiálů</b>	<b>40</b>
<b>9</b>	<b>Výpisy programů</b>	<b>42</b>
9.1	Výpočet disperzních křivek metodou přenosové matice . . . . .	42
9.2	Výpočet disperzních křivek metodou globální matice . . . . .	45
9.3	Vstupní datový soubor . . . . .	49

# Úvod

Tato zpráva popisuje vývoj obecného modelu pro šíření vln v kartézském souřadném systému. V případě izotropních materiálů lze model použít pro elastické materiály, jedno- a více-vrstvé struktury, nerozptylové a rozptylové systémy. Pokud je systém elastický, nerozptylový a kartézský, může model také počítat disperzní křivky pro vícevrstvé anizotropní systémy.

Podle geometrie a materiálových vlastností systému model určuje, jaké rezonance mohou v každé vrstvě existovat (při splnění okrajových podmínek a charakteristik šíření objemových vln). Tyto rezonance řídí, jak se ultrazvukové vlny budou šířit v systému a jaké vlastnosti každá z těchto vln bude mít. Řešení vlnovodného problému leží na spojitých čarách nazývaných disperzní křivky, které musí být nalezeny iteračně v prostoru frekvence, vlnového čísla a popř. útlumu. Jakmile jsou řešení nalezena a charakteristiky vln určeny, můžeme je použít k návrhu efektivního nedestruktivního testovacího systému. Modelování popsané v této zprávě vychází z prací, které začal Mike Lowe ([Low95] a [Low93]), a rozšiřuje ji o analytická řešení jednoduchých geometrií.

Pro sestavení modelu šíření vln nejprve určíme povahu objemových vln, které mohou existovat v elastických a visko-elastických izotropních materiálech. Jakmile je známa povaha objemových vln, lze napětí a výchylky v libovolné vrstvě vyjádřit pomocí amplitud všech objemových vln, které mohou v dané vrstvě existovat. Abychom popsali celý systém jednou rozsáhlou globální maticí, můžeme napětí a výchylky na okrajích každé vrstvy sloučit s okrajovými podmínkami systému. Globální maticová rovnice je pro daný systém funkcí frekvence (časově proměnná složka), reálného vlnového čísla (prostorově proměnná složka) a popř. útlumu (prostorová míra tlumení). Pro jisté kombinace frekvence, vlnového čísla a útlumu se vytváří vlnovodná vlna, která se šíří podél osy systému. Tyto platné kombinace mohou být nalezeny řešením globální maticové rovnice pro její modální odezvu. Řešení musí být nalezena iteračně měněním těchto tří parametrů, dokud se nedokonverguje k platnému kořenu. Jakmile je nalezen počáteční kořen, lze kořeny ležící na stejné čáře řešení (neboli disperzní křivce) nalézt „stopováním“. Tento proces lze potom opakovat pro ostatní disperzní křivky.

## Historické pozadí

Nejranější teorií šíření vln ve vícevrstevném prostředí bylo odvození Lorda Rayleigha [Ray85] z roku 1885 týkající se postupu vln podél volného povrchu elastického poloprostoru. Odvození vede na kubickou rovnici, jejíž kořeny určují rychlost šířící se povrchové vlny. Zobecnění problému jednoho rozhraní bylo zpracováno Stoneleym [Sto24] v roce 1924, který popsal vlny putující podél rozhraní mezi dvěma různými elastickými prostředími. Pozdější studie se věnovaly podmínkám, za kterých tyto vlny mohou putovat bez úniku do některého z prostředí (tzv. pravé módy) [Sch47], a existenci rozptylových módů [Pil72]. V roce 1917 Lamb [Lam17] přidal ještě jedno rozhraní a zavedl tak rovinnou vrstvu konečné tloušťky. Jeho odvození se týkalo desky ve vakuu a kořeny jeho dvou rovnic, jedna pro symetrické módy a druhá pro antisymetrické módy, vedou na známé disperzní křivky Lambových vln. Love [Lov11] ukázal, že ve vrstvách konečných tloušťek jsou možné také transverzní módy, které vyvolávají příčný pohyb v rovině vrstvy. Diskuse o těchto a jiných specifických vrstevnatých geometriích lze nalézt v literatuře ([EJP57], [Vic70], [FA72], [Bre80] a [BG85]).

První odvození rovnic pro šíření vln v prostředí sestávajícím z libovolného počtu rovinných vrstev bylo publikováno Thomsonem [Tho50] v roce 1950. Thomson zavedl přenosovou matici, která popisuje výchylky a napětí na dolním okraji vrstvy vzhledem k výchylkám a napětím na horním okraji vrstvy. Matice pro jednotlivé vrstvy mohou být spojeny do jediné matice celého systému. Tedy výchylky a napětí na dolním okraji vícevrstvého systému mohou být odvozeny z výchylek a napětí na horním okraji systému. Modální řešení a řešení odezev může být potom nalezeno aplikací příslušných okrajových podmínek. Malá chyba v jeho odvození byla opravena Haskelllem [Has53]. Tato teorie byla vyvinuta pro seismologické aplikace, kde byla věnována pozornost především povrchovým vlnám v prostředí skládajícího se z mnoha různých vrstev hornin. Protože tato metoda vyjadřuje šíření okrajových podmínek z jednoho okraje systému ke druhému maticovým násobením, bývá také někdy nazývána metodou „matice šíření“.

Následkem Thomsonovy práce a dosažitelnosti číslicových počítačů byl růst bádání v oblasti modelování šíření vln ve vícevrstevném prostředí (především v seismologických aplikacích). Tyto modely byly vyčíslovány na výpočetních prostředcích, které byly v té době dosti omezené, a v důsledku toho se řada publikací, zejména během 60-tých let, věnuje implementaci metody přenosové matice na konkrétním výpočetním prostředku s ohledem na maximální efektivnost ([PHS61], [Ran67], [Wat70] a [SK72]).

Další vývoj teorie, kterému byla věnována značná pozornost, se ubíral cestou modelování vln, jejichž amplituda se zmenšovala (tlumila) s rostoucí vzdáleností podél desky. To bylo důležité částečně kvůli tlumícím vlastnostem zemských vrstev, ale hlavně kvůli touze modelovat módy

rozptylných (leaky) vln ve vrstvách hornin. Tyto módy rozptylují energii do sousedních vrstev a jejich amplitudy se tedy během šíření zmenšují. Takováto řešení nebyla s původní teorií možná a vyžádala si zavedení reálného exponenciálního činitele do vlnové rovnice, čehož se dosáhlo komplexní frekvencí nebo komplexním vlnovým číslem ([SK72], [BEPS51], [Ros60], [Phi61a], [Phi61b], [AA64], [Gil64], [LFL65], [CWB70], [Als70], [Dai71], [SK71] a [Wat72]).

Během raného vývoje metody přenosové matice vyvstal důležitý problém, který se týkal nestability řešení při výskytu vrstev značné tloušťky za současného požadavku vysokých frekvencí [Dun65]. Tento problém se stal známý pod názvem „problém velkého  $fd$ “ ( $f$  je frekvence a  $d$  je tloušťka vrstvy) a byl předmětem úsilí mnoha výzkumů po dvě desetiletí. Příčinou problému je špatná podmíněnost matice šíření, která je vyvolána kombinací jak klesajících, tak rostoucích koeficientů v případě výskytu nehomogenních vln. Problémy se špatnou podmíněností matic jsou dobře známé, ale pohledy se liší, pokud jde o vhodné řešení. Nepochybně je odpověď závislá na dané aplikaci. Jeden přístup, poprvé navržený Dunkinem [Dun65] a později v různých formách následován dalšími ([Thr65], [GB66], [Kin76], [Kin78], [Abo79], [Men79], [KM85], [KMW85], [Eva86], [MK87], [LP92], [CH94], [CH93] a [HC93]), je zachovat koncept přenosových matic, ale přetřídit rovnice tak, aby se matice nestala špatně podmíněnou. Tato technika zachová výhodu malé systémové matice, ale ztratí koncepční jednoduchost Thomson-Haskellovy formulace. Alternativní, avšak zcela odlišný, přístup je využít metodu „globální matice“, navrženou původně Knopffem [Kno64], u které se sestavuje rozlehlá matice z rovnic všech vrstev ([Ran67], [Sch70], [CHT84], [SJ85a], [SJ85b], [ST86], [Mal88], [Pia92] a [Low93]). Tato technika je robustní a může být jednoduše implementována, avšak může být relativně pomalá na výpočet, pokud existuje mnoho vrstev a matice je tudíž rozsáhlá.

Řešení odezvy maticových rovnic vede na odezvu ustáleného stavu rovinných vln vícevrstvé desky na buzení rovinnou vlnou. V rané historii těchto technik se badatelé hlavně soustředili na simulaci odezvy pro konečné trvání buzení v bodě (nebo bodech) uvnitř vrstvy. Tato odezva pro bodový zdroj může být předpovězena integrací mnoha řešení pro rovinnou vlnu přes vlnové číslo a frekvenci ([Ros60], [Gil64], [LFL65], [Wat72], [SJ85b], [DD80], [Fra83], [Ken83] a [XM87]). Abychom zahrnuli útlum módů vln, lze integraci přes vlnové číslo vykonat použitím Greenovy funkce podél cesty v komplexní rovině vlnového čísla. V současné době se v ultrazvukových aplikacích hlavní zájem soustřeďuje na simulace odezvy vícevrstevných desek pro snímače konečných rozměrů. Toho lze dosáhnout integrací přes vlnové číslo a frekvenci ([Pia92], [CNB82], [CN89] a [PC91]).

Modální řešení maticových rovnic popisuje vlastnosti, tzn. rychlosti, frekvence a činitele útlumu vln, šíření vln ve vícevrstvé desce. Řešení vyžaduje určení kořenů charakteristické funkce, která se získá z matic vrstev a závisí na vlnovém čísle a frekvenci. Výpočet modálního řešení je

poněkud obtížnější než výpočet odezev rovinných vln a je zejména náročný, pokud je třeba nalézt útlumové módy, tzn. vlnové číslo (nebo frekvence) je komplexní. Modální modely jsou hojně používány jak v seismologických, tak ultrazvukových aplikacích. Avšak v literatuře, která diskutuje strategii řešení ([Has53], [PHS61], [SK71], [Abo79], [MK87], [Sch70], [Mal88], [Low93], [SK70], [CD77], [Pil85] a [DK89]), je většina implementací omezena na pravé módy.

Maticové techniky se s oblibou používají pro modelování ultrazvuku ve vícevrstvých deskách už více jak dvě desetiletí. Komunita ultrazvukových badatelů rozsáhle využívala výsledky dřívějšího vývoje, ale v poslední době také výrazně přispívá k vývoji těchto technik, jak je zřejmé z významného počtu referencí citovaných výše. V současnosti jsou hlavními oblastmi vývoje těchto technik v oblasti ultrazvuku vizkoelastických a anizotropních prostředí, zejména kompozity, ([CH94], [CH93], [HC93], [NC88a], [NC88b], [NC91], [CC91], [DR91], [Hos91], [Nay91], [CN90b], [NT90], [CN90a] a [Nay89]).



# 1 Vlnové rovnice v izotropním prostředí

Před odvozením rovnic, které popisují chování vrstevnatého prostředí, je důležité pochopit principy šíření vln v neohraničeném prostředí, neboli potřebujeme znát objemové (celkové) chování materiálu. Tato informace může být snadno nalezena ve většině učebnic na dané téma ([MF53], [Aul90] a [Kre93]), ale pro kompletnost je zde zopakována.

Eulerovu pohybovou rovnici můžeme odvodit, vyjdeme-li z druhého Newtonova zákona a principu zachování hmoty pro libovolný objem uvnitř elastického pevného tělesa. Eulerova pohybová rovnice spolu váže pole výchylek  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , které je funkcí polohy  $\mathbf{r}$ , a času,  $t$ , a napěťovou dyádu,  $\overleftrightarrow{\sigma}$  (dvourozměrné vektorové pole) následujícím způsobem:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \quad (1.1)$$

kdy se předpokládá, že hustota materiálu dané vrstvy,  $\rho$ , je konstantní, materiál je lineární elastický a objemové síly (např. gravitace) jsou zanedbatelné. Zobecněný Hookův zákon potom spolu váže napěťovou dyádu,  $\overleftrightarrow{\sigma}$ , a elastické konstanty materiálu. Z teorie pružnosti vyplývá, že pro homogenní, izotropní materiál se 21 možných složek tenzoru elastické tuhosti redukuje na dvě materiálové konstanty,  $\lambda$  a  $\mu$ , které se nazývají Lamého konstanty (Viz např. [Aul90]). V tomto případě se Hookův zákon zjednoduší na

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice.

Kombinace dvou předchozích rovnic vede na Navierovu výchylkovou pohybovou rovnici pro izotropní, elastické médium, která v invariantním tvaru zní:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Tuto rovnici lze také psát jako,

$$\overbrace{(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})}^{\text{dilatace}} + \overbrace{\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})}^{\text{rotace}} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor výchylek,  $\rho$  je hustota,  $\lambda$  a  $\mu$  jsou Lamého konstanty a  $\nabla^2$  je třírozměrný Laplaceův operátor. Ve druhém tvaru,  $(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$  představuje dilatační (kompresní) část a  $\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$  představuje rotační (ekvivolumetrickou) část řešení.

Materiálové tlumení může být zavedeno do systému mnoha způsoby. Pro námi zkoumané systémy, které mají malé dynamické výchylky, je odpovídající reprezentací chování materiálu tlumící síla, která je lineární funkcí rychlosti. Tento popis tlumení, známý jako Kelvin-Voigtův visko-elastický model, bývá často používán v ultrazvukových modelech ([SK72], [SK71], [CH94], [HC93], [SJ85a], [SJ85b], [ST86], [Pia92], [LC93], [XM87], [CC91], [Des91], [Hos91], [MM85] a [Low95]).

Materiálové tlumení zavedeme nahrazením Laméových konstant  $\lambda$  a  $\mu$  následujícími operátory:

$$\lambda \text{ se stane } \lambda + \frac{\lambda'}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{a} \quad \mu \text{ se stane } \mu + \frac{\mu'}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.5)$$

kde konstanty  $\lambda'$  a  $\mu'$  jsou visko-elastické materiálové konstanty a  $\omega$  je frekvence. Visko-elastický model se redukuje na model elastický, pokud jsou visko-elastické konstanty rovny nule. Výchylková pohybová rovnice (1.4) může být pak vyjádřena,

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \frac{\lambda' + \mu'}{\omega} \right) \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( \frac{\mu'}{\omega} \right) \nabla^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.6)$$

Použitím Helmholtzovy dekompozice ([MF53] str. 52-53) může být třírozměrný vektor výchylek v rovnici (1.4),  $\mathbf{u}$ , který je konečný, uniformní, spojitý a zanedbatelný v nekonečnu, vyjádřen jako suma kompresního skalárního potenciálu,  $\phi$ , a ekvivolumetrického vektorového potenciálu,  $\mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.7)$$

s

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = F(\mathbf{r}, t)$$

kde  $F$  je funkce vektoru souřadnic,  $\mathbf{r}$ , a času,  $t$ . Gazis [Gaz59] poukázal, že funkce  $F$  může být vybrána libovolně ([Gaz59], str. 207-211). Jinými slovy, relace mezi poli a potenciály není

jednoznačná. Pokud  $\chi$  splňuje příslušné okrajové podmínky, může být skalární potenciál,  $\phi$ , nahrazen výrazem  $\phi' + (1/c)(\partial\chi/\partial t)$  a vektorový potenciál,  $\mathbf{H}$ , výrazem  $\mathbf{H}' - \nabla\chi$ . Tyto nové potenciály reprezentují stejné pole.  $F(\mathbf{r}, t)$  volíme identicky rovno nule, což má za důsledek, že ekvivolumetrický vektorový potenciál má nulovou divergenci, tedy toto pole je solenoidální, tj. v oblasti neexistují žádné zdroje nebo pohlcovače energie. Specifikace divergence poskytuje potřebnou dodatečnou podmínku pro jednoznačné určení tří složek  $\mathbf{u}$  ze čtyř složek dvou potenciálů, které byly zavedeny Helmholtzovou dekompozicí.

Substitucí výrazu pro  $\mathbf{u}$  do Navierovy pohybové rovnice (1.4) a použití následujících identit:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi, \quad \nabla^2 (\nabla \phi) = \nabla (\nabla^2 \phi), \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

konečně dostáváme

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left( \mu \nabla^2 \mathbf{H} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (1.8)$$

Tato rovnice je splněna, pokud oba z členů vymizí, což vede na standardní rovnice:

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ c_2^2 \nabla^2 \mathbf{H} &= \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - i(\lambda' + 2\mu')}{\rho}} \\ c_2 &= \sqrt{\frac{\mu - i\mu'}{\rho}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

nebo je-li materiál elastický,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.11)$$

## 2 Šíření vln v izotropních materiálech pro případ kartézské souřadné soustavy

Nejprve budeme uvažovat šíření vln v izotropní rovinné desce [Low95].

Rovnice polí pro výchylky a napětí v rovinné izotropní elastické pevné vrstvě mohou být vyjádřeny jako superpozice polí čtyř objemových vln uvnitř vrstvy. Přístup proto spočívá v odvození rovnic polí pro objemové vlny, které jsou řešením vlnové rovnice v neohraničeném prostředí, a následném zavedení okrajových podmínek na rozhraních mezi dvěma vrstvami (Snellův zákon). Tím se definují pravidla pro vazbu mezi vrstvami a pravidla pro superpozici objemových vln. Analýza vrstev je omezena na dva rozměry s požadavkem rovinného přetvoření (plane strain) a pohybem pouze v této rovině. „SH“ módy zde nebudeme zkoumat.

### 2.1 Rovinné vlny v neohraničeném elastickém prostředí

Odvození pohybových rovnic pro neohraničené elastické prostředí je obsaženo v mnoha učebnicích ([Bre80], [BG85] a [Kol63]). Obvyklým přístupem je začít s infinitesimální krychličkou v neohraničeném elastickém izotropním prostředí hustoty  $\rho$ . Využijeme kartézský souřadný systém s výchylkami  $\mathbf{u}$  ( $u_1$ ,  $u_2$  a  $u_3$ ) v souřadném systému  $\mathbf{x}$  ( $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ ). S použitím druhého Newtonova zákona můžeme pro podmínky rovnováhy psát:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$ , atd. jsou složky napětí působící na strany krychličky a  $t$  je čas.

Toto jsou základní napěťové pohybové rovnice pro elastické prostředí. Vhodnější je vyjádřit si tyto rovnice pomocí výchylek, k čemuž potřebujeme následující rovnice, které vážou napětí s přetvořením a přetvoření s výchylkou:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{11}, & \sigma_{22} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{22}, & \sigma_{33} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{12} &= \mu\varepsilon_{12}, & \sigma_{23} &= \mu\varepsilon_{23}, & \sigma_{13} &= \mu\varepsilon_{13}, \\
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  jsou Lamého elastické konstanty a  $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  je změna objemu (dilatace) elementu.

Substituce vede na výchylkovou pohybovou rovnici:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_1 \\
 \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_2 \\
 \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_3 \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

kterou lze vyjádřit ve vektorovém tvaru:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.4)$$

kde  $\nabla$  je vektorový operátor  $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$  a  $\nabla^2$  je skalární operátor  $(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2)$ .

Tato rovnice nemůže být integrována přímo; vhodnost předpokládaného tvaru řešení se musí kontrolovat derivováním a substitucí. Předpokládá se, že vlnové čelo je nekonečná rovina, která je kolmá na směr šíření, viz obr. 2.1. Dále se předpokládá, že v libovolném místě ve směru šíření a v libovolném okamžiku, jsou všechny výchylky v rovině vlnového čela stejné. Tím se definuje homogenní rovinná vlna. Za těchto předpokladů existují dvě řešení, jedno pro „longitudinální“

vlny a druhé pro „příčné“ vlny. Částice se u longitudinálních vln pohybují pouze ve směru šíření a vlnový pohyb spočívá pouze ve změně objemu (dilatace). Částice se u příčných vln pohybují kolmo na směr šíření a pohyb spočívá v rotaci média bez změny objemu. Vhodný způsob prezentace řešení ve vektorovém tvaru je Helmholtzova metoda [Mal69], ve které longitudinální vlny ( $L$ ) jsou popsány skalární funkcí  $\phi$  a příčné vlny ( $S$ ) vektorovou funkcí  $\mathbf{H}$ , jejíž směr je kolmý jak na směr šíření vln, tak na směr pohybu částic:

$$\begin{aligned}\phi &= A_L e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ |\mathbf{H}| &= A_S e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Zde  $A_L$  a  $A_S$  jsou longitudinální a příčné vlnové amplitudy,  $\mathbf{k}$  je vektor vlnových čísel a  $\omega$  je úhlová frekvence. Vektor vlnových čísel má směr šíření vlny a popisuje její vlnovou délku a rychlost.

$$\text{Vlnová délka} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \quad \text{Rychlost} = c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}\quad (2.6)$$

Vlnové číslo je ilustrováno na obr. 2.1. Pro zobecnění můžeme uvažovat vlnové amplitudy jako komplexní veličiny  $A_L e^{i\psi}$ ,  $A_S e^{i\psi}$ , kde  $\psi$  je fáze vlny v prostorovém a časovém počátku  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

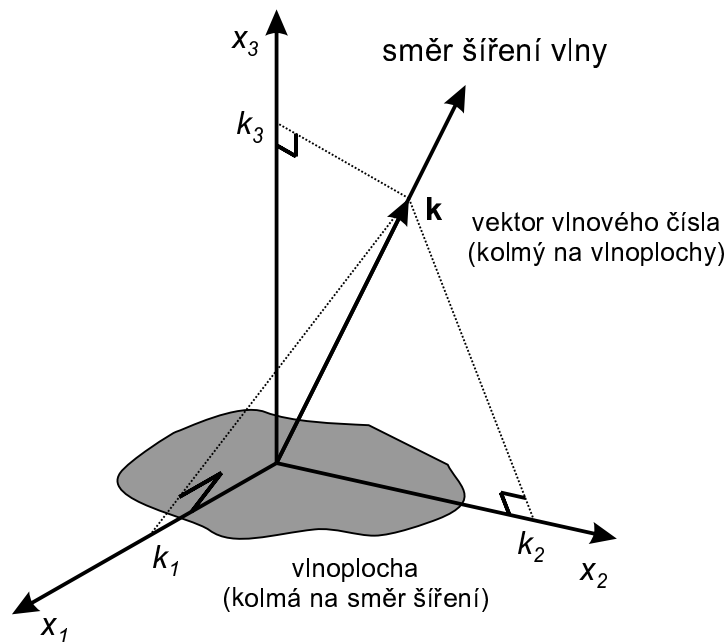
Pole výchylek je dáno těmito operacemi:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\nabla\phi}_{\mathbf{u}_L} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{H}}_{\mathbf{u}_S}\quad (2.7)$$

kde  $\times$  označuje vektorový součin,  $\nabla\phi$  odpovídá dilatačnímu (longitudinálnímu) pohybu a  $\nabla \times \mathbf{H}$  odpovídá ekvolumetrickému (příčnému) pohybu. Substitucí do pohybové rovnice (2.4) obdržíme rychlosti vln,  $c_1$  a  $c_2$  jako funkce materiálových konstant:

$$\begin{aligned}c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \\ c_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}\end{aligned}\quad (2.8)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\nu$  je Poissonovo číslo.



Obrázek 2.1: Šíření rovinné vlny v neohraničeném elastickém prostředí s vektorem vlnového čísla,  $\mathbf{k}$ .

## 2.2 Rovinné vlny ve dvourozměrném prostoru

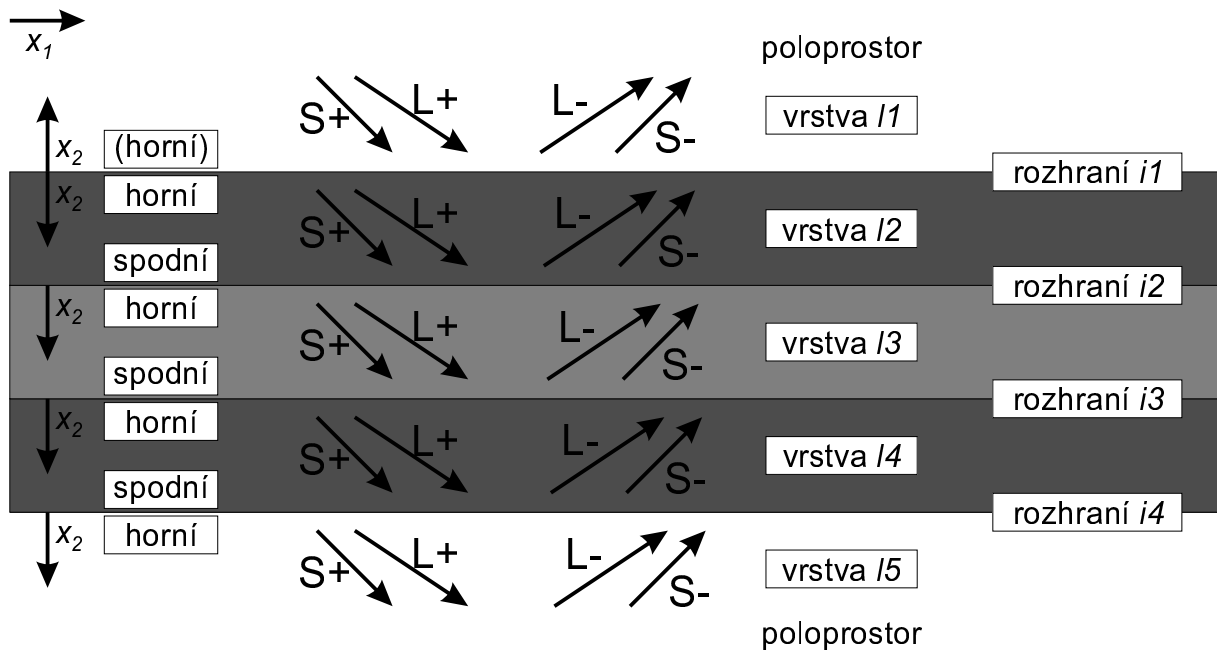
Ve vícevrstevném deskovém modelu se obvykle předpokládá, že vlnové délky jsou podstatně menší než šířka desky a šířka vlnových polí a tedy, že předpoklad rovinného přetvoření je platný. Souřadný systém může být potom redukován na rovinu definovanou směrem šíření vln a normálou k desce. V našem případě je tedy rovina definována osou  $x_1$ , která je rovnoběžná s deskou, a osou  $x_2$ , která je kolmá na desku. Obr. 2.2 ilustruje souřadný systém, který bude použit pro desku, ačkoliv v tomto stádiu nebudeme uvažovat žádná rozhraní mezi vrstvami ani žádné okraje desky. Při rovinném přetvoření se žádná veličina vzhledem ke směru osy  $x_3$  nemění, tj.  $\partial/\partial x_3 = 0$ . Dále, jak je obvyklé v ultrazvukových aplikacích, je model omezen na vlny, u nichž se pohyb částic odehrává pouze v rovině  $u_3 = 0$ , tedy vylučujeme Loveho módy [Lov11]. Modelování Loveho módů vyžaduje pouze malé změny v odvozeních a může být odvozeno za pomoci seismologické literatury, kde je jim věnováno více pozornosti ([FA72], [SK72], [SK71], [SK70] a [Sch80]).

Z rovnice (2.7) plynou pro výchylky longitudinálních a příčných vln vztahy:

$$\mathbf{u}_L = \nabla\phi = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} A_L e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

$$\mathbf{u}_S = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{bmatrix} A_S e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (2.9)$$

ve kterých vektorový potenciál  $\mathbf{H}$  míří ve směru osy  $x_3$ , tj. pohyb částic se odehrává v rovině  $x_1x_2$ .



Obrázek 2.2: Systém značení pro vícevrstvou desku.

## 2.3 Superpozice rovinných vln ve vrstevnaté desce

Vývoj modelu pro vlnový pohyb ve vícevrstvé desce je dokončen superpozicí longitudinálních a příčných objemových vln a zavedením okrajových podmínek na rozhraní mezi vrstvami. Na každém rozhraní se předpokládá osm vln: longitudinální (dilatační) a příčné (ekvivolumetrické) vlny dopadající na rozhraní shora a procházející dolů (L+, S+) a podobně longitudinální (dilatační) a příčné (ekvivolumetrické) vlny dopadající na rozhraní zdola a procházející nahoru



(L-, S-). Existují tedy v každé vrstvě vícevrstvé desky čtyři vlny (Obr. 2.2). Snellův zákon pro interakci vln vyžaduje, aby všechny vlny měly na každém rozhraní stejnou frekvenci a prostorové vlastnosti ve směru osy  $x_1$ . Z toho vyplývá, že všechny výchylkové a napěťové rovnice mají stejné  $\omega$  a stejnou  $k_1 = \xi$  složku vlnového čísla („deskové vlnové číslo“), která je projekcí vektoru vlnového čísla objemové vlny do rozhraní. Všechny rovnice polí pro všechna místa ve všech vrstvách tedy obsahují následující faktor,  $F$ , který je vzhledem k systému invariantní:

$$F = e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \quad (2.10)$$

Toto váže úhly dopadu, lomu a odrazu homogenních objemových vln ve vrstvách s rychlostmi těchto objemových vln následujícím vztahem:

$$\frac{\xi}{\omega} = \frac{1}{c_{ph}} = \frac{\sin(\theta_L)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_S)}{c_2} \quad (2.11)$$

kde  $\theta_L$  a  $\theta_S$  jsou úhly, pod kterými se šíří longitudinální a příčné objemové vlny vzhledem k normále vrstev (směr osy  $x_2$ ). Invariant  $c_{ph}$  je projekce rychlostí objemové vlny ve směru osy  $x_1$  a vzhledem k modálním řešením se jedná o fázovou rychlost šířících se vln. S použitím rovnic (2.6) a (2.8) lze také vyjádřit pomocí deskového vlnového čísla ( $\xi = k_1$ ) a rychlosti objemových vln,  $c_1$  a  $c_2$ , složky  $k_2$  objemových vln v každé vrstvě :

$$\begin{aligned} k_{2L\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \xi^2} \\ k_{2S\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - \xi^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Znaménka + a - opět označují vlny putující ve směru kladné („dolů“) resp. záporné („nahoru“) osy  $x_2$ . Pokud je  $\omega^2/c_1^2$  větší než  $\xi^2$ , pak  $k_2$  je reálné a vlna je homogenní a putuje pod nějakým nenulovým úhlem vzhledem ke směru osy  $x_1$ . Pokud je  $\omega^2/c_1^2$  menší než  $\xi^2$ , pak  $k_2$  je výhradně imaginární a vlna je nehomogenní, neboli „zanikající“, a putuje ve směru osy  $x_1$  a amplituda se jí tlumí ve směru osy  $x_2$ .

Použijeme-li rovnice polí, můžeme z amplitud objemových vln zjistit výchylky a napětí v libovolném místě ve vrstvě:

Pro longitudinální objemové vlny:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \xi A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
u_2 &= \pm \zeta_1 A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
\sigma_{11} &= i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \zeta_1^2) A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
\sigma_{22} &= i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi^2) A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
\sigma_{33} &= i\rho \omega^2 (1 - 2c_2^2/c_1^2) A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
\sigma_{12} &= \pm 2i\rho c_2^2 \xi \zeta_1 A_{L\pm} F e^{\pm i\zeta_1 y} \\
\sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0
\end{aligned}$$

Pro příčné objemové vlny:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \pm \zeta_2 A_{S\pm} F e^{\pm i\zeta_2 y} \\
u_2 &= -\xi A_{S\pm} F e^{\pm i\zeta_2 y} \\
\sigma_{11} &= \pm 2i\rho c_2^2 \xi \zeta_2 A_{S\pm} F e^{\pm i\zeta_2 y} \\
\sigma_{22} &= -\sigma_{11} \\
\sigma_{33} &= 0 \\
\sigma_{12} &= i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi) A_{S\pm} F e^{\pm i\zeta_2 y} \\
\sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

kde  $\zeta_1 = \sqrt{\omega^2/c_1^2 - \xi^2}$  a  $\zeta_2 = \sqrt{\omega^2/c_2^2 - \xi^2}$ .

Výchytky a napětí v libovolném místě ve vrstvě mohou být tedy nalezeny sumací příspěvků vyvolaných čtyřmi vlnovými složkami ve vrstvě. Pro vícevrstvý systém jsou zajímavé ty veličiny, které musí být spojité na rozhraní: dvě složky výchytky,  $u_1$  a  $u_2$ , normálové napětí,  $\sigma_{22}$ , a smykové napětí,  $\sigma_{12}$ . Provedeme-li vhodnou substituci,

$$g_{\zeta_1} = e^{i\zeta_1 x_2} \quad g_{\zeta_2} = e^{i\zeta_2 x_2} \tag{2.14}$$

a zanedbáme společný faktor,  $F$ , můžeme veličiny pole ve vrstvě vyjádřit maticovou rovnicí:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi g_{\zeta_1} & \frac{\xi}{g_{\zeta_1}} & \zeta_2 g_{\zeta_2} & -\frac{\zeta_2}{g_{\zeta_2}} \\ \zeta_1 g_{\zeta_1} & -\frac{\zeta_1}{g_{\zeta_1}} & -\xi g_{\zeta_2} & -\frac{\xi}{g_{\zeta_2}} \\ i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi^2) g_{\zeta_1} & \frac{i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi^2)}{g_{\zeta_1}} & -2i\rho \xi c_2^2 \zeta_2 g_{\zeta_2} & \frac{2i\rho \xi c_2^2 \zeta_2}{g_{\zeta_2}} \\ 2i\rho \xi c_2^2 \zeta_1 g_{\zeta_1} & \frac{-2i\rho \xi c_2^2 \zeta_1}{g_{\zeta_1}} & i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi^2) g_{\zeta_2} & \frac{i\rho (\omega^2 - 2c_2^2 \xi^2)}{g_{\zeta_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L+} \\ A_{L-} \\ A_{S+} \\ A_{S-} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Matice v rovnici (2.15) je matice pole, která popisuje vazbu mezi vlnovými amplitudami a výchytkami a napětími v libovolném místě v libovolné vrstvě. Její koeficienty závisí na příčném umístění v desce ( $x_2$ ), materiálových vlastnostech vrstvy v daném místě ( $\rho$ ,  $c_1$  a  $c_2$ ), frekvenci ( $\omega$ ) a invariantním deskovým vlnovým čísle ( $\xi = k_1$ ). **Počátek souřadnice  $x_2$  může být umístěn libovolně a může být dokonce pro každou vrstvu jiný, protože fázový rozdíl mezi vrstvami může být zahrnut do fáze komplexních vlnových amplitud.** Matici pole budeme označovat zkratkou **[D]**.

# 3 Metoda přenosové matice pro elastické vlny a pravé módy

Základem metody přenosové matice je postupná kondenzace vícevrstvého systému až na množinu čtyř rovnic, které vážou okrajové podmínky na prvním rozhraní s okrajovými podmínkami na posledním rozhraní. Při tomto procesu jsou eliminovány rovnice pro vnitřní rozhraní, takže pole ve všech vrstvách desky jsou popsána výhradně veličinami vnějších okrajových podmínek. Základní princip popisu vrstevnatého prostředí přenosovou maticí se připisuje Thomsonovi [Tho50], který ukázal, že k popisu přenosu vln skrz libovolný počet vrstev lze použít matice. Haskell [Has53] následně opravil chybu v Thomsonově článku a ukázal, že metodu lze použít k nalezení modálních řešení pro povrchové vlny.

Obrázek 2.2 znázorňuje systém značení, který bude používán v následujícím výkladu. Pro ilustraci je uveden systém o pěti vrstvách, který se skládá z třívrstvé desky a dvou poloprostorů. Poloprostory považujeme také za vrstvy, i když se jedná o vakuum. Vrstvy systému jsou označeny  $l1$  až  $l5$  a rozhraní  $i1$  až  $i4$ . Ačkoliv orientace desky v prostoru je libovolná, je vhodné odkazovat se na vrstvy pomocí jejich vertikální pozice v systému a na rozhraní pomocí horních a dolních povrchů jednotlivých vrstev, jak je uvedeno na obrázku 2.2. Každá vrstva má svůj vlastní počátek osy  $x_2$  definovaný svým horním rozhraním, kromě první vrstvy ( $l1$ ), která má počátek na rozhraní s druhou vrstvou ( $l2$ ), abychom nemuseli mít počátek v  $-\infty$ .

Předpokládejme, že výchylky a napětí na prvním rozhraní ( $l1$ ) jsou známy. Amplitudy čtyř vln v horní vrstvě  $l2$  lze najít invertováním matice  $[D]$ :

$$\begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{l2} = [D]_{l2,\text{top}}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \quad (3.1)$$

Výchylky a napětí na dně této vrstvy, tj. na druhém rozhraní ( $i2$ ), lze najít z vlnových amplitud ve vrstvě  $l2$ :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{bottom}} = [D]_{l2,\text{bottom}} \cdot [D]_{l2,\text{top}}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \quad (3.2)$$

Maticový součin v této rovnici nyní váže výchylky a napětí mezi horním a dolním povrchem jedné vrstvy a budeme se na něj odkazovat jako na matici vrstvy,  $[L]$ . Pro případ druhé vrstvy máme:

$$[L]_{l2} = [D]_{l2,\text{bottom}} \cdot [D]_{l2,\text{top}}^{-1} \quad (3.3)$$

Inverze matice  $[D]$  může být vyjádřena explicitně ([Has53], [Low93] a [Hos91]) a lze tedy explicitně vyjádřit i koeficienty matice  $[L]$ , což je výhodné zejména pro analytické studie. Koeficienty jsou:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\beta^2 k_1^2}{\omega^2} \left( g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{B}{2\omega^2} \left( g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{12} &= \frac{k_1 B}{2\omega^2 C_\alpha} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{k_1 \beta^2 C_\beta}{2\omega^2} \left( -g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{13} &= \frac{k_1}{2i\omega^2 \rho} \left( g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} - g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{14} &= \frac{k_1^2}{2i\omega^2 \rho C_\alpha} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{C_\beta}{2i\omega^2 \rho} \left( g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{21} &= \frac{C_\alpha \beta^2 k_1}{\omega^2} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{B k_1}{2\omega^2 C_\beta} \left( -g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{22} &= \frac{B}{2\omega^2} \left( g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{\beta^2 k_1^2}{\omega^2} \left( g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{23} &= \frac{C_\alpha}{2i\omega^2 \rho} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{k_1^2}{2i\omega^2 \rho C_\beta} \left( g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{24} &= L_{13} \\ L_{31} &= \frac{i\rho B \beta^2 k_1}{\omega^2} \left( g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} - g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \\ L_{32} &= \frac{i\rho B^2}{2\omega^2 C_\alpha} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{2i\rho \beta^4 k_1^2 C_\beta}{\omega^2} \left( g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{33} &= L_{22} \\
L_{34} &= L_{12} \\
L_{41} &= \frac{2i\rho\beta^4 k_1^2 C_\alpha}{\omega^2} \left( g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{i\rho B^2}{2\omega^2 C_\beta} \left( g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right) \\
L_{42} &= L_{31} \\
L_{43} &= L_{21} \\
L_{44} &= L_{11}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Výchylky a napětí musí být na „svařeném“ rozhraní mezi vrstvami spojitě. Tedy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l3,\text{top}} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{bottom}} \\
&= [L]_{l2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Tento proces můžeme postupně provádět pro všechny následující vrstvy. Výsledkem je rovnice:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{ln,\text{top}} = [S] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \tag{3.6}$$

kde  $n$  je číslo poslední vrstvy (v našem případě 5) a  $[S]$  je matice systému, vytvořená maticovým součinem jednotlivých matic vrstev:

$$[S] = [L]_{l2} [L]_{l3} \cdots [L]_{l(n-1)} \tag{3.7}$$

Pokud poloprostor není vakuum, je účelnější popsat hranici systému pomocí vln v poloprostoru, než výchylkami a napětími. Pro případ, že oba poloprostory jsou tuhé, dostaneme následující rovnici systému:

$$\begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{ln} = [D]_{ln,\text{top}}^{-1} [S] [D]_{l1,(x_2=0)} \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{l1} \quad (3.8)$$

### 3.1 Řešení odezvy

Pro řešení odezvy nekonečné rovinné vlny pro desku uloženou v tuhém prostředí musí být známy čtyři z osmi vlnových amplitud v rovnici (3.8), což nám umožní nalézt zbývající čtyři přímou manipulací s touto rovnicí. Většinou se předpokládá, že jedna ze čtyř dopadajících (vstupních) vln má jednotkovou amplitudu a ostatní jsou nulové. Koeficienty odrazu a prostupu rovinné vlny jsou potom dány amplitudami čtyř výstupních vln. Pokud je deska ponořena do kapaliny, měli bychom správně všechny rovnice přepsat, abychom vyloučili možnost příčných vln v kapalinách (také pokud je jedna z vrstev systému kapalina [Has53]). Avšak v praxi se používá celý systém rovnic, ve kterém ale zajistíme zanedbatelný příčný pohyb v kapalině. Toho lze dosáhnout specifikováním velice malé rychlosti objemových příčných vln pro kapalinu, např. o několik řádů méně, než je rychlost objemové longitudinální vlny [Pia92].

Řešení odezvy poskytuje amplitudy a fáze odražených a prošlých rovinných nekonečných vln v ustáleném stavu při konstantní frekvenci. V mnoha případech je toto dostatečná informace. Avšak, jak bylo zmíněno v úvodu, lze též dělat predikce odezvy, která je konečná jak v prostoru, tak v čase ([Pia92], [CNB82], [CN89] a [PC91]), a tedy např. simulovat signál, který se získá snímačem konečné velikosti.

### 3.2 Modální řešení pro pravé módy

Jestliže jsou oba poloprostory vakuum, pak modální řešení vyžaduje nulová napětí na krajních rozhraních  $i1$  a  $i(n-1)$ , jak je uvedeno na obrázku 3.1(a). Nyní můžeme rovnici (3.6) psát jako:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{ln,\text{top}} = [S] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \quad (3.9)$$

Rozepsáním této rovnice pro dva (nulové) napěťové členy na levé straně dostaneme:

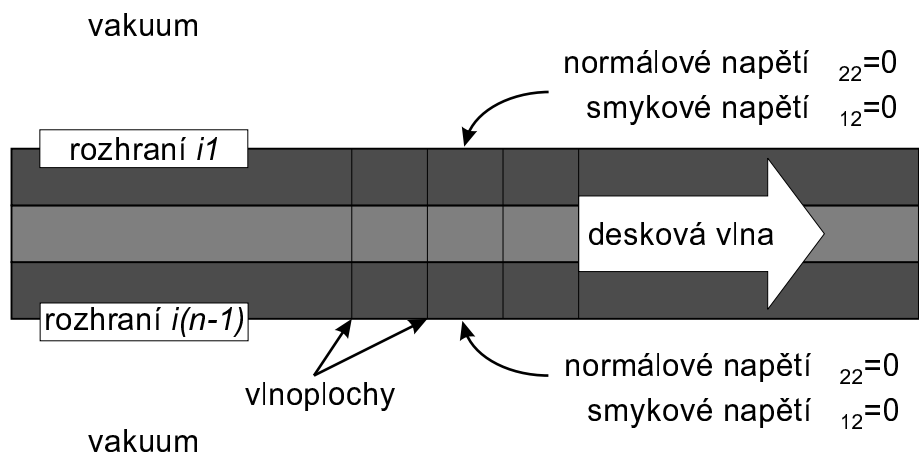
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{l_2, \text{top}} \quad (3.10)$$

kde matice řádu dvě je dolní levá submatice matice  $[S]$  (řádky 3 a 4 a sloupce 1 a 2). Aby bylo tato rovnice splněna, musí být submatice singulární, tzn. determinant submatice (charakteristická funkce ( $f$ ) systému) musí být roven nule:

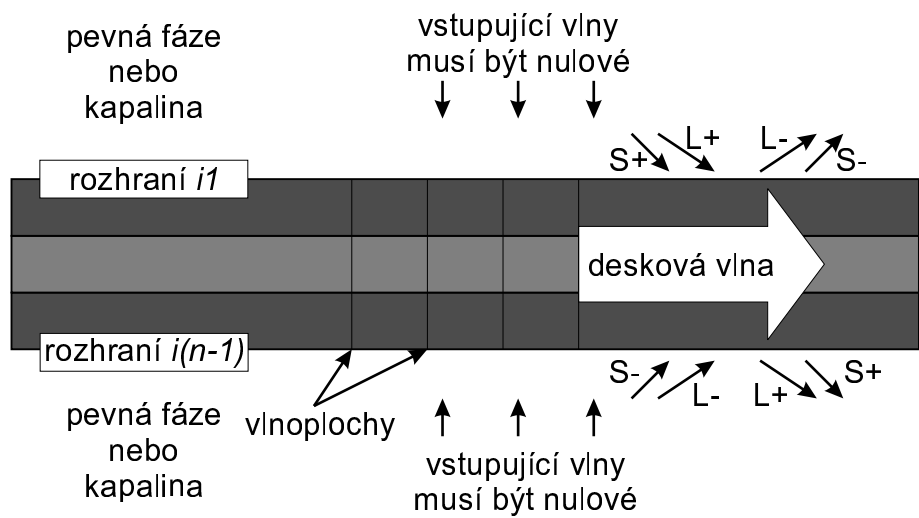
$$f = S_{31} * S_{42} - S_{41} * S_{32} = 0 \quad (3.11)$$

Pravé módy mohou cestovat také v deskových systémech, ve kterých jeden nebo oba polopros-tory nejsou vakuum, ale pouze za podmínky, že žádná energie neodchází v desky do polopros-torů. Aby byla tato podmínka splněna, musí být vlnové komponenty v poloprostorech  $l1$  a  $ln$  nehomogenní, takže oni mohou nést energii podél desky, ale nejsou schopni nést energii pryč od krajních rozhraní  $i1$  a  $i(n - 1)$ .

$$f' = S'_{22} * S'_{44} - S'_{42} * S'_{24} = 0 \quad (3.12)$$



(a)



(b)

Obrázek 3.1: Okrajové podmínky pro modální řešení v deskách:  
 (a) deska ve vakuu,  
 (b) deska v pevném prostředí nebo kapalině.



## 4 Metoda globální matice

V roce 1964 publikoval Knopoff zcela odlišnou maticovou formulaci pro vícevrstvé prostředí [Kno64], která je alternativou k technice přenosové matice a která může být použita pro odstranění problému vysoké hodnoty součinu frekvence a tloušťky. Tato metoda byla prvně implementována Randallem [Ran67] a následně byla použita řadou dalších badatelů ([Sch70], [CHT84], [SJ85a], [SJ85b], [ST86], [Mal88], [Pia92] a [Low93]). Pro rozvoj metody bylo mimořádně důležité pochopení důležitosti volby prostorových počátků objemových vln v každé vrstvě ([SJ85a], [SJ85b] a [Pia92]). Výhody metody spočívají v její robustnosti (zůstává stabilní i pro vysoké hodnoty součinů frekvence a tloušťky) a dále v tom, že metoda globální matice umožňuje použít stejnou základní matici jak pro reálné, tak pro komplexní vlnové číslo; vakuové, kapalné nebo tuhé poloprostory a jak pro modální řešení, tak pro řešení odezev. Nevýhodou je, že globální matice může být velice rozsáhlá a řešení pak může být v případě systému s mnoha vrstvami relativně pomalé. Avšak rychlost moderních počítačů toto omezení výrazně redukuje. Porovnání a popis různých maticových technik lze nalézt v [Low95].

V metodě globální matice reprezentuje celý systém pouze jedna matice. Globální (systémová) matice se skládá z  $4(n - 1)$  rovnic, kde  $n$  je počet vrstev (včetně každého polonekonečného poloprostoru, který je považován také za vrstvu). Rovnice, ve skupině po čtyřech, jsou založeny na splnění okrajových podmínek na každém rozhraní. Tedy nejsou dělány žádné apriorní předpoklady o nějakých vzájemných závislostech mezi množinami rovnic pro každé rozhraní. Řešení se provádí na celé matici, adresováním všech rovnic současně. To neznamená, že rozhraní jsou úplně nezávislá, protože rovnice na rozhraní jsou ovlivněny příchodem vln od sousedních rozhraní. Avšak, jak roste součin frekvence a tloušťky, tak se redukuje vliv nehomogenních vln putujících podél jednoho rozhraní na výchylky a napětí ve vedlejším rozhraní. Míra vlivu je určena exponenciálními členy v globální matici. Vliv těchto členů je pro nehomogenní vlny vždy slábnoucí, tedy v limitě zmizí a nehomogenní vlna putující podél jednoho rozhraní nemá vliv na vlny ve vedlejším rozhraní (tj. vrstva se chová jako poloprostor). Metoda tedy zůstává naprosto stabilní pro libovolnou velikost součinu frekvence a tloušťky, neboť se neopírá o spo-

jování nehomogenních vln z jednoho rozhraní do druhého.

Uvažujme jedno rozhraní, např. druhé rozhraní ( $i2$ ) na obr. 2.2. Použitím vztahu (2.15) můžeme vyjádřit výchylky a napětí na rozhraní jako funkci vlnových amplitud na horním okraji třetí vrstvy ( $l3$ ) nebo jako funkci vlnových amplitud na dolním okraji druhé vrstvy ( $l2$ ). Z důvodu spojitosti výchylek a napětí na rozhraní musí dát obě vyjádření stejný výsledek. Tedy

$$[D]_{l2,\text{bottom}} \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{l2} = [D]_{l3,\text{top}} \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{l3} \quad (4.1)$$

což můžeme vyjádřit jedinou maticí jako

$$[[D_{2b}] [-D_{3t}]] \begin{bmatrix} A_{(L+)_2} \\ A_{(L-)_2} \\ A_{(S+)_2} \\ A_{(S-)_2} \\ A_{(L+)_3} \\ A_{(L-)_3} \\ A_{(S+)_3} \\ A_{(S-)_3} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

kde index 2 resp. 3 odkazuje na vrstvu  $l2$  resp.  $l3$  a  $t$  resp.  $b$  k hornímu resp. dolnímu okraji každé vrstvy. Tato rovnice popisuje interakci vln sousedních vrstev  $l2$  a  $l3$  na rozhraní  $i2$ .

Než budeme pokračovat, provedeme modifikaci prostorových počátků objemových vln, což ovlivní vztah (2.15). **Místo abychom definovali počátek pro všechny vlny ve vrstvě na horním okraji vrstvy, budeme definovat počátek všech vln ve vrstvě místem jejich vstupu do vrstvy.** Tedy vlny putující dolů ( $L+$ ,  $S+$ ) mají svůj počátek na horním okraji vrstvy a vlny putující nahoru ( $L-$ ,  $S-$ ) mají svůj počátek na dolním okraji vrstvy. U polo-prostorů žádnou změnu neděláme. S touto modifikací a s odkazem na vztah (2.15) mohou být matice  $[D]$  pro horní resp. dolní okraj vrstvy vyjádřeny jako:

$$[D_t] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 g_\alpha & C_\beta & -C_\beta g_\beta \\ C_\alpha & -C_\alpha g_\alpha & -k_1 & -k_1 g_\beta \\ i\rho B & i\rho B g_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta & 2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta g_\beta \\ 2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha g_\alpha & i\rho B & i\rho B g_\beta \end{bmatrix}$$

resp.

$$[D_b] = \begin{bmatrix} k_1 g_\alpha & k_1 & C_\beta g_\beta & -C_\beta \\ C_\alpha g_\alpha & -C_\alpha & -k_1 g_\beta & -k_1 \\ i\rho B g_\alpha & i\rho B & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta g_\beta & 2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta \\ 2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha g_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha & i\rho B g_\beta & i\rho B \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Podobná rovnice k rovnici (4.2) může být nyní napsána pro rozhraní  $i\mathcal{B}$  a jednoduše přidána ke globální matici. Takto postupujeme i pro všechna ostatní rozhraní. Výsledkem je matice popisující  $4(n-1)$  rovnic pro  $4n$  neznámých. V případě příkladu z obr. 2.2 vypadá maticová rovnice následovně:

$$\begin{bmatrix} [D_{1b}] & [-D_{2t}] & & & & \\ & [D_{2b}] & [-D_{3t}] & & & \\ & & [D_{3b}] & [-D_{4t}] & & \\ & & & [D_{4b}] & [-D_{5t}] & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ [A_3] \\ [A_4] \\ [A_5] \end{bmatrix} = [0] \quad (4.4)$$

kde vlnové amplitudy v každé vrstvě,  $A_{(L+)}$ ,  $A_{(L-)}$ ,  $A_{(S+)}$  a  $A_{(S-)}$ , jsou zkráceně zapsány jako vlnový vektor vrstvy  $[A]$ . Čtyři vlnové amplitudy v rovnici (4.4) musí být nyní označeny jako známé a přesunuty na pravou stranu rovnic. Pro ultrazvukové aplikace se obvykle jako známé volí dopadající vlny v obou poloprostorech, tj.  $A_{(L+)1}$ ,  $A_{(S+)1}$ ,  $A_{(L-)5}$  a  $A_{(S-)5}$ , z čehož plyne:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [D_{1b}^-] & [-D_{2t}] & & & & \\ & [D_{2b}] & [-D_{3t}] & & & \\ & & [D_{3b}] & [-D_{4t}] & & \\ & & & [D_{4b}] & [-D_{5t}^+] & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_1^-] \\ [A_2] \\ [A_3] \\ [A_4] \\ [A_5^+] \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} [-D_{1b}^+] & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & [D_{5t}^-] & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_1^+] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [A_5^-] \end{bmatrix} \quad (4.5) \end{aligned}$$

kde horní index + resp. - označuje ty části matic nebo vektorů, které odpovídají + resp. -

vlnám. Tedy každý z vektorů  $[A^+]$  a  $[A^-]$  se skládá z poloviny vektoru  $[A]$  a matice  $[D^+]$  a  $[D^-]$  jsou submaticemi (čtyři řádky, dva sloupce) matice  $[D]$ . Štěpení je následující:

$$\begin{aligned}
 [A^+] &= \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(S+)} \end{bmatrix} \\
 [A^-] &= \begin{bmatrix} A_{(L-)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix} \\
 [D^+] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{21} & D_{23} \\ D_{31} & D_{33} \\ D_{41} & D_{43} \end{bmatrix} \\
 [D^-] &= \begin{bmatrix} D_{12} & D_{14} \\ D_{22} & D_{24} \\ D_{32} & D_{34} \\ D_{42} & D_{34} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Systémová matice na levé straně rovnice (4.5) a řídká matice na její pravé straně jsou matice čtvercové dimenze  $4(n-1)$ . Pokud jsou známé vlnové amplitudy dopadajících vln, může být pravá strana rovnice vyhodnocena okamžitě.

## 4.1 Řešení odezvy

Řešení odezvy pro vektor vlnových amplitud na levé straně vztahu (4.5) lze snadno a rychle získat inverzí systémové matice. Toto řešení je časově nejnáročnější částí analýzy. Pokud však existuje mnoho vrstev a koeficienty jsou komplexní, může být matice dosti rozsáhlá. Navíc může být matice občas téměř singulární (přesně to nastane, pokud hodnoty vlnového čísla a frekvence odpovídají hodnotám pro modální řešení). Vyplatí se proto používat aritmetiku s dvojnásobnou (někdy i čtyřnásobnou) přesností a implementovat efektní a robustní řešící algoritmus. Vyzkoušeným spolehlivým přístupem ([SJ85a], [SJ85b], [Pia92] a [Low93]) je použití Gaussovy eliminace s částečným výběrem hlavního prvku, při které se využije pásová povaha matice pro zlepšení efektivnosti.

## 4.2 Modální řešení

Modální řešení pro systémy, ve kterých poloprostory nejsou vakuum, je zřejmé, protože systém je již popsán členy vlnových amplitud v poloprostorech, viz rovnice (4.5). Dopadající vlny jsou nulové a tak pravá strana rovnice musí být nulová. Tedy systémová matice  $[S]$  musí být singulární, to znamená, její determinant musí být roven nule. To vede na charakteristickou funkci:

$$f = |S| = 0 \quad (4.7)$$

Pokud horní a dolní poloprostory jsou vakuum, pak matice  $[D^+]$  a  $[D^-]$  nemohou být vyhodnoceny. Je tedy potřeba modifikovat systémovou matici, aby správně zachovávala chování systému, tj. absence vln ve vakuu a nulová napětí na volném povrchu. To lze udělat přeformulováním problému, což se projeví menší systémovou maticí. Submatice a vlnové amplitudy odpovídající poloprostorům jsou ze vztahu (4.5) odstraněny a zbývající horní a dolní submatice jsou rozděleny na výchylkové a napěťové řádky. Napěťové části jsou potom přesunuty na pravou stranu jako známé. Tím opět obdržíme čtvercovou systémovou matici a řešení je pak možné. Avšak mnohem jednodušší alternativou [Low93], která ponechává řešení naprosto obecné, je zachovat plnou systémovou matici a modifikovat vrstevové konstanty pro poloprostory z vakua takovým způsobem, že matice  $[D^+]$  a  $[D^-]$  mohou být vyhodnoceny, tudíž řešení je možné a výsledná povrchová napětí jsou nulová. Toho se dosáhne nastavením objemových rychlostí  $c_1$  a  $c_2$  pro vakuum na libovolnou nenulovou hodnotu a hustoty  $\rho$  na nulu. Po těchto modifikacích je sestavení matice a její řešení stejné jako u systému, který nemá poloprostory z vakua.

Charakteristická funkce metody globální matice vede na komplexní hodnoty jak pro pravé módy, tak pro útlumové módy. Schwab [Sch70] však ukázal, že pro pravé módy leží tyto komplexní hodnoty na reálné nebo imaginární ose. Stejně jako u metody přenosové matice platí, že existence řešení charakteristické funkce ještě nedokazuje existenci modálního řešení, pouze říká, že systémová matice je singulární.

# 5 Analytická řešení pro případ pravých a rozptylových Lambových vln

Metoda globální matice umožňuje analyzovat širokou řadu různých geometrií použitím stejné konfigurace. Avšak není nijak rychlá. Pro jednoduché systémy, které jsou běžně analyzovány, je užitečné vypočítat hodnotu charakteristické rovnice analyticky. Jedná se zejména o případy jednovrstvých, elastických a izotropních desek ve vakuu nebo kapalině. Tyto případy zahrnují pravé Lambovy vlny a rozptylové Lambovy vlny.

Stejně odvození je použito jak pro případ pravých, tak rozptylových Lambových vln, s výjimkou toho, že ztráta vyvolaná vlnami unikajícími (rozptylovanými) do obklopující kapaliny je v případě desky ve vakuu eliminována. Následné odvození sleduje stejný obecný postup jako odvození pro matici vrstvy u rovinné izotropní desky. Avšak okrajové podmínky a rovnice pro obklopující prostředí jsou vloženy přímo do charakteristické rovnice. Na rozhraní mezi pevnou vrstvou a obklopující kapalinou se uplatní následující okrajové podmínky. Normálová výchylka,  $u_2$ , nebude muset být spojitá. Navíc normálové napětí,  $\sigma_{22}$ , musí být pro vyvážení tlaku spojitě. Smykové napětí,  $\sigma_{12}$ , musí být na rozhraní nulové, protože kapalina nemůže přenášet smykové síly. Na ostatní výchylky a napětí nejsou kladena žádná omezení.

Odvození pro rozptylovou Lambovu vlnu začíná stejně jako odvození pro izotropní vrstvu. Předpokládáme, že se vlnovodná vlna šíří ve směru osy  $x_1$ , rozhraní mezi vrstvami se objeví v konstantní hodnotě ve směru osy  $x_2$  a systém je ve stavu rovinného přetvoření. Příčný horizontální mód je ignorován a je uvažován pouze pohyb v rovině  $x - y$ . Výchylka může být vyjádřena dvěma potenciály, skalárním a vektorovým,  $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{H}$ , kde skalární vektor,  $\phi$ , je ve tvaru,

$$\phi = [\Lambda_{L1} \cos(k_2 x_2) + \Lambda_{L2} \sin(k_2 x_2)] e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \quad (5.1)$$

a vektorový potenciál,  $\mathbf{H}$ , je ve tvaru,

$$\mathbf{H} = [\Lambda_{S1} \cos(k_2 x_2) + \Lambda_{S2} \sin(k_2 x_2)] e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \quad (5.2)$$

Pole je po tloušťce popsáno jako suma sinů a kosinů, takže řešení může být později separováno na symetrickou a antisymetrickou část. Pokud je pole po tloušťce popsáno exponenciálami, jako tomu bylo v případě izotropní vrstvy, symetrická a antisymetrická část jsou spolu svázány. Poněvadž amplituda vlnového čísla je pro skalární potenciál rovna  $\omega/v_1$  a pro vektorový potenciál rovna  $\omega/v_2$ , mohou být dvě složky vlnového čísla navzájem specifikovány. Tudíž pokud složka vlnového čísla ve směru šíření,  $k_1$ , je reprezentována jako  $\xi$ , lze specifikovat čtverec složky vlnového čísla kolmou na směr šíření jako:

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= \omega^2/v_1^2 - \xi^2 \\ \zeta_2^2 &= \omega^2/v_2^2 - \xi^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

kde  $\zeta_1$  je normálová složka vlnového čísla pro skalární potenciál,  $\phi$ , a  $\zeta_2$  je normálová složka vlnového čísla pro vektorový potenciál,  $\mathbf{H}$ .

Specifikování výchylky dvěma různými potenciály vede na výrazy pro výchylky vyvolané kompresní vlnou ( $\mathbf{u}_L$ ) a rotační vlnou ( $\mathbf{u}_S$ ). Tedy výchylka v desce může být zapsána jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &= \nabla \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \Lambda_{L1} \begin{bmatrix} i\xi \cos(\zeta_1 x_2) \\ -\zeta_1 \sin(\zeta_1 x_2) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\xi x_1 - \omega t)} + \Lambda_{L2} \begin{bmatrix} i\xi \sin(\zeta_1 x_2) \\ \zeta_1 \cos(\zeta_1 x_2) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S &= \nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{bmatrix} \\ &= \Lambda_{S1} \begin{bmatrix} -\zeta_2 \sin(\zeta_2 x_2) \\ -i\xi \cos(\zeta_2 x_2) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\xi x_1 - \omega t)} + \Lambda_{S2} \begin{bmatrix} \zeta_2 \cos(\zeta_2 x_2) \\ -i\xi \sin(\zeta_2 x_2) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

kde vektorový potenciál  $\mathbf{H}$  má směr osy  $x_3$ , takže pohyb částic se uskutečňuje pouze v rovině  $x_1x_2$ .

Normálové kompresní napětí a tangenciální příčné napětí lze vyjádřit jako:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= \mu\varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{5.6}$$

kde

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \Delta &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\end{aligned}\tag{5.7}$$

a kde  $\lambda$  a  $\mu$  jsou Lamého elastické konstanty a  $\Delta$  je změna objemu elementu. Vložení výrazů pro výchylky do těchto rovnic vede na následující výrazy pro normálová a příčná napětí:

Kompresní:

Rotační:

$$\begin{aligned}\sigma_{22+} &= -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_1 x_2) & \sigma_{22+} &= 2\mu\xi\zeta_2 \sin(\zeta_2 x_2) \\ \sigma_{22-} &= -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_1 x_2) & \sigma_{22-} &= -2\mu\xi\zeta_2 \cos(\zeta_2 x_2) \\ \sigma_{12+} &= -2i\mu\zeta_1\xi \sin(\zeta_2 x_2) & \sigma_{12+} &= -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_2 x_2) \\ \sigma_{12-} &= 2i\mu\zeta_1\xi \cos(\zeta_2 x_2) & \sigma_{12-} &= -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_2 x_2)\end{aligned}\tag{5.8}$$

kde je ve všech výrazech vynechán člen  $e^{i(\xi x_1 - \omega t)}$ . Při výpočtu výrazu pro normálové napětí,  $\sigma_{22}$ , byla použita substituce,  $\lambda(\zeta_1^2 + \xi^2) + 2\mu\zeta_1^2 = \mu(\zeta_2^2 - \xi^2)$ .

Obklopující kapalina může být modelována jako jednoduchý skalární potenciál, poněvadž nepřenosí žádné příčné síly. Dva potenciály, odpovídající hornímu a dolnímu poloprostoru, lze vyjádřit



jako:

$$\begin{aligned}\phi_{L1} &= \left[ \Lambda_{liq1} e^{-i(\gamma x_2)} \right] e^{i(\xi x - \omega t)} \quad \text{pro } x_2 \leq -d/2 \\ \phi_{L2} &= \left[ \Lambda_{liq2} e^{i(\gamma x_2)} \right] e^{i(\xi x - \omega t)} \quad \text{pro } x_2 \geq d/2\end{aligned}\tag{5.9}$$

Pro kapalinu lze proto výchylku a napětí vyjádřit vztahy:

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{\partial \Phi_L}{\partial x_2} \\ &= -i\gamma \Lambda_{liq1} e^{-i(\gamma x_2)} \quad \text{pro } x_2 \leq -d/2 \\ \text{nebo } &i\gamma \Lambda_{liq2} e^{i(\gamma x_2)} \quad \text{pro } x_2 \geq d/2\end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \omega^2 \rho_L \Phi_L\tag{5.10}$$

kde  $\gamma = \sqrt{\omega^2/c_L^2 - \xi^2}$  a  $c_L$  je rychlost objemové vlny v obklopující kapalině.

Vyhodnocením výrazů pro normálovou výchylku, normálové kompresní napětí a tangenciální příčné napětí na horním povrchu ( $-d/2$ ) a dolním povrchu ( $d/2$ ) a nastavením hodnot pro pevnou desku na hodnoty pro zatížení kapalinou dostaneme matici  $\mathbf{A}$ , která je řešením následující rovnice

$$[\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} \Lambda_{L+} \\ \Lambda_{L-} \\ \Lambda_{S+} \\ \Lambda_{S-} \\ \Lambda_{liq1} \\ \Lambda_{liq2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \Big|_{x_3=d/2} \\ u_2 \Big|_{x_3=-d/2} \\ \sigma_{22} \Big|_{x_3=d/2} \\ \sigma_{22} \Big|_{x_3=-d/2} \\ \sigma_{12} \Big|_{x_3=d/2} \\ \sigma_{12} \Big|_{x_3=-d/2} \end{Bmatrix}\tag{5.11}$$

kde  $\mathbf{A}$  je,

$$\begin{array}{ccccc}
-\zeta_1 \sin(\zeta_1 d/2) & \zeta_1 \cos(\zeta_1 d/2) & -i\xi \cos(\zeta_2 d/2) & -i\xi \sin(\zeta_2 d/2) & 0 \\
-\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & i\gamma e^{i\gamma d/2} \\
-\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_1 d/2) & -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_1 d/2) & 2i\mu\xi\zeta_2 \sin(\zeta_2 d/2) & -2i\mu\xi\zeta_2 \cos(\zeta_2 d/2) & 0 \\
-\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & \omega^2 \rho_L e^{i\gamma d/2} \\
-2i\mu\xi\zeta_1 \sin(\zeta_1 d/2) & 2i\mu\xi\zeta_1 \cos(\zeta_1 d/2) & -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_2 d/2) & -\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_2 d/2) & 0 \\
-\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & -\Lambda_{11} & 0
\end{array} \tag{5.12}$$

Rovnice (5.11) je splněna, pokud je determinant matice  $\mathbf{A}$  nulový. Před řešením determinantu můžeme pro urychlení výpočtu separovat matici  $\mathbf{A}$  do dvou submatic. Sečtení a odečtení různých řádků a sloupců a dělení parciálních vlnových amplitud v kapalných poloprostorech společným faktorem  $e^{i\gamma d/2}$  vede na následující submatice:

$$\begin{vmatrix}
\zeta_1 \sin(\zeta_1 d/2) & i\xi \sin(\zeta_2 d/2) & i\gamma \\
\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_1 d/2) & 2i\mu\xi\zeta_2 \cos(\zeta_2 d/2) & -\omega^2 \rho_L \\
2i\mu\xi\zeta_1 \sin(\zeta_1 d/2) & \mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_2 d/2) & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{5.13}$$

a

$$\begin{vmatrix}
\zeta_1 \cos(\zeta_1 d/2) & i\xi \cos(\zeta_2 d/2) & -i\gamma \\
\mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_1 d/2) & 2i\mu\xi\zeta_2 \sin(\zeta_2 d/2) & -\omega^2 \rho_L \\
2i\mu\xi\zeta_1 \cos(\zeta_1 d/2) & \mu(\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_2 d/2) & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{5.14}$$

které představují symetrické a antisymetrické řešení charakteristických rovnic. Tyto matice řádu 3 lze vyřešit, obdržíme standardní Lambovy vlnové rovnice s jedním dodatečným členem. Řešení pro symetrické módy:

$$\begin{aligned}
& (\zeta_2^2 - \xi^2) \cos(\zeta_1 d/2) \sin(\zeta_2 d/2) + 4\xi^2 \zeta_1 \zeta_2 \sin(\zeta_1 d/2) \cos(\zeta_2 d/2) \\
& - i \frac{\rho_L \zeta_1 k_S^4}{\rho_S k_{tliq}} \sin(\zeta_1 d/2) \sin(\zeta_2 d/2)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

a pro antisymetrické módy:

$$\begin{aligned}
& (\zeta_2^2 - \xi^2) \sin(\zeta_1 d/2) \cos(\zeta_2 d/2) + 4\xi^2 \zeta_1 \zeta_2 \cos(\zeta_1 d/2) \sin(\zeta_2 d/2) \\
& + i \frac{\rho_L \zeta_1 \omega^4}{\rho_S \gamma c_2^4} \cos(\zeta_1 d/2) \cos(\zeta_2 d/2)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Tyto výrazy lze použít namísto metody globální matice k výpočtu disperzních křivek pro jednovrstvou desku obklopenou kapalinou nebo vakuem. Poněvadž symetrické a antisymetrické módy spolu nejsou nijak svázány, je řešení stabilnější (a rychlejší) než u obecných technik řešení. Ačkoliv tato technika poskytuje analytický tvar pro charakteristickou rovnici, platné kombinace frekvence, vlnového čísla a útlumu se musí stále hledat iteračně stejnými technikami, jaké se používají, když je charakteristická rovnice vypočtena pomocí globální matice.

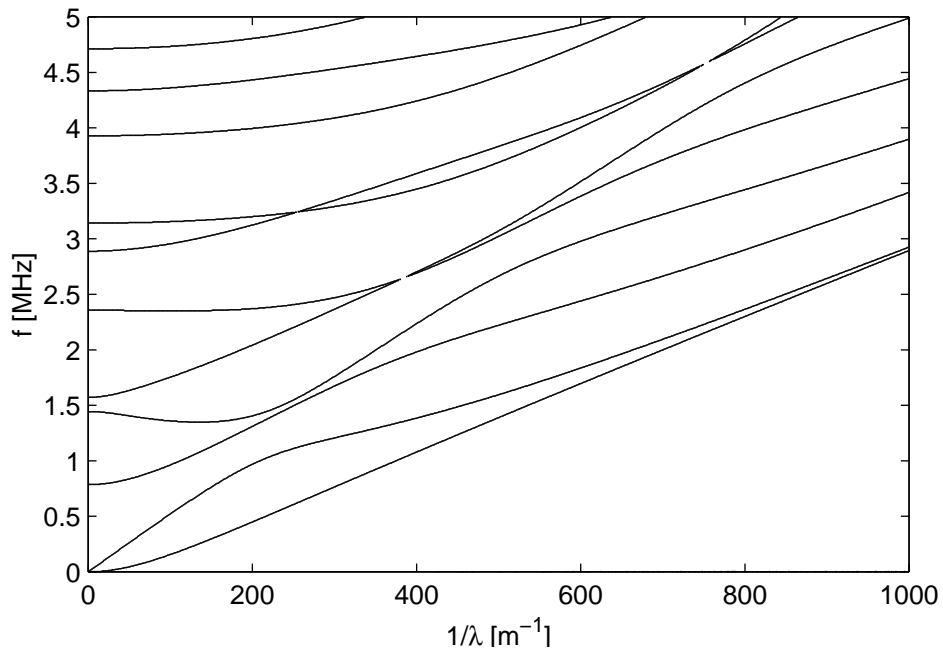
## 6 Ukázky výpočtů disperzních křivek

Metodou přenosové matice (TMM) a metodou globální matice (GMM) byly vypočteny disperzní křivky pro 2 mm silnou ocelovou desku umístěnou ve vakuu (vzduchu). Frekvenční rozsah byl 5 MHz a rozsah vlnového čísla byl  $6000 \text{ m}^{-1}$ .

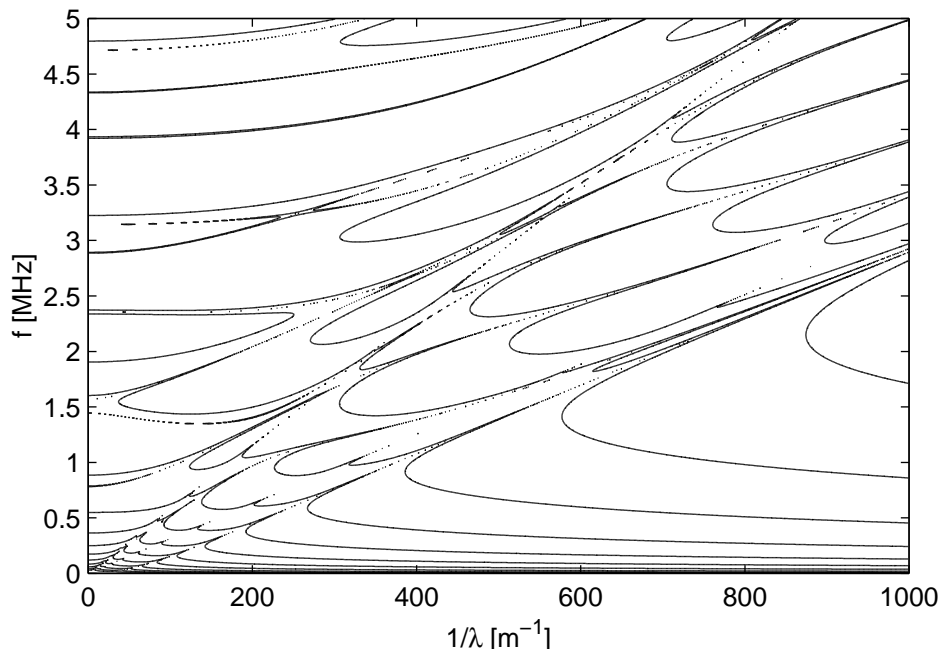
Výpisy programů v MATLABu jsou uvedeny v kapitole 9.1 a 9.2. Vstupní soubor pro tyto programy je uveden v kapitole 9.3.

Na obrázku 6.1 je uveden výsledek výpočtu disperzních křivek metodou přenosové matice. Na obrázku jsou vyneseny vrstevnice hodnot charakteristické funkce systému (3.11). Vrstevnice jsou vyneseny pro dvě hodnoty v těsném okolí nuly, tedy tak aby odpovídaly hledaným disperzním křivkám.

Na obrázku 6.2 je uveden výsledek výpočtu disperzních křivek metodou globální matice. Na obrázku jsou vyneseny vrstevnice logaritmu absolutní hodnoty charakteristické funkce systému (4.7), neboť charakteristická funkce systému je při výpočtu metodou globální matice komplexní. Hledaným disperzním křivkám odpovídají jednotlivá údolí.



Obrázek 6.1: Disperzní křivky metodou přenosové matice.



Obrázek 6.2: Disperzní křivky metodou globální matice.

# 7 Přehled často používaných vztahů

## 7.1 Vztahy pro rychlosti a vztahy mezi materiálovými konstantami

Rychlost longitudinální objemové vlny ( $c_1$ ) lze pomocí Laméových konstant ( $\lambda$  a  $\mu$ ) nebo Youngovým modulem ( $E$ ) a Poissonovým číslem ( $\nu$ ) vyjádřit vztahem

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$$

a příčnou objemovou rychlost ( $c_2$ ) lze vyjádřit vztahem

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Rychlost Rayleighových vln lze určit nalezením kořenů následujícího polynomu:

$$T^3 - 8T^2 + (24 - 16R)T - 16(1 - R) = 0,$$

kde  $T = (c_R/c_2)^2$  a  $R = (c_2/c_1)^2$

## 7.2 Vztahy pro napětí a přetvoření

$$\sigma_{11} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = \mu\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{23} = \mu\varepsilon_{23}$$

$$\sigma_{13} = \mu\varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

## 8 Vlastnosti materiálů

Následuje tabulace některých běžných materiálových vlastností. Většina informací je převzata z literatury ([KK83], [KL95] a [Aul90]). Prosím, povšimněte si, že tyto hodnoty jsou sebrány z několika zdrojů a mohou být proto nekonzistentní. U některých materiálů jsou uvedeny rozsahy možných hodnot. Pokud není u materiálu uvedena hodnota útlumu, pak není pro tento materiál známa. Hodnoty příčného útlumu ( $\alpha_S$ ) nejsou v této tabulce zahrnuty, neboť se v literatuře uvádějí velice vzácně. Hodnota příčného útlumu je obecně několikanásobně větší než hodnota longitudinálního útlumu.

Název	Hustota ( $kg/m^3$ )	$c_1$ (m/s)	$c_2$ (m/s)	$\alpha$ ( $np/\lambda$ )
KOVY				
Hliník	2700	6320	3130	0.0003
Vizmut	9800	2180	1100	
Kost, tibia	1900	4000	1970	0.64
Mosaz	8400	4400	2200	
Kadmium	8600	2780	1500	
Litina	6900-7300	3500-5800	2200-3200	
Konstantan	8800	5240	2640	
Měď	8900	4700	2260	
Zlato	19300	3240	1200	
Ocel	7700	5960	3260	0.003
Olovo	11400	2160	700	
Hořčík	1700	5770	3050	
Mangan	8400	4660	2350	
Rtuť	13600	1450	-	
Nikl	8800	5630	2960	



Platina	21400	3960	1670	
Stříbro	10500	3600	1590	
Cín	7300	3320	1670	
Wolfram	19100	5460	2620	
Zinek	7100	4170	2410	
NEKOVOY				
Oxid hliníku	3600-3950	9000-11000	5500-6500	
Beton	2200	3900-4700	2300	0.2
Epoxy	1100-1250	2400-2900	1100	0.03
Tuk	920	1450	-	0.008
Sklo,	3600	4260	2560	
Sklo,	2500	5660	3420	
Led	900	3980	1990	
Parafínový vosk	830	2200	-	
Akrylová pryskyřice (Perspex)	1180	2730	1430	0.06
MDPE	950	2300	950	0.03 ( $\alpha_S = 0.15$ )
Neoprén	-	1690	-	0.15
Nylon	1100	2200	1100	0.007
Polystyrén	1060	2350	1150	0.02
Porcelán	2400	5600-6200	3500-3700	
Křemenné sklo	2600	5570	3520	
Kámen	2500-4400	1500-2500	-	
Guma, měkká	900	1480	-	0.6
Guma, vulkanizovaná	1200	2300	-	
Kůže	1110	1730	-	0.023
Zub (sklovina)	2900-3000	4500-6250	-	0.2
Teflon	2200	1350	550	0.12
KAPALINY				
Glycerin	1260	1920	-	
Jodid methylenu	3230	980	-	
Motorová nafta	800	1250	-	
Motorový olej	870	1740	-	
Voda	1000	1483	-	

# 9 Výpisy programů

## 9.1 Výpočet disperzních křivek metodou přenosové matice

```
% === INPUT =====

fid=fopen('disperse.dat','r');
A=fscanf(fid,'%g');
fclose(fid);

n=A(1); % pocet vrstev
ro(1)=A(2); a(1)=A(3); b(1)=A(4);
for layer=2:n-1,
    ro(layer)=A(5+(layer-2)*4);
    a(layer)=A(6+(layer-2)*4);
    b(layer)=A(7+(layer-2)*4);
    l(layer)=A(8+(layer-2)*4);
end
ro(n)=A(end-2); a(n)=A(end-1); b(n)=A(end);

% === END OF INPUT =====
```

```

ks=[1:10:1000]*2*pi;
os=[0.1e6:0.05e6:5e6]*2*pi;
R=zeros([length(os),length(ks)]);
index=0;
for k=ks,
    k
    for o=os,

        % === SETUP MATRIX S =====

S=eye(4);
L=zeros(4);
for layer=2:n-1,
    Ca=sqrt(o^2/a(layer)^2-k^2);
    Cb=sqrt(o^2/b(layer)^2-k^2);
    B=o^2-2*b(layer)^2*k^2;
    ga=exp(i*Ca*l(layer));
    gb=exp(i*Cb*l(layer));

    L(1,1)=b(layer)^2*k^2/o^2*(ga+1/ga)+B/(2*o^2)*(gb+1/gb);
    L(1,2)=k*B/(2*o^2*Ca)*(ga-1/ga)+k*b(layer)^2*Cb/o^2*(-gb+1/gb);
    L(1,3)=k/(2*i*o^2*ro(layer))*(ga+1/ga-gb-1/gb);
    L(1,4)=k^2/(2*i*o^2*ro(layer)*Ca)*(ga-1/ga)+Cb/(2*i*o^2*ro(layer))*(gb-1/gb);

    L(2,1)=Ca*b(layer)^2*k/o^2*(ga-1/ga)+B*k/(2*o^2*Cb)*(-gb+1/gb);
    L(2,2)=B/(2*o^2)*(ga+1/ga)+b(layer)^2*k^2/o^2*(gb+1/gb);

```

```

L(2,3)=Ca/(2*i*o^2*ro(layer))*(ga-1/ga)+k^2/(2*i*o^2*ro(layer)*Cb)*(gb-1/gb);
L(2,4)=L(1,3);

L(3,1)=i*ro(layer)*B*b(layer)^2*k/o^2*(ga+1/ga-gb-1/gb);
L(3,2)=i*ro(layer)*B^2/(2*o^2*Ca)*(ga-1/ga)+2*i*ro(layer)*b(layer)^4*k^2*Cb/o^2*(g
L(3,3)=L(2,2);
L(3,4)=L(1,2);

L(4,1)=2*i*ro(layer)*b(layer)^4*k^2*Ca/o^2*(ga-1/ga)+i*ro(layer)*B^2/(2*o^2*Cb)*(g
L(4,2)=L(3,1);
L(4,3)=L(2,1);
L(4,4)=L(1,1);

S=S*L;
end

% === END OF SETUP MATRIX S =====

f=S(3,1)*S(4,2)-S(4,1)*S(3,2);
index=index+1;
R(index)=f;
end
end

R=real(R); R(R>0)=1; R(R<0)=-1;

pcolor(ks/2/pi,os/2/pi,R), shading flat
xlabel('1/\lambda')
ylabel('f')

```

## 9.2 Výpočet disperzních křivek metodou globální matice

```
% === INPUT =====

fid=fopen('disperse.dat','r');
A=fscanf(fid,'%g');
fclose(fid);

n=A(1); % pocet vrstev
ro(1)=A(2); a(1)=A(3); b(1)=A(4);
for layer=2:n-1,
    ro(layer)=A(5+(layer-2)*4);
    a(layer)=A(6+(layer-2)*4);
    b(layer)=A(7+(layer-2)*4);
    l(layer)=A(8+(layer-2)*4);
end
ro(n)=A(end-2); a(n)=A(end-1); b(n)=A(end);

% === END OF INPUT =====

ks=[1:10:1000]*2*pi;
os=[0.1e6:0.05e6:5e6]*2*pi;
R=zeros([length(os),length(ks)]);
index=0;
for k=ks,
    k
    for o=os,
```

```

% === SETUP MATRIX S =====

S=zeros(4*(n-1));

for layer=1:n,

    Ca=sqrt(o^2/a(layer)^2-k^2);
    Cb=sqrt(o^2/b(layer)^2-k^2);
    B=o^2-2*b(layer)^2*k^2;

    if layer==1,

        Db=[
            k, -Cb;...
            -Ca, -k;...
            i*ro(layer)*B, 2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb;...
            -2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca, i*ro(layer)*B];

        S(1:4,1:2)=Db;
    end

    if layer==n,

        Dt=[
            k, Cb;...
            Ca, -k;...
            i*ro(layer)*B, -2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb;...
            2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca, i*ro(layer)*B];

        S(end-3:end,end-1:end)=-Dt;
    end

    if layer>1 & layer<n,

        ga=exp(i*Ca*l(layer));
        gb=exp(i*Cb*l(layer));

```

```

Dt=[
            k,                k*ga,...
            Cb,                -Cb*gb;...
            Ca,                -Ca*ga,...
            -k,                -k*gb;...
            i*ro(layer)*B,      i*ro(layer)*B*ga,...
            -2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb, 2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb*gb;...
            2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca,-2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca*ga,...
            i*ro(layer)*B,      i*ro(layer)*B*gb];
Db=[
            k*ga,                k,...
            Cb*gb,                -Cb;...
            Ca*ga,                -Ca,...
            -k*gb,                -k;...
            i*ro(layer)*B*ga,      i*ro(layer)*B,...
            -2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb*gb, 2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Cb;...
            2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca*ga,-2*i*ro(layer)*k*b(layer)^2*Ca,...
            i*ro(layer)*B*gb,      i*ro(layer)*B];
row_i=4*(layer-2)+1;
col_i=4*(layer-2)+3;
S(row_i :row_i+3,col_i:col_i+3)=-Dt;
S(row_i+4:row_i+7,col_i:col_i+3)= Db;
end
end

% === END OF SETUP MATRIX S =====

f=det(S);
index=index+1;

```

```
    R(index)=f;
end
end

R=log(abs(R));
pcolor(ks/2/pi,os/2/pi,R), shading flat
xlabel('1/\lambda')
ylabel('f')
```



## 9.3 Vstupní datový soubor

Oba programy, tj. výpočet disperzních křivek metodou přenosové matice i metodou globální matice, používají stejný vstupní datový soubor. Jedná se o textový soubor s následujícím formátem:

1. řádek: počet vrstev,  $N$ , (Je třeba započítat i obklopující poloprostory).
2. řádek: materiálové parametry 1. vrstvy (horního poloprostoru) v pořadí:  
hustota,  
rychlost dilatační vlny,  
rychlost příčné vlny
3. řádek: materiálové parametry 2. vrstvy v pořadí:  
hustota,  
rychlost dilatační vlny,  
rychlost příčné vlny,  
tloušťka vrstvy
- ...
- $N+1$  řádek: materiálové parametry  $N$ -té vrstvy (dolního poloprostoru) v pořadí:  
hustota,  
rychlost dilatační vlny,  
rychlost příčné vlny

Všechny parametry jsou v SI jednotkách.

Následuje ukázka obsahu vstupního souboru pro 2 mm silnou ocelovou desku umístěnou ve vakuu (vzduchu):

```
3
0 1000 1000
7850 5778 3142 0.002
0 1000 1000
```

Vzduch (vakuum) se modeluje nulovou hustotou, jako rychlosti lze zadat libovolné nenulové číslo.

# Literatura

- [AA64] D.L. Anderson and C.B. Archambeau. The anelasticity of the earth. *J. Geophys. Res.*, 69:2071–2084, 1964.
- [Abo79] A. Abo-Zena. Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 58:91–105, 1979.
- [Als70] L.E. Alsop. The leaky-mode period equation - a plane-wave approach. *Bulletin of the Seismological Society*, 60:1989–1998, 1970.
- [Aul90] B.A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids, volume 2*. Krieger Publishing Company Malabar, Florida, 1990.
- [BEPS51] K.E. Burg, M. Ewing, F. Press, and E.J. Stulken. A seismic wave guide phenomenon. *Geophysics*, 16:594–612, 1951.
- [BG85] L.M. Brekhovskikh and V. Goncharov. *Mechanics of continua and wave dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Bre80] L. M. Brekhovskikh. *Waves in layered media*. Academic Press, New York, 1980.
- [CC91] P. Cervenka and P. Challande. A new efficient algorithm to compute the exact reflection and transmission factors for plane waves in layered absorbing media (liquids and solids). *Journal of the Acoustical Society of America*, 89:1579–1589, 1991.
- [CD77] E. Clayton and G.H. Derrick. A numerical solution of wave equations for real or complex eigenvalues. *Aust. J. Phys.*, 30:15–21, 1977.
- [CH93] M. Castaings and B. Hosten. Transmission coefficient of multilayered absorbing anisotropic media. solution to the numerical limitations of the thomson-haskell method. application to composite materials. In *Proc. ULTRASONICS 93*, 1993.

- [CH94] M. Castaings and B. Hosten. Delta operator technique to improve the thomson-haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 95:1931–1941, April 1994.
- [CHT84] R.C.Y. Chin, G.W. Hedstrom, and L. Thigpen. Matrix methods in synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Soc.*, 77:483–502, 1984.
- [CN89] D.E. Chimenti and A.H. Nayfeh. Ultrasonic leaky waves in a solid plate separating a fluid and vacuum. *Journal of the Acoustical Society of America*, 85:555–560, 1989.
- [CN90a] D.E. Chimenti and A.H. Nayfeh. Ultrasonic reflection and guided wave propagation in biaxially laminated composite plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87:1409–1415, 1990.
- [CN90b] D.E. Chimenti and A.H. Nayfeh. Ultrasonic reflection and guided waves in fluid-coupled composite laminates. *J. Nondestructive Evaluation*, 9:51–69, 1990.
- [CNB82] D.E. Chimenti, A.H. Nayfeh, and D.L. Butler. Leaky rayleigh waves on a layered halfspace. *Journal of Applied Physics*, 53:170–176, 1982.
- [CWB70] M.D. Cochran, A.F. Woeber, and J.-C. de Bremaecker. Body waves as normal and leaking modes. 3. pseudo modes and partial derivatives on the (+-) sheet. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 8:321–357, 1970.
- [Dai71] A.M. Dainty. Leaking modes in a crust with a surface layer. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61:93–107, 1971.
- [DD80] F.R. DiNapoli and R.L. Deavenport. Theoretical and numerical green’s function field solution in a plane multilayered medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67:92–105, 1980.
- [Des91] M. Deschamps. L’onde plane heterogene et ses applications en acoustique lineaire. *Journal Acoustique*, 4:269–305, 1991.
- [DK89] V. Dayal and V.K. Kinra. Leaky lamb waves in an anisotropic plate. i: An exact solution and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85:2268–2276, 1989.
- [DR91] M. Deschamps and J. Roux. Some considerations concerning evanescent surface waves. *Ultrason.*, 29:283–287, 1991.
- [Dun65] J.W. Dunkin. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 55:335–358, 1965.

- [EJP57] W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, and F. Press. *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill, New York, 1957.
- [Eva86] R.B. Evans. The decoupling of seismic waves. *Wave Motion*, 8:321–328, 1986.
- [FA72] G.W. Farnell and E.L. Adler. Elastic wave propagation in thin layers. In W.P. Mason and R.N. Thurston, editors, *Physical Acoustics - principles and methods*, volume IX, pages 35–127. Academic Press, New York, 1972.
- [Fra83] G.R. Franssens. Calculation of the elasto-dynamic green’s function in layered media by means of a modified propagator matrix method. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 75:669–691, 1983.
- [Gaz59] D.C. Gazis. Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. i. analytical foundation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 31:568–578, 1959.
- [GB66] F. Gilbert and G.E. Backus. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, 31:326–332, 1966.
- [Gil64] F. Gilbert. Propagation of transient leaking modes in a stratified elastic wave guide. *Reviews of Geophysics*, 2:123–153, 1964.
- [Has53] N.A. Haskell. The dispersion of surface waves on multi-layered media. *Bulletin of the American Seismological Society*, 43:17–34, 1953.
- [HC93] B. Hosten and M. Castings. Transfer matrix of multilayered absorbing and anisotropic media. measurements and simulations of ultrasonic wave propagation through composite materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94:1488–1495, 1993.
- [Hos91] B. Hosten. Bulk heterogeneous plane wave propagation through viscoelastic plates and stratified media with large values of frequency domain. *Ultrasonics*, 29:445–450, 1991.
- [Ken83] B.L.N. Kennett. *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1983.
- [Kin76] R. Kind. Computation of reflection coefficients for layered media. *J. Geophys.*, 42:191–200, 1976.
- [Kin78] R. Kind. The reflectivity method for a buried source. *J. Geophys.*, 44:603–612, 1978.

- [KK83] J. Krautkramer and H. Krautkramer. *Ultrasonic testing of materials*. Springer-Verlag, 1983.
- [KL95] G.W.C. Kaye and T.H. Laby. *Tables of Physical and Chemical Constants*. Longman, Essex, 16 edition, 1995.
- [KM85] T. Kundu and A.K. Mal. Elastic waves in a multilayered solid due to a dislocation source. *Wave Motion*, 7:459–471, 1985.
- [KMW85] T. Kundu, A.K. Mal, and R.D. Weglein. Calculation of the acoustic material signature of a layered solid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77:353–361, 1985.
- [Kno64] L. Knopoff. A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54:431–438, 1964.
- [Kol63] H. Kolsky. *Stress waves in solids*. Dover Publications, New York, 1963.
- [Kre93] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley + Sons, inc., 1993.
- [Lam17] H. Lamb. On waves in an elastic plate. *Proc. Roy. Soc.*, 93(PT series A):114–128, 1917.
- [LC93] M. Lowe and P. Cawley. The detection of a brittle layer at the bondline in diffusion bonded titanium. In D.O. Thompson and D.E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative NDE*, pages 1653–1659. Plenum Press, New York, 1993.
- [LFL65] S.J. Laster, J.G. Foreman, and A.F. Linville. Theoretical investigation of modal seismograms for a layer over a half-space. *Geophysics*, 30:571–596, 1965.
- [Lov11] A. E. H. Love. *Some problems of geodynamics*. Cambridge University Press, London, 1911.
- [Low93] M.J.S. Lowe. *Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium*. PhD thesis, University of London, 1993.
- [Low95] M. Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control*, 42:525–542, 1995.
- [LP92] D. Lévesque and L. Piché. A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92:452–467, 1992.

- [Mal69] L.E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New York, 1969.
- [Mal88] A.K. Mal. Guided waves in layered solids with interface zones. *Int. J. Engng. Sci.*, 26:873–881, 1988.
- [Men79] W. Menke. Comment on 'dispersion function computations for unlimited frequency values' by anas abo-zena. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 59:315–323, 1979.
- [MF53] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [MK87] A.K. Mal and T. Kundu. Reflection of bounded acoustic beams from a layered solid. In D.O. Thompson and D.E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative NDE*, volume 6, pages 109–116. Plenum Press, New York, 1987.
- [MM85] D.F. McCammon and S.T. McDaniel. The influence of the physical properties of ice on reflectivity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77:499–507, 1985.
- [Nay89] A.H. Nayfeh. The propagation of horizontally polarized shear waves in multilayered anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86:2007–2012, 1989.
- [Nay91] A.H. Nayfeh. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89:1521–1531, 1991.
- [NC88a] A.H. Nayfeh and D.E. Chimenti. Propagation of guided waves in fluid-coupled plates of fiber-reinforced composite. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83:1736–1743, 1988.
- [NC88b] A.H. Nayfeh and D.E. Chimenti. Ultrasonic wave reflection from liquid-coupled orthotropic plates with application to fibrous composites. *J. Appl. Mech.*, 55:863–870, 1988.
- [NC91] A.H. Nayfeh and D.E. Chimenti. Elastic wave propagation in fluid-loaded multiaxial anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89:542–549, 1991.
- [NT90] A.H. Nayfeh and T. Taylor. Dynamic distribution of displacement and stress considerations in the ultrasonic immersion nondestructive evaluation of multilayered plates. *J. Eng. Mat. and Tech.*, 112:260–265, 1990.
- [PC91] T.P. Pialucha and P. Cawley. The reflection of ultrasound from interface layers in adhesive joints. In D.O. Thompson and D.E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative NDE*, volume 10, pages 1303–1309. Plenum, New York, 1991.

- [Phi61a] R.A. Phinney. Leaking modes in the crustal waveguide - part 1. the oceanic pl wave. *Journal of Geophysical Research*, 66:1445–1469, 1961.
- [Phi61b] R.A. Phinney. Propagation of leaking interface waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 51:527–555, 1961.
- [PHS61] F. Press, D. Harkrider, and C.A. Seafeldt. A fast convenient program for computation of surface-wave dispersion curves in multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 51:495–502, 1961.
- [Pia92] T.P. Pialucha. *The reflection coefficient from interface layers in NDT of adhesive joints*. PhD thesis, University of London, 1992.
- [Pil72] W.L. Pilant. Complex roots of the stoneley wave equation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 62:285–299, 1972.
- [Pil85] A. Pilarski. Ultrasonic evaluation of the adhesion degree in layered joints. *Mater. Evaluation*, 43:765–770, 1985.
- [Ran67] M.J. Randall. Fast programs for layered half-space problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57:1299–1316, 1967.
- [Ray85] L. Rayleigh. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.*, 17, 1885.
- [Ros60] J.H. Rosenbaum. The long-time response of a layered elastic medium to explosive sound. *Journal of Geophysical Research*, 65:1577–1613, 1960.
- [Sch47] J.G. Scholte. The range and existence of rayleigh and stoneley waves. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl.*, 5:120–126, 1947.
- [Sch70] F. Schwab. Surface-wave dispersion computations: Knopoff’s method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60:1491–1520, 1970.
- [Sch80] M. Schoenberg. Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68:1516–1521, 1980.
- [SJ85a] H. Schmidt and F. Jensen. Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments. *Computers and Maths with Applications*, 11:699–715, 1985.

- [SJ85b] H. Schmidt and F.B. Jensen. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to gaussian beam reflection at liquid-solid interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77:813–825, 1985.
- [SK70] F. Schwab and L. Knopff. Surface-wave dispersion computations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60:321–344, 1970.
- [SK71] F.A. Schwab and L. Knopff. Surface waves on multilayered anelastic media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61:893–912, 1971.
- [SK72] F.A. Schwab and L. Knopff. Fast surface wave and free mode computations. In B.A. Bolt, editor, *Methods in Computational Physics*, volume IX, pages 87–180. Academic Press, New York, 1972.
- [ST86] H. Schmidt and G. Tango. Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society*, 84:331–359, 1986.
- [Sto24] R. Stoneley. Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proc. Roy. Soc.*, 106:416–428, 1924.
- [Tho50] W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21:89–93, 1950.
- [Thr65] E.N. Thresher. The computation of dispersion of elastic waves in layered media. *J. Sound. Vib.*, 2:210–226, 1965.
- [Vik70] I. A. Viktorov. *Rayleigh and Lamb waves*. Plenum Press, New York, 1970.
- [Wat70] T.H. Watson. A note on fast computation of rayleigh wave dispersion in the multilayered elastic half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60:161–166, 1970.
- [Wat72] T.H. Watson. A real frequency complex wave-number analysis of leaking modes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 62:369–384, 1972.
- [XM87] P.C. Xu and A.K. Mal. Calculation of the inplane green’s functions for a layered viscoelastic solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77:1823–1837, 1987.