

VLASTNOSTI SPOJITÉ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE

Petr Hora*

1 Úvod

V 80-tých letech 20. století se začínají houfně objevovat práce, které se zabývají *wavelety*, *waveletovou transformací*, *waveletovými packety* apod. O co vlastně jde? Velice zjednodušeně si můžeme wavelety představit jako funkce s určitými vlastnostmi, pomocí kterých je možné popisovat (podobně jako pomocí Fourierovy trigonometrické báze) nejrůznější prostory funkcí. Vznik waveletové teorie (teorie vlnek) vychází z myšlenky použít ke konstrukci ortonormální báze daného prostoru všechny celočíselné translace a určité celočíselné (nejčastěji dyadické) dilatace jedné jediné funkce (tzv. matečného waveletu). Důležitým požadavkem kladeným na matečný wavelet je rychlý pokles v nekonečnu; existují také wavelety s kompaktním nosičem. Wavelety jsou tedy na rozdíl od sinu a kosinu lokalizovány v prostoru, což přináší výhodu řídké matice waveletových koeficientů při reprezentaci dat.

Waveletová teorie patří mezi rychle se rozvíjející metody v řadě oborů, čistou matematikou počínaje a inženýrskými aplikačními obory konče. Mezi nejpoužívanější aplikace patří:

- analýza signálů (hudba, řeč),
- komprese signálů (audio signály, video signály, statické obrazy),
- čištění signálů (restaurace starých LP desek),
- rychlé algoritmy pro maticové operace.

V předkládaném příspěvku se zaměříme pouze na první oblast, tj. analýzu signálů, a to ještě speciálně na analýzu signálů spojitou waveletovou transformací, kdy vyžadujeme maximum informací o signálu, ale bez nutnosti zpětné transformace.

*Ing. Petr Hora, CSc., Centrum diagnostiky materiálu (plzeňská pobočka Ústavu termomechaniky AV ČR), Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, e-mail: hora@ufy.zcu.cz

2 Spojitá waveletová transformace

Spojitá waveletová transformace (CWT) funkce $f(t)$ je popsána vztahem

$$(Wf)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (1)$$

kde $a > 0$ a nadtržení označuje komplexně sdruženou hodnotu. Aplikací Parsevalovy rovnosti na (1) dostáváme

$$(Wf)(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega, \quad (2)$$

kde $\hat{f}(\omega)$ označuje Fourierovu transformaci $f(t)$ definovanou

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

Funkce $\psi(t)$ se nazývá analyzující wavelet a aby byla spojitá waveletová transformace invertabilní musí $\psi(t)$ splňovat podmínku přípustnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (4)$$

Z podmínky přípustnosti vyplývá, že analyzující wavelet nemá stejnosměrnou složku, tj. $\hat{\psi}(0) = 0$. V praxi může být analyzující wavelet považován za okénkovou funkci v čase i frekvenci, pokud analyzující wavelet $\psi(t)$ resp. jeho Fourierova transformace $\hat{\psi}(\omega)$ splňuje tyto podmínky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (5)$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (6)$$

Předpokládejme, že časové okénko $\psi(t)$ má střed pro $t = 0$ a frekvenční okénko $\hat{\psi}(\omega)$ pro $\omega = \omega_0$. Funkce $\psi((t-b)/a)$ je pak rozložena okolo $t = b$ a její Fourierova transformace $a \times \exp(-ib\omega) \hat{\psi}(a\omega)$ okolo $\omega = \omega_0/a$. Z rovnic (1) a (2) je zřejmé, že $(Wf)(a, b)$ odpovídá časofrekvenční složce $f(t)$ v okolí $t = b$ a $\omega = \omega_0/a$. Jestliže jsou parametry a a b měněny nezávisle, poskytuje $b - a$ rovina (časofrekvenční rovina) distribuci každé časofrekvenční složky. Tedy CWT umožňuje časofrekvenční analýzu.

Podle vzorkovací věty je pro přiměřenou charakterizaci nízkofrekvenčních signálů vyžadováno dostatečně široké časové okénko. Naopak pro úspěšné stanovení pozice vysokofrekvenčních složek signálu na časové ose je vyžadováno dostatečně úzké časové okénko. Tyto požadavky CWT automaticky splňuje, poněvadž šířka časového okénka $\psi((t-b)/a)$ je úměrná parametru a , který je nepřímo úměrný frekvenci.

Waveletová transformace se chová jako *matematický mikroskop*, který umožňuje zkoumat signál na různých úrovních rozlišení.

2.1 Výběr analyzujícího waveletu

V literatuře je uváděno velké množství typů matečných waveletů. Konkrétní typ je dán předpokládanou aplikací. Při analýze turbulentních signálů se často používají následující matečné wavelety: Morletův, Maarův (tzv. *mexický klobouk*) a Paulův wavelet [URU96].

Morletův wavelet je používán pro analýzu pseudoperiodických signálů. Jedná se o komplexní, ve spektrální oblasti velice dobře lokalizovaný wavelet. Hůře je ovšem lokalizován v časové oblasti.

Maarův wavelet je velmi často používán pro analýzu silně nestacionárních signálů v mechanice tekutin. Vyznačuje se velmi dobrou rozlišovací schopností v časové oblasti, ovšem dosti malou ve frekvenční oblasti. Jedná se o čistě reálný wavelet a není proto schopen zahrnout do výpočtů informaci o fázi signálu. Maarův wavelet navíc vykazuje zvlnění v oblasti konstantní frekvence i amplitudy.

Paulův wavelet je co do lokalizace podobný Maarovu waveletu, je však komplexní. Vyznačuje se velmi malou rozlišovací schopností ve frekvenční oblasti.

Dále se zaměříme pouze na Morletův wavelet, který je definován vztahem

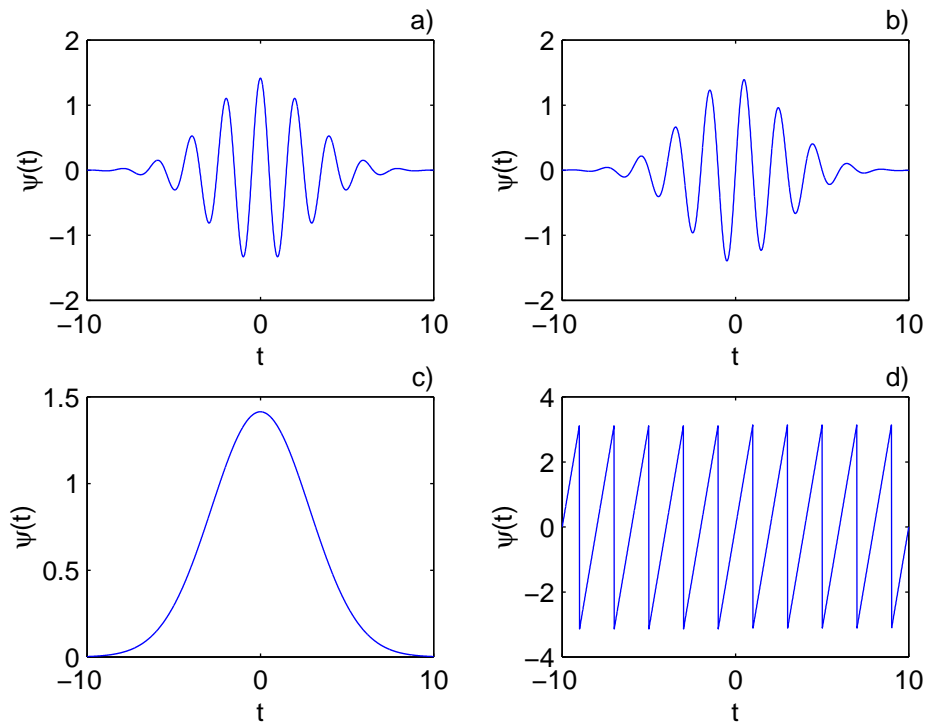
$$\psi(t) = \sqrt{2}e^{-t^2/\alpha^2} \left(e^{i\pi t} - e^{-\pi^2\alpha^2/4} \right). \quad (7)$$

Parametrem α lze nastavit požadované časofrekvenční tvarování v CWT. Na obrázku 1 je znázorněn Morletův wavelet pro $\alpha = 4$.

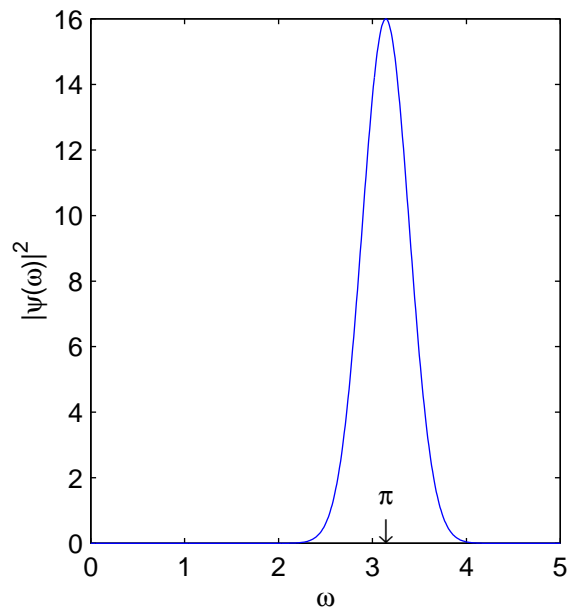
Fourierovu transformaci tohoto waveletu lze vypočítat přímo, tj.

$$\hat{\psi}(\omega) = \alpha e^{-\alpha^2(\pi^2+\omega^2)/4} \left(e^{\pi\alpha^2\omega/2} - 1 \right). \quad (8)$$

Z této rovnice je okamžitě patrné, že $\hat{\psi}(0) = 0$ a tedy podmínka přípustnosti platí. Na obrázku 2 vidíme, že se Morletův wavelet chová ve frekvenční oblasti jako komplexní pásmový filtr. Střed tohoto filtru je přibližně π rad/s (k π se blíží se zvětšujícím se parametrem α).



Obrázek 1: Morletův wavelet: a) reálná část, b) imaginární část, c) modul a d) fáze.



Obrázek 2: Výkonové spektrum Morletova waveletu.

VLASTNOSTI SPOJITÉ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE

V mnoha aplikacích se používá modifikovaná verze Morletova waveletu, kterou nazývá Sadowsky Morletovým pseudowaveletem a Kishimoto waveletem Gaborovým [KIH+95]. Jeho obecná forma je

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2 + i\omega_0 t}, \quad (9)$$

kde ω_0 je parametr, kterým může být nastaven střed waveletu na vhodný rozsah frekvencí. Obvykle se používá hodnota ω_0 v rozsahu 5 až 6.

Striktně řečeno, Morletův pseudowavelet není analyzujícím waveletem, neboť lze ukázat, že nesplňuje podmínku přípustnosti. Snadno lze vypočítat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = e^{-\omega_0^2/2} \neq 0. \quad (10)$$

Vztah (10) lze volbou ω_0 libovolně přibližovat k nule. Pro $\omega_0 = 5$ je tento integrál menší než 4×10^{-6} . Ačkoliv pseudowavelet nelze použít pro rekonstrukci signálu z jeho CWT, je docela vhodný pro časofrekvenční zobrazení signálů a je výpočetně daleko jednodušší než Morletův wavelet. Např. Fourierova transformace Morletova pseudowaveletu nabývá mnohem jednoduššího tvaru

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\omega - \omega_0)^2/2}. \quad (11)$$

2.2 Waveletová analýza základních signálů

K výpočtu CWT (pro Morletův pseudowavelet) základních signálů může být použito jak formulace v časové oblasti, vztah (1), tak formulace ve frekvenční oblasti, vztah (2).

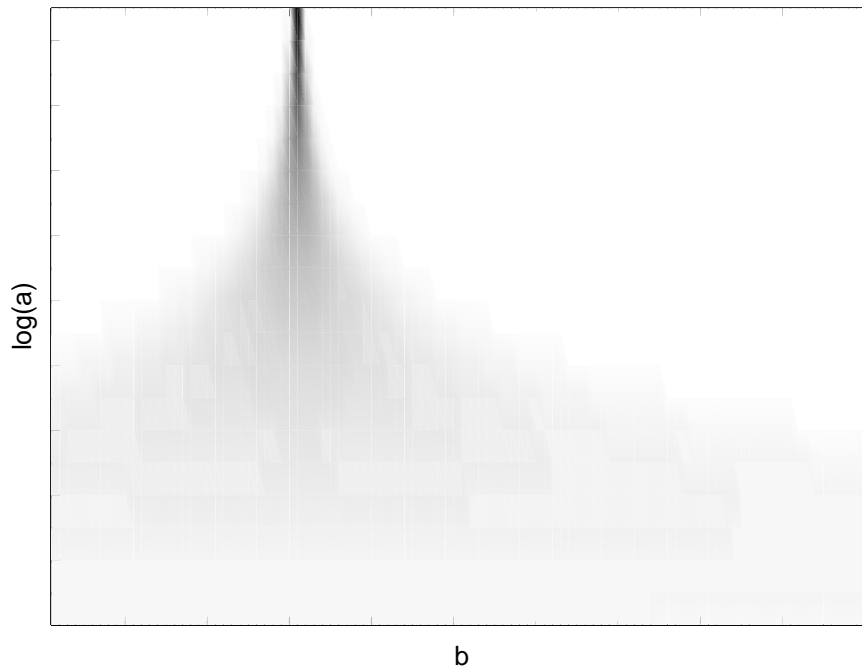
Impuls

Na obrázku 3 je zobrazena CWT impulsu, $f(t) = \delta(t - t_0)$, který se nachází asi v jedné třetině časové osy. Pro tento signál je jednodušší použít časovou formulaci a vypočítat

$$(Wf)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right). \quad (12)$$

V ideálním případě by se impuls objevil na CWT-povrchu jako vertikální hřbet. Vějířový efekt na nízkých frekvencích je výsledkem specifického tvaru Morletova pseudowaveletu.

Vertikální osa je na tomto i následujících obrázcích v logaritmickém měřítku s malými škálami (vysokými frekvencemi) nahore.



Obrázek 3: CWT impulzu.

Sinusová vlna

Pro komplexní sinusovou vlnu o frekvenci f_0 Hz, $f(t) = e^{i2\pi f_0 t}$, je jednodušší použít frekvenční vztah, kde $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - 2\pi f_0)$. Tedy

$$(Wf)(a, b) = \sqrt{2\pi a} \widehat{\psi}(2\pi a f_0) e^{i2\pi f_0 b}. \quad (13)$$

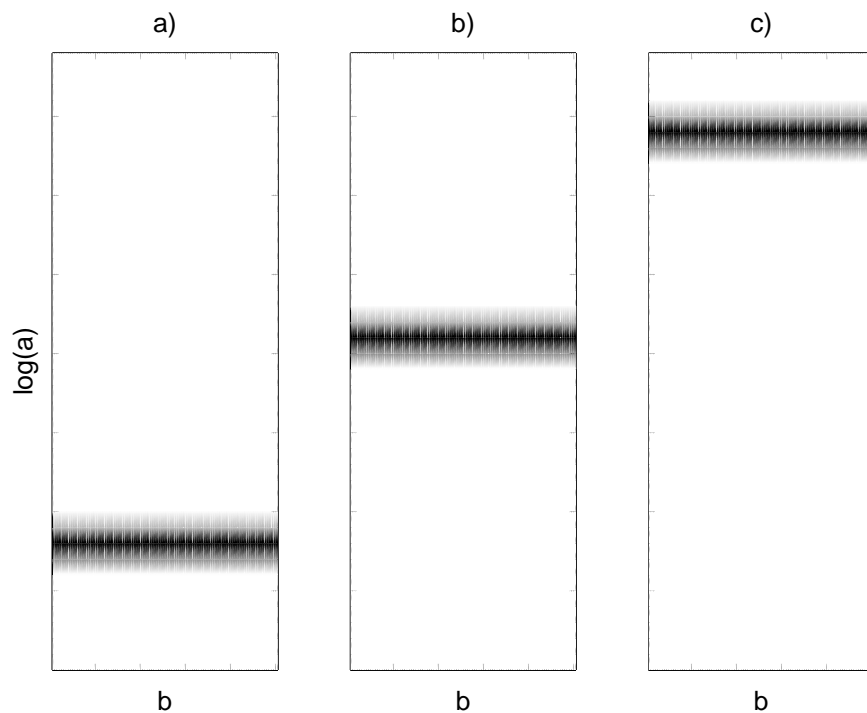
Z tohoto vztahu vyplývá, že CWT je tvořena součinem funkce závislé pouze na a a funkce závislé pouze na b . Na obrázku 4 je zobrazena CWT sinusových vln o třech různých frekvencích.

Frekvenčně modulovaný signál

Příkladem signálu s konečnou dobou trvání a s časově proměnným spektrem je lineární kmitočtově rozmítaný (*chirp*) signál; tj. signál, jehož okamžitá frekvence (derivace jeho fáze) je lineární funkcí času. Tento signál se často nazývá lineárně frekvenčně modulovaný (LFM) signál. V našem případě má LFM-signál tvar

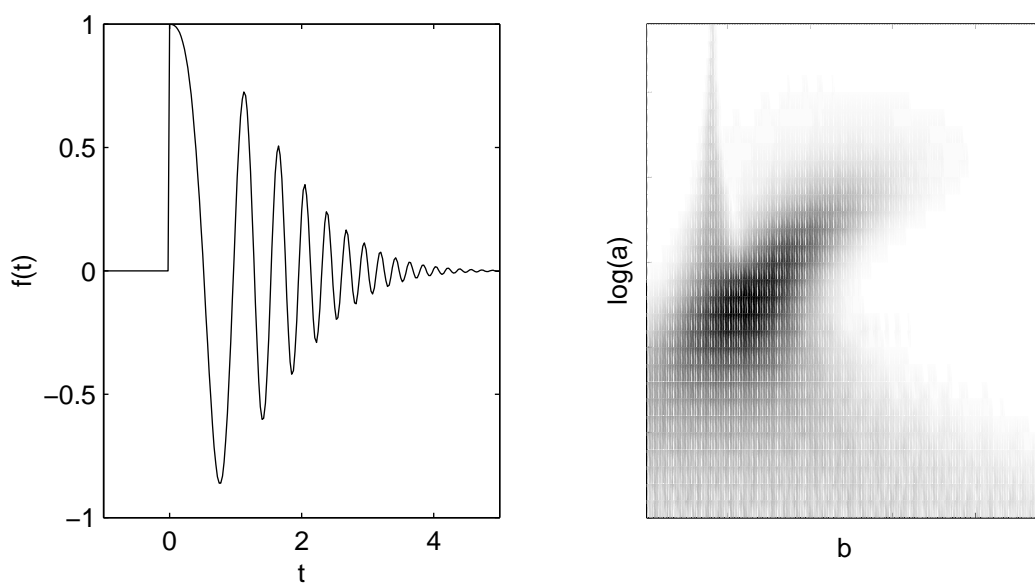
$$f(t) = e^{-\alpha t^2/2 + i\beta t^2/2 + i\gamma t}. \quad (14)$$

VLASTNOSTI SPOJITÉ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE



Obrázek 4: CWT tří různých sinusových vln.

Parametr α řídí časové trvání Gaussovy obálky, β je koeficient lineární změny frekvence a γ je počáteční frekvence. Na obrázku 5 je znázorněn LFM-signal a jeho CWT.



Obrázek 5: LFM-signal a jeho CWT.

3 Závěr

Vlastnosti spojitě waveletové transformace ji předurčují být efektivním nástrojem pro časofrekvenční analýzu turbulentních signálů. Přednosti CWT se uplatní zejména u časově nehomogenních signálů, což jsou v oblasti turbulence např. signály intermitentní povahy nebo signály obsahující singularity reprezentované rozruchy různých škál, které často bývají spojeny s koherentními strukturami.

Při aplikaci CWT na turbulentní signály zůstává stále nedořešena otázka volby matečného waveletu pro konkrétní aplikaci a interpretace výsledků.

Poděkování

Tato práce byla podporována Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č. 101/00/0674 a Pilotním projektem Ústavu termomechaniky č. PP4/76U.

Literatura k waveletům

- [BCR91] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin. Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I. Comm. Pure Appl. Math., 44:141-183, 1991.
- [CK96] A. Cohen, J. Kovasevic. Wavelets: The mathematical background. Proceedings of the IEEE, 84(4):514-522, 1996.
- [Chu92a] C. K. Chui. Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications. Academic Press, 1992.
- [Chu92b] C. K. Chui. An Introduction to Wavelets. Academic Press, 1992.
- [DFN+93] P. Duhamel, P. Flandrin, T. Nishitani, A. H. Tewfik, M. Vetterli. Guest Editor Introduction Wavelets and Signal Processing. IEEE transaction on signal processing, 41(12):3213-3215, 1993.
- [Dau92] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF, 1992.
- [Dau96] I. Daubechies. Where do wavelets come from? A - Personal point of view. Proceedings of the IEEE, 84(4):510-513, 1996.
- [GMM97] P. D. Gersem, B. D. Moor, M. Moonen. Applications of the continuous wavelet transform in the processing of musical signals. In: Proceedings DSP 97, Cat. No. 97TH8306, [Digital Signal Processing. Santorini /Greece/, 97.07.02-97.07.04], pages 563-566. 1997. New York : IEEE.
- [HN99] P. Holman, K. Najzar. Wavelets. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 44(4): 294-303, 1999.

- [HW96] N. Hess-Nielsen, M. V. Wickerhauser. Wavelets and time-frequency analysis. Proceedings of the IEEE, 84(4):523-540, 1996.
- [Hor96] P. Hora. Waveletová analýza. - I. Teoretický úvod. Technická zpráva, 144VP, ÚFY FAV, Plzeň, 1996.
- [KIH+95] K. Kishimoto, H. Inoue, M. Hamada, T. Shibuzy. Time frequency analysis of dispersive waves by means of wavelet transform. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 62(4):841-846, 1995.
- [Kai94] G. A. Kaiser. A Friendly Guide to Wavelets. Birkhäuser, 1994.
- [LF98] W. C. Lang, K. Forinash. Time-frequency analysis with the continuous wavelet transform. Am. J. Phys., 66(9):794-797, 1998.
- [MW92] S. Mallat, W. L. Whang. Singularity Detection and Processing with Wavelets. IEEE Trans. Inform. Theory, 38:617-643, 1992.
- [RBC+92] M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael. Wavelets and their Applications. Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- [RV95] O. Rioul, M. Vetterli. Wavelets and signal processing. IEEE Signal Processing Magazin:14-38, October 1995.
- [Swe96] W. Sweldens. Wavelets: What next? Proceedings of the IEEE 84, 84(4):680-685, 1996.
- [TC98] C. Torrence, G. P. Compo. A practical guide to wavelet analysis. Bulletin of the American Meteorological Society, 79(1):61-78, 1998.
- [Uru97] V. Uruba. Waveletová analýza intermitence. Seminář: "Aktuální problémy mechaniky tekutin '97", s. 41-42. 1997. ÚT AV ČR.
- [VH92] M. Vetterli, C. Herley. Wavelets and Filter Banks : Theory and Design. IEEE Trans. Signal Process., 40:2207-2232, 1992.
- [XZ93] X.-G. Xia, Z. Zhang. On Sampling Theorem, Wavelets, and Wavelet Transforms. IEEE transactions on signal processing, 41(12):3524-3535, 1993.

Literatura k waveletům v turbulenci

- [AAB+98] A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis: Application to fully developed turbulence data and DNA sequences. Physica A, 254:24-45, 1998.
- [FKP+96] M. Farge, N. Kevlahan, V. Perrier, E. Goirand. Wavelets and turbulence. Proceedings of the IEEE, 84(4):639-669, 1996.
- [FS96] J. Frölich, K. Schneider. Numerical simulation of decaying turbulence in an adaptive wavelet basis. Applied and Computational Harmonic Analysis, 3:393-397, 1996.

[FS97] J. Frölich, K. Schneider. Numerical simulation of coherent structures in turbulent flows using an adaptive wavelet basis. *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik*, 77(S2):S553-554, 1997.

[Uru96] V. Uruba. Použití waveletové transformace při analýze turbulentních signálů. *Inženýrská mechanika '96. - Žďár n. Sázavou : národní konference s mezinárodní účastí, Svratka*, s. 103-108. 1996. ÚT AVČR.

Odkazy na internet

<http://www.wavelet.org/wavelet/index.html>

<http://www.amara.com/current/wavelet.html>

<http://www.wavelet.org/>

<http://stat.stanford.edu/~wavelab>

<http://www.wavbox.com>

<http://www.mathworks.com>

<http://www.maplesoft.com>

<http://www.mathematica.com>