Tlustá deska - inverzní úloha

Petr HORA, Jiří PÁTEK
ITS ZČU, Plzeň

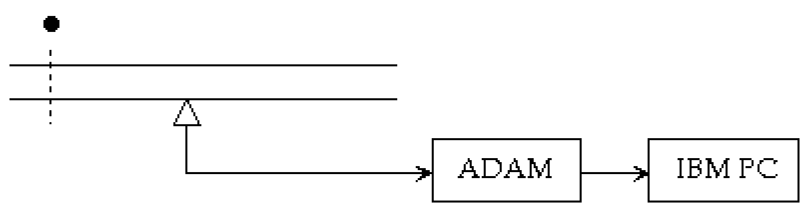
This paper considers the inverse problem of a point source of elastic waves in a thick plate. Determination of the source function follows from application of a direct inverse method. The inversion has been carried out with the time-domain signals. Results have been obtained with the direct substitution method, the least-square inversion method and the regularization method. Examples are shown in which the time dependence of a source is recovered from measured waveforms.

Key words: inverse method, transient elastic waves

1. Úvod

Koncentrovaná síla působící kolmo na povrch nekonečné tlusté desky po konečnou dobu vyvolá transientní vlnový pohyb. Jestliže je znám časový průběh této působící síly, může být vypočtena odezva v blízkém poli metodou zobecněných paprsků [HOR92] a odezva ve vzdáleném poli metodou vlastních tvarů [VAL84]. Tento článek popisuje metody pro řešení inverzního problému, tj. určit časovou závislost působící koncentrované kolmé síly z naměřeného transientního signálu vertikálního posuvu.

V našem případě jsme za zdroj koncentrované kolmé síly považovali ráz malé ocelové kuličky (průměr kuličky byl 5 mm, hmotnost 447 mg a kulička byla spouštěna z výšky 56 mm). Odezvu tlusté desky (tloušťka 50 mm) jsme snímali v 11 místech na horním povrchu desky (10, 15, 20, ..., 60 cm od místa dopadu kuličky) a ve 13 místech na dolním povrchu desky (0, 5, 10, ..., 60 cm od epicentra buzení) širokopásmovým nerezonančním snímačem s kuželíkovým piezoelementem. Signál ze snímače byl vzorkován 20 MHz v záznamníku transientních jevů ADAM s 10-ti bitovým rozlišením a přenášen do počítače. Schéma měření je na obr. 1. V tomto článku budeme řešit inverzní úlohu na datech z místa vzdáleného 20 cm od epicentra.



Obr. 1 Schéma měření.

Naměřený průběh vertikálního posuvu v místě 20 cm od epicentra vyvolaný rázem kuličky je uveden na obr. 2, tj. výstup systému, a teoretický, vypočtený průběh vertikálního posuvu v tomtéž místě vyvolaný koncentrovanou vertikální silou se skokovou časovou závislostí (Heaviside) je uveden na obr. 3, tj. přechodová charakteristika systému. Průběhy na obr. 2 a 3 jsou spolu svázány konvolučním vztahem

$$u(t) = r(t) * w(t) * s'(t),$$

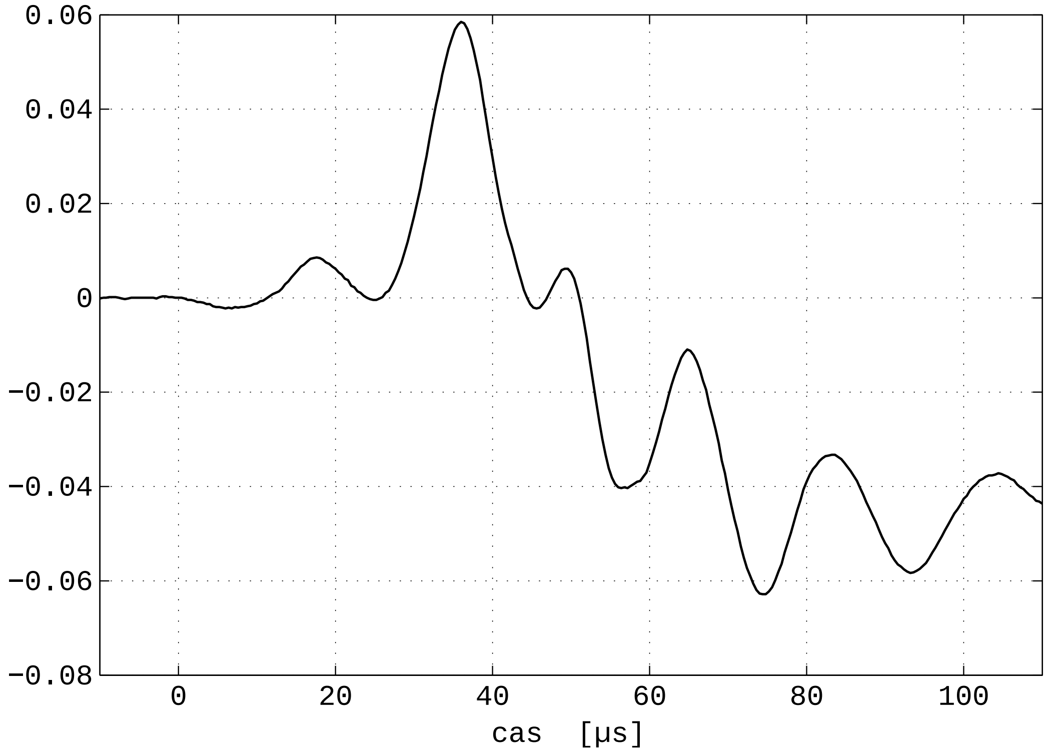
kde *u(t)* je napětí na snímači (obr. 2), *r(t)* je impulsní charakteristika snímače, *w(t)* je přechodová charakteristika systému tlusté desky (obr. 3) a *s′(t)* je časová derivace budící síly. Pokud budeme uvažovat snímač za ideální, můžeme výše uvedenou rovnici psát ve zjednodušeném tvaru

$$u(t) = w(t) * s'(t),$$

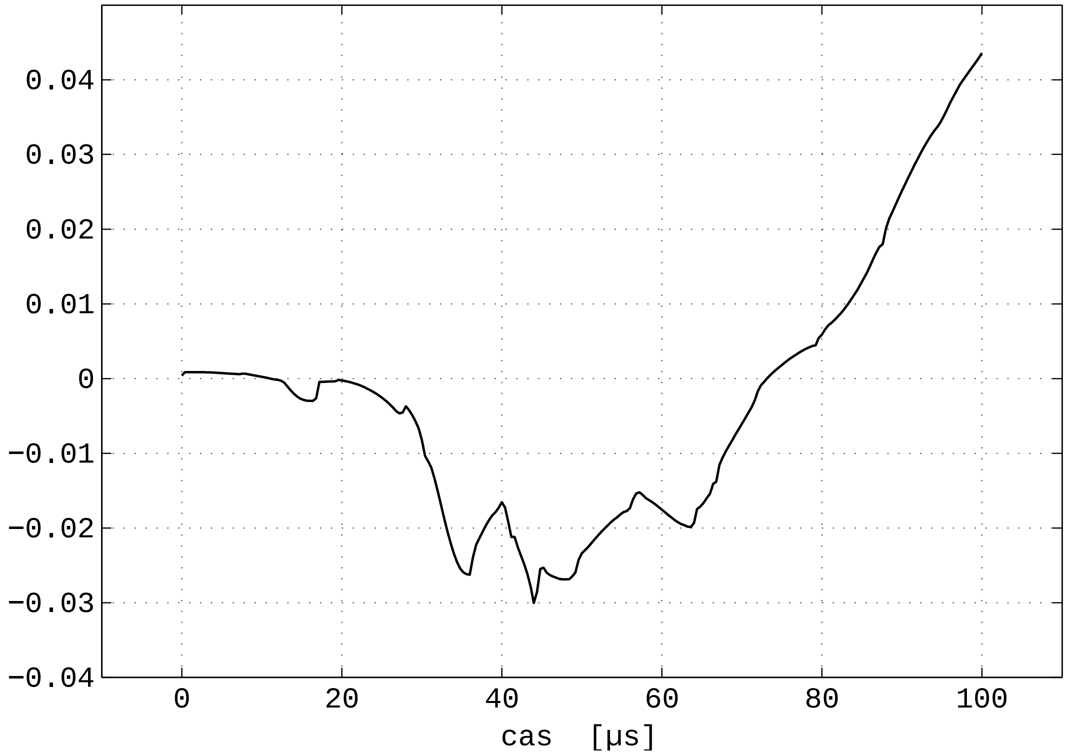
jehož integrální reprezentace je

$$u(t) = \int_0^t w(t-\tau) s'(\tau) \mathrm{d}\tau .$$

Naším úkolem je vyřešit tuto integrální rovnici pro neznámou budící sílu *s(t)*. K vyřešení tohoto inverzního problému použijeme postupně tři přímé inverzní metody: přímou substituční metodu, metodu založenou na metodě nejmenších čtverců a metodu využívající regularizační metody pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.



Obr. 2 Naměřený průběh vertikálního posuvu vyvolaný rázem kuličky.



Obr. 3 Vypočtený průběh vertikálního posuvu vyvolaný skokovou silou.

2. Přímá substituční metoda

Přímá substituční metoda - direct substitution method (DS) - je popsána např. v [KO67]. Diskretizací konvolučního integrálu dostaneme vztah pro diskrétní konvoluci

$$u_n = \Delta t \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} s_j^{'} \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

kde N je délka posloupnosti $\{w\}$ a $\{u\}$, a který představuje n lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}
u_1 &= \Delta t\left(w_1 s_1^{'}\right) \\
u_2 &= \Delta t\left(w_2 s_1^{'} + w_1 s_2^{'}\right) \\
u_3 &= \Delta t\left(w_3 s_1^{'} + w_2 s_2^{'} + w_1 s_3^{'}\right) \\
&\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n &= \Delta t\left(w_n s_1^{'} + w_{n-1} s_2^{'} + \ldots + w_2 s_{n-1}^{'} + w_1 s_n^{'}\right)
\end{aligned}$$

V maticové tvaru můžeme zapsat tuto soustavu jako

$$[W][S'] = [U] / \Delta t \,,$$

kde

$$[W]=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ w_2 & w_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ w_3 & w_2 & w_1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ w_{n-1} & w_{n-2} & \ddots & w_2 & w_1 & 0 \\ w_n & w_{n-1} & \ddots & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix},\quad [S']=\begin{bmatrix} s_1^{'} \\ s_2^{'} \\ s_3^{'} \\ \vdots \\ s_{n-1}^{'} \\ s_n^{'} \end{bmatrix},\quad [U]=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

Matice $[W]$ má tedy všechny svoje prvky na hlavní diagonále rovny w_1, prvky na příslušných diagonálách pod hlavní diagonálou jsou postupně w_2, w_3, …, w_n a prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové. Řešení výše uvedené maticové rovnice pro $[S']$ je potom

$$[S']=[W]^{-1}[U]/\Delta t$$

Lze ukázat, že $[W]^{-1}$ má stejný tvar jako $[W]$, tj.

$$[W]^{-1}=\begin{bmatrix} \overline{w}_1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \overline{w}_2 & \overline{w}_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \overline{w}_3 & \overline{w}_2 & \overline{w}_1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \overline{w}_{n-1} & \overline{w}_{n-2} & \ddots & \overline{w}_2 & \overline{w}_1 & 0 \\ \overline{w}_n & \overline{w}_{n-1} & \ddots & \overline{w}_3 & \overline{w}_2 & \overline{w}_1 \end{bmatrix}$$

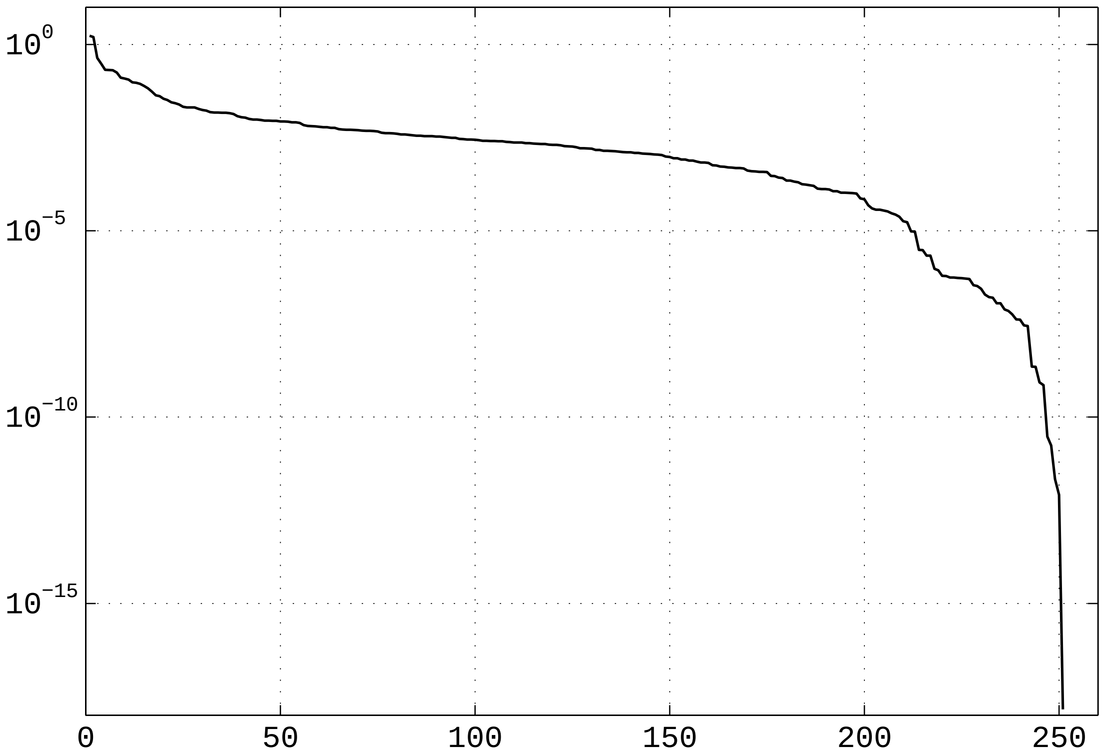
a prvky inverzní matice $\overline{w}_i$ lze vypočíst ze vztahů

$$\overline{w}_1=\frac{1}{w_1}$$

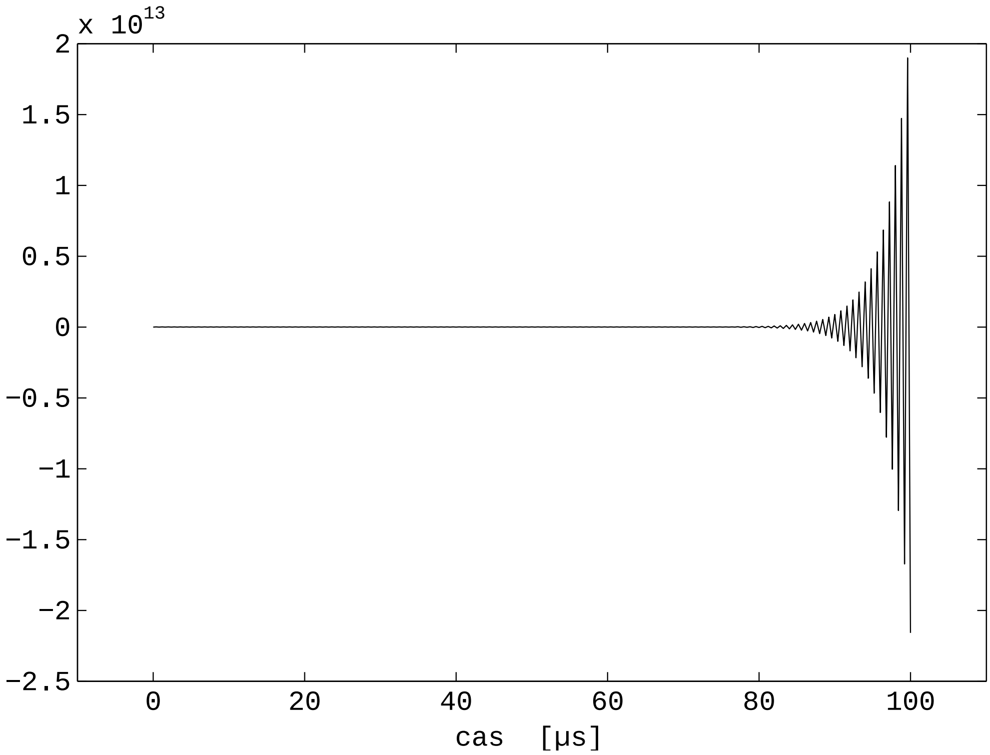
$$\overline{w}_i=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{w_{j+1}}{w_1}\overline{w}_{i-j} \qquad ;i>1$$

Jak jsme však zjistili, matice $[W]$ sestavená na základě našich dat (obr. 2 a 3) je špatně podmíněná, což dokazují také hodnoty singulárních čísel, které jsou vykresleny v logaritmickém měřítku (setříděny podle klesající velikosti) v obr. 4. Z tohoto obrázku je dále patrno, že číslo podmíněnosti (poměr největšího a nejmenšího singulárního čísla) matice $[W]$ je řádu 10^{18}.

Výsledky získané inverzí jsou proto nepoužitelné. Pro ilustraci je průběh budící síly *s(t)* získaný touto metodou uveden na obr. 5. Stejný výsledek by poskytla i funkce deconv v MATLABu, která je určena pro dekonvoluci a která je založena na metodě dlouhého dělení.



Obr. 4 Hodnoty singulárních čísel (setříděny podle klesající velikosti).



Obr. 5 Průběh budící síly *s(t)* získaný DS metodou.

3. Metoda založená na metodě nejmenších čtverců

Inverzní metoda založená na metodě nejmenších čtverců - least square inversion method (LSI) - je popsána např. v [PAO85]. Při odvozování této metody vyjdeme opět ze vztahu pro diskrétní konvoluci

$$u_n = \Delta t \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} s_j^{'} \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

kde N je délka posloupnosti $\{w\}$ a $\{u\}$. Označíme-li odhad budící síly jako $\hat{s}$ (délka posloupnosti $\{\hat{s}\}$ je K, pro které platí $K<N$), můžeme pro odhad napětí na snímači $\hat{u}$ psát

$$\hat{u}_n = \Delta t \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \hat{s}_j^{'} \; .$$

Nyní předpokládejme, že $\hat{u}$ je nejlepší diskrétní $L_2 -$ aproximace neboli aproximace metodou nejmenších čtverců, tj. můžeme psát

$$\rho_2(u, \hat{u}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (u_n - \hat{u}_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left(u_n - \Delta t \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \hat{s}_j^{'} \right)^2} = \min \; .$$

Z matematické analýzy je známo, že nutnou podmínkou pro to, aby veličina $\rho_2(u,\hat{u})$ jako funkce parametrů $\hat{s}_k^{'}$ nabývala minima, je splnění rovnic

$$\frac{\partial \rho_2(u,\hat{u})}{\partial \hat{s}_k^{'}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots 3, K$$

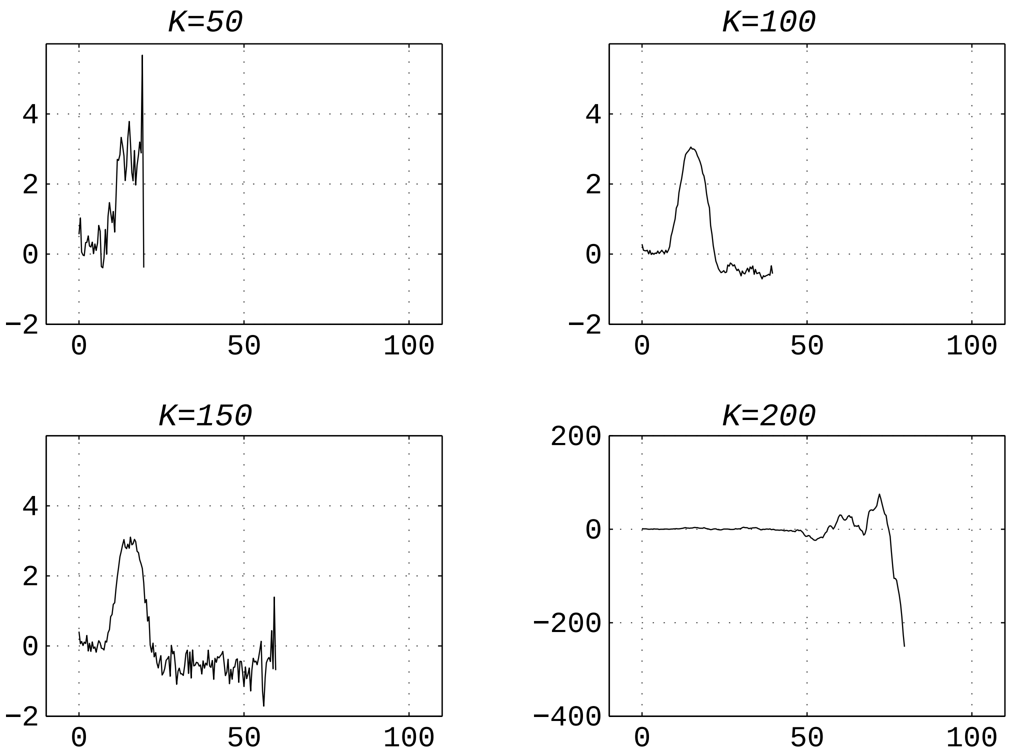
Dosadíme-li do této rovnice za $\rho_2(u,\hat{u})$ a vypočítáme parciální derivace podle $\hat{s}_k^{'}$, *k=1,2,...,K*, budou mít výše uvedené rovnice tvar

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} w_{n-k+1} w_{n-j+1} s_j^{'} = \sum_{n=1}^{N} u_n w_{n-k+1}; \quad k = 1, 2, \ldots, K \ .$$

Tato soustava *K* rovnic (*k=1,2,...,K*) může být řešena pro *K* vzorků posloupnosti $\{\hat{s}_k^{'}\}$. Při vyhodnocování sum musíme uvážit, že $\hat{s}_k^{'} = 0$ pro $n > K$ a $w_n = 0$ pro $n < 1$. Tato dekonvoluční metoda již dává použitelné výsledky, ale její nevýhodou jsou problémy s volbou délky posloupnosti $\{\hat{s}^{'}\}$, tj. stanovení čísla *K*. Zvětšování čísla *K* nepřináší vždy zvýšení přesnosti dekonvoluce. Nemáme-li předem informaci o vhodné volbě *K*, doporučují statistické úvahy [RAL78] řešit soustavu rovnic postupně pro *K*=1,2,..., počítat navíc hodnotu

$$\sigma_K^2 = \frac{\rho_2^N(u,\hat{u})^2}{N-K}$$

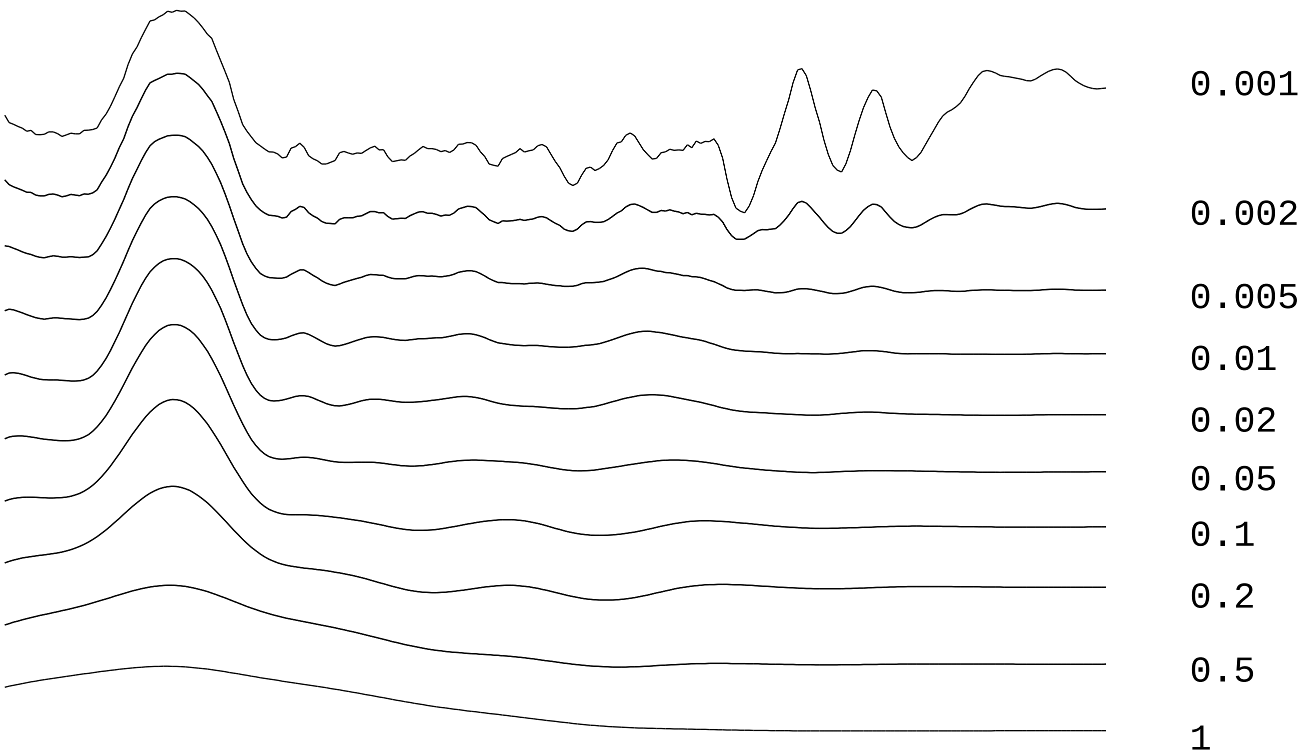
a pokračovat tak dlouho, dokud σ_k^2 s rostoucím *K* významně klesá. Hodnota *K*, po níž nenásleduje významný pokles σ_k^2, je ze statistických důvodů vhodným *K*. Průběhy budící síly získané LSI metodou pro různé hodnoty *K* jsou uvedeny na obr. 6. Z těchto průběhů je patrno, že optimální volba je v našem případě *K=100*, tj. o něco více než činí šířka budícího impulsu vyvolaného dopadem kuličky. Pokud zvolíme *K* menší (*K=50*), nestačí se budící impuls zrekonstruovat, neboť k tomu nemá dostatečný prostor. Naopak při volbě velkého *K* (*K=150*) dochází ke značnému nárůstu šumu v rekonstruovaném budícím impulsu, takže při volbě *K=200* není již výsledek naprosto použitelný.



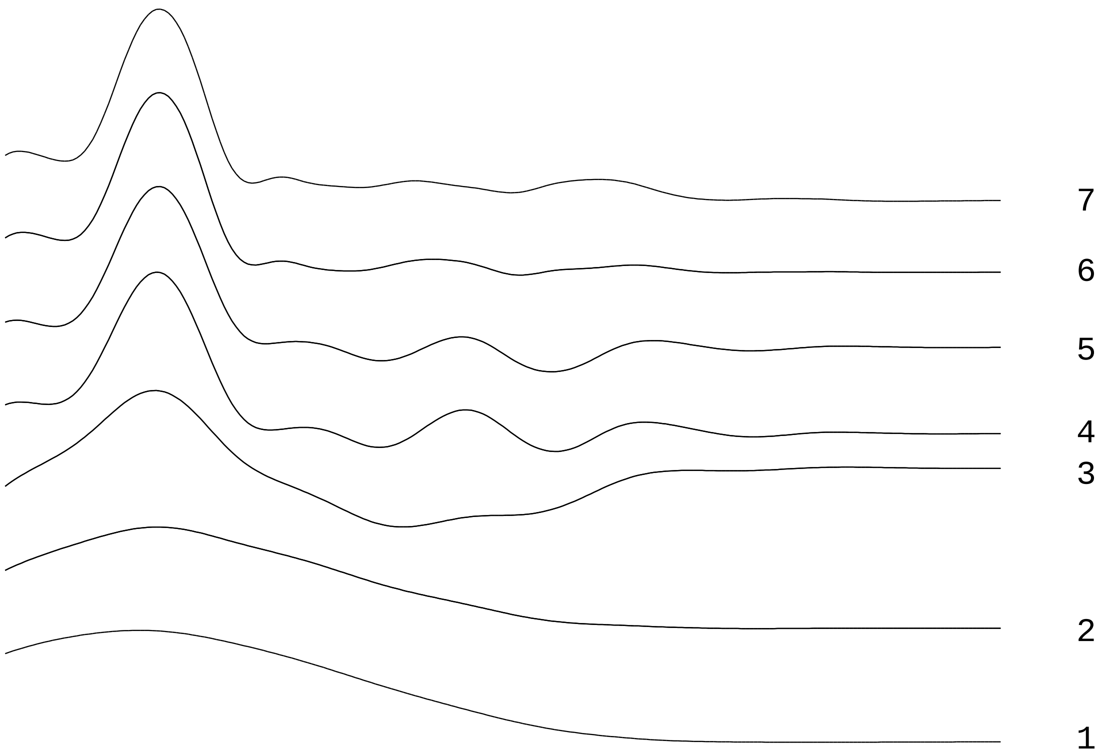
Obr. 6 Průběhy budící síly získané LSI metodou pro různé hodnoty *K*.

4. Regularizační metoda

Inverzní metoda využívající regularizační metody pro řešení špatně podmíněných diskrétních úloh - regularization method (R) - je popsána např. v [HAN92]. Při této metodě se vyjde z přímé substituční metody, ale k řešení dané soustavy rovnic se využívá regularizačních metod. Pro ilustraci zde uvedeme výsledky získané aplikací dvou regularizačních metod: Tichonovova regularizace a LSQR algoritmus. Výsledky inverzní úlohy řešené Tichonovovou regularizační metodou pro různé hodnoty regularizačního parametru jsou uvedeny na obr. 7 a výsledky získané LSQR algoritmem pro různé počty iterací jsou uvedeny na obr. 8.



Obr. 7 Průběhy budící síly získané R metodou (Tichonov) pro různé hodnoty .



Obr. 8 Průběhy budící síly získané R metodou (LSQR) pro různé počty iterací.

5. Závěr

V příspěvku jsou uvedeny metody pro řešení inverzní úlohy - určení časové závislosti budící síly z naměřeného signálu vertikálního posuvu. K vyřešení tohoto inverzního problému byly použity tři inverzní metody: přímá substituční metoda, metoda založená na metodě nejmenších čtverců a metoda využívající regularizační metody pro řešení špatně podmíněných diskrétních úloh, která se nám osvědčila nejvíce.

Jisté odchylky od předpokládaného průběhu budící síly, především podkmit za koncem impulsu, mohou být dány: charakteristikou snímače; tím, že snímač měří částečně i radiální posuv; konečnými rozměry snímače a nepřesností v geometrii. Tyto vlivy budou předmětem dalšího výzkumu.

Poděkování

Práce popsaná v tomto článku byla podporována Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č.101/94/0971 "Nové metody vyhodnocování signálů akustické emise" a uskutečněna v Institutu technologie a spolehlivosti Západočeská univerzity v Plzni.

Literatura

[HAN92] Ch. Hansen, *Regularization Tools*, Danish Computing Center for Research and Education, Lyngby, Denmark, (1992)

[HOR92] P. Hora, *Teorie zobecněného paprsku a analýza transientních vln ve vícevrstvém pevném tělese*, Výzkumná zpráva ÚTSSK ČSAV, 114VP, Plzeň, (1992)

[KO67] H.-Y. Ko & R. F. Scott, *Deconvolution techniques for linear systems*, Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.57, No.6, str.1393-1408, (1967)

[PAO85] Y.-H. Pao & J. E. Michaels, *The inverse source problem for an oblique force on an elastic plate*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 77, No. 6, str.2005-2011, (1985)

[RAL78] A. Ralston, *Základy numerické matematiky*, Academia, Praha, (1978)

[VAL84] F. Valeš, *Napjatost tlusté desky příčně nestacionárně zatížené*, Výzkumná zpráva ÚT ČSAV, Z887/84, Praha, (1984)