

# Analýza signálů akustické emise

## waveletovou transformací

Petr HORA

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd, Ústav fyzikálního inženýrství

*In this paper the wavelet transform is first compared with the more classical short-time Fourier transform approach to signal analysis. Then the algorithm for computing the discrete wavelet transform is described. Examples are shown in which the wavelet transforms both the theoretical signals and the real acoustic emission signals.*

**Key words:** wavelet, wavelet transform, multiresolution analysis, signal processing

### 1. Úvod

Pro analýzu periodických signálů jsou ideální Fourierovy řady, poněvadž harmonické bázové funkce užívané v jejich rozvoji jsou taktéž periodické. Pro analýzu neperiodických signálů, což jsou např. signály akustické emise, se často používá Fourierova integrální transformace, která je ale pro tuto analýzu nepřírozená, protože k rozvoji neperiodických signálů používá periodické funkce. V současnosti jsou možné dvě náhrady:

- okénková (krátkodobá) Fourierova transformace,
- waveletová transformace.

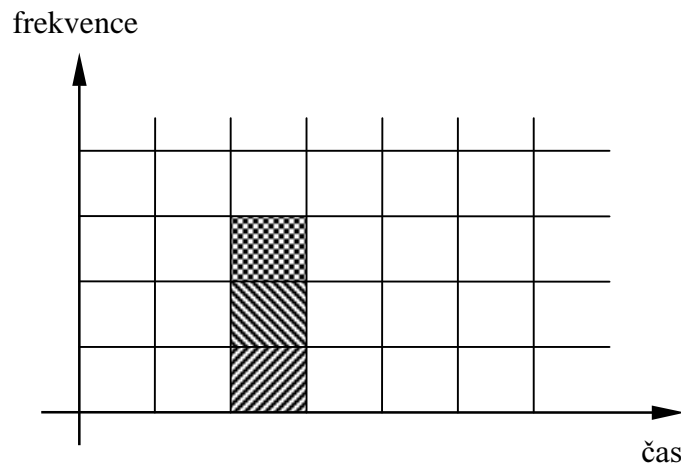
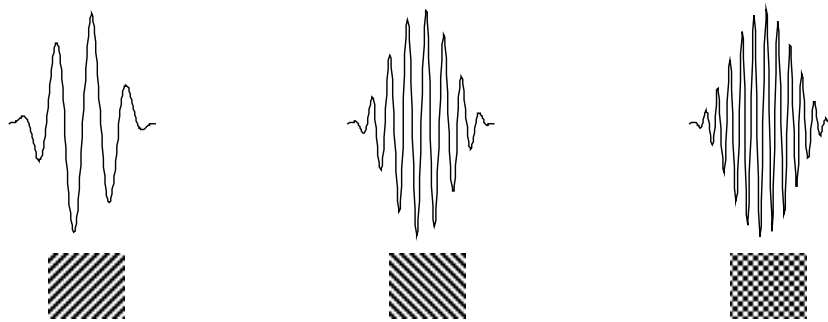
V následujících kapitolách popíšeme omezení okénkové Fourierovy transformace, jak tato omezení řeší waveletová transformace, popíšeme algoritmus výpočtu diskrétní waveletové transformace založený na multirozlišovací analýze a uvedeme příklady waveletové transformace teoretického signálu i reálného signálu akustické emise.

## 2. Okénková Fourierova transformace

Okénková Fourierova transformace (WFT) lokalizuje signál zároveň v čase i frekvenci tak, že ho pozoruje přes okénko konečné šířky, které se posouvá v čase a potom se posouvá ve frekvenci (tj. modulováno v čase). Matematicky je WFT funkce  $f$  definována jako Fourierova transformace funkce  $f_t$ , kde  $f_t$  je část signálu vyříznutého okénkem  $g$ . Tedy:

$$\tilde{f}(\omega, t) \equiv \hat{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-2\pi i \omega u} \bar{g}(u-t) f(u).$$

Značnou nevýhodou WFT je skutečnost, že se používá časové okénko stejné šířky pro všechna frekvenční pásma a že je frekvenční oblast rozdělena lineárně, což je názorně zobrazeno na následujícím obrázku.



Bázové funkce a pokrytí časo-frekvenční roviny WFT.

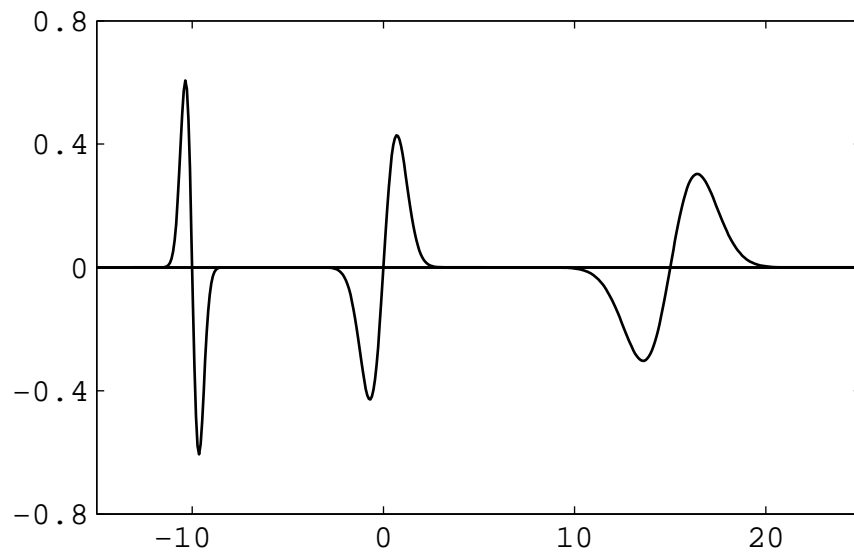
Následkem toho je jakýkoliv znak signálu, který trvá mnohem kratší dobu, než je šířka časového okénka, *podlokalizován* v čase (tj. je rozptýlen po jednotlivých frekvenčních pásmech) a jakýkoliv znak signálu, který trvá mnohem delší dobu, než je šířka časového okénka, *přelokalizován* v čase (tj. je rozptýlen po jednotlivých časových pásmech). Toto činí z WFT velice neefektivní nástroj pro analýzu chování signálů, které je buď velice rychlé nebo naopak velice pomalé vzhledem k šířce časového okénka.

### 3. Waveletová transformace

Waveletová transformace řeší problém *podlokalizování* i *přelokalizování* nahrazením modulace měřítkováním. Měřítkování je zavedeno okénkovou funkcí  $\psi$ , které se říká *matečný* nebo *základní wavelet*, od kterého jsou odvozeny všechny ostatní wavelety  $\psi_{s,t}$  pomocí dilatace/kontrakce ( $s$  - *scale*) a posunu ( $t$  - *translation*)

$$\psi_{s,t}(u) \equiv \psi_s(u-t) = |s|^{-1/2} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right)$$

Na následujícím obrázku jsou na ukázkou zobrazeny měřítkované a posunuté verze waveletu  $\psi(u) = ue^{-u^2}$ .



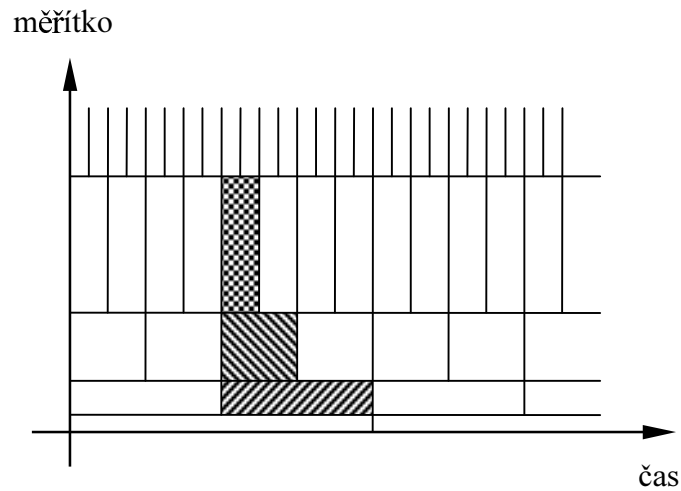
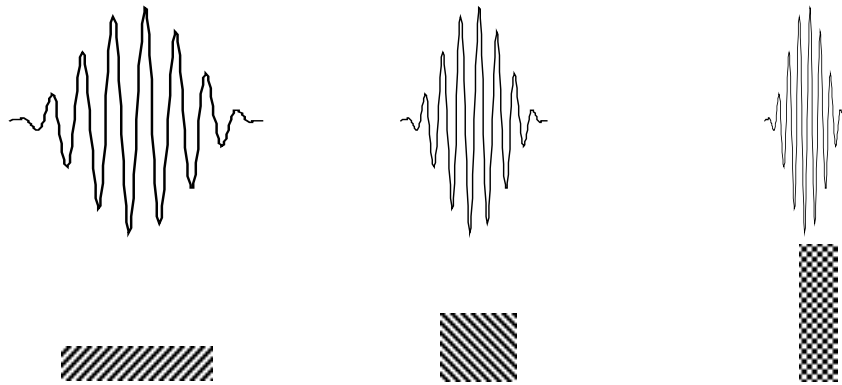
Graf  $\psi(u) = ue^{-u^2}$  (uprostřed) a jeho měřítkované a posunuté verze:

$\psi_{2,15}(u)$  (vpravo) a  $\psi_{-0.5,-10}(u)$  (vlevo).

Spojité waveletové transformace (CWT) funkce  $f(t)$  je pak definovaná jako

$$\tilde{f}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \bar{\psi}_{s,t}(u) f(u).$$

Velkou výhodou CWT je tedy skutečnost, že se pro různá frekvenční pásma používají časová okénka různých šířek pro a že je frekvenční oblast rozdělena logaritmičticky, což je názorně zobrazeno na následujícím obrázku.



Bázové funkce a pokrytí měřítko-frekvenční roviny waveletové transformace.

## Algoritmus výpočtu

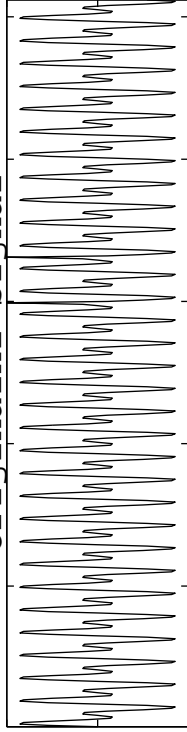
Až donedávna musela být analýza (výpočet  $\tilde{f}(s,t)$  nebo jejich diskrétních vzorků) prováděna přímým výpočtem odpovídajících integrálů. V roce 1986 byla vyvinuta zcela nová metoda pro výpočet diskrétní waveletové analýzy a syntézy známá jako *multirozlišovací analýza*. Tato metoda je rekurzivní a je proto ideální pro numerické výpočty. Začíná se s verzí signálu  $f^0 = \{f_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , který je vzorkován s časovým krokem  $\Delta t = \tau > 0$ .  $f^0$  je rozděleno na 'rozostřenou' verzi  $f^1$ , která má krok  $\Delta t = 2\tau$ , a 'detail'  $d^1$  s krokem  $\Delta t = \tau$ . Tento proces se opakuje a poskytuje posloupnosti stále více rozostřených verzí  $f^0, f^1, f^2, \dots$  a detailů  $d^1, d^2, d^3, \dots$  s krokem  $\Delta t = 2^m \tau$  pro  $f^m$  a  $d^{m-1}$ . Po  $N$  iteracích může být původní signál rekonstruován jako  $f^0 = f^N + d^1 + d^2 + \dots + d^N$ .

## 4. Příklady

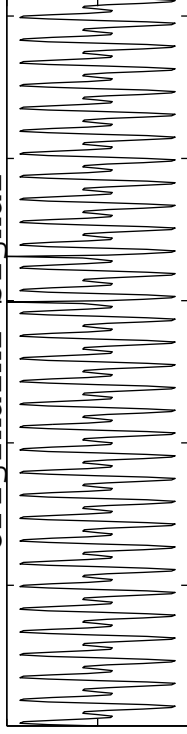
Pro ilustraci jsou na následujících dvou stránkách uvedeny příklady waveletové transformace (WT). První příklad znázorňuje WT teoretického signálu složeného ze sinusovek o frekvenci 500 a 1000 Hz, který je na dvou místech doplněn jehlovými impulsy. Druhý příklad představuje WT reálného signálu akustické emise, který byl získán při měření odezvy tenkostěnné roury na buzení lomem kapiláry, přičemž signál byl snímán miniaturním rezonančním piezokeramickým snímačem.

U obou příkladů je zobrazen graf postupného vývoje WT jak u rozostřené verze signálu, tak u detailů. Vlevo je vždy graf vývoje rozostřené verze signálu a vpravo je graf detailů. Nad grafy vývoje WT je zobrazen původní signál. Čísla na y-ové ose mají význam počtu iterací v algoritmu výpočtu WT. Maximální počet iterací je roven dvojkovému logaritmu počtu vzorků signálu; obsahuje-li signál 512 vzorků, je maximální počet iterací roven devíti.

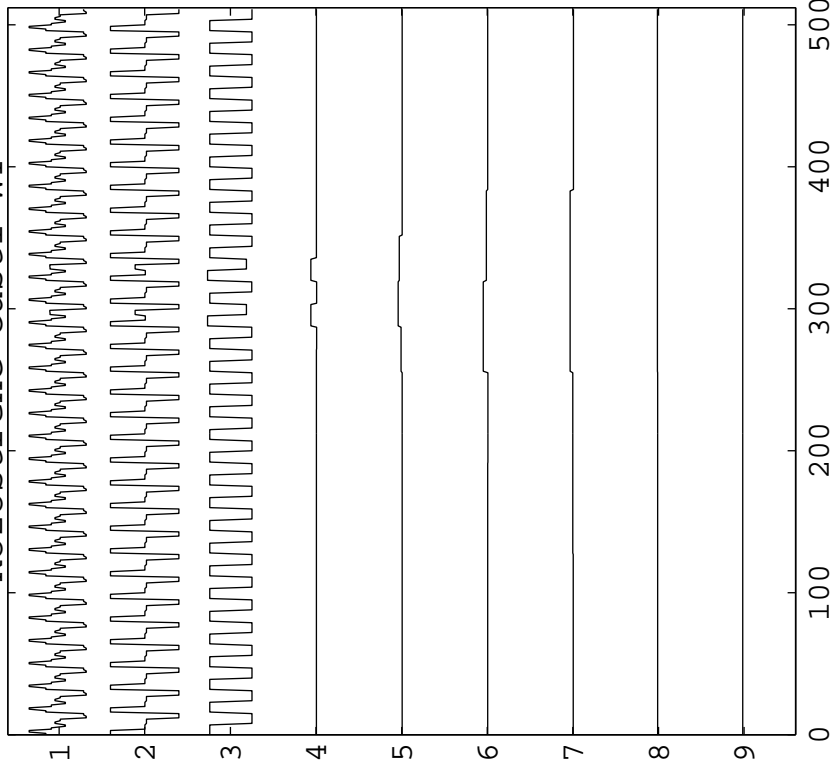
Originální signál



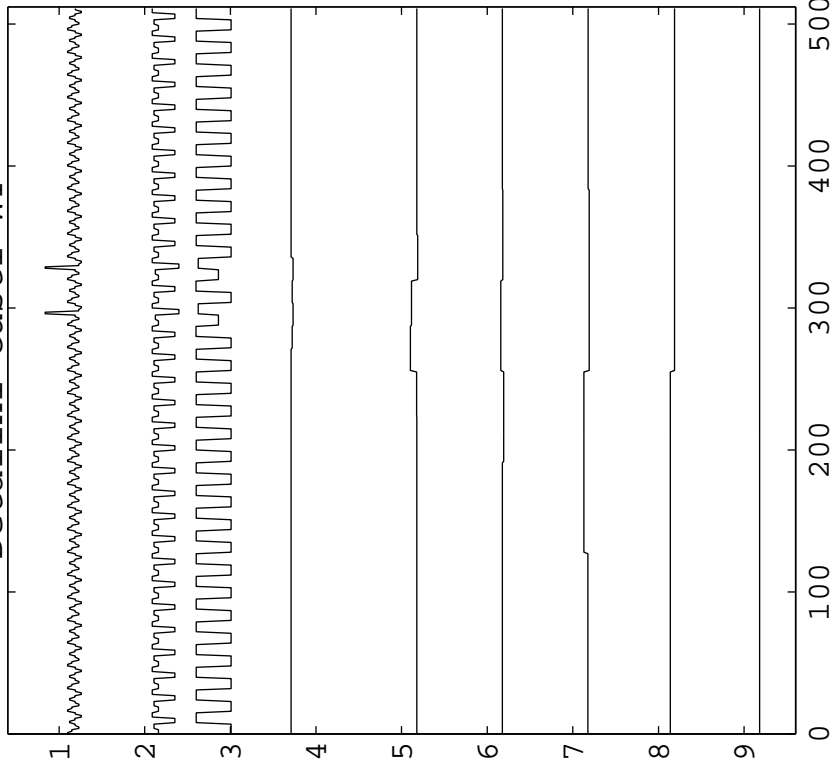
Originální signál



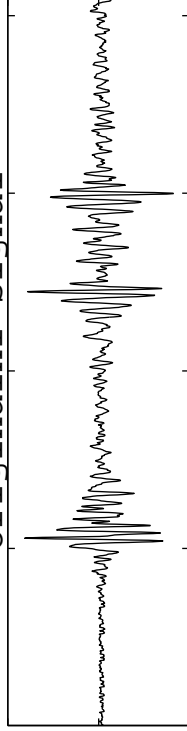
Rozostřené části WT



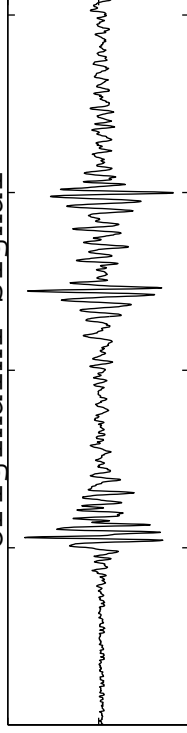
Detailní části WT



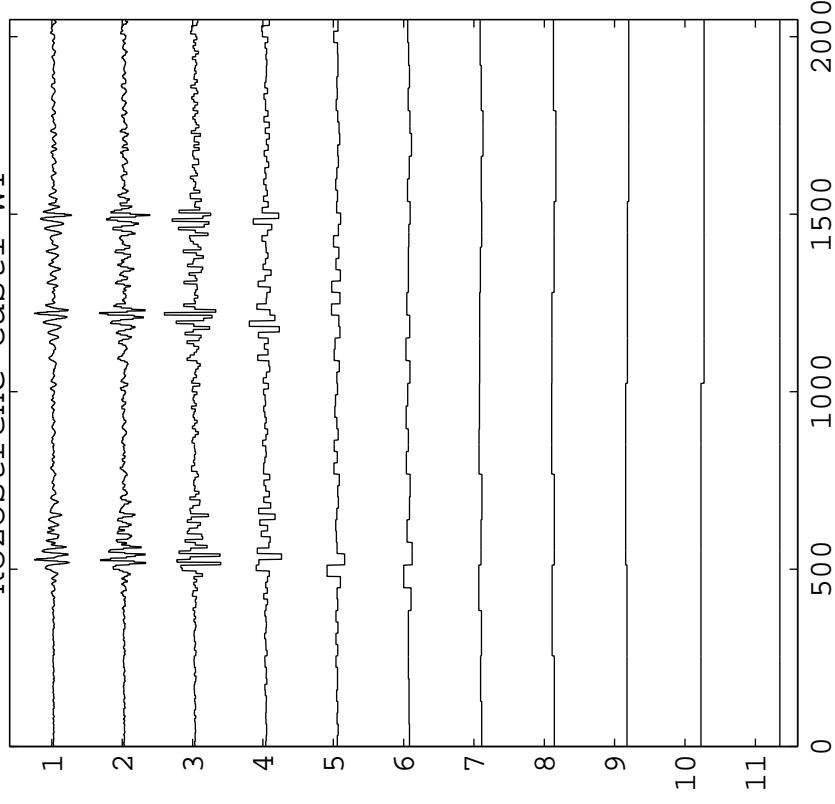
Originální signál



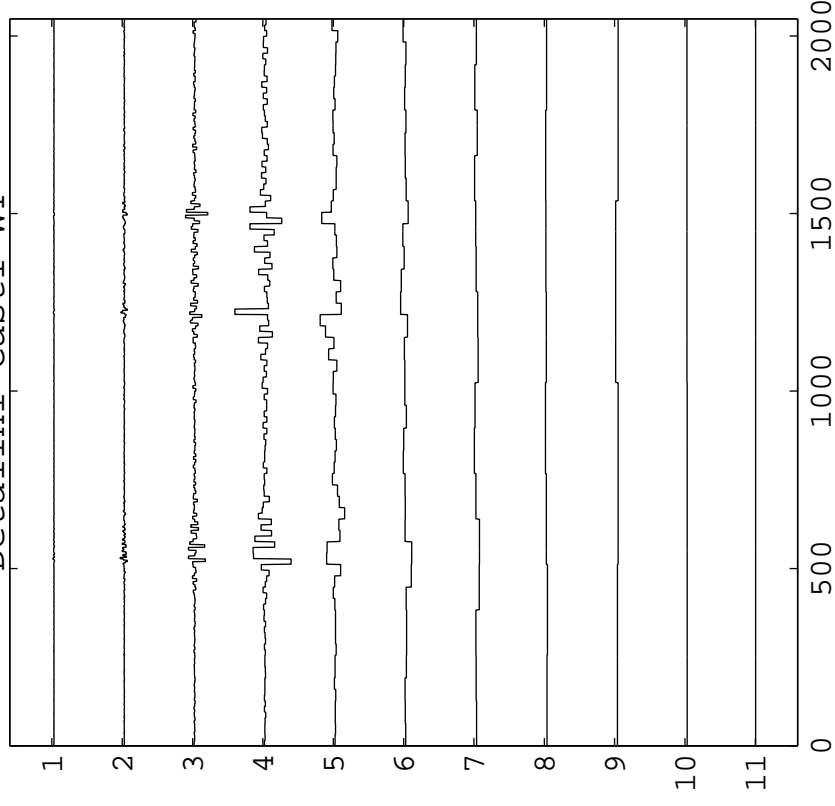
Originální signál



Rozostrené části WT



Detailní části WT



## **5. Závěr**

Waveletové transformace patří mezi rychle se rozvíjející metody v řadě oborů, čistou matematikou počínaje a inženýrskými aplikačními obory konče. Mezi nejpoužívanější aplikace patří:

- detekce nespojitostí (využívá především vynikající lokalizační vlastnosti WT)
- komprese signálů (audio signály, video signály, statické obrazy)
- rychlé algoritmy pro maticové operace

## **Poděkování**

*Práce popsaná v tomto článku byla podporována Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č.101/94/0971 "Nové metody vyhodnocování signálů akustické emise" a uskutečněna v Ústavu fyzikálního inženýrství Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.*

## **Literatura**

- [BEYL91] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin: *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*, Comm. Pure Appl. Math., Vol.44, pp.141-183, (1991)
- [DAUB92] I. Daubechies: *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF, (1992)
- [KAIS94] G. A. Kaiser: *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, (1994)
- [MALL92] S. Mallat, W. L. Whang: Singularity Detection and Processing with Wavelets, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.38, pp.617-643, (1992)
- [MART87] R. K. Martinet, J. Morlet, A. Grossmann: Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transforms, Internat. J. Pattern Recognition and Artificial Inteligence, Vol.1, pp.273-301, (1987)
- [RUSKI92] M. B. Ruskai, et al.: *Wavelets and their Applications*, Jones and Bartlett, Boston, (1992)
- [SODA94] I. Sodagar, K. Nayebi, T. P. Barnwell: Time-Varying Filter Banks and Wavelets, IEEE Trans. Signal Process., Vol.42, No.11, pp.2983-2996, (1994)
- [VETT92] M. Vetterli, C. Herley: *Wavelets and Filter Banks : Theory and Design*, IEEE Trans. Signal Process., Vol.40, pp.2207-2232, (1992)