

Použití spojitě waveletové transformace pro analýzu disperzních napěťových vln

P. Hora

Úvod

Analýza šíření vln ve strojních konstrukcích je základním předmětem v řadě inženýrských problémů, jako např. analýza odezvy konstrukce na ráz, charakterizace vibrací konstrukce, ultrazvuková identifikace materiálových vlastností apod. Napěťové vlny v tělesech mají často disperzní charakter, je tedy zapotřebí prozkoumat šíření vlny ve všech frekvencích. Z tohoto důvodu přitahuje pozornost mnoha výzkumníků časofrekvenční analýza.

Mezi nejdůležitější (tj. nejpoužívanější) metody časofrekvenční analýzy signálů patří okénková Fourierova transformace (short-time Fourier transform), Wigner-Villeova distribuce a waveletová transformace. V tomto článku se zaměříme na použití spojitě waveletové transformace pro časofrekvenční analýzu disperzních napěťových vln v tlusté desce.

Spojité waveletové transformace

Spojité waveletové transformace (CWT) funkce $f(t)$ je popsána

$$(Wf)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (1)$$

kde $a > 0$ a nadtržení označuje komplexně sdruženou hodnotu.

Aplikací Parsevalovy rovnosti na (1) dostáváme

$$(Wf)(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega, \quad (2)$$

kde $\hat{f}(\omega)$ označuje Fourierovu transformaci $f(t)$ definovanou

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

Funkce $\psi(t)$ se nazývá analyzující wavelet a aby byla spojitě waveletová transformace invertabilní musí $\psi(t)$ splňovat podmínku přípustnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (4)$$

Z podmínky přípustnosti vyplývá, že analyzující wavelet nemá stejnosměrnou složku, tj. $\hat{\psi}(0) = 0$. V praxi může být analyzující wavelet považován za okénkovou funkci v čase i frekvenci, pokud analyzující wavelet $\psi(t)$ resp. jeho Fourierova transformace $\hat{\psi}(\omega)$ splňuje tyto podmínky [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (7)$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (8)$$

Předpokládejme, že časové okénko $\psi(t)$ má střed pro $t=0$ a frekvenční okénko $\hat{\psi}(\omega)$ pro $\omega = \omega_0$. Funkce $\psi((t-b)/a)$ je pak rozložena okolo $t=b$ a její Fourierova transformace $[a \times \exp(-ib\omega)\hat{\psi}(a\omega)]$ okolo $\omega = \omega_0/a$. Z rovnic (1) a (2) je zřejmé, že $(Wf)(a,b)$ odpovídá časofrekvenční složce $f(t)$ v okolí $t=b$ a $\omega = \omega_0/a$. Jestliže jsou parametry a a b měněny nezávisle, poskytuje b - a -rovina (časofrekvenční rovina) distribuci každé časofrekvenční složky. Tedy CWT umožňuje časofrekvenční analýzu.

Podle vzorovací věty je pro přiměřenou charakterizaci nízkofrekvenčních signálů vyžadováno dostatečně široké časové okénko. Naopak pro úspěšné stanovení pozice vysokofrekvenčních složek signálu na časové ose je vyžadováno dostatečně úzké časové okénko. Tyto požadavky CWT automaticky splňuje, poněvadž šířka časového okénka $\psi((t-b)/a)$ je úměrná parametru a , který je nepřímo úměrný frekvenci. Tento charakter CWT je užitečný pro analýzu napěťových vln, které obvykle obsahují mnoho frekvenčních složek.

Výběr analyzujícího waveletu

Jako analyzující wavelet je často používán Morletův wavelet, který je definovaný vztahem

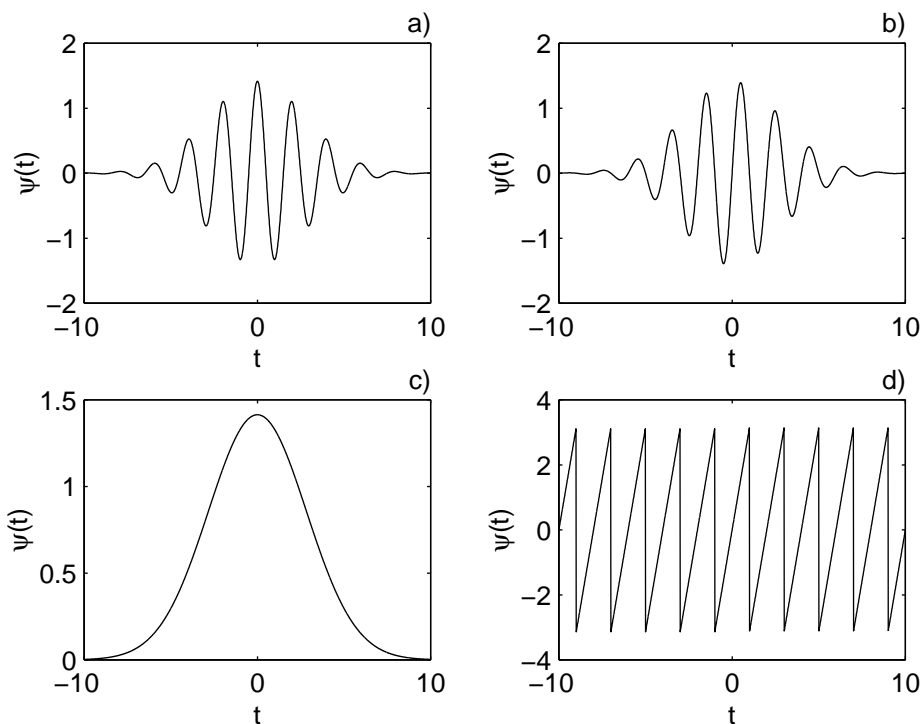
$$\psi(t) = \sqrt{2} e^{-t^2/\alpha^2} \left(e^{i\pi t} - e^{-\pi^2 \alpha^2 t^4} \right). \quad (9)$$

Parametrem α lze nastavit požadované časofrekvenční tvarování v CWT. Na obr. 1 je znázorněn Morletův wavelet pro $\alpha = 4$.

Fourierovu transformaci tohoto waveletu lze vypočítat přímo, tj.

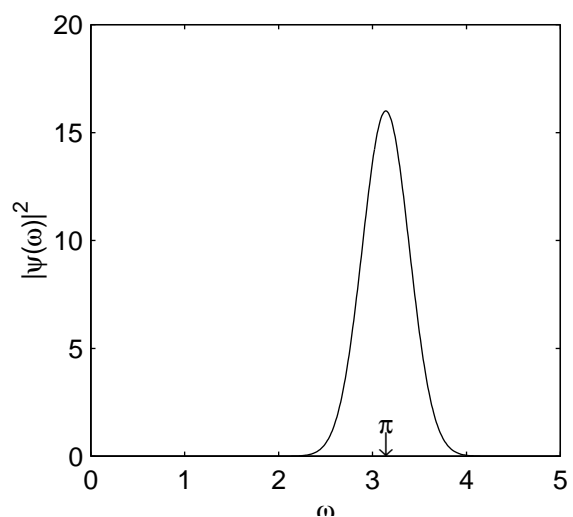
$$\hat{\psi}(\omega) = \alpha e^{-\alpha^2(\pi^2 + \omega^2)/4} \left(e^{\pi \alpha^2 \omega/2} - 1 \right). \quad (10)$$

Z této rovnice je okamžitě patrné, že $\hat{\psi}(0) = 0$ a tedy podmínka přípustnosti platí.



Obr. 1 Morletův wavelet pro $\alpha = 4$: a) reálná část, b) imaginární část, c) modul a d) fáze.

Na obr. 2 vidíme, že se Morletův wavelet chová ve frekvenční oblasti jako komplexní pásmový filtr. Střed tohoto filtru je přibližně π rad/s ($k\pi$ se blíží se zvětšujícím se parametrem α).



Obr. 2 Výkonové spektrum Morletova waveletu.

V mnoha aplikacích se používá modifikovaná verze Morletova waveletu, kterou nazývá Sadowsky Morletovým pseudowaveletem [1] a Kishimoto waveletem Gaborovým [3]. Tento wavelet byl úspěšně používán pro analýzu zvuku [8] nebo pro analýzu hudebních nástrojů [9]. Jeho obecná forma je

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t^2/2)+i\omega_0 t}. \quad (11)$$

kde ω_0 je parametr, kterým může být nastaven střed waveletu na vhodný rozsah frekvencí. V [9] je pro analýzu řeči nebo hudby navrhována hodnota ω_0 v rozsahu 5 až 6.

Striktně řečeno, Morletův pseudowavelet není analyzujícím wavelet, neboť lze ukázat, že nesplňuje podmínku přípustnosti. Snadno lze vypočítat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = e^{-\omega_0^2/2} \neq 0. \quad (12)$$

Rovnici (12) lze volbou ω_0 libovolně přibližovat k nule. Pro $\omega_0 = 5$ je tento integrál menší než 4×10^{-6} . Ačkoliv pseudowavelet nelze použít pro rekonstrukci signálu z jeho CWT, je docela vhodný pro časofrekvenční zobrazení signálů, protože závažné rysy signálu se objeví jako vzory na povrchu a Morletův pseudowavelet je výpočetně daleko jednodušší než Morletův wavelet. Např. Fourierova transformace Morletova pseudowaveletu nabývá mnohem jednoduššího tvaru

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}. \quad (13)$$

Waveletová analýza základních signálů

K výpočtu CWT (pro Morletův pseudowavelet) základních signálů může být použito jak formulace v časové oblasti, vztah (1), tak formulace ve frekvenční oblasti, vztah (2).

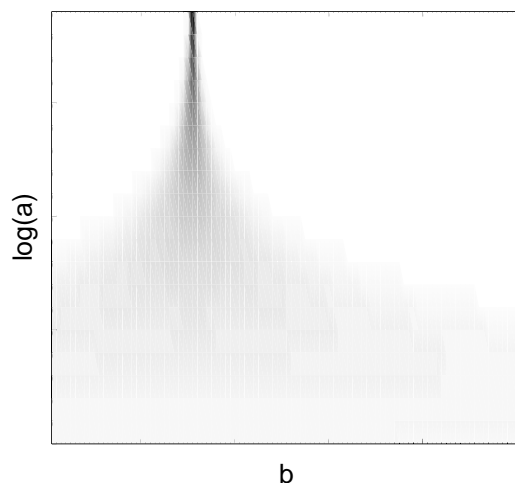
◆ Impuls

Na obr. 3 je zobrazena CWT impulsu, $f(t) = \delta(t - t_0)$, který se nachází asi v jedné třetině časové osy. Pro tento signál je jednodušší použít časovou formulaci a vypočítat

$$(Wf)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)}.$$

V ideálním případě by se impuls objevil na CWT-povrchu jako vertikální hřbet. Vějířový efekt na nízkých frekvencích je výsledkem specifického tvaru Morletova waveletu.

Vertikální osa je na tomto i následujících obrázcích v logaritmickém měřítku s malými škálami (vysokými frekvencemi) nahoře.



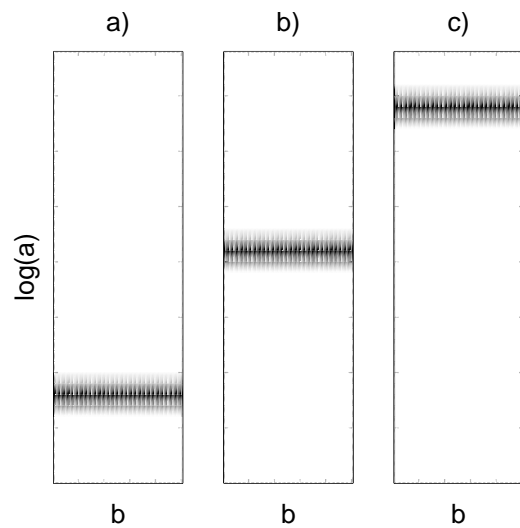
Obr. 3 CWT impulsu.

◆ **Komplexní sinusová vlna**

Pro komplexní sinusovou vlnu o frekvenci f_0 Hz, $f(t) = e^{i2\pi f_0 t}$, je jednodušší použít frekvenční vztah, kde $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - 2\pi f_0)$. Tedy

$$(Wf)(a, b) = \sqrt{2\pi a} \hat{\psi}(2\pi a f_0) e^{i2\pi f_0 b}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že CWT je tvořena součinem funkce závislé pouze na a a funkce závislé pouze na b .



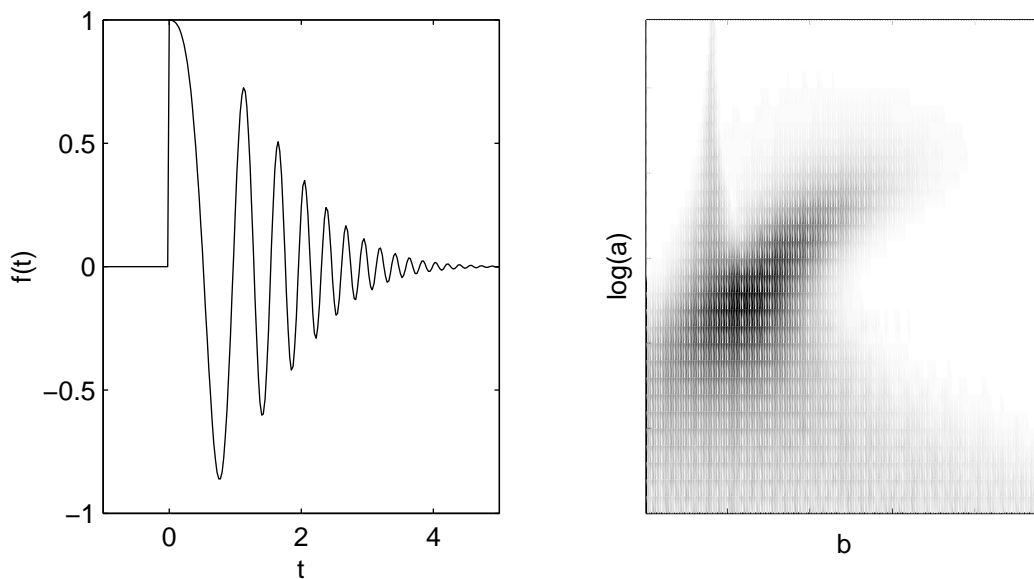
Obr. 4
CWT tří různých sinusových vln.

◆ **Lineárně frekvenčně modulovaný signál**

Příklad signálu s konečnou dobou trvání a s časově proměnným spektrem je kmitočtově rozmítaný (*chirp*) signál; tj. signál, jehož okamžitá frekvence (derivace jeho fáze) je lineární funkcí času; proto je tento signál často nazýván lineárně frekvenčně modulovaný (LFM) signál. V našem případě má LFM-signál tvar

$$f(t) = e^{-\alpha t^2/2 + i\beta t^2/2 + i\gamma t}.$$

Parametr α řídí časové trvání Gaussovy obálky, β je koeficient lineární změny frekvence a γ je počáteční frekvence. Na obr. 5 je znázorněn LFM-signál a jeho CWT.



Obr. 5 LFM-signál a jeho CWT.

Waveletová analýza disperzních vln

Uvažujme dvě harmonické vlny jednotkové amplitudy a různých frekvencí ω_1 a ω_2 šířících se ve směru x

$$u(x,t) = e^{-i(k_1x - \omega_1t)} + e^{-i(k_2x - \omega_2t)}, \quad (14)$$

kde k_1 a k_2 jsou vlnová čísla. Rovnice (14) může být upravena na

$$u(x,t) = 2 \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) e^{-i(k_c x - \omega_c t)}, \quad (15)$$

kde

$$k_c = (k_1 + k_2)/2, \quad \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad (16)$$

a

$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2, \quad \Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)/2. \quad (17)$$

Pokud je $\Delta \omega$ dostatečně malé, takže $\omega_1 \cong \omega_2$, může být definována fázová rychlost c_p resp. grupová rychlost c_g o frekvenci ω_c jako

$$c_p = \omega_c / k_c, \quad c_g = \Delta \omega / \Delta k. \quad (18)$$

CWT $u(x,t)$ je dána

$$(Wu)(x,a,b) = \sqrt{a} \left[e^{-i(k_1x - \omega_1b)} \hat{\psi}(a\omega_1) + e^{-i(k_2x - \omega_2b)} \hat{\psi}(a\omega_2) \right]. \quad (19)$$

Modul CWT je potom

$$\begin{aligned} |(Wu)(x,a,b)| = \sqrt{a} \{ & [\hat{\psi}(a\omega_1)]^2 + [\hat{\psi}(a\omega_2)]^2 \\ & + 2\hat{\psi}(a\omega_1)\hat{\psi}(a\omega_2) \cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b) \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (20)$$

kde se předpokládá, že $\hat{\psi}(\omega)$ je reálná funkce. Nyní uvažujme následující dva případy: (a) $\Delta \omega$ je dostatečně malé a (b) $\Delta \omega$ je dostatečně velké.

◆ Případ dostatečně malého $\Delta \omega$:

V tomto případě $u(x,t)$ může být považováno za vlnu s fázovou rychlostí c_p a grupovou rychlostí c_g . Je-li $\Delta \omega$ dostatečně malé, takže $\hat{\psi}(a\omega_1) \cong \hat{\psi}(a\omega_2) \cong \hat{\psi}(a\omega_c)$, pak dostaneme

$$|(Wu)(x,a,b)| \cong \sqrt{2a} |\hat{\psi}(a\omega_c)| [1 + \cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b)]^{1/2}. \quad (21)$$

Pokud je použit Morletův pseudowavelet, má funkce $\hat{\psi}(a\omega_c)$ své maximum pro $a = \omega_0 / \omega_c$. Následně pro pevné x modul CWT dosahuje svého maxima pro $a = \omega_0 / \omega_c$ a $b = (\Delta k / \Delta \omega)x = x / c_g$ v časofrekvenční rovině. Tedy **maximum modulu CWT odpovídá šíření vlny grupovou rychlostí c_g při frekvenci ω_c .**

◆ Případ dostatečně velkého $\Delta \omega$:

V tomto případě existují pozorovatelné stacionární vibrační složky dvou harmonických s frekvencemi ω_1 a ω_2 . Je-li použit Morletův pseudowavelet, je

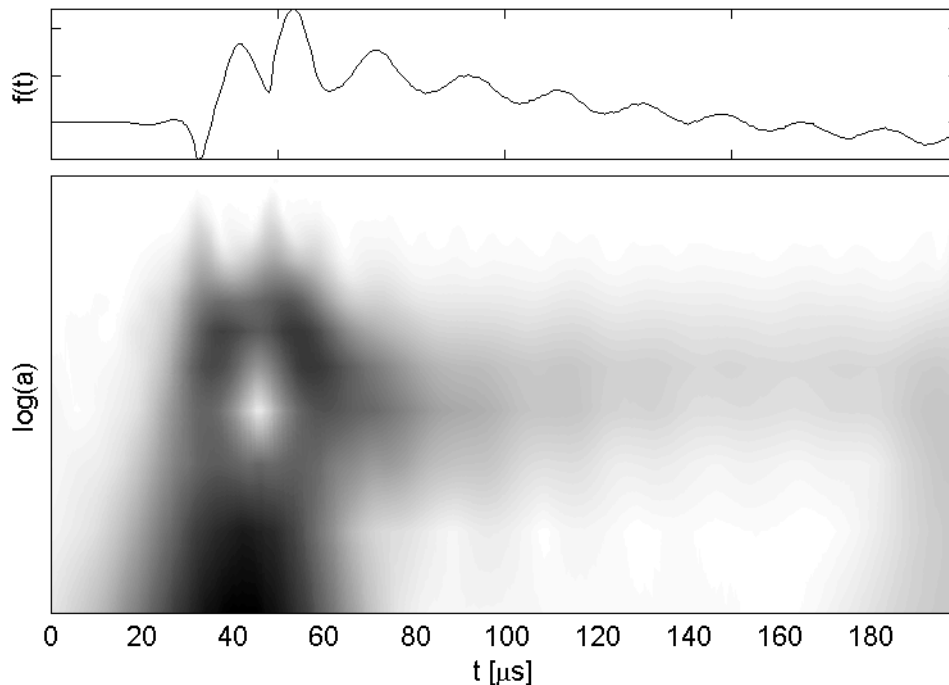
funkce $\hat{\psi}_m(a\omega)$ rozložena v okolí $\omega = \omega_0/a$. Je-li $\Delta\omega$ dostatečně velké, takže $\hat{\psi}_m(a\omega_1)\hat{\psi}_m(a\omega_2) \cong 0$, pak dostaneme

$$|(Wu)(x, a, b)| \cong \sqrt{a} \{ [\hat{\psi}_m(a\omega_1)]^2 + [\hat{\psi}_m(a\omega_2)]^2 \}^{1/2}. \quad (22)$$

Z toho vyplývá, že modul CWT obsahuje dvě špičky pro $a = \omega_0/\omega_1$ a $a = \omega_0/\omega_2$. Tedy dvě **frekvenční složky jsou reprezentovány jako dvě separátní špičky** v časofrekvenční rovině.

Příklad: CWT vln v tlusté desce

Na obr. 5 je zobrazena vertikální výchylka povrchu desky o tloušťce 5 cm ve vzdálenosti 10 cm od zdroje buzení (dopad ocelové kuličky; průměr 5 mm, doba rázu $18 \mu\text{s}$) a její CWT.



Obr. 5 Vertikální výchylka povrchu desky a její CWT.

Na počátku jsou patrné dvě špičky v oblasti vysokých frekvencí (příchod P a R-vlny), které mají charakter obrazů impulzů. Za nimi následuje výrazná oblast s charakterem obrazu LFM-signálu (chirp) a zbytek vyplňuje obraz přibližně 50 kHz sinusovky (50 kHz odpovídá šířce budícího pulzu).

U signálů výchylek prutů a tenkých desek lze na základě jejich CWT stanovit disperzní závislost nebo naopak ze známé disperzní závislosti stanovit např. místo buzení. Avšak CWT signálů výchylek tlusté desky nelze pro stanovení disperzních závislostí využít, neboť výchylka tlusté desky v sobě obsahuje příspěvky od nekonečně mnoha disperzních závislostí. Z obr. 5 je ale zřejmé, že k disperzi

dochází, a lze stanovit, kde je největší a kde signál přechází v ustálené kmitání a co je jeho příčinou.

CWT se dále využívá pro stanovení oblastí, které chceme upravit následnou waveletovou filtrací.

Literatura

- [1] Sadowsky, J.: *Investigation of Signal Characteristics Using the Continuous Wavelet Transforms*. Johns Hopkins Apl Technical Digest, Vol. 17, No. 3, 258-269, (1996)
- [2] Jordan, D.; Miksad, R. W.; Powers, E. J.: *Implementation of the Continuous Wavelet Transform for Digital Time Series Analysis*. Review of Scientific Instruments, Vol. 68, No. 3, 1484-1494, (1997)
- [3] Kishimoto, K.: *Wavelet Analysis of Dispersive Stress Waves*. JSME International Journal, Series A, Vol 38, No. 4, 416-424, (1995)
- [4] Kishimoto, K.; Inoue, H.; Hamada, M.; Shibuya, T.: *Time Frequency Analysis of Dispersive Waves by Means of Wavelet Transform*. Journal of Applied Mechanics, Vol 62, 841-846, (1995)
- [5] Inoue, H.; Kishimoto, K.; Shibuya, T.: *Experimental Wavelet Analysis of Flexural Wave in Beams*. Experimental Mechanics, Vol 36, No. 3, 212-217, (1996)
- [6] Misiti, M.; Misiti, Y.; Oppenheim, G.; Poggi, J-M.: *Wavelet Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc., (1996)
- [7] Chui, C.K.: *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, CA, (1992)
- [8] Kronland-Martinet, R.; Morlet, J.; Grossmann, A.: *Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transforms*. Int. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Special Issue on Expert Systems and Pattern Analysis, Vol. 1 (2), 97-126, (1989)
- [9] Dutilleul, P.: *An Implementation of the 'Algorithme a Trous' to Compute the Wavelet Transform*, in Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space, J. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian (eds.), Springer Verlag, New York, 298-304, (1989)

Práce popsaná v tomto článku byla podporována Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č.101/97/1074 "Charakterizace zdrojů AE v ocelových konstrukcích" a uskutečněna ve společném pracovišti ÚT AVČR Praha a ZČU Plzeň.

Using Continuous Wavelet Transform for Analysis of Dispersive Stress Waves

The time-frequency analysis of dispersive stress waves is reviewed. It is shown that the wavelet transform using the Morlet pseudowavelet effectively decomposes the strain response into its time-frequency components and that the wavelet transform enables us to identify the dispersion relation of the group velocity.

Ing. Petr Hora, CSc., Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Ústav fyzikálního inženýrství, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň (tel.: 019-7236415, fax.: 019-7220787, e-mail: hora@hera.zcu.cz).