

ELASTICKÉ VLNY V ANIZOTROPNÍCH DESKÁCH

Petr HORA, Olga ČERVENÁ¹

Abstract: ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC PLATES. *Contribution deals with description of general solution procedure of wave propagation in unbounded media, on the surface of a half-space and in an infinitely wide plate for anisotropic material. The algorithms of solution procedure for all of these cases are presented here.*

Key words: Dispersion curves, elastic waves, anisotropic plates

1. ÚVOD

Na začátku uvedeme krátký souhrn rovnic elastodynamiky ([1]–[7]), na které budeme navazovat v dalším výkladu.

$$\begin{aligned}
 \text{Pohybové rovnice:} \quad & \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \leftrightarrow & T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \\
 \text{Konstitutivní vztahy:} \quad & \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} & \leftrightarrow & T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}, \quad (\text{ED}) \\
 \text{Vztahy výchylky-deformace:} \quad & \mathbf{S} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \} & \leftrightarrow & S_{kl} = \frac{1}{2} \{ u_{k,l} + u_{l,k} \},
 \end{aligned}$$

kde \mathbf{T} je tenzor napětí druhého řádu, \mathbf{S} je tenzor deformací druhého řádu, \mathbf{C} je tenzor elastických modulů čtvrtého řádu, \mathbf{u} je vektor výchylek a ρ je hustota materiálu.

Napětí přes libovolný povrch s normálou \mathbf{n} je dáno: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \leftrightarrow T_{ij} n_j$. Obecně, napětí a výchylky musí být na rozhraní spojité.

Tenzor napětí \mathbf{T} je symetrický, tj. $T_{ij} = T_{ji}$. Tenzor deformací \mathbf{S} je také symetrický, tj. $S_{kl} = S_{lk}$. Tenzor elastických modulů \mathbf{C} má navíc hlavní symetrii, tj. $C_{ijkl} = C_{klij}$. Důsledkem těchto symetrií je existence maximálně 21 nezávislých elastických konstant pro nejanizotropnější materiál. Se zvětšující se úrovní symetrie materiálu počet nezávislých elastických konstant klesá, např. 3 pro kubické krystaly a pouze 2 pro izotropní materiály.

Zkrácený zápis

Pro výpočetní účely je často jednodušší uvažovat 6 nezávislých složek tenzoru napětí a deformací uspořádaných do vektorového tvaru:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= [T_{11} \quad T_{22} \quad T_{33} \quad T_{23} = T_{32} \quad T_{31} = T_{13} \quad T_{12} = T_{21}]^T, \\
 \mathbf{S} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad 2S_{23} = 2S_{32} \quad 2S_{31} = 2S_{13} \quad 2S_{12} = 2S_{21}]^T,
 \end{aligned}$$

kde jsme použili inženýrskou definici příčných deformací (proto ten činitel 2 u některých členů). Dále budeme používat velké dolní indexy k označení zkráceného zápisu. Tedy

$$\begin{aligned}
 \{ij = 11 \rightarrow I = 1; \quad ij = 22 \rightarrow I = 2; \quad ij = 33 \rightarrow I = 3; \\
 ij = 23 \vee 32 \rightarrow I = 4; \quad ij = 31 \vee 13 \rightarrow I = 5; \quad ij = 12 \vee 21 \rightarrow I = 6\}.
 \end{aligned}$$

¹Ing. Petr Hora, CSc., RNDr. Olga Červená, Ústav termomechaniky AV ČR, Centrum diagnostiky materiálu, Veleslavínova 11, 301 14 PLZEŇ, hora@cdm.it.cas.cz, cervena@cdm.it.cas.cz

Někdy je nutné přecházet tam a zpět mezi reprezentací tenzorovou (matice řádu 3) a reprezentací vektorovou (vektor o délce 6). Např. pro získání složek napětí a deformací v jiných souřadných soustavách je jednodušší použít maticovou (tenzorovou) reprezentaci, ale jinak je téměř vždy výhodnější používat zkráceného zápisu.

Konstitutivní vztahy ve zkráceném zápisu přejdou na

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_I = \mathbf{C}_{IJ} \mathbf{S}_J.$$

2. NORMÁLNÍ MÓDY V NEOHRANIČENÉM PROSTŘEDÍ

Uvažujme nejprve homogenní neohraničené lineární elastické anizotropní prostředí a vyšetřujme, zda se v něm mohou šířit rovinné harmonické vlny. V neohraničeném prostředí se nemusíme starat o okrajové podmínky a tak nám stačí splnit výše uvedené elastodynamické rovnice. Uvažujme rovinné harmonické vlny dané následujícím předpisem pro výchylky

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jk(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} - vt)\}, \quad (\text{ORHV})$$

kde \mathbf{U} je vektor výchylkových amplitud, \mathbf{l} je jednotkový vektor ve směru šíření vlny, $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ je vektor pozice, $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo, λ je vlnová délka a v je fázová rychlost vlny. Úhlová frekvence harmonické vlny je svázána s vlnovým číslem a rychlostí vztahem: $\omega = kv = 2\pi v/\lambda$. Složky \mathbf{e}_i jsou jednotkové vektory podél směrů 1, 2 a 3 a symbol j označuje imaginární jednotku.

Dosazením do vztahu (ORHV) do elastodynamických rovnic (ED) dostaneme

$$C_{ijkl} l_j l_k^2 U_k = \rho \omega^2 U_i,$$

kterou můžeme přepsat na

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik} \rho v^2\} U_k = 0, \quad (\text{ChR})$$

kde

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl} l_j l_l \quad (\text{ChM})$$

se nazývá Christoffelova matice a vztah (ChR) Christoffelova rovnice. Pověsimně si, že vztah (ChR) popisuje problém vlastních čísel. Nezávisí na frekvenci, proto očekáváme bezdisperzní rovinné vlny v neohraničeném anizotropním prostředí.

Snadno se zjistí, že Christoffelova matice je symetrická a za jistých neomezuujících podmínek kladených na elastické konstanty je pozitivně definitní. Ze spektrálního teorému pro pozitivně definitní symetrické matice vyplývá, že musí existovat tři reálné, kladné vlastní hodnoty pro Γ . To znamená, že rychlosti fázových vln v , které jsou druhou mocninou těchto vlastních čísel dělených hustotou, budou reálné, tudíž budou reprezentovat šířící se módy. Vlastní čísla se získají řešením charakteristické rovnice

$$\det \{\Gamma_{ik} - \delta_{ik} \rho v^2\} = 0. \quad (\text{SR})$$

Opět ze spektrálního teorému plyne, že pro každé vlastní číslo $v^{(i)}$ existuje alespoň jeden reálný vlastní vektor a mimoto můžeme vždy najít tři ortogonální vlastní vektory, které označíme $\mathbf{U}^{(i)}$. Z toho vyplývá, že v libovolném homogenním anizotropním materiálu se podél libovolného zvoleného směru šíření l vždy mohou šířit tři typy rovinných harmonických vln. Tyto tři vlny budou mít rozdílné fázové rychlosti $v^{(i)}$ a odpovídající vektory výchylek $\mathbf{U}^{(i)}$ budou vzájemně

ortogonální. Každý z těchto módů se nazývá normální mód šíření. Směr vektoru výchylek nazýváme *polarizační směr* (polarizace) vlny. Poznamenejme však, že vektor výchylek nemusí být obecně rovnoběžný nebo kolmý ke směru šíření. Pokud je polarizační směr vlny rovnoběžný se směrem šíření, dostáváme tzv. *čistou podélnou* vlnu. Vlny s polarizačním směrem kolmým na směr šíření jsou *čisté příčné* vlny. Pokud polarizační směry nejsou ani rovnoběžné, ani kolmé na směr šíření, vlny nejsou ani čistě podélné, ani čistě příčné. V takových případech, mód, jehož polarizace se nejméně liší od směru šíření, se nazývá *quazi-podélná* vlna, ostatní módy se nazývají *quazi-příčné* vlny.

2.1. Rovinné vlny v neohraničeném izotropním prostředí

Jelikož jsou v izotropním materiálu všechny směry rovnocenné, můžeme vhodně za směr šíření zvolit např. $\mathbf{l} = \mathbf{e}_1$, takže Christoffelova matice se zjednoduší na

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnice bude

$$(c_{11} - \rho v^2) (c_{44} - \rho v^2) (c_{44} - \rho v^2) = 0.$$

Její tři kořeny $v^{(i)}$ jsou:

$$v^{(1)} \equiv v_L = \sqrt{c_{11}/\rho},$$

jehož polarizace je rovnoběžná se směrem šíření a který tudíž představuje podélnou vlnu; a dva degenerované kořeny:

$$v^{(2)} = v^{(3)} \equiv v_T = \sqrt{c_{44}/\rho},$$

jejichž polarizace je kolmá se směrem šíření a které tudíž představují příčné vlny.

2.2. Rovinné vlny v neohraničeném anizotropním prostředí

V případě obecného anizotropního materiálu nelze obecně pro libovolný směr šíření zjednodušit charakteristickou rovnici na analytický tvar. Je to možné pouze pro speciální případy šíření podél jistých směrů materiálové symetrie. Avšak obecně musíme hledat řešení numericky.

Při výpočtech Christoffelovy matice lze s výhodou použít následující postup. Vytvořme si matici směrových kosinů typu 3×6

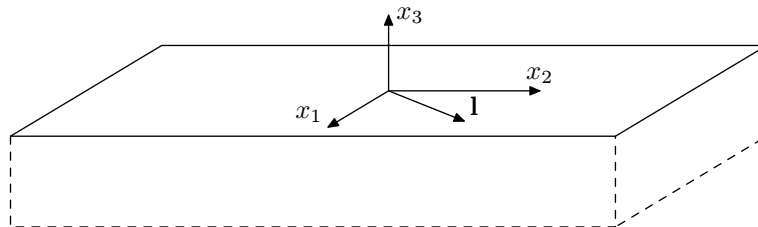
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ 0 & l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Přímým rozvojem lze ukázat, že $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L}$, tj.

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & l_3 & l_2 \\ 0 & l_2 & 0 & l_3 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_3 & l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ 0 & l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. ELASTICKÉ VLNY NA POVRCHU (POLOPROSTORU)

Studujme nyní, zda se rovinné harmonické vlny mohou šířit na povrchu poloprostoru anizotropního ale homogenního prostředí, viz obrázek. Zde, kromě rovnic elastodynamiky (ED), máme vlnou okrajovou podmínku, která musí být splněna na rovině $x_3 = 0$.



Hledejme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jkl_3x_3\} \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\}, \quad (\text{PRHV})$$

kde požadujeme, aby se výchylky zmenšovaly s hloubkou (záporný směr x_3) a aby se vektor šíření omezil pouze na rovinu $x_1 - x_2$, tj. $\mathbf{l} = l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2$. Takové vlny se nazývají SAW (surface acoustic waves) nebo Rayleighovy vlny.

Povšimněme si, že člen l_3 není, jak by se mohlo zdát, x_3 složka vektoru šíření (který je omezený na rovinu $x_1 - x_2$), ale člen, který charakterizuje útlum vlnových amplitud s hloubkou. To jest, hledáme tzv. nehomogenní rovinné vlnové řešení. Ve skutečnosti l_3 není svázané s vlnovou rychlostí v . Pokud $l_3 = 0$ nebo je ryze reálné, pak se vlna nezmenšuje s hloubkou a nejedná se o SAW. Pokud je l_3 komplexní, potom, aby pro $x_3 \rightarrow -\infty$ byla výchylka konečná, musí být imaginární část l_3 záporná. Kromě toho, abychom získali šířící vlnový mód, musí být rychlost reálná a kladná.

Poněvadž je (PRHV) formálně stejné jako (ORHV), pohybové rovnice se samozřejmě redukují na formálně stejnou Christoffelovu rovnici

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} U_k = 0, \quad (\text{PChR})$$

kde Christoffelova matice je opět dána vztahem $\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_jl_l$.

Řešení problému vlastních čísel (PChR) vede na charakteristickou rovnici

$$\det \{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} = 0, \quad (\text{PSR})$$

Bohužel (PSR) je polynommická rovnice 6. stupně jak pro l_3 , tak pro v . Výhodnější je uvažovat o ni jako o polynommické rovnici 6. stupně pro l_3 a rychlost v považovat za parametr. Budeme považovat rychlost v za známou a vyřešíme polynommickou rovnici pro l_3 . Tím dostaneme šest řešení. Z nich jsou přípustná pouze ta řešení, která mají imaginární část zápornou, takže vlny se zmenšují s hloubkou. Označme si přípustné hodnoty jako: $l_3^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$. Necht $\mathbf{U}^{(n)}$ jsou odpovídající vlastní vektory.

Máme tedy tři možná vlnová řešení pro povrchovou harmonickou rovinnou vlnu, která nazýváme parciální vlnová řešení. Nejobecnější řešení pro pole výchylek je lineární kombinace těchto tří parciálních vlnových řešení:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mathbf{U}^{(n)} \exp \{jkl_3^{(n)}x_3\} \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\},$$

kde α_n jsou váhové konstanty. Dosazením tohoto obecného řešení do okrajových podmínek

$$T_{i3} = C_{i3kl}S_{kl} = C_{i3kl}u_{k,l} = 0 \text{ na } x_3 = 0 \text{ pro } i = 1, 2, 3 \quad (\text{POP})$$

dostaneme soustavu tří homogenních rovnic pro váhové konstanty α_n

$$T_{i3}|_{x_3=0} = jk \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \{jk(l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt)\} = 0,$$

kde pro vhodnost značení definujeme $l_{1:2}^{(n)} = l_{1:2}$. Tyto rovnice mohou být zapsány ve tvaru

$$[d_{mn}]\{\alpha\} = \{0\}, \quad (\text{POPM})$$

kde matice \mathbf{d} je nyní řádu 3 a je definována jako

$$d_{mn} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)}.$$

Netriviální řešení získáme, pokud

$$\det(d_{mn}) = 0. \quad (\text{POPD})$$

Pokud se výše uvedený determinant pro zvolené v a vypočtené l_3 a $\mathbf{U}^{(n)}$ neblíží k nule, pak zvolíme novou rychlost a tento postup opakujeme, dokud determinant není roven nule.

Povšimněme si, že povrchové vlny, které hledáme (pokud nějakou najdeme), budou bez-disperzní, protože rovnice, které potřebujeme vyřešit pro rychlost (PSR a POPD), neobsahují vlnové číslo.

Algoritmus řešení povrchových vln v obecném anizotropním materiálu může být nyní stručně vyjádřen následovně:

1. Zvolit materiál, orientaci a směr šíření.
2. Zvolit rychlost v .
3. Vyřešit problém vlastních čísel (PChR) získáním kořenů polynomicke rovnice 6. stupně, kterou dostaneme z (PSR). Jelikož se nejedná o problém kanonických vlastních čísel, je nejjvhodnější vytvořit polynomickou rovnici symbolicky (MATLAB nebo Mathematica).
4. Určit přípustné kořeny $l_3^{(n)}$ se zápornou imaginární částí. Získat odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$. Vlastní vektory mohou být komplexní.
5. Ověřit zda se determinant okrajových podmínek (POPD) blíží k nule. Determinant může být opět komplexní, tedy kontrolovat, jak se blíží k nule modul.
6. Pokud okrajové podmínky (POPD) nejsou splněny v požadované přesnosti, jít zpět do bodu 2 a změnit rychlost v .
Jinak poznamenat akceptovatelné řešení $(v_R, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$.
7. Jakmile je získána množina $(v_R, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$, která splňuje jak Christoffelovu rovnici, tak determinant okrajových podmínek, určíme váhové konstanty α_n vyřešením rovnice (POPM). Tím se získá pole výchylek, ze kterého plynou všechny ostatní veličiny (napětí, deformace, atd.).

Rayleighovy vlny v izotropním prostředí:

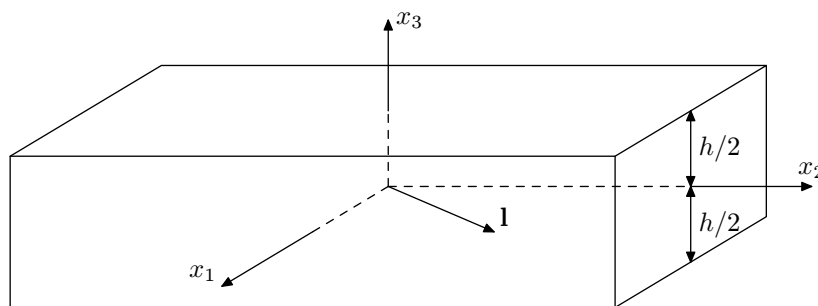
- Vektorová výchylka je celá v rovině (ne u_2 složka) dané vektorem šíření a normálou k povrchu (tzv. sagitální rovina).
- Pokles ve směru x_3 dvou nenulových složek výchylky není stejný.
- Složka u_3 je fázově zpožděná vzhledem k složce u_1 o 90° a tyto složky nemají stejnou amplitudu. Z toho vyplývá, že výchylky jsou v sagitální rovině eliptické.

Rayleighovy vlny v anizotropním prostředí:

- Rayleighovy vlny existují pro každý směr, ale jejich rychlosti závisí na směru šíření.
- Kořeny l_3 mohou být komplexní a ne jen ryze imaginární, jako v případě izotropního prostředí. Což znamená, že pokles vzhledem k x_3 může být tlumen oscilačně.
- Vektory rychlosti energie a šíření nemusí být souběžné.
- Podél jistých izolovaných směrů může být rychlost Rayleighovy povrchové vlny větší než rychlost (quazi) příčné vlny v objemovém materiálu. V okolí těchto izolovaných směrů existují pseudo-Rayleighovy vlny, které nesplňují zcela podmínku poklesu výchylky v nekonečné hloubce. (Tyto pseudo-Rayleighovy vlny mají vektory energie s nenulovými složkami kolmými k povrchu.)

4. ELASTICKÉ VLNY V DESKÁCH

Studujme nyní rovinné harmonické vlny, které se šíří v nekonečně rozlehlé desce o tloušťce h , viz obrázek. Deska může být anizotropní, ale homogenní. Zde, kromě rovnic elastodynamiky (ED), máme ještě volné okrajové podmínky na dvou plochách $x_3 = \pm h/2$.



Opět budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jkl_3x_3\} \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\},$$

které popisuje šíření nehomogenní rovinné vlny rovnoběžné s rovinou desky, s výchylkovou amplitudou měnící se ve směru tloušťky desky. Opět, jako v případě povrchové vlny, l_3 není svázané s vlnovou rychlostí v . Avšak nyní neexistují žádná omezení na l_3 , protože nemáme podmínku *útlumu* s hloubkou.

Pohybové rovnice se samozřejmě redukují na formálně stejnou Christoffelovu rovnici

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} U_k = 0, \quad (\text{DChR})$$

kde Christoffelova matice je opět dána vztahem $\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_jl_l$.

Řešení problému vlastních čísel (DChR) vede na charakteristickou rovnici

$$\det \{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} = 0, \quad (\text{DSR})$$

což je polynomická rovnice 6. stupně jak pro l_3 , tak pro v . Výhodnější je o tom uvažovat jako o polynomické rovnici 6. stupně pro l_3 s rychlostí v jako parametrem. Budeme považovat rychlost v za známou a vyřešíme polynomickou rovnici pro l_3 . Tím dostaneme šest řešení. Všechna tato řešení jsou přípustná. Označme si hodnoty jako: $l_3^{(n)}$, $n=1,2,\dots,6$. Necht' $\mathbf{U}^{(n)}$ jsou odpovídající vlastní vektory.

Máme tedy šest možných vlnových řešení pro harmonickou rovinnou vlnu, která nazýváme parciální vlnová řešení. Nejobecnější řešení pro výchylkové pole je lineární kombinace těchto šesti parciálních vlnových řešení:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^6 \alpha_n \mathbf{U}^{(n)} \exp \left\{ j k l_3^{(n)} x_3 \right\} \exp \left\{ j k (l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt) \right\},$$

kde α_n jsou *váhové* konstanty. Dosazením tohoto obecného řešení do okrajových podmínek

$$T_{i3} = C_{i3kl} S_{kl} = C_{i3kl} u_{k,l} = 0 \text{ na } x_3 = \pm h/2 \text{ pro } i = 1, 2, 3 \quad (\text{DOP})$$

dostaneme dvě soustavy tří homogenních rovnic pro váhové konstanty α_n

$$T_{i3}|_{x_3=-h/2} = j k \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ -j k (l_3^{(n)} h/2) \right\} \exp \left\{ j k (l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt) \right\} = 0,$$

$$T_{i3}|_{x_3=h/2} = j k \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ j k (l_3^{(n)} h/2) \right\} \exp \left\{ j k (l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt) \right\} = 0,$$

kde pro výhodnost značení definujeme $l_{1:2}^{(n)} = l_{1,2}$. Tyto rovnice mohou být zapsány ve tvaru

$$[d_{mn}] \{\alpha\} = \{0\}, \quad (\text{DOPM})$$

kde matice \mathbf{d} je nyní řádu 6 a je definována jako

$$d_{mn} = \begin{bmatrix} [d_{mn}^{(1,2,3)}] \\ [d_{mn}^{(4,5,6)}] \end{bmatrix},$$

$$d_{mn}^{(1,2,3)} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ -j k l_3^{(n)} h/2 \right\},$$

$$d_{mn}^{(4,5,6)} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ j k l_3^{(n)} h/2 \right\}.$$

Netriviální řešení získáme, pokud

$$\det(d_{mn}) = 0. \quad (\text{DOPD})$$

Povšimněme si, že na rozdíl od objemových vln a povrchových vln závisí nyní řešení na vlnovém čísle k . Proto můžeme očekávat disperzní řešení, kde rychlost bude nelineární funkcí frekvence. Pokud se výše uvedený determinant pro zvolené v a vypočtené $l_3^{(n)}$ a $U^{(n)}$ neblíží k nule, pak zvolíme novou rychlost a tento postup opakujeme, dokud determinant není roven nule.

Algoritmus řešení vlnovodných vln v obecné anizotropní desce může být nyní stručně vyjádřen takto:

1. Zvolit materiál, orientaci, směr šíření a *vlnové číslo*.
2. Zvolit rychlost v .
3. Vyřešit problém vlastních čísel (DChR) získáním kořenů polynommické rovnice 6. stupně, kterou dostaneme z (DSR). Poněvadž se nejedná o problém kanonických vlastních čísel, je nejjvhodnější vytvořit polynommickou rovnici symbolicky (MATLAB nebo Mathematica).
4. Určit *všechny* kořeny $l_3^{(n)}$ a získat odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$.
Vlastní vektory mohou být komplexní.
5. Ověřit zda se determinant okrajových podmínek (DOPD) blíží k nule. Opět determinant může být komplexní, tedy kontrolovat jak se blíží k nule modul.

6. Pokud okrajové podmínky (DOPD) nejsou splněny v požadované přesnosti, jít zpět do bodu 2 a změnit rychlost v .
Jinak poznamenat akceptovatelné řešení $(v, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$.
7. Jakmile je získána množina $(v, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$, která splňuje jak Christoffelovu rovnici, tak determinant okrajových podmínek, určíme váhové konstanty α_n vyřešením rovnice (DOPM). Tím se získá pole výchylek, ze kterého plynou všechny ostatní veličiny (napětí, deformace, atd.).

Tento postup je třeba opakovat pro zvolený rozsah vlnových čísel k . Bohužel, pro každé vlnové číslo existuje několik řešení, každé s různou fázovou rychlostí.

5. ZÁVĚRY

V příspěvku je popsán obecný postup řešení šíření vln v neohraničeném prostředí, na povrchu poloprostoru a v tlusté desce pro případ anizotropního materiálu. Pro všechny tyto případy je uveden odpovídající algoritmus postupu řešení.

Poděkování: Příspěvek vznikl na základě podpory grantu cíleného vývoje a výzkumu AV ČR č. IBS2076356 "Ultrazvukové metody vyšetřování mechanických vlastností kompozitních materiálů používaných v letectví" (řešitel Ing. M. Landa, CSc.) a záměru ÚT AV ČR AV0Z 2076919.

LITERATURA

- [1] Kolsky, H.: *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, 1963.
- [2] Auld, B.A.: *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley and Sons, 1973.
- [3] Achenbach, J.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1973.
- [4] Graff, K.F.: *Wave Motion in Elastic Solids*, Oxford, 1975.
- [5] Brekhovskikh, L.M.: *Waves in Layer Media*, Academic Press Inc., New York, 1980.
- [6] Nayfeh, A.H.: *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*, Elsevier Science, 1995.
- [7] Rose, J. L.: *Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge University Press, 1999.