

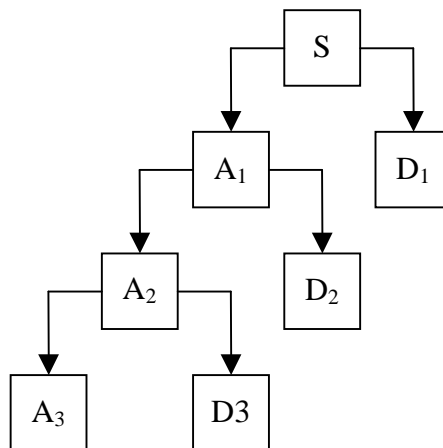
ANALÝZA WAVELETOVÝMI BALÍČKY

P. Hora*

Úvod

Metoda *waveletových balíčků* je zobecnění waveletového rozkladu, které nabízí bohatší možnosti pro analýzu signálu.

Ve waveletové analýze je signál rozdělen na aproximaci a detail. Aproximace je potom sama rozdělena na aproximaci a detail druhé úrovně a tento proces se dále opakuje. Pro n -úrovňový rozklad existuje $n+1$ možných způsobů rozkladu (kódování) signálu, viz obr. 1.

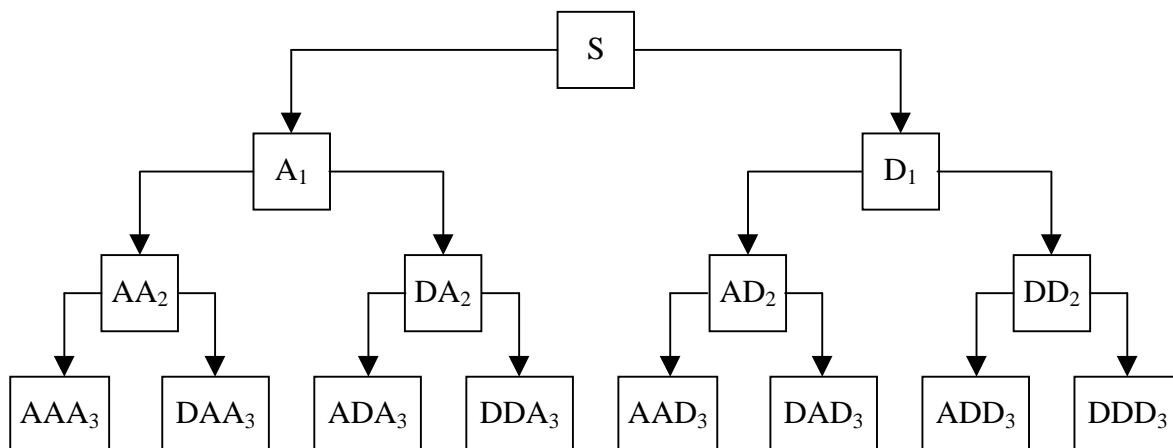


Obr. 1 Dekompoziční strom pro waveletovou metodu,
S je signál, A je aproximace a D je detail, index označuje úroveň rozkladu.

V analýze waveletovými balíčky může být rozdělena aproximace i detail. To vede na 2^n různých způsobů kódování signálu, viz obr. 2. Např. signál S může být reprezentován jako $A_1 + A_2D_3 + D_1D_2D_3$. Toto je příklad reprezentace, která není možná u waveletové analýzy.

Výběr jednoho kódování ze všech možných představuje zajímavý problém. Pro určení nejvhodnějšího rozkladu daného signálu se obvykle používá kritérium založené na výpočtu entropie. To znamená, že zkoumáme každý uzel dekompozičního stromu a vypočítáváme, kolik informace se získá provedením každého rozdělení.

* Ing. Petr Hora, CSc., Ústav fyzikálního inženýrství (společné pracoviště ÚT AV ČR Praha a FAV ZČU Plzeň), Centrum diagnostiky materiálu, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň (tel.: 019/7236415, fax: 019/7220787, e-mail: hora@hera.zcu.cz)



Obr. 2 Dekompoziční strom pro metodu waveletových balíčků.

Jak pro rozklad waveletovými balíčky, tak pro zvolení optimálního rozkladu existují jednoduché a výkonné algoritmy, např. algoritmus adaptivní filtrace od Coifmana a Wickerhausera.

Sestavování waveletových balíčků

Při použití ortogonálních waveletů je výpočetní schéma generace waveletových balíčků velice jednoduché. Vychází se ze dvou filtrů délky $2N$ označených $h(n)$ a $g(n)$, tak jako u waveletové transformace. Jedná se o obrácenou verzi nízkofrekvenčního dekompozičního filtru resp. vysokofrekvenčního dekompozičního filtru vyděleného $\sqrt{2}$.

Nyní definujme následující posloupnost funkcí ($W_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$):

$$W_{2n}(x) = 2 \sum_{k=0}^{2N-1} h(k) W_n(2x - k)$$

$$W_{2n+1}(x) = 2 \sum_{k=0}^{2N-1} g(k) W_n(2x - k)$$

kde $W_0(x) = \phi(x)$ je škálovací funkce a $W_1(x) = \psi(x)$ je waveletová funkce. Např. pro Haarův wavelet, kdy platí, že

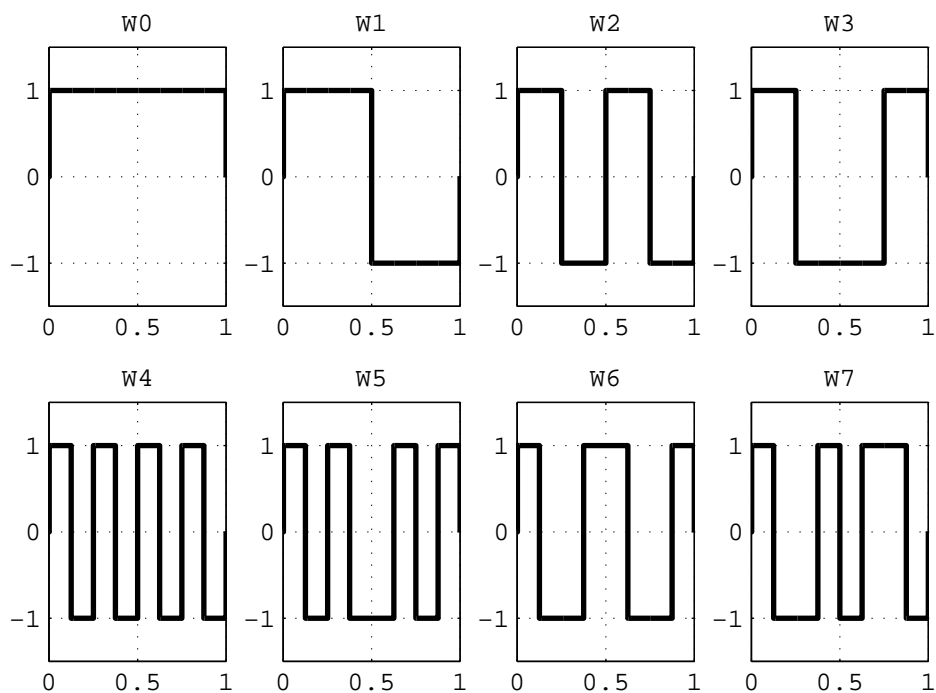
$$N = 1, \quad h(0) = h(1) = 1/2 \quad \text{a} \quad g(0) = -g(1) = 1/2.$$

Rovnice přejdou v

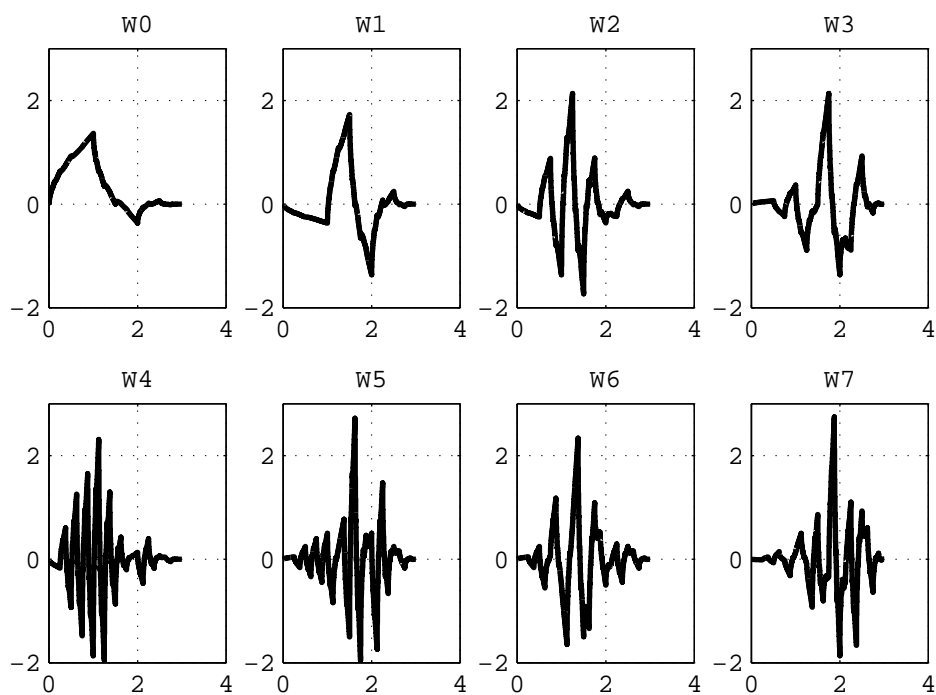
$$W_{2n}(x) = W_n(2x) + W_n(2x - 1) \quad \text{a} \quad W_{2n+1}(x) = W_n(2x) - W_n(2x - 1).$$

$W_0(x) = \phi(x)$ je Haarova škálovací funkce a $W_1(x) = \psi(x)$ je Haarův wavelet, oba definované na intervalu $[0, 1]$. W_{2n} potom můžeme získat sečtením dvou verzí W_n o poloviční škále, které jsou definované na intervalu $[0, 1/2]$ resp. $[1/2, 1]$. W_{2n+1} získáme odečtením stejných verzí W_n .

Pro $n=0$ až 7, jsou W -funkce zobrazeny na obr. 3 pro Haarův wavelet resp. na obr. 4 pro wavelet prof. Daubechies řádu 2.



Obr. 3 Haarovy waveletové balíčky.



Obr. 4 Waveletové balíčky prof. Daubechies řádu 2.

Atomy waveletových balíčků

Uvažujme rodinu analyzujících funkcí se třemi indexy:

$$W_{j,n,k} = 2^{-j/2} W_n(2^{-j}x - k), \text{ kde } n \in N \text{ a } (j,k) \in Z^2.$$

Stejně jako u waveletového systému můžeme k interpretovat jako translační parametr (časová lokalizace) a j jako dilatační (škálový) parametr. Zbývá nám interpretovat parametr n . Jak je vidět z předcházejících obrázků (obr. 3 a 4), $W_n(x)$ „osciluje“ přibližně n -krát. Takže pro pevné hodnoty j a k , $W_{j,n,k}$ analyzuje fluktuační signálu zhruba okolo pozice $2^j k$, ve škále 2^{-j} a při různých frekvencích daných parametrem n .

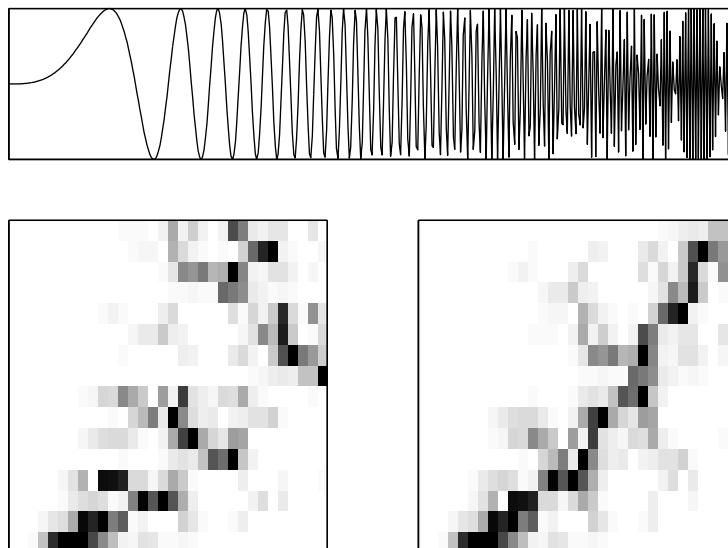
Při pozorném zkoumání waveletových balíčků zobrazených na obr. 3 resp. obr. 4 zjistíme, že přirozeně seřazená W_n pro $n=0, 1, \dots, 7, \dots$ nemají tu vlastnost, že W_m osciluje více než $W_{m'}$, pokud $m > m'$. Počty průchodů nulou jsou pro Haarovy waveletové balíčky shrnuty v následující tabulce:

Přirozené pořadí n	0	1	2	3	4	5	6	7
Počet průchodů nulou	2	3	5	4	9	8	6	7

Abychom obnovili vlastnost monotónního stoupání hlavní frekvence s přirozeným pořadím, je vhodné definovat frekvenční pořadí, které získáme z přirozeného pořadí rekurzivně.

Přirozené pořadí n	0	1	2	3	4	5	6	7
Frekvenční pořadí	0	1	3	2	6	7	5	4

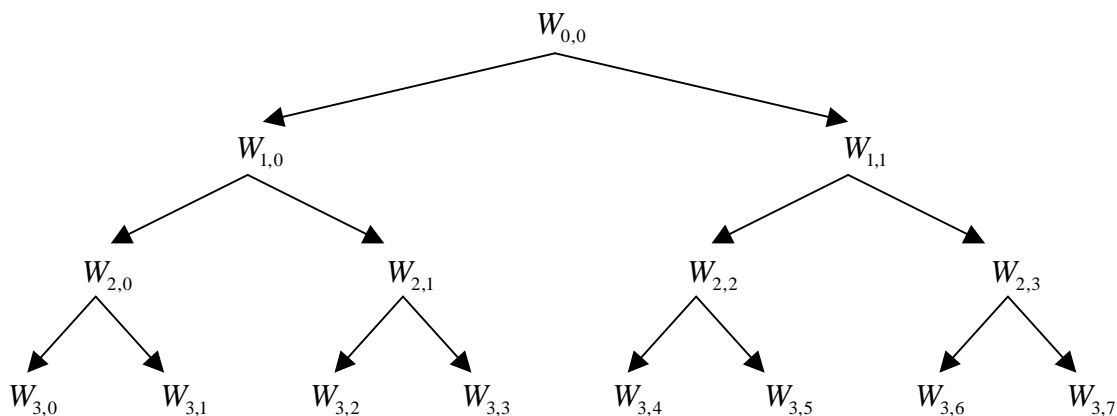
Při analýze signálu je lepší vykreslovat koeficienty waveletových balíčků podle frekvenčního pořadí, od nízkých frekvencí v dolní části frekvenční osy k vysokým frekvencím nahore, viz obr. 5.



Obr. 5 Přirozeně (vlevo) a frekvenčně (vpravo) uspořádané koeficienty waveletových balíčků získané analýzou “chirp” signálu (nahore).

Organizování waveletových balíčků

Množina funkcí: $W_{j,n} = (W_{j,n,k}(x), k \in Z)$ je (j,n) -tý waveletový balíček. Pro kladné celočíselné hodnoty j a n jsou waveletové balíčky uspořádány v binárních stromech. Binární strom na obr. 6 je vytvořen pro maximální úroveň rozkladu rovnou třem. Pro každou škálu j jsou možné hodnoty parametru n : $0, 1, 2, \dots, 2^j-1$.

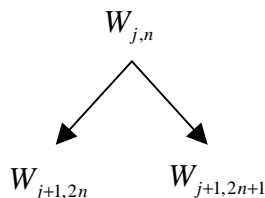


Obr. 6 Waveletové balíčky uspořádané do binárního stromu.

Notace $W_{j,n}$, kde j označuje dilatační (škálový) parametr a n frekvenční parametr, je konzistentní s obvyklým popisem binárních stromů (hloubka a pozice), $W_{0,0} = (\phi(x-k), k \in Z)$ a $W_{1,1} = (\psi(x-k), k \in Z)$.

Ukazuje se, že knihovna bází z waveletových balíčků obsahuje také waveletovou bázi. Přesněji, pokud V_0 označuje prostor, ve kterém leží analyzovaný signál, pak $(W_{d,1}; d \geq 1)$ je ortogonální báze z V_0 . Pro každé kladné celočíselné D , $(W_{D,0}, (W_{d,1}; 1 \leq d \leq D))$ je ortogonální báze z V_0 .

Dále je známo, že $\{(W_{j+1,2n}), (W_{j+1,2n+1})\}$ je ortogonální bází prostoru $W_{j,n}$. Tato poslední vlastnost poskytuje přesnou interpretaci štěpení binárního stromu waveletových balíčků, protože všechny vytvořené uzly mají tvar uvedený na následujícím obrázku.



Obr. 7 Dílčí binární podstrom waveletových balíčků.

Z toho vyplývá, že listy každého spojeného binárního podstromu odpovídají ortogonální bázi původního prostoru. Pro signál s konečnou energií poskytuje báze waveletových balíčků přesnou rekonstrukci a nabízí specifický způsob kódování signálu.

Výběr optimálního rozkladu

Signál délky $N = 2^L$ může být rozložen téměř 2^N různými způsoby, tj. počet binárních podstromů kompletního binárního stromu o hloubce L . Protože tento počet je značný a poněvadž explicitní vyhodnocení je obecně nezvládnutelné, je nutné najít optimální rozklad (vzhledem k vhodnému kritériu), který by byl vypočten efektivním algoritmem.

Jako vhodná kritéria se jeví kritéria založená na výpočtu entropie. V následujících výrazech s je signál a s_i je koeficient signálu s v ortonormální bázi. Entropie E musí splňovat následující podmínky: $E(0) = 0$ a $E(s) = \sum_i E(s_i)$.

Používá se několik druhů entropie:

- Shannonova entropie (nenormalizovaná)

$$E(s_i) = -s_i^2 \log(s_i^2), \text{ takže } E(s) = -\sum_i s_i^2 \log(s_i^2); \text{ s konvencí } 0 \log(0) = 0.$$

- ℓ^p -entropie

$$E(s_i) = |s_i|^p, \text{ takže } E(s) = \sum_i |s_i|^p = \|s\|_p^p.$$

- logaritmus „energetické“ entropie

$$E(s_i) = \log(s_i^2), \text{ takže } E(s) = \sum_i \log(s_i^2); \text{ s konvencí } \log(0) = 0.$$

- prahová entropie

$E(s_i) = 1$, pokud $|s_i| > \varepsilon$, jinak nula, takže $E(s)$ = počtu časových okamžiků, kdy je signál větší než prahová hodnota ε .

Abychom našli optimální podstrom vzhledem k danému kritériu entropie E , používáme následující algoritmus (E_{opt} označuje hodnotu optimální entropie):

1. Nejprve se provede počáteční nastavení koncových uzlů t $E_{opt}(t) = E(t)$.

2. Dále se rozhoduje podle hodnot entropie.

- Jestliže $E(uzlu) \leq \sum_{c(c \text{ je dítě uzlu})} E_{opt}(c)$ a uzel není kořenový, tak se uzel dále nedělí a provede se nastavení $E_{opt}(uzlu) = E(uzlu)$.

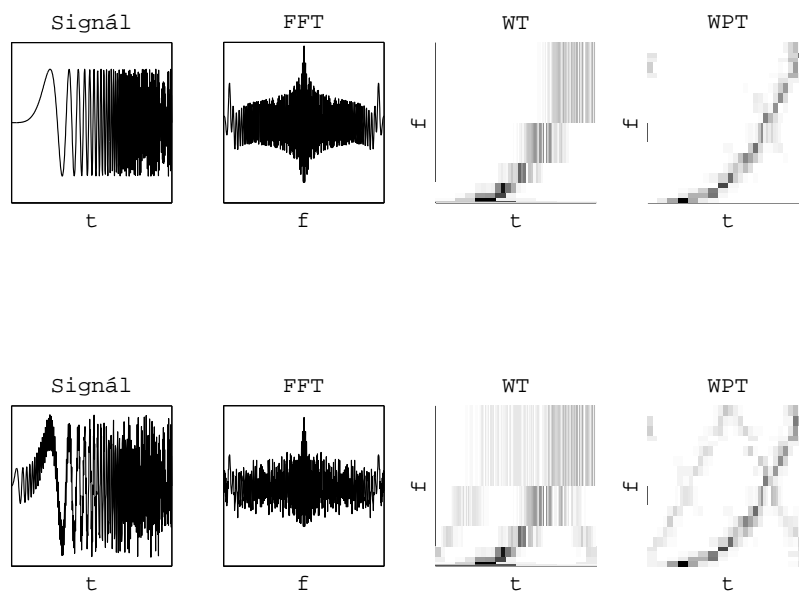
- Pokud je naopak $E(uzlu) > \sum_{c(c \text{ je dítě uzlu})} E_{opt}(c)$, provede se dělení uzlu a nastaví se

$$E_{opt}(uzlu) = \sum_{c(c \text{ je dítě uzlu})} E_{opt}(c).$$

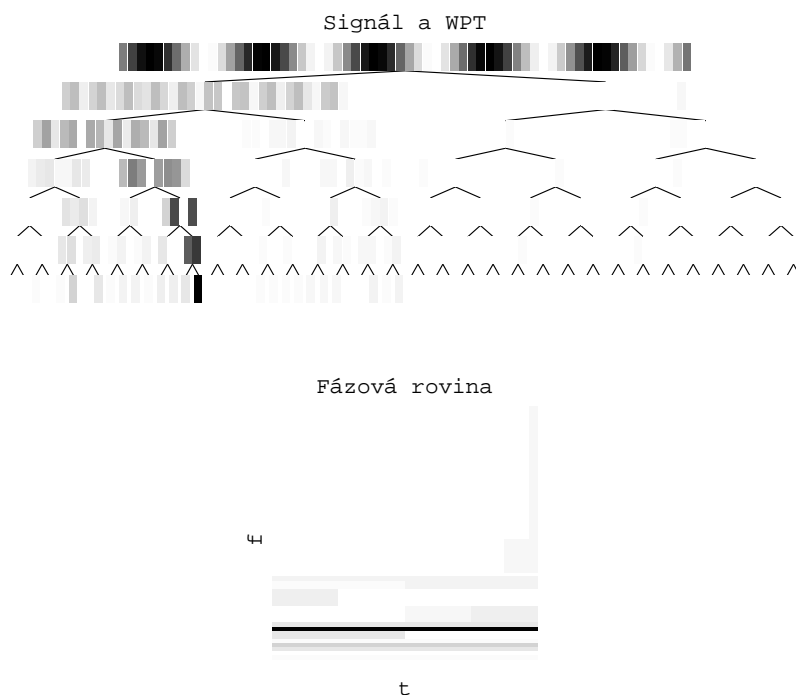
Ukázky analýzy signálů waveletovými balíčky

První ukázkou bude porovnání waveletových balíčků s Fourierovou transformací a s klasickou waveletovou transformací. Na obr. 8 jsou postupně zobrazeny jednotlivé transformace pro dva druhy signálů, jednoduchý kvadratický “chirp” signál a signál složený z lineárního a kvadratického chirp signálu. Z obrázku je na první pohled patrné, že analýza provedená waveletovými balíčky dává nejspokojivější popis časo-frekvenčního chování signálu. Waveletová transformace vykazuje podstatně horší rozlišitelnost. Fourierova transformace je uvedena pouze pro ilustraci, neboť s ní nelze provádět časo-frekvenční analýzu.

Na obr. 9 je znázorněna analýza waveletovými balíčky sinusového signálu včetně binárního stromu a s vyznačenou nejlepší bází waveletových balíčků.



Obr. 8 Porovnání waveletových balíčků s Fourierovou transformací a s klasickou waveletovou transformací



Obr. 9 Analýza sinusového signálu waveletovými balíčky.

Literatura

- [MisMOP96] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J.-M. Poggi: *Wavelet Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc. , manuál, 1996
- [StrN96] G. Strang, T. Nguyen: *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996
- [Kai94] G. Kaiser: *A friendly guide to wavelets*. Birkhauser, 1994
- [Dau92] I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992
- [CoiW92] R. R. Coifman, M. V. Wickerhauser: *Entropy-based algorithms for best basis selection*. IEEE Trans. on Inf. Theory, Vol. 38, No. 2, pp. 713-718, 1992
- [Chu92] C. K. Chui: *An introduction to wavelets*. Academic Press, 1992

Práce popsaná v tomto článku byla podporovaná Grantovou agenturou České republiky prostřednictvím grantu č. 101/97/1074 „Charakterizace zdrojů AE v ocelových konstrukcích“ a uskutečněna v Ústavu fyzikálního inženýrství (společné pracoviště ÚT AV ČR Praha a FAV ZČU Plzeň), Centru diagnostiky materiálu.

WAVELET PACKET ANALYSIS

The wavelet packet method is a generalization of wavelet decomposition that offers a richer signal analysis. Wavelet packet atoms are waveforms indexed by three naturally interpreted parameters: position and scale (as in wavelet decomposition) and frequency. For a given orthogonal wavelet function, we generate a library of wavelet packet bases. Each of these bases offers a particular way of coding signals, preserving global energy and reconstructing exact features. The wavelet packets can then be used for numerous expansions of a given signal. We then select the most suitable decomposition of a given signal with respect to an entropy-based criterion.