Intuicionistická logika

Připustíme-li existenci výroků, které nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé, jsme, zdá se, nuceni učinit závěr, že $\neg\neg A$ nemusí být totéž, co A. V případě, že si na místě A představíme výrok, který není ani pravdivý, ani nepravdivý, se totiž zdá být rozumné připustit, že jeho popřením pomocí negace může vzniknout nepravdivý výrok. Bude tomu tak tehdy, když operátor negace budeme chápat jako výrokový modifikátor, který lze vyjádřit souslovím *je nepravda že*. Výrok $\neg A$ budeme číst ve smyslu *A je nepravdivý,* tj. *pravdivostní hodnota A je* nepravda. Popřením výroku $\neg A$ další negací pak přirozeně vznikne pravdivý výrok – takže zatímco původní výrok A nebude ani pravdivý, ani nepravdivý, $\neg\neg A$ bude pravdivý. V takovém případě ale není možné považovat úsudkovou formu

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

za obecně platnou – jak jsme totiž právě viděli, může dojít k tomu, že bude mít pravdivou premisu a závěr, který pravdivý není. Předpoklad, že tato úsudková forma platná je (a že stejně tak platná je i forma, která vznikne, když zaměníme premisu a závěr této formy), je ovšem jedním z východisek klasického pohledu na logiku. V logické literatuře se tento princip (který bývá vyjadřován i formulí $\neg\neg A \leftrightarrow A$), tradičně označuje jako *princip* (*zákon*) *dvojí negace*.

Pokud připustíme, že tento princip je třeba na základě výše uvedené argumentace odmítnout, povede to i k odmítnutí dalšího z principů klasické logiky, totiž tzv. *principu* (*zákona*) *vyloučení třetího*. Ten může být reprezentován například tím, že je jako platná přijímána formule

$$A\vee\neg A,$$

Tento princip vlastně říká, že pro každý výrok platí, že je buď pravdivý on sám, nebo je pravdivá jeho negace.

Postoj k těmto dvěma úsudkovým formám (resp. k odpovídajícím formulím) je rozcestím, na kterém se rozcházejí cesty klasické a tzv. *intuicionistické* logiky. Intuicionistická logika totiž uvedené principy odmítá přijmout za platné. Tato logika, která se v rámci historie moderní logiky stala první význačnou (a i v matematických kruzích vážně branou) alternativou klasické logiky, se původně vyvinula z intuicionistického přístupu k matematice, který v první polovině dvacátého století prosazoval holandský matematik L. E. J. Brouwer. Ten měl za to, že matematika není věcí zjišťování nějakých na lidech nezávislých matematických skutečností, ale spíše vytváření takových skutečností prostřednictvím rozvíjení specifických schopností lidského ducha. Z toho mu vyplynulo, že například konstatovat existenci nějakého matematického objektu, který se dosud nikdo nepokoušel zkonstruovat, prostě nedává smysl. Výrok, že takový objekt existuje, je pravdivý až tehdy, kdy je tento objekt nějakým matematikem skutečně vytvořen; a za nepravdivý jej můžeme brát jen tehdy, kdy bylo prokázáno, že příslušný objekt zkonstruovat nelze. V ostatních případech se – podle Brouwera – takový existenční výrok nedá považovat ani za pravdivý, ani za nepravdivý. To byl také důvod, proč se Brouwer nechtěl smířit se zákonem vyloučení třetího.

Axiomatický systém intuicionistické výrokové logiky, kterému dal explicitní podobu Brouwerův žák Arendt Heyting, se skládá z deseti axiomů a jediného odvozovacího pravidla, téhož jako v KVL:

(1) $A \to (B \to A)$
(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(3) $(A \wedge B) \to A$
(4) $(A \wedge B) \to B$
(5) $A \to (B \to (A \wedge B))$
(6) $A \to (A \vee B)$
(7) $B \to (A \vee B)$
(8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
(10) $\neg A \to (A \to B)$
Z A a $A \to B$ odvoď B

Jak se ukazuje, můžeme z této axiomatizace velice snadno dostat axiomatizaci KVL – pouhou záměnou axiomu (10) za princip

(10') $\neg\neg A \to A$

(10') je silnější než (10) v tom smyslu, že zatímco v rámci systému KVL je (10) dokazatelný, v rámci systému intuicionistické výrokové logiky (10') dokazatelný není. Intuicionistickou logiku tedy můžeme vidět jako zeslabení klasické logiky.

V důkazech, které provádíme v rámci intuicionistické logiky, tak máme poněkud omezené možnosti – nemůžeme se opřít o některé principy, které jsou nám k dispozici, pracujeme-li v rámci logiky klasické. Jestliže pak i s těmito omezeními prokážeme, že je nějaký úsudek správný, určitě jsme prokázali, že je správný i z pohledu klasické logiky. Obráceně to však platit nemusí.

Srovnávání různých logik je ovšem problematické. Abychom mohli jednoznačně říci, že klasická logika se s intuicionistickou neshodnou v názoru na některý logický operátor, například negaci, musíme předpokládat, že symbol $\neg$ intuicionistické logiky (tj. intuicionistická negace) má být skutečně *tímtéž* operátorem jako symbol $\neg$ klasické logiky (klasická negace). Musíme tedy trvat na tom, že se *nejedná* o dva různé operátory (pro které máme tentýž znak jenom proto, že jsou si v některých ohledech podobné). Podle čeho lze však rozhodnout, zda jde o dvě neslučitelné verze téhož operátoru, nebo jenom o dva různé operátory, které mohou klidně existovat vedle sebe? Řekneme-li, že dva operátory jsou stejné, jestliže stejně fungují v rámci úsudků, pak prostě vůbec nebude dávat smysl hovořit o různých verzích téhož operátoru – intuicionistická a klasická negace budou různé operátory, jakmile se budou byť sebeméně lišit. Nabízí se samozřejmě možnost říci, že dva operátory dvou různých logik jsou jednom různými verzemi téhož operátoru, jestliže mají být oba reglementací téhož výrazu přirozeného jazyka; avšak například právě v případě negace lze toto kritérium uplatnit jenom s velkými obtížemi, protože, jak jsme již zmínili, operátor negace nereglementuje žádný jednoznačně daný prvek přirozeného jazyka, ale spíše extrahuje něco, co je v přirozeném jazyce dosti složitým lexikálně gramatickým jevem.

To, že se v intuicionistické logice nepřijímá zákon vyloučeného třetího má významný důsledek z pohledu dokazování. Zatímco v klasické logice se běžně přijímá jako uspokojivý důkaz tzv. důkaz sporem, tj. důkaz, kdy z předpokladu, že nějaký výrok A je pravdivý dokážeme spor a tím je dokázáno, že je pravdivá negace A, v intuicionistické logice se takové důkazy neuznávají. Jako důkazy se tak berou jen tradiční – konstruktivní – důkazy.

Intuicionistická logika má tradičně uplatnění zejména v matematice a je upřednostňována těmi matematiky, kteří kladou na dokazování v matematice maximální nároky. Intuicionistickou logiku je tak možné brát jak jako alternativní přístup k logice, který pracuje s odlišným jazykem (a potažmo s poněkud odlišnou matematikou) tak prostě prostě jako systém, který pracuje se stejným jazykem jako klasická logika, ale klade na dokazování poněkud přísnější nároky.