

# MECHANIKA KONTINUA

Jiří Plešek

7. prosince 2009

# Obsah

|          |                                            |           |
|----------|--------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Přehled poznatků</b>                    | <b>3</b>  |
| 1.1      | Termodynamika pevných látek . . . . .      | 3         |
| 1.1.1    | První zákon termodynamiky . . . . .        | 4         |
| 1.1.2    | Druhý zákon termodynamiky . . . . .        | 4         |
| 1.1.3    | Disipační nerovnost . . . . .              | 5         |
| 1.1.4    | Helmholtzova volná energie . . . . .       | 5         |
| 1.1.5    | Termoelasticita . . . . .                  | 6         |
| 1.1.6    | Duhamelův-Neumannův model . . . . .        | 8         |
| 1.1.7    | Cvičení . . . . .                          | 9         |
| 1.2      | Tensorový tvar modelů elasticity . . . . . | 10        |
| 1.2.1    | Cvičení . . . . .                          | 10        |
| <b>2</b> | <b>Kinematika</b>                          | <b>11</b> |
| 2.1      | Lagrangeův popis . . . . .                 | 12        |
| 2.1.1    | Cvičení . . . . .                          | 12        |
| 2.2      | Eulerův popis . . . . .                    | 13        |
| 2.2.1    | Cvičení . . . . .                          | 13        |
| <b>3</b> | <b>Zákony mechaniky kontinua</b>           | <b>15</b> |
| 3.1      | Zákon zachování hmotnosti . . . . .        | 15        |
| 3.1.1    | Cvičení . . . . .                          | 15        |
| 3.2      | Zákon zachování hybnosti . . . . .         | 15        |
| 3.2.1    | Cvičení . . . . .                          | 15        |
| 3.3      | Zákon zachování momentu hybnosti . . . . . | 16        |
| 3.4      | Zákon zachování energie . . . . .          | 16        |
| 3.4.1    | Cvičení . . . . .                          | 16        |
| 3.5      | Clausiova-Duhemova nerovnost . . . . .     | 16        |
| <b>4</b> | <b>Základní úlohy mechaniky kontinua</b>   | <b>17</b> |
| 4.1      | Mechanika pevných látek . . . . .          | 17        |

|                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| 4.1.1 Cvičení . . . . .          | 17        |
| 4.2 Mechanika tekutin . . . . .  | 17        |
| <b>A Použitá matematika</b>      | <b>18</b> |
| A.1 Spektrální rozklad . . . . . | 18        |
| A.2 Odmocnina matice . . . . .   | 19        |

# Kapitola 1

## Přehled poznatků

V této kapitole jsou shrnuty vstupní informace, které jsou potřebné pro studium dalšího textu.

V první části se zabýváme jednoduchou úlohou – případem jednoosé napjatosti, která nastává například v osově zatížených prutech. Cílem je ukázat význam disipační nerovnosti pro návrh materiálového modelu a současně upozornit na některé matematické operace, které se při tom často používají.

Ve druhé části je podrobně analyzován model elasticity při prostorové napjatosti. Důležitý zde není ani tak fyzikální obsah, jako spíš způsob, jakým se uplatňuje tenzorový počet. Postupně jsou probrány . . . .

### 1.1 Termodynamika pevných látek

Uvažujme jednoosou úlohu podle Obr. 1.1. Zkušební tyč o délce  $l$  a průřezu  $A$  je zatížena silou  $F$ . Měříme též absolutní (termodynamickou) teplotu  $T$  v kelvinech.

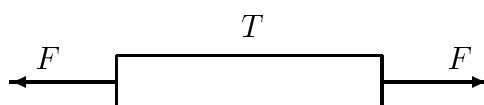
Deformace považujeme za malé, tj. nerozlišujeme mezi výchozí a okamžitou délkou,  $l = l_0$ , stejně tak průřez zůstává přibližně konstantní,  $A = A_0$ . Z toho důvodu můžeme snadno definovat napětí

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

a poměrné prodloužení

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.2)$$

Napětí je zjevně homogenní – v každém průřezu stejné – a není tudíž funkcí souřadnic. Rozložení teploty rovněž předpokládáme homogenní. Později se na tato zjednodušení



Obr. 1.1: Jednoosá napjatost. Průřez tyče je  $A$ , délka  $l$ .

(malé deformace a homogenní pole) omezovat nebudeme, pro začátek je však výhodné problém maximálně zjednodušit.

V této chvíli ještě nebyl specifikován materiál, z něhož je tyč vyrobena, a v tomto ohledu je naše úloha zcela obecná. Obr. 1.1 může například znázorňovat válec s plynem apod.

### 1.1.1 První zákon termodynamiky

Vnitřní energie  $U$  představuje součet všech forem energií obsažených v tyči. Hustotu energie, vztaženou na jednotku objemu označme jako  $u$ , tj.

$$u = \frac{U}{V} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (1.3)$$

Tepelný výkon  $\dot{Q}$  ve wattech definujeme jako kladný, pokud teplo proudí dovnitř materiálu a jako záporný, pokud je odváděno ven. Hustota tepelného toku je

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (1.4)$$

Analogicky pro mechanický výkon

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (1.5)$$

Tento výraz můžeme ještě upravit

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} = \frac{F\dot{l}}{Al} = \sigma\dot{\epsilon} \quad (1.6)$$

Poslední vzorec je naprosto univerzální. Později ukážeme že platí i ve třech dimenzích, pro velké deformace a pro libovolný materiál. Můžeme jej proto použít jak v mechanice pevných látek, tak v mechanice tekutin.

První zákon termodynamiky bilancuje celkovou energii, mechanickou práci a přivedené teplo

$$\boxed{\dot{q} + \dot{w} = \dot{u}} \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Druhý zákon termodynamiky

Zavedeme entropii  $S$  a její hustotu  $\eta$  pomocí

$$\eta = \frac{S}{V} \text{ [J/m}^3\text{K]} \quad (1.8)$$

Základní formulaci druhého zákona převezmeme z termodynamiky plynů

$$\boxed{\dot{\eta} \geq \frac{\dot{q}}{T}} \quad (1.9)$$

Pro obecně nehomogenní rozložení teplotního pole v kontinuu bude později nutno tuto formulaci zobecnit. Na tomto místě pouze připomeňme, že výskyt rovnítka “=” v předchozí nerovnosti je nutnou podmínkou pro to, aby byl termodynamický děj vratný. Není to však podmínka postačující.

Funkce  $u$  a  $\eta$ , vstupující do obou bilancí (1.7) a (1.9) musejí být předem dány a určují typ materiálu. V další části ukážeme, že identifikace vnitřní energie a entropie vskutku definuje všechny podstatné materiálové vlastnosti. Tak například Hookeův zákon, popisující odezvu pružného tělesa, jednoznačně vyplývá z jisté struktury  $u$  a  $\eta$ . To se může zdát na první pohled poněkud překvapující.

### 1.1.3 Disipační nerovnost

Tepelná verze druhého zákona termodynamiky (1.9) může být nahrazena tzv. *disipační nerovností*. Ačkoliv se jedná o ekvivalentní vyjádření druhého zákona (v tomto odstavci nebudeme zavádět žádně nové fyzikální předpoklady), v mechanice kontinua se s takovou nerovností mnohem snáze pracuje.

Užitím (1.7) nejprve eliminujeme  $\dot{q}$ , což vede k nerovnosti

$$\dot{\eta}T \geq \dot{q} = \dot{u} - \dot{w} \quad (1.10)$$

Časového přírůstku entropie se nyní zbavíme obratem známým jako Legendreova transformace. Člen na levé straně se doplní na derivaci součinu (podobně jako při integraci per partes)

$$\dot{\eta}T = (\eta T)' - \eta \dot{T} \quad (1.11)$$

a dosazení zpět do (1.10) dává po jednoduché úpravě

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \dot{u} - (\eta T)' = (u - \eta T)' \quad (1.12)$$

Oblá závorka má fyzikální rozměr hustoty energie, což motivuje následující definici

$$\psi := u - T\eta \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (1.13)$$

Nově zavedená energie,  $\psi$ , se nazývá Helmholtzova volná energie. Znaménko “:=” budeme používat ve smyslu “je definováno.”

Finální tvar disipační nerovnosti je

$$\boxed{-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \dot{\psi}} \quad (1.14)$$

Zhruba řečeno, část přivedené energie za jednotku času  $\dot{w}$  se v materiálu uloží ve formě využitelné energie  $\dot{\psi}$  a zbytek se disipuje. Odvozená nerovnost plně nahrazuje formulaci (1.9) a v tomto tvaru ji také budeme dále využívat.

### 1.1.4 Helmholtzova volná energie

Volná energie  $\psi$  je definována vztahem (1.13). Pro její názornou interpretaci uvažujme isotermickou změnu  $T = konst.$  mezi rovnovážnými stavy 1 a 2. Podle disipační nerovnosti musí platit

$$\Delta w \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (1.15)$$

Rozdíl energií na pravé straně nás upozorňuje na to, že  $\psi$  je stavová veličina. Má smysl mluvit o  $\psi_1$  jako o energii přiřazené stavu 1 a o  $\psi_2$  přiřazené stavu 2. Naopak práce není stavová veličina, takže  $\Delta w \neq w_2 - w_1$ . Symbol  $\Delta w$  je třeba chápat vcelku, přičemž příslušný integrál z  $\dot{w}$  je dráhově závislý.

Přejdeme nyní k cyklickému (kruhovému) ději  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . V průběhu zatížení, při přechodu  $1 \rightarrow 2$ , platí

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (1.16)$$

Po odlehčení do původního stavu,  $2 \rightarrow 1$ , zase máme

$$\Delta w_o \geq \psi_1 - \psi_2 \quad (1.17)$$

Začazením obou nerovností za sebe

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \geq -\Delta w_o \quad (1.18)$$

Předpokládejme navíc, že při zatížení je třeba dodávat práci,  $\Delta w_z > 0$ , a při odlehčení se část energie získá zpět,  $\Delta w_o < 0$ . Takové situace například vznikne při stlačování a uvolňování pružiny. Je tedy  $\Delta w_z = |\Delta w_z|$  a  $\Delta w_o = -|\Delta w_o|$ , a proto

$$|\Delta w_z| \geq \psi_2 - \psi_1 \geq |\Delta w_o| \quad (1.19)$$

Je vidět, že z materiálu nemůžeme dostat více energie, než tam bylo vloženo, což není jistě nijak překvapující. Zajímavější je si uvědomit, že  $\psi$  hraje roli deformační energie. Je to v principu využitelná energie, která se rovná vykonané práci pouze tehdy, když celý proces proběhl ideálně. V opačném případě se sice energie neztratí – zachová se jako vnitřní energie – ale nebude již plně k dispozici. To je podstata disipace.

Pojem deformační energie se používá v mechanice, pojem Helmholtzovy volné energie v termodynamice. Přes terminologickou různost je fyzikální obsah těchto pojmů přesně stejný. Jsou to synonyma.

### 1.1.5 Termoelasticita

Podívejme se nyní na některé příklady, které ukazují, jakým způsobem se termodynamické zákony využívají v materiálovém inženýrství.

Nechť je stav materiálu zkušební tyče jednoznačně popsán dvěma stavovými veličinami: poměrným prodloužením  $\epsilon$  a teplotou  $T$ . Všechny ostatní veličiny,  $\psi$ ,  $u$ ,  $\eta$  a  $\sigma$ , budou podle tohoto předpokladu vyjádřeny jako funkce dvou nezávisle proměnných  $\epsilon$  a  $T$ . Takový hypotetický materiál nazýváme *termoelastickým*.

Díky speciální struktuře materiálových funkcí, lze jejich časové derivace provést podle pravidla pro derivování složené funkce. Pro volnou energii  $\psi(\epsilon, T)$  například platí

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (1.20)$$

Tento výraz dosadíme do disipační nerovnosti (1.14)

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (1.21)$$

Podle (1.6) je  $\dot{w} = \sigma\dot{\epsilon}$ , čímž lze předchozí vztah převést na

$$-\left(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right)\dot{T} + \left(\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}\right)\dot{\epsilon} \geq 0 \quad (1.22)$$

Ukážeme, že pro splnění právě odvozené podmínky je nezbytné, aby byly obě závorky nulové, tj.

$$\boxed{\sigma = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}} \quad (1.23)$$

a současně

$$\boxed{\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T}} \quad (1.24)$$

Tím jsme získali dva velmi důležité konstitutivní vztahy. Disipační nerovnost je splněna triviálně se znaménkem “=”.

Důkaz se opírá o podobné argumenty, jako odvození metody Lagrangeových multiplikátorů. Podmínka (1.22) platí obecně, musí tudíž platit i ve speciálním případě  $\dot{T} = 0$ . Potom

$$f(\epsilon, T)\dot{\epsilon} \geq 0 \quad (1.25)$$

když jsme označili

$$f(\epsilon, T) := \sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} \quad (1.26)$$

Pokud by  $f$  nebyla nulová, nastala by jedna z následujících možností

$$f > 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \quad \text{nebo} \quad f < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \leq 0 \quad (1.27)$$

Podle předpokladu však  $f$  nezávisí na časové derivaci  $\dot{\epsilon}$ , která může být volena libovolně. To vede ke sporu – kdyby například byla v jistém stavu  $f(\epsilon, T) > 0$ , mohli bychom při konstantní teplotě deformaci zmenšit,  $\dot{\epsilon} < 0$ , což by v (1.27) porušilo první požadavek. Proto  $f \equiv 0$  a platí (1.23). Analogicky se prokáže platnost (1.24).

Nakonec můžeme vypočítat sdělené teplo. Z definice (1.13) nejprve určíme vnitřní energii a tu derivujeme podle času

$$\dot{u} = (\psi + T\eta)' = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}\dot{\epsilon} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \quad (1.28)$$

Vzhledem k (1.24) se prostřední dva členy zruší a pomocí (1.23) vyjde

$$\dot{u} = \sigma\dot{\epsilon} + T\dot{\eta} = \dot{w} + T\dot{\eta} \quad (1.29)$$

Porovnání se základní formulací prvního zákona termodynamiky (1.7) vede k výsledku  $\dot{q} = T\dot{\eta}$ , a tudíž pro tento model platí

$$\boxed{\dot{\eta} = \frac{\dot{q}}{T}} \quad (1.30)$$

To je ovšem (1.9) se znaménkem “=”, takže v tomto smyslu se jedná o ideální proces.



Na závěr ještě jednou zrekapitulujeme hlavní rovnice materiálového modelu termoeleasticity. Předpokládáme, že existuje deformační energie s vlastnostmi

$$\exists \psi(\epsilon, T) \Rightarrow \sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.31)$$

Přenos tepla se určí ze vzorce

$$\dot{q} = T\dot{\eta} \quad (1.32)$$

Funkci  $\psi(\epsilon, T)$  je nutné navrhnout ve shodě s experimentem. O tom pojednává další odstavec.

### 1.1.6 Duhamelův-Neumannův model

Nejjednodušší pojetí termoeleasticity vychází z toho, že celkové přetvoření je dáno součtem deformace od napětí a teplotní dilatace

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \quad (1.33)$$

Modul pružnosti  $E$  a součinitel délkové roztažnosti  $\alpha$  budeme považovat za konstantní. Teplotní rozdíl

$$\Delta T = T - T_0 \quad (1.34)$$

je vztažen k teplotě okolí  $T_0$ , např.  $T_0 = 300$  K. Vyjádřením napětí získáme *Duhamelův-Neumannův* model materiálu

$$\boxed{\sigma = E(\epsilon - \alpha \Delta T)} \quad (1.35)$$

Jak dalece je tento model kompatibilní se vztahy (1.23), (1.24) a (1.30)?

Integrací napětí podle deformace určíme deformační energii

$$\psi(\epsilon, T) = \frac{1}{2}E\epsilon^2 - E\alpha\Delta T\epsilon + f(T) \quad (1.36)$$

kde  $f(T)$  je libovolná funkce teploty. Entropie plyne z (1.24) jako

$$\eta(\epsilon, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = E\alpha\epsilon - \frac{df}{dT} \quad (1.37)$$

Ze vztahu (1.30) dostaneme sdělené teplo

$$\dot{q} = T\dot{\eta} = TE\alpha\dot{\epsilon} - T\frac{d^2f}{dT^2}\dot{T} \quad (1.38)$$

Označme

$$c(T) := -T\frac{d^2f}{dT^2}\dot{T} \quad (1.39)$$

Jelikož  $f(T)$  byla libovolná funkce, zůstává i  $c(T)$  prozatím neurčená. Pro přenos tepla tak dostáváme

$$\boxed{\dot{q} = \alpha TE\dot{\epsilon} + c\dot{T}} \quad (1.40)$$

První člen představuje tzv. *termomechanickou vazbu*. Je to množství tepla generované či pohlcené deformováním kontinua při konstantní teplotě. Tak například při zatížení tlakem je  $\dot{\epsilon} < 0$  a nemá-li dojít k ohřevu ( $\dot{T} = 0$ ), teplo je zapotřebí odvádět ven. Při zatížení tahem by naopak bylo nutné teplo přivádět.

Všimněme si ještě parametru  $c$ . Evidentně se jedná o *součinitel tepelné kapacity*. Ačkoliv jsme považovali  $E$  a  $\alpha$  za konstantní, výsledek (1.39) naznačuje, že  $c$  je funkcí teploty. Vstupní předpoklady jistě nebyly zcela přesné, přesto však můžeme usoudit, že tepelná kapacita bude mnohem citlivější na změnu teploty než na změnu deformace či napětí. To se skutečně experimentálně potvrzuje, takže u pevných látek většinou nerozlišujeme mezi  $c_p$  a  $c_v$ .

### Příklad

Uvažujme isotermickou tahovou zkoušku a zatížení 100 MPa. Potom

$$\Delta q = \alpha T E \Delta \epsilon = \alpha T \Delta \sigma \simeq 10^{-5} \times 300 \times 100 \times 10^6 = 3 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Přetvárná práce je

$$\Delta w = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{(10^8)^2}{2 \times 2 \times 10^{11}} = 0.25 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Vynaložená práce je přibližně desekrát menší než sdělené teplo!

### 1.1.7 Cvičení

1. Odvoďte (1.23) z podmínky (1.22).
2. Uvažujme Duhamelův-Neumannův model s konstantními parametry  $\alpha$ ,  $E$  a  $c$ .

(a) Dokažte

$$\eta(\epsilon, T) = \alpha E \epsilon + c \ln \frac{T}{T_r}$$

kde  $T_r$  je referenční teplota, při níž  $\eta(0, T_r) = 0$ .

(b) Určete  $\eta_2 - \eta_1$  a ukažte, že tento rozdíl nezávisí na volbě  $T_r$ .

3. Dosaďte  $\alpha = 10^{-5} \text{ 1/K}$ ,  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $c_p = 500 \text{ J/kg K}$  a  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ . Vypočítejte změnu entropie a porovnejte výsledky při těchto procesech:

(a) Ohřev volné tyče z  $20^\circ \text{ C}$  na  $100^\circ \text{ C}$ .

(b) Isotermické zatížení napětím z nuly na 100 MPa.

4. Zvolme  $T_r = T_0$  a uvažujme isotermický děj  $T = T_0$ .

(a) Určete  $\psi(\epsilon)$ ,  $\eta(\epsilon)$  a  $u(\epsilon)$ .

(b) Zakreslete grafy funkcí  $\psi(\epsilon)$ ,  $T_0 \eta(\epsilon)$  a  $u(\epsilon)$ .

## 1.2 Tensorový tvar modelů elasticity

...Přejdeme nyní k prostorové napjatosti. I tentokrát budeme předpokládat existenci deformační energie, avšak při isotermickém zatížení  $T = konst$ , hustota energie bude záviset na všech složkách tensoru deformace...

### 1.2.1 Cvičení

1. Je dána reálná matice

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

- (a) Určete vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  jako funkce  $U_{11}, U_{12}, U_{21}$  a  $U_{22}$ .  
 (b) Dokažte, že pokud  $[U]$  je symetrická, jsou tato čísla reálná.

2. Ukažte, že modální matice typu  $3 \times 3$  je ortonormální

$$[\Phi]^T[\Phi] = [I]$$

Přesvědčte se o tom roznásobením a využitím faktu, že vlastní vektory tvoří ortonormální systém.

3. Dokažte, že pozitivně definitní matice má kladná vlastní čísla a obráceně, tj.

$$[U] \text{ sym+def} \Leftrightarrow \lambda_k > 0$$

Návod: použijte spektrální rozklad.

4. Nechť matice  $[U]$  a  $[V]$  reprezentují tensory druhého řádu. Ukažte, že jejich součin

$$[T] = [U][V]$$

se rovněž transformuje jako tensor druhého řádu.

# Kapitola 2

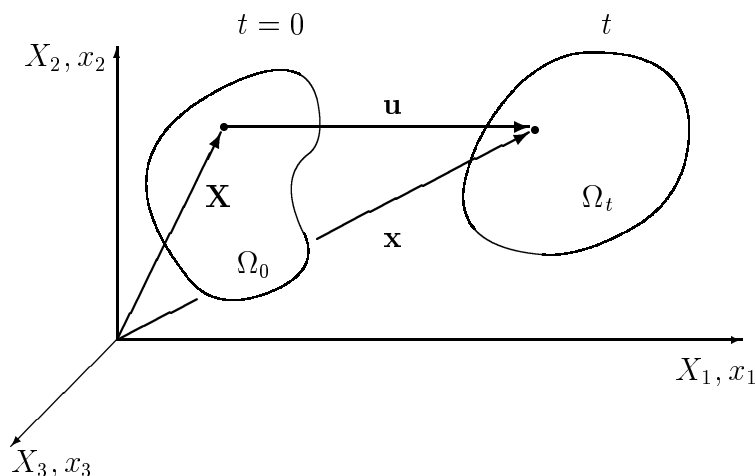
## Kinematika

Základní kinematické veličiny, popisující deformaci kontinua, vyplývají z Obr. 2.1. Libovolná částice  $\mathbf{X}$  se v čase  $t$  přemístí do nové pozice  $\mathbf{x}$  vektorem posunutí  $\mathbf{u}$ . Je tedy

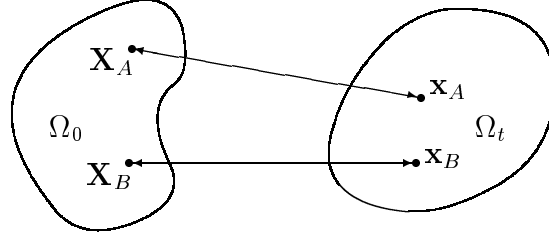
$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}} \quad (2.1)$$

Průvodič  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  se nazývá *materiálový bod* (též částice), zatímco  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  je *bod prostoru*. Oba průvodiče umožňují zavést dva typy souřadnic: *materiálové souřadnice*  $X_i$  (Lagrangeovy) a *prostorové souřadnice*  $x_j$  (Eulerovy). Všechny souřadnice budeme vztahovat ke společné kartézské vektorové bázi.

Kinematický rozbor je v rámci této kapitoly rozdělen na dvě části. V první části je vysvětlen Lagrangeův popis. Pro něj je typické zavedení dvou množin: pevně zvolené referenční oblasti  $\Omega_0$  a přetvořené oblasti  $\Omega_t$ . Přetvořená oblast je proměnná a obsahuje v čase  $t$  tytéž materiálové částice jako referenční oblast na počátku,  $t = 0$ . Eulerovský popis je naopak charakterizován tím, že se v prostoru pevně zvolí kontrolní objem  $\Omega$ , který ovšem bude v různých časech obsahovat různé částice. Úlohu nebudeme linealizovat ani jinak zjednodušovat, tj. deformaci kontinua budeme obecně považovat za velkou. Za tohoto předpokladu jsou oba kinematické přístupy zcela rovnocenné.



Obr. 2.1: Přetvoření kontinua.



Obr. 2.2: Regulárnost deformace.

## 2.1 Lagrangeův popis

V Lagrangeovském (materiálovém) pojetí jsou všechna fyzikální pole definována vzhledem k  $\Omega_0$  jako funkce souřadnic  $X_i$ . Primární veličinou je pole posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , které prostřednictvím (2.1) zavádí funkci

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) =: \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

s počáteční podmínkou

$$\chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \quad (2.3)$$

Tato funkce mapuje v libovolném čase  $t$  oblast  $\Omega_0$  na  $\Omega_t$ , neboli

$$\chi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \quad (2.4)$$

Znaménko '=' bylo i zde použito ve významu definice.

Představme si nyní, že jsou v  $\Omega_0$  dány dva různé body  $\mathbf{X}_A \neq \mathbf{X}_B$ . Podle Obr. 2.2 se tyto body zobrazí na jiné dva body  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in \Omega_t$ . Předpokládáme-li, že dvě různé materiálové částice nemohou v tomtéž čase zaujmout stejné místo v prostoru, bude  $\mathbf{x}_A \neq \mathbf{x}_B$ . Jak je vidět z Obr. 2.2, každému  $\mathbf{X}$  lze pak jednoznačně přiřadit  $\mathbf{x}$  a obráceně. Zobrazení  $\chi$  je tudíž regulární a existuje inverze

$$\chi^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega_0 \quad (2.5)$$

Zřejmě můžeme psát

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

Odtud mimo jiné vyplývá, že každé fyzikální pole může být vyjádřeno jako funkce argumentu  $X_i, t$ , stejně jako  $x_j, t$ . V tomto smyslu jsou Lagrangeův a Eulerův popis ekvivalentní. Zobrazení (2.4) a (2.5) budeme pokládat za diferencovatelná.

### 2.1.1 Cvičení

1. Zadány jsou tyto vztahy pro posunutí

$$\begin{aligned} u_1(X_1, X_2, t) &= kX_2t \\ u_2(X_1, X_2, t) &= 0 \end{aligned}$$

kde  $k$  je reálné číslo.

- (a) Zakreslete deformaci jednotkové oblasti  $\Omega_0 \equiv (0, 1) \times (0, 1)$ .
  - (b) Určete  $\chi^{-1}$  a dokažte regulárnost.
2. Dokažte, že gradient posunutí je tensor druhého řádu.  
Návod: Dokažte  $[z'] = [A][z][A]^T$ .
  3. Uvažujme 2D úlohu rovinné deformace. Nechť  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$  v  $\Omega_0$ . (K takové situaci by např. došlo, kdybychom v lineární mechanice vyšetřovali pohyb volného, silami nezatíženého tělesa.)
    - (a) Určete  $u_1(X_1, X_2, t)$  a  $u_2(X_1, X_2, t)$ .
    - (b) V jakém smyslu nalezené řešení odpovídá pohybu tělesa jako tuhého celku?
    - (c) Pro vypočtené pole posunutí určete Greenův-Lagrangeův tensor deformace a ukažte, že  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ .
  4. Dokažte, že Cauchyův-Greenův deformační tensor je symetrický a pozitivně definitní.
  5. Víme, že existuje pravostranný rozklad deformačního gradientu  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Tento rozklad je jednoznačný. Dokažte
 
$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \text{kde } \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$$
 rovněž jednoznačně.
  6. Počítejte  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  rozklad pro Příklad 1 a Příklad 2.
  7. Provedte  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  rozklad pro Cvičení 3.

## 2.2 Eulerův popis

jkasdhkjdh

### 2.2.1 Cvičení

1. V Příkladu 3 dosadte  $\varphi = \omega t$ .
  - (a) Určete Lagrangeovské a Eulerovské vyjádření složek vektoru rychlosti tak, aby
 
$$\mathbf{V}(X_i, t) = \mathbf{v}(x_j, t)$$
  - (b) Vypočítejte dostředivé zrychlení jako materiálovou derivaci

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{x}$$

2. Dokažte jednoznačnost rozkladu tensoru na symetrickou a antisymetrickou část

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

3. Počítejte  $\dot{\mathbf{e}}$ ,  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{D}$  pro Příklad 0 a zakreslete průběhy funkcí  $\epsilon_{22}(t)$  a  $D_{22}(t)$  do jednoho grafu. Porovnejte výsledky.
4. V Příkladu 2 dosadte  $\tan \gamma = kt$ , počítejte  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}$  a pro tento příklad ukažte

$$\mathbf{W} \neq 0, \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$$

# Kapitola 3

## Zákony mechaniky kontinua

### 3.1 Zákon zachování hmotnosti

#### 3.1.1 Cvičení

1. V Příkladu 0 je jacobíán  $J = 1 + bt$  a rychlostní pole

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ bX_2 + 2ct \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ b\frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} + 2ct \end{array} \right\}$$

kde  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou reálná čísla.

- (a) Vypočítejte  $\text{div } \mathbf{v}$  a  $\text{Div } \mathbf{v}$ . Proč se výsledky liší?
- (b) Dosadte vypočtenou divergenci do rovnice kontinuity

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0$$

a integrujte s počáteční podmínkou

$$t = 0 : \rho = \rho_0$$

- (c) Získané řešení porovnejte s vzorcem  $J\rho = \rho_0$ .

### 3.2 Zákon zachování hybnosti

#### 3.2.1 Cvičení

1. Dokažte, že Cauchyho napětí je tensor druhého řádu.  
Návod: Dokažte  $[\sigma'] = [A][\sigma][A]^T$ .
2. Zatížení od vlastní tíhy je dáno integrálem:

$$\text{gravitační síla} = \int_V \rho \mathbf{g} \, dV$$



Identifikujte objemové síly  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{B}$ . Jaký to má důsledek pro výpočet odpovídající pravé strany v MKP?

3. Je dán Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

a deformace podle Příkladu 1. Určete 1. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí.

### 3.3 Zákon zachování momentu hybnosti

### 3.4 Zákon zachování energie

#### 3.4.1 Cvičení

1. Uvažujme stacionární děj  $\kappa = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  a  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Předpokládejme platnost Fourierova vztahu

$$\mathbf{h} = -\lambda \text{grad} T, \quad \lambda = \textit{konst.}$$

Ukažte, že rovnice vedení tepla přechází v Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 T = 0$$

2. Je dán Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

a deformace podle Příkladu 1. Určete 2. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí. Porovnejte  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{P}$ .

3. Dokažte, že  $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$  jsou energeticky konjugované tensory, tj.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dV = \int_{V_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV_0$$

### 3.5 Clausiova-Duhemova nerovnost

# Kapitola 4

## Základní úlohy mechaniky

### 4.1 Mechanika pevných látek

#### 4.1.1 Cvičení

1. V Příkladu 0 je jacobíán  $J = 1 + bt$  a rychlostní pole

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ bX_2 + 2ct \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ b\frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} + 2ct \end{array} \right\}$$

kde  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou reálná čísla.

- (a) Vypočítejte  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  a  $\operatorname{Div} \mathbf{v}$ . Proč se výsledky liší?
- (b) Dosadte vypočtenou divergenci do rovnice kontinuity

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

a integrujte s počáteční podmínkou

$$t = 0 : \rho = \rho_0$$

- (c) Získané řešení porovnejte s vzorcem  $J\rho = \rho_0$ .

### 4.2 Mechanika tekutin

# Příloha A

## Použitá matematika

### A.1 Spektrální rozklad

**Věta:** Necht'  $\mathbf{U}$  je reálná, symetrická matice řádu  $n$ . Této matici přísluší reálná vlastní čísla  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  a reálné vlastní vektory  $\varphi_k$ . O nich budeme předpokládat, že jsou ortonormální, tj.  $\varphi_i^T \varphi_j = \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol. Vyjádření

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \varphi_k^T \quad (\text{A.1})$$

nazýváme *spektrálním rozkladem* matice  $\mathbf{U}$ . Alternativně můžeme psát

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi}^T \quad (\text{A.2})$$

kde jsme zavedli ortonormální modální matici  $\mathbf{\Phi}$  složenou po sloupcích z vlastních vektorů

$$\mathbf{\Phi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_n], \quad \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T \quad (\text{A.3})$$

a diagonální matici vlastních čísel

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n] \quad (\text{A.4})$$

**Důkaz:** Problém vlastních čísel přepíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{U} \mathbf{\Phi} = [\mathbf{U} \varphi_1 \ \mathbf{U} \varphi_2 \ \cdots \ \mathbf{U} \varphi_n] = [\lambda_1 \varphi_1 \ \lambda_2 \varphi_2 \ \cdots \ \lambda_n \varphi_n] = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A.5})$$

Jelikož  $\varphi_k$  tvoří ortonormální systém, je  $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$ , neboli  $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T$  a z (A.5) ihned plyne  $\mathbf{U} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi}^T$ . Zápisy (A.1) a (A.2) jsou ekvivalentní, jak se lze snadno přesvědčit roznásobením maticového výrazu (A.2).

**Poznámka:** Věta o spektrálním rozkladu má především teoretický význam, neboť usnadňuje řadu důkazů a odvození. Z praktického hlediska se snažíme výpočtu vlastních čísel, jako numericky dosti nákladné operaci, spíše vyhnout. Pokud je to přesto nezbytné, dáváme přednost numerickým metodám, zejména *Jacobiho metodě*, viz např. [1]. Pro matice řádu 3 a vyššího je tento postup rychlejší než analytické řešení a pro matice typu  $2 \times 2$  je pracnost srovnatelná.

## A.2 Odmocnina matice

**Věta:** Mějme symetrickou, pozitivně definitní matici  $\mathbf{C}$ . Potom existuje rovněž symetrická a pozitivně definitní matice  $\mathbf{U}$  taková, že  $\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{C}$ . Stručně píšeme

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \quad (\text{A.6})$$

Výpočet odmocniny je jednoznačný.

**Příklad:** Popsaná operace se snadno aplikuje na diagonální matice.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ avšak } \mathbf{U} \neq \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Požadované vlastnosti  $\mathbf{C}$  jsou tudíž nezbytné proto, aby se dala odmocnina vůbec provést, zatímco předpoklady kladené na  $\mathbf{U}$  zajišťují jednoznačnost výsledku.

**Existence:** Důkaz existence je možno spojit s popisem algoritmu výpočtu.

1. Vypočteme vlastní čísla  $\mu_k$  a vlastní vektory  $\varphi_k$  matice  $\mathbf{C}$ .
2. Jelikož  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní, jsou všechna vlastní čísla kladná a můžeme je odmocnit:  $\lambda_k = \sqrt{\mu_k} > 0$ . Sestrojíme modální matici z vlastních vektorů  $\mathbf{C}$  a diagonální matici odmocnin vlastních čísel

$$\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_n], \quad \Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n] \quad (\text{A.7})$$

3. Definujeme

$$\mathbf{U} = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (\text{A.8})$$

Takto získaná matice je určena svým spektrálním rozkladem. Z něj vyplývá, že  $\mathbf{U}$  je symetrická a pozitivně definitní (její vlastní čísla  $\lambda_k > 0$ ). Jelikož

$$\Lambda^2 = \Lambda \Lambda = \text{diag}[\lambda_1^2 \ \lambda_2^2 \ \cdots \ \lambda_n^2] = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_n] \quad (\text{A.9})$$

máme pro  $\mathbf{C}$  spektrální vyjádření

$$\mathbf{C} = \Phi \Lambda^2 \Phi^T \quad (\text{A.10})$$

Současně

$$\mathbf{U}^2 = \Phi \Lambda \Phi^T \Phi \Lambda \Phi^T = \Phi \Lambda^2 \Phi^T \quad (\text{A.11})$$

Je tedy  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ .

**Jednoznačnost:** Označme jako  $\tilde{\mathbf{U}}$  libovolnou matici splňující podmínky věty o odmocnině. Pro každé vlastní číslo  $\mu$  a odpovídající vlastní vektor  $\varphi$  matice  $\mathbf{C}$  je splněno

$$(\tilde{\mathbf{U}} + \sqrt{\mu} \mathbf{I})(\tilde{\mathbf{U}} - \sqrt{\mu} \mathbf{I})\varphi = (\tilde{\mathbf{U}}^2 - \mu \mathbf{I})\varphi = (\mathbf{C} - \mu \mathbf{I})\varphi = \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

Označíme-li  $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{U}} - \sqrt{\mu} \mathbf{I})\varphi$ , musí platit

$$(\tilde{\mathbf{U}} + \sqrt{\mu} \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{A.13})$$

To je možné jedině tehdy, když buďto  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  anebo  $-\sqrt{\mu}$  je vlastní číslo  $\tilde{\mathbf{U}}$ . Druhá možnost nepřichází v úvahu, protože pozitivně definitní matice nemůže mít záporné vlastní číslo. Zbývá

$$\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{U}} - \sqrt{\mu}\mathbf{I})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

Odtud plyne, že  $\sqrt{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  jsou vlastní číslo a vlastní vektor  $\tilde{\mathbf{U}}$ . V tom případě však lze matici  $\tilde{\mathbf{U}}$  vyjádřit pomocí spektrálního rozkladu ve tvaru (A.8), takže  $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ . Tento elegantní důkaz byl předložen Stephensonem [3].

# Literatura

- [1] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey 1996.
- [2] Chandrasekharaiah, D.S., Lokenath Debnath: *Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego 1994.
- [3] Stephenson, R.: On the uniqueness of the square root of a symmetric positive-definite tensor. *J. Elasticity*, **20**, pp. 213–214, 1980.