Vícehodnotové logiky

V rámci klasické logiky se přijímá princip bivalence – tedy, žádný výrok nemůže nabývat hodnoty jiné, než je *pravda* nebo *nepravda*, a že každý výrok má jednu z těchto hodnot. Můžeme ale také zavést třetí 'pravdivostní' hodnotu – tím získáme logiku, které se říká *trojhodnotová*.

První systém v rámci moderní logiky, který vzal tímto způsobem explicitně v úvahu třetí pravdivostní (či 'pravdivostní') hodnotu, prezentoval v roce 1920 polský logik Jan Łukasiewicz. (Za předchůdce, resp. současníky kteří svými úvahami směřovali k obdobným systémům logiky jsou označováni H. MacColl, C.S. Pierce, N.A. Vasiljev a E. Post.) Łukasiewiczova snaha o reformu klasické logiky byla motivována filosofickými úvahami, které se týkaly zejména problému pravdivostního ohodnocení výroků o nahodilých budoucích událostech. Na tento problém poukázal už Aristotelés, který k jeho ilustraci použil výrok o nahodilé budoucí události, který se postupně stal součástí 'logického folklóru':

Zítra bude námořní bitva.

Předpoklad, že výroky tohoto druhu mají jednu z dvojice pravdivostních hodnot *pravda* a *nepravda*, vede, jak si Aristotelés uvědomil, k problematickým důsledkům. Daný výrok totiž může být pravdivý pouze tehdy, pokud se bitva opravdu uskuteční, a nepravdivý pouze tehdy, pokud k ní ve skutečnosti nedojde. Předpokládáme-li tedy, že tu či onu z těchto hodnot (již nyní) má, jsme přirozeně vedeni k závěru, že o budoucnosti je už dnes rozhodnuto a vůle panovníků či rozhodnutí velitelů flotil ji nemohou nijak ovlivnit (nebo jsou již také předurčena?). Pokud je ale budoucnost už v současnosti takto determinována, pak, zdá se, nezbývá žádný prostor pro naše svobodné rozhodování.

O interpretaci Aristotelova názoru na tento problém se vedou spory. Łukasiewiczův postoj je však jednoznačný. Podle něj se logika musí s tímto problémem vypořádat tak, že připustí, že výroky mohou mít vedle hodnot 0 a 1 i takovou třetí hodnotu, jako je naše ×. Tabulky pro tradiční operátory použité v rámci trojhodnotové logiky, kterou Łukasiewicz navrhl, pak vypadají následovně:

	A	B	$\neg A$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\rightarrow B$
1.	1	1	0	1	1	1
2.	1	0	0	0	1	0
3.	1	×	0	×	1	×
4.	0	1	1	0	1	1
5.	0	0	1	0	0	1
6.	0	×	1	0	×	1
7.	×	1	×	×	1	1
8.	×	0	×	0	×	×
9.	×	×	×	×	×	1

Všimněme si, že za definicí tabulek pro konjunkci a disjunkci je jednoduchý princip: konjunkce je nepravdivá právě tehdy, když je alespoň jeden z konjunktů nepravdivý (bez ohledu na to, jakou hodnotu má ten druhý), a je pravdivá právě tehdy, když jsou pravdivé oba; podobně disjunkce je pravdivá právě tehdy, když je alespoň jeden z jejích konjunktů pravdivý, a je nepravdivá právě tehdy, když jsou oba nepravdivé. Implikace pak podobně jako v klasické logice odpovídá disjunkci svého konsekventu a negaci svého antecedentu, s jednou výjimkou – implikace, jejíž antecedent i konsekvent mají hodnotu ×, je Łukasiewiczem brána jako pravdivá. To nám může připadat poněkud neintuitivní, je však třeba si uvědomit, že zdánlivě intuitivnější varianta, při které bychom takové implikaci přiřadili nikoli hodnotu 1, ale hodnotu ×, by vyústila do situace, ve které by nebyla tautologií formule $A\rightarrow A$. Co víc, jak se snadno nahlédne, tautologií by nebyla *vůbec žádná* formule (takovou variantu trojhodnotové logiky prozkoumal Kleene, 1952).

$A\rightarrow A$ tedy tautologií Łukasiewicovy logiky je, mezi její tautologie však stále nepatří některé jiné tautologie logiky klasické, například zákon vyloučení třetího. To se na první pohled může zdát vcelku samozřejmé. Pokud se však zamyslíme nad Łukasiewiczovou motivací, pak se skutečnost, že $A\vee\neg A$ není vždy pravdivá, jako tak docela samozřejmá nejeví. Vezměme totiž za A takovou větu, jako je *Zítra bude námořní bitva*: i když připustíme, že tato věta zatím není ani pravdivá, ani nepravdivá, věta *Zítra bude nebo nebude námořní bitva* se zdá být i přesto pravdivá nepochybně. Jako ještě problematičtější se může jevit skutečnost, že v Łukasiewiczově systému není tautologií ani formule $\neg(A\wedge\neg A)$, která je v klasické logice známa jako zákon sporu. Obecně v Łukasiewiczově systému platí, že pravdivostní hodnota složené formule odpovídá v případě, kdy všechny v ní obsažené parametry nabývají hodnoty 1 či 0, hodnotě klasické.

Zanedlouho poté, co Łukasiewicz svou trojhodnotovou sémantiku vymezil takto designačně (sémanticky), byla nalezena i příslušná axiomatizace (M. Wajsbergem, 1931):

(1) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(2) $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(3) $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

(4) $((A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)\rightarrow A$

Z *A* a *A*$\rightarrow$*B* odvoď *B*

Můžeme mít samozřejmě i logiku, která má více než tři pravdivostní hodnoty. V průběhu 20. století byla navržena řada systémů čtyřhodnotové i pětihodnotové logiky a uvažovat lze samozřejmě i o logických systémech s vyšším počtem hodnot. Úvahy o hodnotách 'mezi' 0 a 1 pak zcela přirozeně vedou i k logice, v níž mohou výroky nabývat všech možných číselných hodnot mezi 0 a 1 (tedy *de facto* logice 'někonečně-hodnotové'). Systém tohoto druhu navrhl už sám Łukasiewicz. Dnes nám může za příklad systémů tohoto druhu posloužit zejména řada systémů tzv. fuzzy logiky, které vznikly v návaznosti na teorii fuzzy množin Lotfi Zadeha. Ten svou teorii zformoval na základě úvah o tom, že množiny, které jsou extenzemi běžných predikátů, nejsou ostře ohraničeny. Tak například jistě nalezneme spoustu lidských sídel, které jednoznačně patří do množiny velkoměst, a mnohem víc takových, která do této množiny jasně nepatří, ale v případě mnohých měst jistě nebude jejich příslušnost do této množiny jednoznačnou záležitostí. Tuto situaci můžeme reflektovat tím, že míru, s jakou například Bratislava patří do množiny velkoměst, ohodnotíme nějakým číslem mezi 0 a 1; nebo alternativně tak, že nějakou takovouto 'pravdivostní hodnotu' přisoudíme výroku *Bratislava je velkoměsto* – například usoudíme, že míře jeho pravdivosti odpovídá hodnota 0,7. Naproti tomu třeba výroku *Pardubice jsou velkoměsto* přisoudíme pravdivostní hodnotu, řekněme, 0.15.

Pro operátory fuzzy logiky samozřejmě nemůžeme sestavit žádné pravdivostní tabulky – ty by totiž zřejmě musely mít nekonečný počet řádků i sloupců. Jak závisí pravdivostní hodnota výroku tvořeného pomocí fuzzy operátorů na pravdivostních hodnotách jeho částí ale lze určit jiným způsobem. V případě negace obvykle stanovíme, že pravdivostní hodnota $\neg A$ se spočítá tak, že se od jedničky odečte pravdivostní hodnota *A* (negace výroku tak bude pravdivá přesně do míry odpovídající tomu, co chybí do pravdivosti negovanému výroku); v případě konjunkce to může být minimum pravdivostních hodnot konjunktů a v případě disjunkce maximum pravdivostních hodnot disjunktů.

Známe-li pravdivostní ohodnocení elementárních formulí (výrokových parametrů) pak můžeme vypočítat pravdivostní hodnoty formulí složených pomocí spojek používaných ve výrokové logice např. podle následujících poměrně intuitivních principů (existují nicméně i další způsoby, jak v rámci vícehodnotových logik určit hodnoty složených výroků, a tím vlastně alternativně vymezit význam jednotlivých spojek):

/A/ - pravdivostní hodnota výroku A

$/\neg A/ = 1 - /A/$

$/A \wedge B/ = \min [/A/, /B/]$

$/A \vee B/ = \max [/A/, /B/]$

$/A \rightarrow B/ =$ a) když $/A/ \leq /B/$ pak 1

b) když /A/ > /B/   pak (1 – (/A/ - /B/))

Vícehodnotová (resp. fuzzy) logika umožňuje logice vyrovnávat se s paradoxy vágnosti, které jsou někdy označovány jako paradoxy typu *sorites* (řecky hromada). Paradox hromady vychází ze dvou předpokladů (formulujeme-li ho jako úsudek, budou ony jeho premisami). První z nich říká:

Jedno zrnko písku netvoří hromadu písku.

Druhý pak tvrdí:

Z něčeho, co netvoří hromadu písku, nevznikne hromada tím, že k tomu přidáme jedno zrnko písku.

Obě tato výchozí tvrzení se zdají být neproblematicky pravdivá. Jak však snadno nahlédneme, vedou k závěru, že postupným přidáváním jakéhokoli počtu zrnek k jednomu zrnku písku nikdy nezískáme hromadu; ani kdybychom krok přidávání opakovali třeba stomiliónkrát. Pro jakékoli *n* lze totiž odvodit závěr:

n zrnek písku netvoří hromadu písku.

Z intuitivně pravdivých premis tak dostaneme očividně nepravdivý závěr.

Princip, díky němuž nám fuzzy logika umožňuje „uniknout“ paradoxnímu vyústění argumentu, je vcelku zřejmý. Narozdíl od klasické logiky máme nyní možnost zohlednit to, že druhá z premis není zcela „stoprocentně“ pravdivá. Přidáním jednoho zrnka totiž získáme něco, co je přece jen nepatrně více hromadou. Přiřadíme-li této premise např. pravdivostní hodnotu 0,99999, pak díky principům fuzzy logiky, které zde nebudeme detailně vysvětlovat, pravdivostní hodnota závěrů tvaru: *n zrnek písku netvoří hromadu* postupně, se zvyšujícím se *n* klesat. Závěr, že stomilión zrnek písku netvoří hromadu pak vyjde jako nepravdivý.