

Biotermodynamika

Přednášející: Prof. Ing. František Maršík, DrSc, <http://www.it.cas.cz/marsik>

<mailto:marsik@it.cas.cz>

Ústav termomechaniky AV ČR v.v.i., Dolejškova 5, 18200 Praha 8, tel.:+420 266050 3322

Matematický ústav University Karlovy, MFF UK, Sokolovská 73, 186 75 Praha 8

Stručná anotace předmětu:

Předmět pojednává o modelování biologických systémů a jejich částí. Otevřený biologický systém, vyměňuje se svým okolím hmotu, hybnost a energii, které vnitřními mechanizmy využívá pro zachování své existence. Obecný biologický systém je složen z pevných komponent (kostí, chrupavky), měkkých tkání (svaly, tuky) a tekutin (krev, sinovialní tekutiny) a proto je třeba při popisu vycházet z obecných zákonitostí mechaniky a termodynamiky těles a tekutin. Výchozími jsou zákony bilance hmoty (chemické reakce), bilance hybnosti (silové působení svalů), bilance energie (transformace různých forem energií mezi sebou) a bilance entropie (směry přeměny energií a látek).

Získané kompetence:

Student vybavený základními pojmy a metodami biotermodynamiky je schopen analyzovat i složité mechanické a biochemické procesy probíhající v živé hmotě, např. při diagnostice a léčení chorob kardiovaskulárního systému a poruchách skeletu, při návrhu mechanických náhrad tepen, kloubů a v neposlední řadě i při vývoji a aplikaci metod tkáňového inženýrství.

Témata přednášek:

Základní termodynamické pojmy, fenomenologická a mikroskopická interpretace vnitřní energie a entropie. Zákony bilance vícekomponentních chemicky reagujících systémů, tj. bilance hmotnosti - popis chemicky reagujících směsí, bilance hybnosti, vnitřní energie (I. zákon termodynamiky), bilance elektrického a magnetického indukčního toku a bilance entropie (II. zákon termodynamiky).

Souvislost vnitřní struktury systému a jeho fenomenologických vlastností, tj. elasticita, viskoelasticita, difuzivita, tepelná a elektrická vodivost apod.

Důsledky principu minimální produkce entropie na materiálové vlastnosti biologických systémů. Lineární nevratná termodynamika a základy chemické kinetiky a chemické termodynamiky.

Náplň cvičení:

Konkrétní aplikace obecných principů a metod budou probírány formou cvičení:

Enzymová kinetika Michaelise-Mentenove, termodynamika membránového transportu, generace mechanické síly ve svalu-výkon srdečního svalu, pulzační proudění krve v elastických trubicích (tepnách a žilách), model srdečně cévního systému člověka, modely přestavby (remodelace) kostí vlivem výživy a mechanické zátěže.

Literatura:

Alberts B., Bray D. a kol.: Základy buněčné biologie, Espero Publishing, Ústí nad Labem 2001

Valenta J. a kol. Biomechanika, Academia 1985

Maršík F., Dvořák I. : Biotermodynamika, Academia 1998

Kodíček M. Karpenko V. : Biofyzikální chemie Academia 2000

3. Najděte vztah pro odpor proudící krve v tepně o poloměru a za předpokladu laminárního proudění. Krev považujte za nestlačitelnou tekutinu s hustotou ρ , s konstantní viskozitou^{3.1} $\mu = konst.$

Řešení: **3.** Proudění nestlačitelné Newtonské tekutiny je popsáno zákony bilance hmotnosti

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

a bilance hybnosti

$$\rho \dot{v}^i + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^l} t_{dis}^{il}, \quad (3.2)$$

pro konstitutivní vztah

$$t_{dis}^{il} = 2\mu d^{(o)il}, \quad d^{(o)il} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \frac{\partial v^l}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^k}{\partial x^l} \delta^{il} \right). \quad (3.3)$$

Po dosazení konstitutivního vztahu (3.3) do bilance hybnosti (3.2) za podmínky (3.1) dostáváme

$$\rho \dot{v}^i + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \mu \frac{\partial^2 v^i}{(\partial x^l)^2} = \mu \Delta v^i. \quad (3.4)$$

Za předpokladu stacionárního proudění ve válcových souřadnicích r, φ, z mají rovnice (3.1) a (3.4) tvar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\rho \partial r} = \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.6)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{\partial p}{\rho r \partial \varphi} = \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad (3.7)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial v_z}{r \partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\rho \partial z} = \nu \Delta v_z, \quad (3.8)$$

pro

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (3.9)$$

přičemž $\nu = \mu/\rho$ je kinematická viskozita krve.

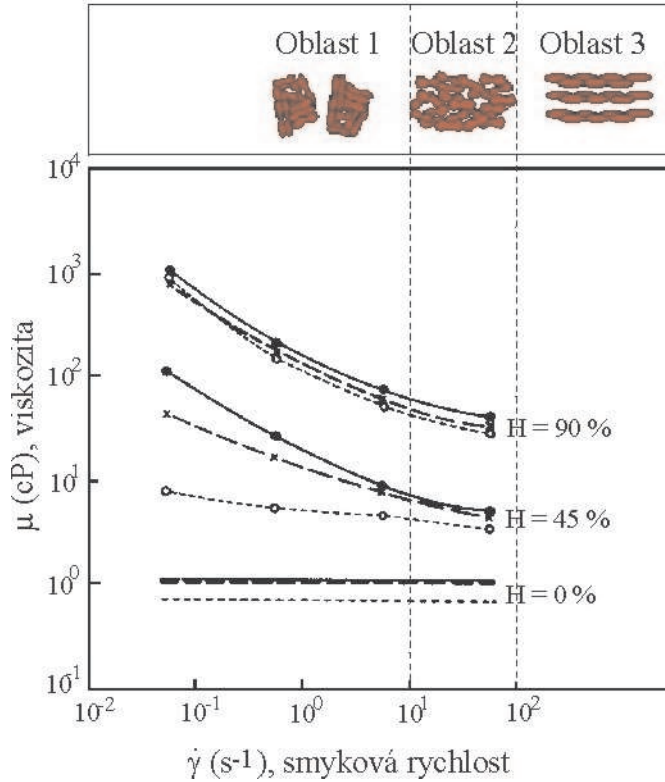
^{3.1}Ve skutečnosti je krev tixotropní tekutina, tzn., že její viskozita roste (více jak 10x) s klesající rychlostí deformace $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$, viz obr. 3.1. Viskozita krve roste i s nárůstem hematokritu H , $H\% = \frac{V - V_{cell}}{V} \cdot 100$ je objemové zastoupení buněk V_{cell} (hlavně červených krvinek) v krvi.

Předpokládejme pro jednoduchost osově symetrické proudové pole $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ závislé jen na r, z , značíme $v_z = v(r, z)$. Rovnice bilance hmotnosti (3.5) a hybnosti (3.8) mají tvar

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \text{tj.} \quad v = v(r), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = A = \text{konst}, \quad (3.11)$$

$$\text{resp.} \quad p = Az + B.$$



Obrázek 3.1: Závislost viskozity lidské krve na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ a hematokritu H . Viskozita krevní plazmy ($H = 0\%$) je $1,2 \text{ cP}$. (Viskozita čisté vody je $0,8 \text{ cP}$, 1 cP (centipoise) = $10^{-3} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$).

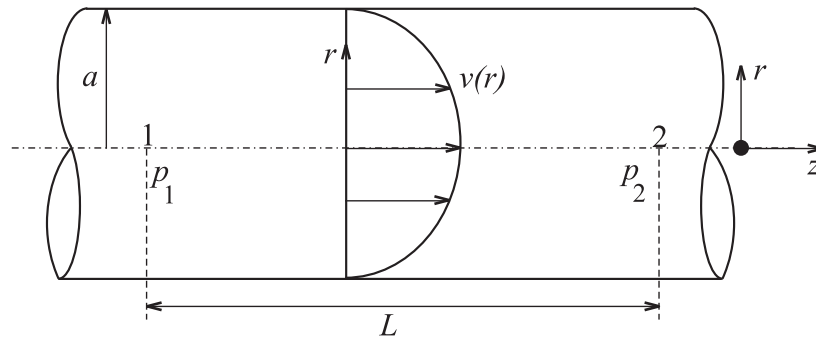
• ———• viskozita celé krve, \times — — — \times krev zbavená fibrinu (bílkoviny vznikající při srážení krve), $\circ \cdots \cdots \circ$ propláchnuté krevní buňky v Ringerově roztoku.

Označíme-li p_1 a p_2 ($p_1 > p_2$) tlaky ve dvou místech na ose z (viz obr. 3.2), jejichž vzdálenost je L , je tím již určena konstanta A a tím i tlakový spád $\frac{\partial p}{\partial z}$. Platí

$$A = -\frac{p_1 - p_2}{L}, \quad (3.12)$$

takže rovnice (3.11) má nyní tvar

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{\mu L}. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.2: Laminární proudění válcovou trubicí

Dvojitou integrací této rovnice dostáváme po rychlost vyjádření

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (3.14)$$

Zde vystupují dvě integrační konstanty, ale k jejich určení máme jedinou okrajovou podmínku

$$v = 0 \quad \text{pro} \quad r = a, \quad (3.15)$$

kde a je poloměr trubice. Abychom určili obě integrační konstanty v rovnici (3.14), připojíme k tomuto řešení "přirozený" požadavek, aby totiž rychlost v byla v celém průřezu konečná. Pro střed průřezu $r = 0$ logaritmický člen diverguje a proto musíme položit $C_1 = 0$, abychom splnili právě uvedený požadavek. Použitím podmínky (3.15) pak snadno určíme zbývající konstantu C_2 . Konečný tvar řešení je tedy

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (a^2 - r^2). \quad (3.16)$$

Dostali jsme "parabolický zákon" rozdělení rychlostí.

Známe-li rychlost v každém bodě průřezu, není již obtížné určit střední rychlost \bar{v} nebo objem F tekutiny, která projde průřezem za jednotku času, popř. i veličiny charakterizující disipaci energie resp. tok tepla. Zde si jen vypočítáme \bar{v} a F .

Hodnotu střední rychlosti dostaneme, když sečteme rychlosti po celém průřezu a výsledek vydělíme plochou průřezu; tak dostáváme

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a v \cdot 2\pi r dr = \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} a^2. \quad (3.17)$$

Z rovnice (3.16) je vidět, že největší rychlost proudění je v ose válce, tj. pro $r = 0$, a že \bar{v} je právě polovinou největší rychlosti.

Pro hodnotu objemového toku F plyne

$$F = \int_0^a v \cdot 2\pi r dr = \pi a^2 \bar{v} = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} a^4 \quad \left[\frac{m^3}{s} \right]. \quad (3.18)$$

To je *Hagenův-Poiseuilleův zákon*, který slovy lze vyjádřit takto: Množství tekutiny, které projde plochou kruhového průřezu za jednotku času, je přímo úměrné tlakovému spádu a čtvrté mocnině poloměru trubice a je nepřímo úměrné dynamickému koeficientu vazkosti. Zákon (3.18) můžeme přepsat do tvaru

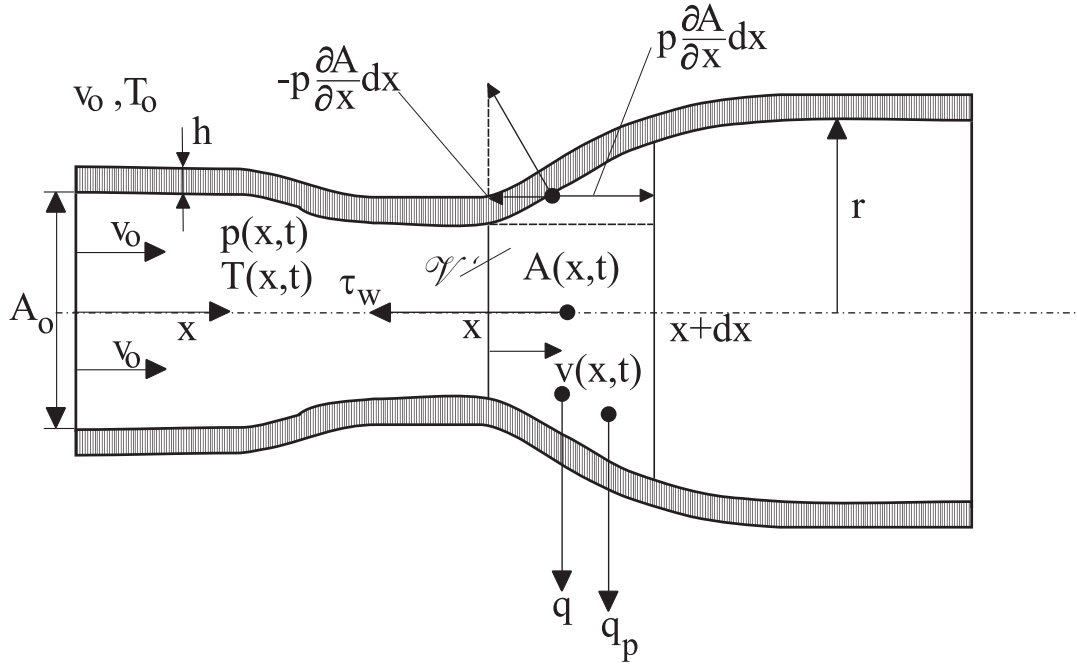
$$R = \frac{8\mu L}{\pi a^4}, \quad \text{resp.} \quad (p_1 - p_2) = RF, \quad (3.19)$$

kde R je odpor trubice (tepny, žíly) o délce L a poloměru a . Je pak analogický Ohmovu zákonu elektrických obvodů.

Při použití tohoto zákona je nutno si uvědomit, že byl odvozen za předpokladu, že se částice tekutiny pohybují přímočaře a rovnoběžně s osou trubice, čili že jde o pohyb laminární. Je-li proudění turbulentní, které se vyznačuje neuspořádaností pohybu částic, nemůžeme tyto vzorce použít, viz dále. Použitelnost vzorce (3.18) je tedy vázána na podmínku, že Reynoldsovo číslo $Re = \frac{2av\rho}{\mu}$ charakterizující proudění uvažované tekutiny je menší než kritické Reynoldsovo číslo Re_{krit} . Přejmeme-li, že $Re_{krit} = 2300$ (ve velmi hladkých trubkách dokonce 1000), snadno se přesvědčíme, že ve většině technicky důležitých případů je proudění kapalin potrubím turbulentní. Na druhé straně je podmínka $Re < Re_{krit}$ splněna při proudění tekutin kapilárními trubicemi (zřejmě vzhledem k tomu, že a , v jsou velmi malé). V tomto případě lze určit dynamický koeficient vazkosti μ podle (3.18).

Poznámka (historická). K zákonu (3.18) dospěli na základě experimentálních měření téměř současně a přitom nezávisle německý inženýr HAGEN (r. 1839) a francouzský lékař a fyzik POISEUILLE (r. 1840), který studoval pohyb krve v žilách.

4. Odvoďte rovnice kvazijednorozměrného proudění tekutiny elastickou trubicí o průřezu $A(x)$, viz obr. 4.1. Vně trubice je konstantní tlak p_o a teplota T_o a



Obr. 4.1: Kvazijednorozměrné proudění elastickou trubicí

uvnitř tlak $p(x, t)$ a teplota $T(x, t)$. Předpokládáme-li, že

- i) proudící tekutina, která má hustotu ρ , je nestlačitelná, takže $\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0$.
- ii) Stěna trubice o tloušťce h je elastická, takže

$$p - p_o = \frac{4hE}{3a} \left[\left(\frac{A}{A_o} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (4.1)$$

kde $A = \pi a^2$ je počáteční průřez trubice s poloměrem $r = a$ a E je elastický modul. Exponent α je podle lineární teorie elasticity roven $1/2$, v biologických materiálech (tepnách) je často $\alpha > 1/2$.

- iii) $q \left[\frac{W}{m^2} \right]$, $q_s \left[\frac{kg}{m^2s} \right]$, $\tau_w \left[\frac{N}{m^2} \right]$ vyjadřují postupně odvod tepla, hmoty a hybnosti (tření o stěnu) z proudící tekutiny.

Řešení: 4. Napíšeme rovnice bilance hmotnosti, hybnosti a celkové energie $e = u + \frac{v^2}{2}$, ($u = c_v T$ je vnitřní energie tekutiny) pro elementární objem trubice \mathcal{V}' , viz obr. 4.1

$$\overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho dv} = 2\pi r q_\rho dx, \quad (4.2)$$

$$\overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho v dv} + p|_A^{A+\frac{\partial A}{\partial x} dx} - p \frac{\partial A}{\partial x} dx = -2\pi r \tau_w dx, \quad (4.3)$$

$$\overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho e dv} + (pv)|_A^{A+\frac{\partial A}{\partial x} dx} = 2\pi r q dx. \quad (4.4)$$

Zdrojové členy jsou na pravé straně a tlak p jako povrhová síla působící ve směru normály. Uvážíme-li problém jako jednorozměrný je element objemu trubice $dv = A(x, t)$ a materiálová derivace objemu \mathcal{V}' je např. v rovnici bilance hybnosti (4.3) rovna dx

$$\overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho v dv} = \overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho v A dx} = \overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho v A dx} + \overline{\int_{\mathcal{V}'} \rho v A dx} = \overline{\int_{\mathcal{V}'} \left[\frac{\partial}{\partial t} (A\rho v) + \frac{\partial}{\partial t} (A\rho v^2) \right] dx}. \quad (4.5)$$

Zde jsme využili definice materiálové derivace $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$ a $\overline{dx} = \frac{\partial x(X, t)}{\partial X} dX = \frac{\partial v}{\partial X} dX = \frac{\partial v}{\partial x} dx$, $x = x(X, t)$ je trajektorie materiálového bodu, který byl v čase $t = 0$ v poloze $x = X$.

Užitím identity (4.5) můžeme zákony bilance (4.2) až (4.4) psát v kompaktním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \\ A\rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A\rho v \\ A(\rho v^2 + p) \\ A(\rho e + p)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \frac{\partial A}{\partial x} + 2\pi r q_\rho \\ 2\pi r \tau_w \\ 2\pi r q \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Uvedené tři rovnice spolu s materiálovým vztahem (4.1) jsou hledané rovnice kvazijednorozměrného proudění stlačitelné tekutiny elastickou trubicí.

Zdrojové členy na pravé straně rovnic (4.6) vyjadřujeme obvykle ve tvaru

$$q_\rho = -K_\rho (p - p_o) \dots \text{průtok tekutiny stěnou trubice } (K_\rho \left[\frac{s}{m} \right] \text{ je konstanta přestupu}). \quad (4.7)$$

Velikost třecího napětí ve stěně τ_w určíme podle Hagenova-Poiseuilleova zákona (3.18), viz příklad 3 vztah (3.12). V případě vyrovnaného proudění je tlakový spád roven třecí síle

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \doteq \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{8\mu F}{a^2 A} = \frac{8\mu v}{a^2} = -\frac{2\tau_w}{a}. \quad (4.8)$$

Odtud

$$\tau_w = -\frac{4\mu v}{a} \dots \text{pro laminární proudění} \quad (4.9)$$

a nebo obecně

$$\tau_w = -\rho \frac{\lambda_f}{2} |v| v \dots \text{pro laminární i turbulentní proudění na tvaru třecího koeficientu } \lambda_f. \quad (4.10)$$

$$q = -K_q (T - T_o) \dots \text{odvod tepla s konstantou přestupu } K_q \left[\frac{W}{m^2 K} \right]. \quad (4.11)$$

Charakteristikou odporu proudění tekutiny v trubici je třecí koeficient

$$\lambda_f = -\frac{D}{\frac{1}{2}\rho v^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2D\Delta p}{L\rho v^2} = \frac{64}{Re}, \quad (4.12)$$

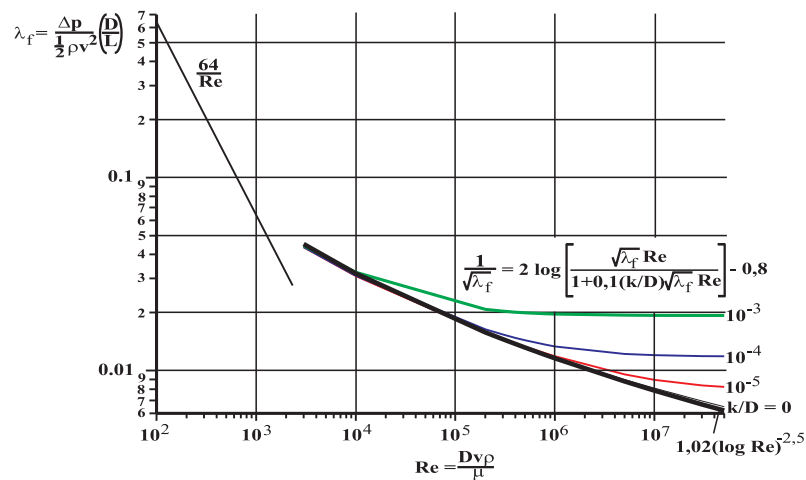
kde $D = 2a$, Δp je tlaková ztráta na délce L a $Re = \frac{D\rho v}{\mu}$ je Reynoldsovo číslo. Pro turbulentní proudění je určován experimentálně

$$\lambda_f = 1,02(\log Re)^{-2,5}. \quad (4.13)$$

Obecnější je vztah Colebrookův, který zahrnuje i vliv drsnosti k

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_f}} = 2 \log \left[\frac{Re \sqrt{\lambda_f}}{1 + 0,1 \frac{k}{D} Re \sqrt{\lambda_f}} \right] - 0,8, \quad (4.14)$$

k je charakteristický rozměr (výška) drsností, viz obr. 4.2.



Obr. 4.2: Závislost třecího koeficientu λ_f na Reynoldsově čísle Re a bezrozměrné drsnosti $\frac{k}{D}$

5. Rovnice kvazijednorozměrného proudění tekutiny elastickou trubicí odvozené v příkladu 4 zjednodušte pro případ nestlačitelné vazké tekutiny a určete jejich charakteristiky.

Řešení: 5.

Rovnice bilance hmotnosti a hybnosti se nechají za předpokladu $\rho = konst$ upravit na rovnice pro proměnné $A(x, t)$, $v(x, t)$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\tau\mu}{\rho} \frac{v}{A}. \quad (5.2)$$

Použitím konstitutivního vztahu (4.1) popisujícího elasticitu stěny trubice můžeme vyloučit tlak

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = c_o^2 \left(\frac{A}{A_{res}} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{A_{res}} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \text{pro } c_o^2 = \frac{4\alpha h E}{3a\rho}, \quad (5.3)$$

kde A_{res} je nějaký počáteční (residuální) průřez trubice a c_o se jen málo liší od rychlosti postupné elastické vlny podél trubice.

Pro zjednodušení zavedeme proměnné

$$u(x, t) = \ln \frac{A(x, t)}{A_{res}}, \quad v = v(x, t) \quad (5.4)$$

a charakteristický čas $\tau = \frac{\rho A_{res}}{8\pi\mu}$.

Rovnice proudění tekutiny elastickou trubicí s uvažováním tření mají tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c_o^2 e^{\alpha u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v}{\tau} e^{-u}. \quad (5.6)$$

Rovnice (5.5) a (5.6) linearizujeme v okolí nějakého referenčního bodu $w_0 = (u_0, v_0)$. Řešení těchto rovnic si představíme ve tvaru $w = w_0 + \delta w$ a omezíme se pouze na lineární členy. Po linearizaci označíme opět pro jednoduchost zápisu $w = \delta w$. Výsledné dvě rovnice přepíšeme do maticového tvaru a nalezneme jejich charakteristiky

$$I \frac{\partial w}{\partial t} + B \frac{\partial w}{\partial x} = f, \quad \text{zde } w = (u, v) \text{ a značí } \delta w = (\delta u, \delta v) = (u - u_0, v - v_0), \quad (5.7)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v_o & 1 \\ c_o^2 e^{\alpha u_o} & v_o \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\tau} e^{-u} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Charakteristiky soustavy parciálních diferenciálních rovnic (5.7) jsou křivky $\chi_i = \chi_i(x, t) = konst$, $i = 1, 2$ v řešené oblasti (x, t) podél nichž se řešení nemění, tj.

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \quad (5.9)$$

zapsáno maticově

$$dtI \frac{\partial w}{\partial t} + dxI \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (5.10)$$

Podél charakteristiky $\chi_i(x, t) = konst$ platí současně rovnice

$$\begin{aligned} I \frac{\partial w}{\partial t} + B \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ dtI \frac{\partial w}{\partial t} + dxI \frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pravá strana f rovnice (5.7) pokud nezávisí na $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ a konkrétní tvar charakteristiky neovlivňuje (můžeme ji položit např. rovnou nule). Hledáme nenulové řešení pro neznámé $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ (tj. čtyři neznámé). Podmínkou nenulového řešení je

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} I & B \\ dtI & dxI \end{vmatrix} &= dt^2 \det \begin{vmatrix} I & B \\ I & \frac{dx}{dt} I \end{vmatrix} = dt^2 \det \begin{vmatrix} 0 & B - \frac{dx}{dt} I \\ I & \frac{dx}{dt} I \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 dt^2 \det \left| B - \frac{dx}{dt} I \right| = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Při úpravě jsme odečetli spodní řádky od horních a rozvinuli podle sloupce. Označíme $\lambda = \frac{dx}{dt}$ a s ohledem na matici B , vztah (5.8), platí

$$\det \begin{vmatrix} v_o - \lambda & 1 \\ c_o^2 e^{\alpha u_o} & v_o - \lambda \end{vmatrix} = (v_o - \lambda)^2 - c_o^2 e^{\alpha u_o} = 0, \quad (5.13)$$

resp.

$$\lambda_{1,2} = \frac{dx}{dt} = v_o \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}. \quad (5.14)$$

Tato rovnice je diferenciální rovnicí charakteristik

$$dx - \left(v_o \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o} \right) dt = 0, \quad (5.15)$$

resp.

$$x - \left(v_o \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o} \right) t = \chi_i = konst, \quad i = 1, 2. \quad (5.16)$$

Podmínku řešitelnosti (5.12) resp. (5.13) soustavy (5.11) můžeme na charakteristikách (5.14) psát bez indexu "o", protože podle podmínky (5.9) jsou funkce $w_1(\chi_1)$, $w_2(\chi_2)$ řešením rovnice (5.7) a jsou podél charakteristik konstantní. Pro řešení u, v podél charakteristiky, např. vzhledem k (5.15), platí

$$\left[v(x, t) \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2} u(x, t)} \right] t - x = 0. \quad (5.17)$$

Splňuje-li řešení vztah

$$v = c_o e^{\frac{\alpha}{2} u} = c_o \left(\frac{A}{A_{res}} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad x = konst \quad (5.18)$$

je charakteristika nezávislá na čase. Řešení rovnic (5.1) a (5.2) v bodě $x = konst$ nezávisí na čase, tzn., že např. průřez $A(x)$ je v tomto bodě konstantní. Tato situace může odpovídat i kolapsu trubice, viz př. 6.

Uvážíme-li, že rychlost krve se pohybuje mezi 0 až $6 m/s$ (v aortě asi $1 m/s$), rychlost malé elastické poruchy po tepně je $c_o = \left(\frac{4\alpha h E}{3a\rho}\right)^{1/2} = 7,4 m/s$, může být při zúžení tepny podmínka (5.18) splněna. Pro lidskou femoral artery je $E = 3 \cdot 10^5 Pa$, $a = 5,5 mm$, $h = 1,5 mm$, $\rho = 10^3 kgm^{-3}$, $\alpha = 1/2$.

6. Nalezněte podmínky samobuzených oscilací proudění vazké nestlačitelné tekutiny v elastické trubici popsaného rovnicemi v příkladu 5.

Řešení: **6.** Předpokládáme, že řešení $w = (u, v)$ rovnic (5.5) a (5.6) závisí na charakteristikách $\chi_{1,2} = \chi_{1,2}(x, t)$, tj. $w(x, t) = w(\chi_1(x, t), \chi_2(x, t))$. Rovnice (5.5) a (5.6) převedeme do charakteristických proměnných

$$\chi_1 = x - \left(v_o + c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}\right) t, \quad \chi_2 = x - \left(v_o - c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}\right) t. \quad (6.1)$$

Index "o" označuje, že jde o nějaké konstantní, ale dosud neurčené hodnoty řešení. χ_1 popisuje případ, kde elastická porucha na trubici se přičítá k rychlosti proudu a χ_2 případ, kdy se naopak odčítá (postupuje proti proudu). Zvlášť budeme vyšetřovat vlastnost rovnic (5.5), (5.6) na charakteristice χ_1 a zvlášť na charakteristice χ_2 . Lišit se budou jen znaménkem. S ohledem na (6.1) platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{dw}{d\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{dw}{d\chi} \left(v_o \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}\right), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{dw}{d\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{dw}{d\chi}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dosazením do rovnic (5.5), (5.6) dostáváme

$$\psi \frac{du}{d\chi} + \frac{dv}{d\chi} = 0, \quad (6.3)$$

$$\psi \frac{dv}{d\chi} + c_o^2 e^{\alpha u} \frac{du}{d\chi} = -\frac{v}{\tau} e^{-u}, \quad (6.4)$$

kde $\psi = \psi(v, v_o, u_o) = v - v_o \mp c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}$. Horní znaménko platí pro elastickou vlnu postupující rychlostí $v_o + c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}$ a dolní znaménko pro vlnu postupující rychlostí $v_o - c_o e^{\frac{\alpha}{2} u_o}$. Tato druhá vlna může za podmínky (5.18) i stát na místě a nebo se pohybovat nějakou jinou rychlostí, viz vztah (6.21).

Tyto rovnice rozřešíme vůči derivacím

$$\frac{du}{d\chi} = \frac{v e^{-u}}{\tau (\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})} = f_1(u, v), \quad (6.5)$$

$$\frac{dv}{d\chi} = -\frac{\psi v e^{-u}}{\tau (\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})} = f_2(u, v). \quad (6.6)$$

Pro případ, že hodnoty v_o, u_o v charakteristikách (6.1) popisují klidový stav $v_o = u_o = 0$, potom funkce $\psi = v \mp c_o$ ¹ V tomto speciálním případě mají rovnice

¹Index "o" obecně neznamená počáteční hodnotu, ale nějakou hodnotu referenční, takže v případě $\chi_2 = x$ (vlna s touté v místě $x = const$), platí $v_o = c_o \left(\frac{A_o}{A_{res}}\right)^{\alpha/2}$, kde A_{res} označuje velikost počátečního průřezu trubice.

(6.5) a (6.6) tvar

$$\frac{du}{d\chi} = \frac{ve^{-u}}{\tau[v(v \mp 2c_o) + c_o^2(1 - e^{\alpha u})]}, \quad (6.7)$$

$$\frac{dv}{d\chi} = -\frac{v(v \mp c_o)e^{-u}}{\tau[v(v \mp 2c_o) + c_o^2(1 - e^{\alpha u})]} \quad (6.8)$$

a jejich řešení nevykazuje v okolí klidového stavu žádné zajímavé vlastnosti.

Derivace podle charakteristik (6.2) můžeme interpretovat i jako derivace podle času

$$\frac{dw}{d\chi} = \left(v_o \pm c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o} \right)^{-1} \frac{dw}{dt} \Big|_{\substack{v_o = 0 \\ u_o = 0}} = \pm \frac{dw}{c_o dt}, \quad (6.9)$$

resp. podle prostorové souřadnice

$$\frac{dw}{d\chi} = \frac{dw}{dx} \Big|_{\substack{v_o \neq 0 \\ u_o \neq 0}} = \frac{dw}{dx}, \quad (6.10)$$

za podmínky (5.18) i pro libovolné t .

Nehledě na geometrickou interpretaci derivace (6.9), (6.10) budeme nazývat stacionárním řešením rovnic (6.5), (6.6) řešení algebraických rovnic

$$f_1(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{v}e^{-\bar{u}}}{\tau[(\bar{v} - v_o)(\bar{v} - v_o \mp 2c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o}) + c_o^2(e^{\alpha u_o - \alpha \bar{u}})]} = 0, \quad (6.11)$$

$$f_2(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{(\bar{v} - v_o \mp c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o})\bar{v}e^{-\bar{u}}}{\tau[(\bar{v} - v_o)(\bar{v} - v_o \mp 2c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o}) + c_o^2(e^{\alpha u_o} - e^{\alpha \bar{u}})]} = 0. \quad (6.12)$$

Stacionárním řešením je

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{u} \in (-\infty, \infty). \quad (6.13)$$

Naším cílem je nalézt kvalitativní vlastnosti nenulových řešení rovnic (6.5), (6.6). Tato řešení lze určit z derivací v tomto stacionárním stavu, popřípadě ve stavech pro $\bar{v} > 0$, budou-li splňovat potřebné podmínky (6.18). Tudiž

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -\frac{ve^{-u}[\psi^2 - (1 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha u}]}{\tau(\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2} \Big|_{\bar{v}, \bar{u}}, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{[\psi^2(v - \psi) + (v + \psi)c_o^2 e^{\alpha u}]e^{-u}}{\tau(\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{(\psi^2 - 2\psi v - c_o^2 e^{\alpha u})e^{-u}}{\tau(\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2} \Big|_{\bar{u}, \bar{v}}, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\psi ve^{-u}[\psi^2 - (1 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha u}]}{\tau(\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2}. \quad (6.17)$$

Říkáme, že rovnice (6.5), (6.6) splňují v bodě (6.12) podmínku Hopfovy bifurkace, jestliže pro nějaké další body $\bar{v} > 0$, $\bar{u} \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \Big|_{\bar{v}, \bar{u}} = 0, \quad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} > 0. \quad (6.18)$$

Řešení má pak charakter samobuzených oscilací (limitního cyklu).

Tudíž

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\right) = \frac{e^{-u} \{[(2+\alpha)v+\psi]c_o^2 e^{\alpha u} - \psi^3\}}{\tau(\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2} \Big|_{\bar{v}} = \frac{e^{-u\bar{\psi}}(c_o^2 e^{\alpha u} - \bar{\psi}^2)}{\tau(\bar{\psi}^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^2} \Big|_{\bar{\psi}} = 0, \quad (6.19)$$

pro $\bar{\psi} = \bar{v} \mp c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o} - v_o = 0.$

Splnění této rovnosti budeme hledat za podmínky (5.18), tj.

$$v_o = c_o e^{\frac{\alpha}{2}u_o}, \quad \text{popř. } v_o = c_o \left(\frac{A_0}{A_{res}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (6.20)$$

Podmínka (6.18) je splněna i při $\bar{v} \neq 0$ pro $\bar{\psi} = \bar{v}$

$$\bar{v}^3 - (3 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha\bar{v}} = 0, \quad (6.21)$$

tj.

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{v}_{1,2} = \pm\sqrt{3 + \alpha}c_o e^{\frac{\alpha}{2}\bar{u}} = \pm\sqrt{3 + \alpha}c_o \left(\frac{\bar{A}}{A_o}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (6.22)$$

Další podmínkou netlumených oscilací (6.17) je splnění nerovnosti

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{v^2 e^{-2u} [\psi^2 - (1 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha u}] (c_o^2 e^{\alpha u} - \psi^2)}{\tau^2 (\psi^2 - c_o^2 e^{\alpha u})^4} \Big|_{\bar{v}, \bar{\psi}} > 0. \quad (6.23)$$

V případě, že $\bar{\psi} = \bar{v}$, dostáváme

$$\frac{\bar{v}^2 e^{-2\bar{u}} [\bar{v}^2 - (1 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha\bar{u}}] (\bar{v}^2 - c_o^2 e^{\alpha\bar{u}})}{\tau^2 (\bar{v}^2 - c_o^2 e^{\alpha\bar{u}})^4} > 0. \quad (6.24)$$

Tento výraz je kladný pro rychlost proudu \bar{v} splňující buď nerovnost

$$\left(\frac{\bar{v}}{c_o}\right)^2 < e^{\alpha\bar{u}}, \quad \text{nebo} \quad \left(\frac{\bar{v}}{c_o}\right)^2 > (1 + \alpha)e^{\alpha\bar{u}}. \quad (6.25)$$

Toto jsou současně i podmínky netlumených oscilací. První nerovnost má však smysl jen pro $\bar{v} = 0$. Díky podmínce (6.22) má fyzikální význam jen druhá nerovnost. Uvážíme-li, že hledáme řešení na charakteristice (6.20) tak má podmínka netlumených oscilací (6.25) tvar

$$\left(\frac{v}{c_o}\right)^2 \geq (1 + \alpha) \left(\frac{A}{A_{res}}\right)^\alpha \quad (6.26)$$

Rychlost proudící tekutiny při které nastává Hopfova bifurkace, je podle (6.22) rovna

$$\left(\frac{\bar{v}}{v_o}\right)^2 = (3 + \alpha) \left(\frac{\bar{A}}{A_o}\right)^\alpha. \quad (6.27)$$

Při této rychlosti nastávají netlumené oscilace stěny trubice a tlaku.

Pro parametry aorty z příkladu 5 ($\alpha = 1/2$, $c_o = 7,5 \text{ m/s}$), pak podle podmínky (6.25) nastávají netlumené oscilace pro $v = \sqrt{3 + \alpha}v_o \left(\frac{A}{A_o}\right)^{\alpha/2} = 1.87v_o \left(\frac{A}{A_o}\right)^{1/4}$. Pro $A_0 = A_{res}$ je $v_o = c_o$, pro $A_0 \neq A_{res}$ má v_o hodnotu vypočtenou podle podmínky (6.20), což odpovídá charakteristice $\chi_2 = x = \text{const}$, tedy oscilacím v pevném místě (srovnej s 6.1).

Poznámka. Porovnáním podmínky (6.22) a (6.25) vidíme, že v oblasti

$$(1 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha\bar{u}} < \bar{v}^2 < (3 + \alpha)c_o^2 e^{\alpha\bar{u}} \quad (6.28)$$

existují i tlumené oscilace.

7. Přechod z oblasti laminárního proudění do oblasti turbulentního proudění je identifikován kritickou hodnotou Reynoldsova čísla Re [1], které udává vztah mezi rychlostí toku krve v [m/s], průměrem cévní trubice d [m], hustotou krve ρ [kg/m^3] a viskozitou krve μ [Ns/m^2], $Re = vd\rho/\mu$. Reynoldsovo číslo je vlastně poměr setrvačných a vazkých sil. Při laminárním proudění jsou dominantní vazké síly, při turbulentním proudění převažují síly setrvačné. Typická hodnota kritického Reynoldsova čísla pro přechod režimů proudění v cévách je asi 2320, viz obr. 4.2, ale v místě bifurkací může mít hodnotu jen 600 a nebo i nižší než 400. Uvažujeme-li proudění v hrudní aortě, jejíž průměr $d = 2a$ se při kontrakci a relaxaci mění od $2,5 \cdot 10^{-2}$ do $4 \cdot 10^{-2} m$, rychlost se mění v rozmezí 0,5 až $3 m/s$, hustota krve při teplotě $37^\circ C$ je $1,058 \cdot 10^3 kg/m^3$, viskozita μ je $4 \cdot 10^{-3} Ns/m^2$, pak v případě kontrakce aorty je hodnota Reynoldsova čísla $Re = \frac{0,5 \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 1,058 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 3306$ a v případě relaxace nabývá hodnotu $Re = \frac{3 \times 4 \cdot 10^{-2} \times 1,058 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 31740$. Tyto hodnoty jsou ve skutečnosti zavádějící, protože není jasné, jak dlouho turbulence trvá.

Odhadněte čas potřebný ke vzniku turbulence a charakteristickou velikost turbulentních vírů při přechodu krve z levé komory do aorty. Průchod aortální chlopní chápeme jako turbulizační faktor.

Řešení: **7.** Odhadnout čas potřebný k přechodu z laminárního do turbulentního proudění je možno jedině ze znalosti mechanismu ztráty stability laminárního proudění. Proudění ve smykové vrstvě trubky (tepny) je popsáno Navier-Stokesovou rovnicí (3.4)

$$\dot{v}_x = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{pro} \quad \dot{v}_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (7.1)$$

($\dot{}$) značí konvektivní (materiálovou) derivaci. Protože nás zajímá jen rovnováha mezi setrvačnými (levá strana rovnice) a vazkými silami (pravá strana rovnice), neuvažujeme tlakový gradient $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Proudové pole si představíme jako superpozici střední rychlosti v_x a fluktuálních složek δv_x , δv_y , δv_z . Potom lze podmínku stability proudového pole v uvažované smykové vrstvě psát ve tvaru¹

$$-\dot{k} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \varepsilon + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v_x^2}{2} \right), \quad (7.2)$$

kde kinetická energie fluktuálního (turbulentního) pohybu v 1 kg krve je

$$k = \frac{1}{2} \int \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \left[(\delta v_x)^2 + (\delta v_y)^2 + (\delta v_z)^2 \right] dv_x dv_y dv_z. \quad (7.3)$$

¹Maršík F., Termodynamika kontinua, Academia Praha, 1999.

K disipaci energie turbulentního pohybu ε dochází v důsledku molekulární viskozity μ a její velikost (v 1 kg krve) je definována vztahem

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \int \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial \delta v_i}{\partial x^j} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x^i} dv_x dv_y dv_z. \quad (7.4)$$

Rozdělovací funkci $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ velikosti fluktuací rychlosti δv_i ($i = 1, 2, 3$) není nutno znát explicitně, protože se zajímáme jen o střední velikosti k a ε .

Velikost turbulentních pulzací δv charakteristického rozměru $l < r$ je určena rovnováhou mezi setrvačnými a vazkými silami (ve smykové vrstvě tepny o poloměru r) podle rovnice (7.1), tudíž

$$\frac{(\delta v)^2}{l} \sim \frac{\mu \delta v}{\rho l^2}, \quad \text{resp.} \quad \delta v \sim \frac{\mu}{\rho l}. \quad (7.5)$$

Rovnováha (jakýsi ustálený stav) mezi velikostí (intenzitou) turbulence $k = \frac{(\delta v)^2}{2}$, resp. její kinetickou energií k a přeměnou turbulentního pohybu na teplo, tj. disipací ε , je vyjádřena vztahem (7.2)

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \varepsilon = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mu}{\rho} \frac{(\delta v)^2}{l^2} \sim \varepsilon. \quad (7.6)$$

Vyloučením velikosti turbulentních pulzací δv (resp. velikosti kinetické energie $k = (\delta v)^2/2$) dostáváme důležitý vztah pro geometrickou velikost pulzací²

$$l^4 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^3. \quad (7.7)$$

Čas τ potřebný k vyvinutí turbulentního pohybu stanovíme z rovnice (7.2)

$$\dot{k} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{(\delta v)^2}{\tau} \sim \frac{\mu}{\rho} \frac{(\delta v)^2}{l^2}, \quad \text{resp.} \quad \tau = \frac{\rho l^2}{\mu}. \quad (7.8)$$

Jde o čas, za který se velké víry o velikosti $r = d/2$ rozpadnou na víry o velikosti l . Tento čas stanovíme tak, že vyloučíme charakteristický rozměr l z rovnice (7.7)

$$\tau = \frac{\rho l^2}{\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \varepsilon}} \quad (7.9)$$

a vyjádříme ho pomocí velikosti disipace ε , popřípadě velikostí kinetické energie turbulentního pohybu k .

Zbývá nalézt vztah mezi velikostí disipované energie $\rho \varepsilon SV$ během jednoho srdečního tepu a kinetickou energií turbulentního pohybu $\rho k SV$, $SV [m^3]$ je tepový objem. Vzhledem k pulzačnímu pohybu krve můžeme předpokládat, že se veškerá kinetická energie krve v aortě převede na kinetickou energii turbulentního pohybu, tj.

$$E_k = \rho \frac{v^2}{2} SV = \rho k SV \quad (7.10)$$

a to za dobu trvání srdečního tepu Δt . Má-li být na konci srdečního tepu opět laminární proudění, musí se ale současně tato energie disipovat na teplo, tj.

$$\rho \varepsilon SV = E_k / \Delta t = \rho k SV / \Delta t. \quad (7.11)$$

²Chorin J. A., Vorticity and turbulence, Springer Verlag 1994.

Z této bilance odvodíme vztah $\varepsilon = k/\Delta t$ (srovnej s podmínkou stability (7.2)), který dosadíme do vztahu pro charakteristický čas rozpadu víru (7.9)

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu\Delta t}{\rho k}} = \sqrt{\frac{\mu\Delta t SV}{E_k}}, [s]. \quad (7.12)$$

Charakteristický rozměr l turbulentního víru je podle (7.7) roven

$$l = \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^3 \right]^{1/4} = \left[\frac{\mu^3 \Delta t SV}{\rho^2 E_k} \right]^{1/4}, [m]. \quad (7.13)$$

Tepový objem SV , tj. množství krve vypuzené do aorty během kontrakce levé komory, je asi $7 \cdot 10^{-5} m^3$ (70 ml). Kinetická energie potřebná pro pohyb krve v aortě je dodávána prací srdce

$$W = SV \times \Delta p = E_k + E_p + E_{el} + E_{dis}, [J], \quad (7.14)$$

kteřá je vykonána během komorové kontrakce, kde $\Delta p [Pa = N/m^2]$ je rozdíl tlaků v komoře (rozdíl mezi maximálním systolickým a minimálním diastolickým tlakem). $E_k [J]$ je kinetická energie krve, $E_p [J]$ je tlaková energie krve uvolněná při zvýšení tlaku z diastolických hodnot na systolické, $E_{el} [J]$ je elastická energie uložená ve stěně aorty a $E_{dis} [J]$ je ztrátová energie v důsledku disipace.

Naším cílem je zjistit velikost kinetické energie krve v aortě E_k a podle vztahu (7.10) stanovit alespoň přibližně charakteristickou rychlost krve v pro výpočet Reynoldsova čísla.

Za předpokladu normálního systolického (maximálního) tlaku v levé srdeční komoře $120 mmHg$ a diastolického tlaku v levé síni $9 mmHg$, je tlakový rozdíl $\Delta p = 111 mmHg = (111 \times 133,3) = 1,48 \cdot 10^4 Pa$. Práce, kterou vykoná srdce $W = 1,48 \cdot 10^4 \times 7 \cdot 10^{-5} = 1,04 J$. Jen asi 70% této práce je předáno krvi v aortě (30% energie se ztratí při výtoku krve ze srdce a průtokem aortální chlopní), takže celková energie předaná do aorty (7.14) je $W = 0,7 \times 1,04 = 0,73 J$.

Tlaková energie krve v aortě se zvyšuje při vzrůstu tlaku z diastolické hodnoty, normální diastolický tlak v aortě je $80 mmHg$, na systolickou hodnotu $120 mmHg$. Tlakový rozdíl je v tomto případě $40 mmHg (= 40 \times 133,3 = 5,33 \cdot 10^3 Pa)$. Předpokládáme-li 70% tepového objemu, pak tlaková energie

$$E_p = 0,7 \times SV \times \Delta p = 0,7 \times 7 \cdot 10^{-5} \times 5,33 \cdot 10^3 = 0,26 J. \quad (7.15)$$

Elastická energie

$$E_{el} = SV \times \Delta p = \frac{SV}{C_{Ao}} (V_{Ao} - V_{res,Ao}), \quad (7.16)$$

kde C_{Ao} je elastická poddajnost aorty a V_{Ao} , $V_{res,Ao}$ jsou maximální a zbytkový objem aorty. Uvažujeme-li $C_{Ao} = 1,2 \cdot 10^{-8} m^3/Pa$, $SV = 7 \cdot 10^{-5} m^3$, $V_{Ao} = 1,4 \cdot 10^{-4}$, $V_{res,Ao} = 1,3 \cdot 10^{-5} m^3$, pak $E_{el} = 0,28 J$. Tato energie je uložena do stěny aorty a je uvolněna při kontrakci aorty a umožňuje tok krve do celého systému. Tato energie je srovnatelná s prací vykonanou srdcem a tlakovou energií při vzrůstu tlaku.

Ztrátová energie $E_{dis} = \Delta p_{dis} \times SV$, Δp_{dis} je tlaková ztráta podél aorty, kterou lze stanovit pomocí Poiseuillova zákona. Za předpokladu, že poloměr aorty je $1,25 \cdot 10^{-2} m$, délka aorty je $0,3 m$, tok krve v aortě $9,6 \cdot 10^{-5} m^3/s$,

$$\Delta p_{dis} = \frac{8\mu l_{Ao} F}{\pi r^4} = \frac{8 \times 4 \cdot 10^{-3} \times 0,3 \times 9,6 \cdot 10^{-5}}{3,14 \times (1,25 \cdot 10^{-2})^4} = 12 N/m^2 \quad (7.17)$$

a $E_{dis} = 12 \times 0,7 \times 7 \cdot 10^{-5} = 5,9 \cdot 10^{-4} J$. Tato energie je malá vzhledem k tlakové energii a k práci vykonané srdcem.

Ze zjednodušeného zákona zachování energie (7.14) (zanedbání členu E_{dis}) lze určit kinetickou energii $E_k = W - E_p - E_{el} = 0,73 - 0,26 - 0,28 = 0,19 J$. Ze známé hodnoty kinetické energie lze vypočítat rychlost proudění krve v aortě $v [m/s]$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times E_k}{\rho \times 0,7 \times SV}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,19}{1,058 \cdot 10^3 \times 0,7 \times 7 \cdot 10^{-5}}} = 2,71 m/s. \quad (7.18)$$

Výpočtem Reynoldsova čísla $Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{2,71 \times 4 \cdot 10^{-2} \times 1,058 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 2867$, zjistíme, že je v aortě v okamžiku ejekce levé komory vyvinuté turbulentní proudění, viz obr. 4.2.

Na základě těchto údajů lze podle vztahu (7.12) zjistit čas τ , který je zapotřebí ke vzniku turbulentních vírů

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu \times \Delta t \times 0,7 \times SV}{E_k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3} \times 0,8 \times 0,7 \times 7 \cdot 10^{-5}}{0,19}} = 9,1 \cdot 10^{-4} s, \quad (7.19)$$

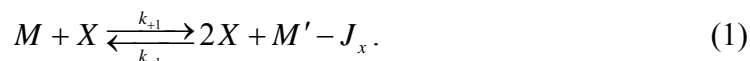
a velikost charakteristického rozměru (7.13) turbulentního víru

$$l = \left[\frac{\mu^3 \times \Delta T \times SV}{\rho^2 E_k} \right]^{1/4} = 1,1 \cdot 10^{-5} \quad (7.20)$$

Δt je doba trvání jednoho tepu, při srdeční frekvenci 75 tepů/min $\Delta t = 60/75 = 0,8 s$. Velikost času τ a rozměru l indikuje, že v aortě je většinu času při normálních podmínkách proudění na hranici turbulence. Do režimu turbulentního může přejít při zvýšené srdeční zátěži (např. při cvičení) nebo při stenóze srdečních chlopní (zúžení). Rozměr turbulentního víru je srovnatelný s velikostí lymfocytů a monocytů $5 - 17 \mu m$. Časté turbulentní proudění by je mohlo poškodit.

Příklad:

Analyzujte proces (chemickou reakci) nazývaný *Autokatalýza – rozmnožování*, který je popsán rovnicí



Proces probíhá v prostředí M měnicím se na prostředí M' s možností odtoku množící se komponenty X . Účastníky procesu jsou následující složky:

M ... je původní prostředí

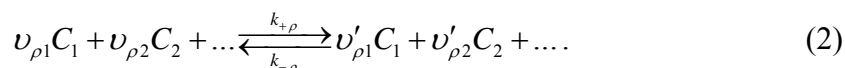
M' ... je prostředí po katalýze

X ... je množící se složka např. molekula, buňka, jedinec apod.

J_x ... označuje tok složky X , pro $J_x > 0$ dochází k odstranění z místa reakce.

Řešení:

Formulujeme diferenciální rovnici pro časovou změnu komponenty X v rovnici (1). Vyjdeme z nějaké obecné rovnice



Nechť jde např. o ρ -tou rovnici pro chemické komponenty $C_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots$. Tato rovnice popisuje chemickou kinetiku s dopřednou rychlostí chemické reakce $k_{+\rho}$ a zpětnou rychlostí $k_{-\rho}$. Zde $\nu_{\rho\alpha}$ označuje stechiometrický koeficient substrátů reakce (na levé straně rovnice (2)) a analogicky $\nu'_{\rho\alpha}$ je stechiometrický koeficient produktů reakce (komponent na pravé straně rovnice (2)). Rychlost chemické reakce (2) vyhovuje zákonu aktivních hmot $w_\rho = k_{+\rho} n_1^{\nu_{\rho 1}} n_2^{\nu_{\rho 2}} \dots - k_{-\rho} n_1^{\nu'_{\rho 1}} n_2^{\nu'_{\rho 2}} \dots$ kde $n_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots$ jsou látková množství (popř. molární koncentrace) odpovídajících složek. Rychlost vzniku, např. komponenty C_1 je pak dána vztahem

$$\dot{n}_1 = \frac{dn_1}{dt} = (\nu'_{\rho 1} - \nu_{\rho 1}) w_\rho, \quad (3)$$

který reprezentuje bilanci hmotnosti v chemických reakcích, viz např. vztah (5.73) v knize [1].

Zákon aktivních hmot aplikujeme nyní na naši chemickou rovnici (1) a pro rychlost této chemické reakce dostáváme vztah $w_\rho = k_{+1} n_M n_X - k_{-1} n_M^2 n_X^2$. Podle rovnice (3) je změna složky X dána diferenciální rovnicí

$$\dot{n}_X = \frac{dn_X}{dt} = (\nu'_{\rho X} - \nu_{\rho X}) w_\rho = k_{+1} n_X n_M - k_{-1} n_X^2 n_M^2 - J_x. \quad (4)$$

Rozdíl stechiometrických koeficientů je $\nu'_{\rho X} - \nu_{\rho X} = 2 - 1 = 1$.

Budeme nejdříve hledat možné stacionární stavy. Pro zjednodušení zavedeme rovnovážnou konstantu chemické reakce (1) určenou poměrem rychlostí dopředné reakce k_{+1} a zpětné reakce k_{-1} , tudíž

$$K_1 = \frac{k_{+1}}{k_{-1}} = A e^{-\frac{h_I}{RT}}. \quad (5)$$

Zde A je konstantní faktor, a h_I je energie reakce, pro $h_I > 0$ jde o energii spotřebovanou k rozmnožení složky X , viz rovnici (5.60) v knize [1].

Za předpokladu nulového odtoku $J_x = 0$ má rovnice (4) dva stacionární stavy

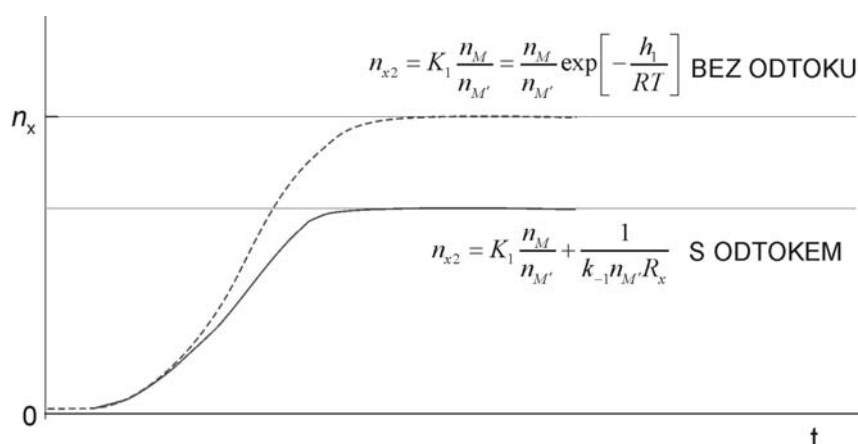
$$n_{x1} = 0, \quad n_{x2} = K_1 \frac{n_M}{n_{M'}} = A \frac{n_M}{n_{M'}} e^{-\frac{h_1}{RT}}. \quad (6)$$

Velikost stacionárního stavu se změní při nenulovém odtoku složky X. Předpokládejme závislost odtoku na koncentraci, např. $J_X = \frac{n_X}{R_X}$, kde R_X je odpor kladený prostředím. V tomto případě je stacionární stav procesu (4) vyjádřen podmínkou

$$\left[k_{-1} n_{M'} \left(n_X - K_1 \frac{n_M}{n_{M'}} \right) + \frac{1}{R_X} \right] n_X = 0, \quad (7)$$

$$n_{x1} = 0, \quad n_{x2} = K_1 \frac{n_M}{n_{M'}} - \frac{1}{k_{-1} n_{M'} R_X}. \quad (8)$$

Stacionární koncentrace jsou uvedeny na obrázku ze kterého je vidět, že při rostoucí energii $h_1 = h_1(n_X, n_M, n_{M'})$ klesá i konečná stacionární hodnota n_{x2} . Ukazuje se rovněž jak důležitý je vliv prostředí $n_M = n_M(n_X), n_{M'} = n_{M'}(n_X)$.



Obr. Vliv energie rozmnožování h_1 a odtoku $J_X = \frac{n_X}{R_X}$, kde R_X je odpor prostředí na velikost stacionární koncentrace komponenty X.

Přesné řešení rovnice (4) dostaneme její přímou integrací v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ a jim odpovídajícím koncentracím $n_{x,0} = n_X(t_0), n_X(t) = n_X$

$$\int_{n_{x,0}}^{n_X} \frac{dn_X}{n_X(a + bn_X)} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{(a + bn_X)n_{x,0}}{n_X(a + bn_{x,0})} \right| = t - t_0, \quad \text{pro } a = k_{+1}n_M - \frac{1}{R_X}, \quad b = -k_{-1}n_{M'} \quad (9)$$

Uvážíme-li, že

$$-\frac{a}{b} = \frac{k_{+1}n_M}{k_{-1}n_{M'}} - \frac{1}{k_{-1}n_{M'}R_X} = n_X(t \rightarrow \infty) = n_{x2} \quad (10)$$

dostáváme po úpravě časovou závislost množící se složky na její hodnotě počáteční $n_{x,0} = n_X(t_0)$ a na její hodnotě konečné n_{x2} ve tvaru

$$n_x(t) = \frac{n_{x0}n_{x2}}{n_{x2} \exp[-a(t-t_0)] + n_{x0} [1 - \exp[-a(t-t_0)]]} \quad (11)$$

Z tohoto obecného tvaru je zřejmé, že počáteční hodnota množící se komponenty n_{x0} nemůže být nulová; nebo-li proces autokatalýzy musí začít od nějakého jedince.

Vidíme, že rozhodující význam má koeficient

$$a = k_{+1}n_M - \frac{1}{R_x}. \quad (12)$$

Je-li tento koeficient kladný má průběh $n_x(t)$ monotónní průběh, v případě, že odpor prostředí R_x klesá může klesat i koncentrace množící se komponenty X .

Doporučená literatura:

[1] F. Maršík, I. Dvořák: Biotermodynamika, Academia , Praha 1998.

Příklad: Uved'te definici pH roztoku, jeho vlastnosti a popište jeho měření.

Řešení

Měření pH je všeobecně známý analytický proces. Navzdory tomu je tento proces velmi často chybně interpretován. Tento příklad podává vysvětlení měření pH, odhalení skrytých záludností a vlivů dalších proměnných na tuto analytickou metodu.

Veličina pH je odvozena z potenciálu vodíku a je vyjádřena logaritmickým vzorcem:

$$\text{pH} = -\log_{10} a_{\text{H}^+}, \quad (1)$$

a_{H^+} vyjadřuje aktivitu vodíkového iontu, H^+ . Aktivita je závislá na koncentraci měřeného roztoku vyjádřené počtem molů. Rovnice (1) je obvykle užívána v následujícím tvaru

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+], \quad (2)$$

kde $[\text{H}^+]$ je koncentrace vodíkových iontů, tj. počet molů H^+ v 1 litru vody¹.

Obvyklý rozsah pH je odvozen z disociace vody



Disociační konstanta, K_w je definována obvyklým způsobem:

$$K_w = \frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]} = [\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-], \quad (4)$$

kde $[\text{H}^+]$ je koncentrace (látkové množství) vodíkového iontu, $[\text{OH}^-]$ je koncentrace (látkové množství) hydroxylového iontu. Pro lepší manipulaci předpokládáme látkové množství $[\text{H}_2\text{O}] = 1 \text{ M}$, tj. 18 g vody. Molární koncentrace

čisté vody je $[\text{H}_2\text{O}] = \frac{1000}{18} = 55,55 \text{ M}$.

Za předpokladu, že roztok je i elektricky neutrální, tj. počet kladných i záporných iontů je stejný, lze z rovnice (4) odvodit rozhodující vztah:

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = \sqrt{K_w}. \quad (5)$$

K_w má při teplotě 25 °C a tlaku 1 baru hodnotu $1,001 \times 10^{-14}$. Z rovnice (5) vypočteme koncentrace iontů ve vodě

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = \sqrt{K_w} = \sqrt{1,011 \times 10^{-14}} \approx 10^{-7} \quad (6)$$

při uvedených podmínkách. Substitucí do rovnice (2) dostáváme

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] = -\log_{10} 10^{-7} = 7. \quad (7)$$

Podobně můžeme definovat další veličinu nazývanou pOH

$$\text{pOH} = -\log_{10} [\text{OH}^-] = -\log_{10} 10^{-7} = 7. \quad (8)$$

Tudíž celý rozsah hodnot pH je od 0 do 14 a *neutrální roztok* je definován jako roztok jehož koncentrace iontů je rovna $\text{pH} = \text{pOH} = 7$.

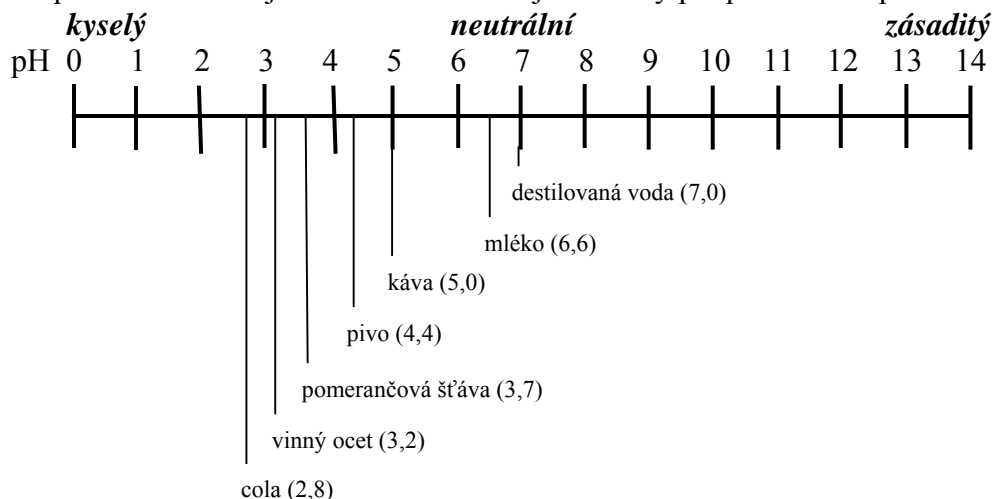
¹ Koncentrace je uváděna v Molech, tj. $[\text{H}^+] = \left[\frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{mol}}{\text{L}} \right] = \text{M}$

Disociační konstanta K_w je závislá na teplotě a může se měnit od $1,156 \times 10^{-15}$ při 0°C do $5,189 \times 10^{-13}$ při 100°C , viz Tabulku 1.

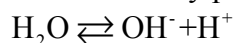
Teplota $^\circ\text{C}$	Teplota $^\circ\text{K}$	K_w	pH pOH
0	273,15	$1,156 \times 10^{-15}$	7,47
5	278,15	$1,872 \times 10^{-15}$	7,36
10	283,15	$2,964 \times 10^{-15}$	7,26
15	288,15	$4,573 \times 10^{-15}$	7,17
20	293,15	$6,878 \times 10^{-15}$	7,08
25	298,15	$1,011 \times 10^{-14}$	7,00
30	303,15	$1,455 \times 10^{-14}$	6,92
35	308,15	$2,055 \times 10^{-14}$	6,84
40	313,15	$2,854 \times 10^{-14}$	6,77
45	318,15	$3,898 \times 10^{-14}$	6,70
50	323,15	$5,245 \times 10^{-14}$	6,64
55	328,15	$6,957 \times 10^{-14}$	6,58
60	333,15	$9,104 \times 10^{-14}$	6,52
65	338,15	$1,176 \times 10^{-13}$	6,46
70	343,15	$1,501 \times 10^{-13}$	6,41
75	348,15	$1,893 \times 10^{-13}$	6,36
80	353,15	$2,362 \times 10^{-13}$	6,31
85	358,15	$2,917 \times 10^{-13}$	6,27
90	363,15	$3,567 \times 10^{-13}$	6,22
95	368,15	$4,321 \times 10^{-13}$	6,18
100	373,15	$5,189 \times 10^{-13}$	6,14

Tabulka 1: Teplotní závislost K_w , pH a pOH při tlaku 1 baru.

Stupnice na následujícím obrázku ilustruje hodnoty pH pro některé používané nápoje



Gibbsovu volnou entalpii (někdy se užívá kratší název Gibbsova energie) vodíkových iontů ve vodě vypočteme z rovnovážné konstanty přirozené disociace vody



Standardní Gibbsovy energie (v našem případě referenční chemické potenciály) jsou pro většinu látek tabelovány, např [1]. Zde nalezneme hodnoty chemických potenciálů vniku příslušných komponent, $\bar{\mu}_{\text{H}_2\text{O}} = -237 \text{ kJ/mol}$, $\bar{\mu}_{\text{OH}^-} = -157 \text{ kJ/mol}$,

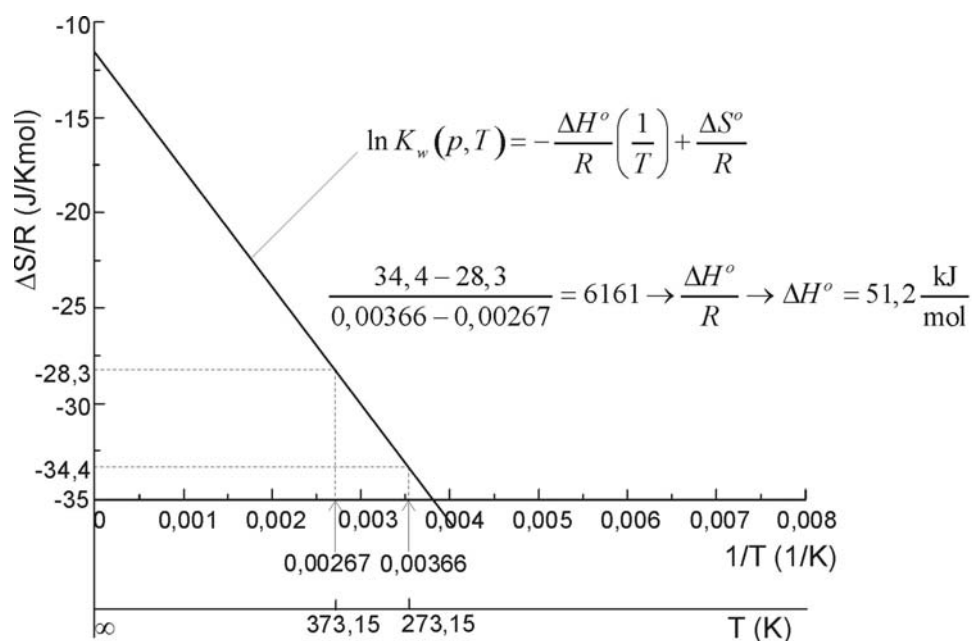
$\bar{\mu}_{\text{H}^+} = 0 \text{ kJ/mol}$. Logaritmus rovnovážné konstanty je roven záporně vzaté Gibbsově volné entalpii

$$\begin{aligned} RT \ln K_w &= RT \ln \left[\frac{[\text{OH}^-][\text{H}^+]}{[\text{H}_2\text{O}]} \right] = -\Delta G = -(-\bar{\mu}_{\text{H}_2\text{O}} + \bar{\mu}_{\text{OH}^-} + \bar{\mu}_{\text{H}^+}), \\ &= -237 + 157 + 0 = -80 \text{ [kJ/mol]} \end{aligned} \quad (9)$$

viz např. [2]. Z tohoto vztahu nalezneme konkrétní velikost rovnovážné konstanty

$$K_w = \exp\left(\frac{-\Delta G}{RT}\right) = \exp\left(\frac{-80 \cdot 10^3}{8,314 \cdot 298,15}\right) = \exp(-32,2331) = (9,969 \cdot 10^{13})^{-1} \doteq 10^{-14} \quad (10)$$

Ke stejným závěrům dospějeme z teplotní závislosti rovnovážné konstanty z Tabulky 1.



Obr. 1: Stanovení velikosti Gibbsovy volné entalpie ΔG z teplotní závislosti $K_w(p, T)$ pro $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T \in (0^\circ - 100^\circ \text{C})$, viz Tab. 1

Z obr. 1 nalezneme změnu entropie $\frac{\Delta S^\circ}{R} = -12$ pro $T \rightarrow \infty$, pro $R = 8314 \text{ J/mol}$

plyne $\Delta S^\circ = -99,8 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$ a tudíž $-\Delta G^\circ = -\Delta H + T^\circ \Delta S^\circ = -51200 - 298,15 \cdot 99,8 =$
 $-80900 \frac{\text{J}}{\text{mol}} = -80,9 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$.

Měření pH definované na základě elektrochemických veličin

Mělo by být zřejmé, že měření $[H^+]$ nebo $[OH^-]$ metodami analytické chemie není proveditelné. Tudíž rovnici (1) musíme vyjádřit v jiné formě – nazývané Nernstova rovnice, která popisuje pH pomocí elektrických veličin:

$$E = E^\circ - \frac{RT}{nF} \ln a_{H^+}, \quad (11)$$

kde E značí potenciál v milivoltech (mV) a E° je standardní potenciál vodíkové elektrody (0 mV), R je univerzální plynová konstanta, T je teplota ve stupních Kelvina n počet elektronů vstupujících do reakce, tzn. $n=1$, F je Faradayova konstanta a a_{H^+} je aktivita vodíkového iontu.

Dosazením numerických hodnot pro různé konstanty a převedením přirozeného logaritmu na dekadický se rovnice (11) redukuje na tvar:

$$E = E^\circ + 0,1984 \cdot (t + 273,15) \cdot pH. \quad (12)$$

Člen $0,1984 \cdot (t + 273,15)$ je znám jako Nernstův faktor a popisuje rychlost změny v mV vzhledem k teplotě, viz Tabulka 2.

Teplota (°C)	Nernstův faktor (mV/pH)
0	54,19
5	55,18
10	56,18
15	57,17
20	58,16
25	59,15
30	60,14
35	61,14
40	62,13
45	63,12
50	64,11
55	65,10
60	66,10
65	67,09
70	68,08
75	69,07
80	70,06
85	71,06
90	72,05
95	73,04
100	74,03

Tabulka 2: Teplota vs. změna v mV

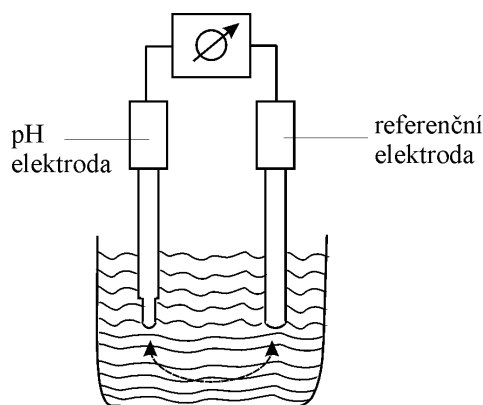
Následující Tabulka 3 popisuje celý rozsah pH od 0 do 14 při 25 °C.

pH	mV
0	414,05
1	354,90
2	295,75
3	236,60
4	177,45
5	118,30
6	59,15
7	0,00
8	-59,15
9	-118,30
10	-177,45
11	-236,60
12	-295,75
13	-354,90
14	-414,05

Tabulka 3: pH vs. mV

Jak je pH ve skutečnosti měřeno?

Z předchozí diskuze by mělo být zřejmé, že pro měření pH musí existovat elektrický obvod. Tento obvod zahrnuje měřicí (nebo skleněnou) elektrodu (pro určení E), referenční elektrodu (ke stanovení E^0) a nějaké zařízení pro měření elektrického potenciálu (mV) mezi dvěma elementy, viz Obr. 2.



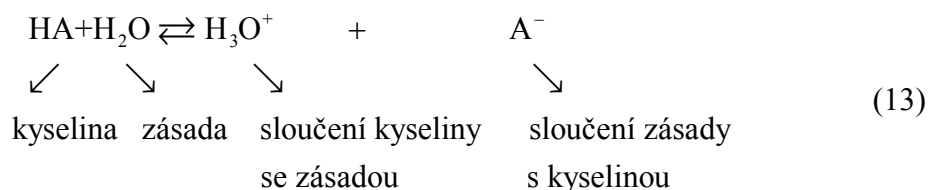
Obr. 2 měřící obvod pH

Poznámky:

Kyseliny-acids \rightarrow H^+ donates (dává)

Zásady- bases \rightarrow H^+ accepts (pohlcuje)

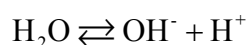
reakce kyselina-zásada (acid-base reaction)



Rovnovážná nebo disociační konstanta

$$K_w = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA][H_2O]} \quad (14)$$

Pro čistou vodu



$$[H_2O] = \text{koncentrace} \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} = \frac{\text{mol}}{\text{L}} = M$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ L} \dots 1 \text{ kg} \\ 1 \text{ kmol} \dots 18 \text{ kg} \dots 18 \text{ L} \end{array} \right\} \text{ v } 1 \text{ L je } \frac{1000}{18} = 55,5 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = 55,5 M$$

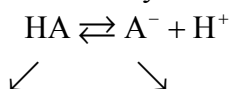
Z rovnice (13) a (3) vyplývá

$$K_w = \frac{[OH^-][H^+]}{[H_2O]} \rightarrow K_w = [OH^-][H^+] \Big|_{\substack{25^\circ C = 298,15 \text{ K} \\ p = 101325 \text{ Pa}}} = 10^{-14} M^2 \quad (15)$$

Množství obsahující stejný počet molů $[OH^-] = [H^+] = K_w^{1/2} = 10^{-7} M$

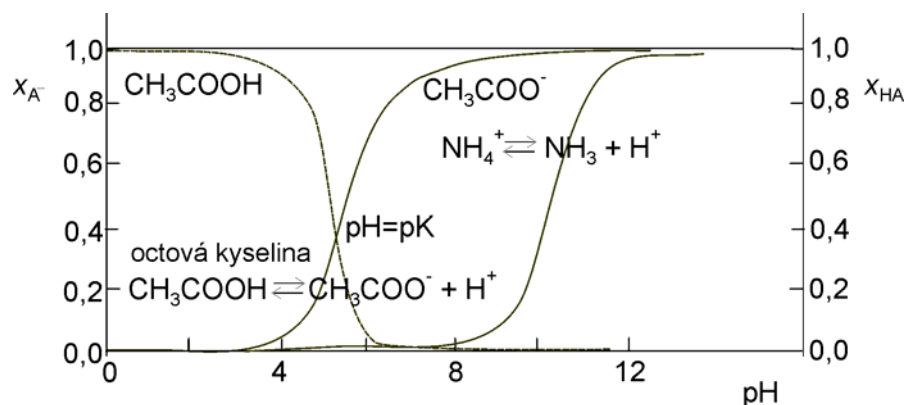
$$\text{pH} = -\log[H^+] \begin{cases} 0 \dots \text{silná kyselina} \\ 7 \dots \text{neutrální roztok (krev } [H^+] = 4 \cdot 10^{-8} M; \text{ pH}=6) \\ 14 \dots \text{silná zásada} \end{cases}$$

Biologické látky se mění podstatně s malými změnami pH. Vyžadují prostředí, ve kterém je pH nesenzitivní na slučování kyselin nebo zásad, tzn.

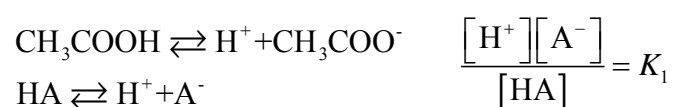


kyselina konjugovaná zásada

Takové prostředí nazýváme pufr (angl. buffer), viz Obr.3



Obr. 3 Dva typické pufrы pro různé hodnoty pH.



pH roztoku je určeno relativními koncentracemi $[\text{HA}]$ a konjugovanými zásadami $[\text{A}^-]$

$$[\text{H}^+] = K \frac{[\text{HA}]}{[\text{A}^-]}, \quad \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log K + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

Titrační křivka- postupné přidávání OH^- (resp. zvýšení $[\text{A}^-]$).

Henderson-Haselbachova rovnice $\text{pH} = \text{pK} + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$, pK je numericky rovno pH

(rovnost kyselosti), je-li koncentrace kyseliny $[\text{HA}]$ rovna koncentraci její konjugované zásady.

Doporučená literatura:

[1] P. W. Atkins, *Physical Chemistry*, Oxford Press, 1999.

[2] F. Maršík, I. Dvořák, *Biodynamika*, Academia Praha, 1988



EXERCISES

1. How much heat will be produced by the formation of 1 g pure liquid water from pure hydrogen and pure oxygen at room conditions

a) in a gas burner after condensation of the water vapour:

$$Q_1 = \dots\dots\dots \text{ kJ};$$

b) in a standard fuel cell (efficiency $\approx 70\%$)

$$Q_2 = \dots\dots\dots \text{ kJ}.$$

2. What is the numerical value of the (differential molar) heat of reaction at constant pressure $Q_{m,p}$ and that at constant volume $Q_{m,v}$ for the formation of graphite from diamond starting at room conditions?

$$Q_{m,p} = \dots\dots\dots \text{ kJ/mol};$$

$$Q_{m,v} = \dots\dots\dots \text{ kJ/mol}.$$

3. What is the numerical value of the molar free enthalpy of formation of pure dichlorine $^{35}\text{Cl}^{37}\text{Cl}$ at room conditions?

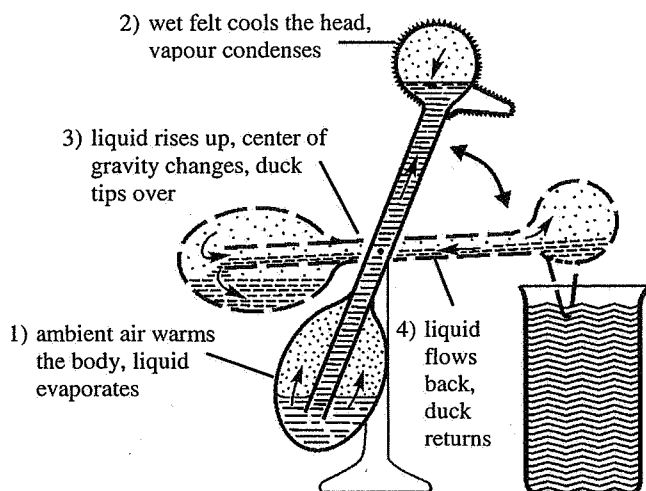
$$\Delta_f G_m = \dots\dots\dots \text{ kJ/mol}.$$

4. A hot solution with a temperature of $\approx 100^\circ\text{C}$ is obtained if the same amounts (in weight) of NaOH and H_2O are mixed (strong exothermic reaction). On the other hand the ratio $n(\text{NaOH})/n(\text{H}_2\text{O})$ in a saturated solution at 100°C is approximately 3 times higher than at 25°C (strong increase of solubility at heating). How is this compatible with Le Chatelier's principle? (answer in catchwords)

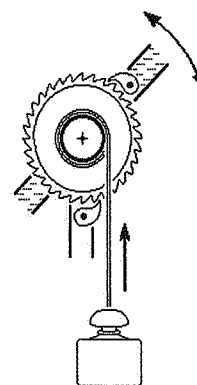
.....

5. The "drinking duck", a well-known toy, tips over, the beak dips into the water, the duck returns in the upright position, and the game can start again.

What is the approximate value of the efficiency, if the duck (by evaporating 1 g of water at a humidity of 70%) lifts a weight of 50 g for 1 m?



The movement of the duck can be used for lifting a weight



Some useful numerical values (at 298 K)

	State	M g/mol	ρ^0 kg/m ³	H_m^0 J/mol	S_m^0 J/K·mol	$C_{p,m}^0$ J/K·mol	χ^0 10 ⁻⁹ /Pa	γ^0 10 ⁻⁶ /K	$\Delta_f H_m$ kJ/mol	$\Delta_D H_m$ kJ/mol
C	diamond	12.01	3510	522	2.38	6.12	0.0023	3.0	1.893	716
C	graphite	12.01	2200	1051	5.74	8.53	0.031	7.4	0	714
Cl ₂	gas	70.91	2.898	9177	223.0	33.9	9869	3354	0	242.2
H ₂	gas	2.016	0.0824	7415	130.6	28.83	9869	3354	0	435.8
H ₂ O	gas	18.015	0.736	9899	188.6	33.55	9869	3354	-241.7	924.9
H ₂ O	liquid	18.015	997.0	1326	69.7	75.15	0.474	256	-285.9	969.1
O ₂	gas	32.00	1.308	8,646	205.0	29.36	9869	3354	0	494.8

Index ⁰ identifies standard conditions

- M molecular mass
- ρ mass density
- H_m molar enthalpy $H_m(298\text{ K}) - H_m(0\text{ K})$
- S_m (conventional) molar entropy
- $C_{p,m}$ molar heat capacity at constant pressure
- χ isotherm compressibility
- γ (cubic) thermal expansion coefficient
- $\Delta_f H_m$ molar enthalpy of formation
- $\Delta_D H_m$ molar dissociation enthalpy (for the dissociation in atoms)

Natural isotopic composition of chlorine:

³⁵Cl 75,4 %, ³⁷Cl 24,6 %

Ground state vibration frequency of ³⁵Cl₂ molecules:

$\nu_e = 16.9 \cdot 10^{12}$ Hz

Molar evaporation enthalpy of water at 373 K:

$\Delta_v H_m = 40.66$ kJ/mol

References:

D'Ans Lax: "Taschenbuch für Chemiker und Physiker", 3th ed., Springer, Vol. 1 (1967) and Vol. 3 (1970)

E. Wiberg: „Die chemische Affinität“, 2nd ed., de Gruyter 1972

Gmelin handbook, Vol. C [B]

Příklad: *Difúzní vlny.* Ukažte na příkladu dvou konkurujících si autokatalytických reakcí s difúzí možnost oscilací konkurujících si komponent a existenci difúzních vln. Předpokládejte, že konkurující si komponenty C_2, C_3 vystupují v kinetických rovnicích



Uvedený systém rovnic je rozšířením ekologického modelu Lotky-Voltera [2], nazývaný též model dravci (C_3)-kořisti (C_2), o přítoky ($J_\alpha > 0$) popřípadě odtoky ($J_\alpha < 0$) odpovídajících komponent.

Řešení

Rychlosti chemických reakcí (1) stanovíme podle zákona aktivních hmot, tj.

$$\begin{aligned} w_1 &= k_{+1}n_1n_2 - k_{-1}n_2^2 \\ w_2 &= k_{+2}n_2n_3 - k_{-2}n_3^2 \\ w_3 &= k_{+3}n_3 - k_{-3}n_4 \end{aligned} \quad (2)$$

kde n_α , $\alpha = 1, 2, \dots$ jsou látková množství (popř. molární koncentrace, počet jedinců v populaci apod.) odpovídajících složek. Předpokládejme, že rychlosti zpětných reakcí jsou nulové, pak rychlost vzniku sledovaných komponent C_2, C_3 je popsána diferenciálními rovnicemi

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = w_1 - w_2 + J_2 = k_{+1}n_1n_2 - k_{+2}n_2n_3 + J_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = w_2 - w_3 + J_3 = k_{+2}n_2n_3 - k_{+3}n_3 + J_3. \quad (4)$$

Tyto rovnice reprezentují bilanci hmotnosti v chemických reakcích, viz např. vztah (5.73) v knize [1]. Toky J_2, J_3 můžeme nahradit difúzními toky

$$J_2 = D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial r^2}, \quad J_3 = D_3 \frac{\partial^2 n_3}{\partial r^2}. \quad (5)$$

Budeme vyšetřovat následující případy

$$\begin{aligned} 1) \quad & J_2 = J_3 = 0, \\ 2) \quad & J_2 = J_3 < 0, \\ 3) \quad & J_2 = -J_3. \end{aligned} \quad (6).$$

Koeficienty difúze D_2, D_3 mohou mít jak kladné tak i záporné hodnoty v závislosti na předpokládaném směru gradientu koncentrace. Znaménkem koeficientů D_2, D_3 stanovíme, zda komponenta přitéká ($J_\alpha > 0$) a nebo odtéká ($J_\alpha < 0$). Prostorovou

souřadnici jsme označili r a předpokládáme pro jednoduchost popis difúze v kartézských souřadnicích.

V reálném případě, kdy je současně řešena rovnice difúze a možné průběhy koncentrací jsou, např. $n_2 \sim \arctg[(r-r_0)/\delta_2]$, a $n_3 \sim \arctg[(r-r_0)/\delta_3]$ pak platí

$$\frac{\partial^2 n_2}{\partial r^2} = -\frac{2(r-r_0)}{\delta_2^3 \left(1 + \left(\frac{r-r_0}{\delta_2}\right)^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 n_3}{\partial r^2} = -\frac{2(r-r_0)}{\delta_3^3 \left(1 + \left(\frac{r-r_0}{\delta_3}\right)^2\right)^2} \quad (7)$$

a odtok komponenty n_2 , tj. $J_2 < 0$ je zajištěn pro oblast $r > r_0$, koeficientem difúze $D_2 > 0$, viz Obr. 1b). Příklad složky n_3 v této oblasti je při kladném koeficientu $D_3 > 0$, vyvolán jen průběhem koncentrace ve tvaru $n_3 \sim \arctg(r/\delta_3)$, viz Obr. 1b). V této více kvalitativní analýze neřešíme konkrétní průběhy koncentrací složky n_3 a proto vyjádříme její přítok, tj. $J_3 > 0$, pro $r > r_0$ zavedením záporného koeficientu difúze $D_3 < 0$.

Pro popis prostorové difúze sférickými souřadnicemi by vyžadovalo zavedení Kelvinových sférických funkcí na místo funkcí harmonických. Kvalitativní vlastnosti řešení jsou však stejné.

Nalezneme stacionární hodnoty koncentrací n_2, n_3 tím, že položíme levé strany rovnic (3), (4) a toky J_2, J_3 rovny nule, tudíž

$$k_{+1}n_1n_{20} - k_{+2}n_{20}n_{30} = 0, \quad (8)$$

$$k_{+2}n_{20}n_{30} - k_{+3}n_{30} = 0. \quad (9)$$

Z rovnice (9) plyne

$$n_{20} = \frac{k_{+3}}{k_{+2}}, \quad n_{30} = \frac{k_{+1}n_1}{k_{+2}} \quad (10)$$

kde $n_1, k_{+1}, k_{+2}, k_{+3}$ jsou nějaké zadané parametry úlohy. Jejich hodnoty jsou vesměs kladná čísla.

Budeme hledat kvalitativní vlastnosti řešení rovnic (3), (4) kolem stacionárního stavu (10). Předpokládejme řešení ve tvaru malých harmonických poruch velikosti $\delta n_2, \delta n_3$

$$n_2(t) = n_{20} + \delta n_2 \exp(\omega t - kr), \quad \text{pro } \omega = \omega_r + i\omega_{im}, \quad k = k_r + ik_{im} \quad (11)$$

$$n_3(t) = n_{30} + \delta n_3 \exp(\omega t - kr).$$

Frekvence ω a vlnové číslo k jsou komplexní čísla. Dosadíme vztahy (11) do výchozích rovnic (3), (4) a budeme uvažovat difúzní toky (5). Zanedbáním členů malých druhého řádu a výše, dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic pro poruchy $\delta n_2, \delta n_3$

$$\begin{aligned} -(\omega - k_{+1}n_1 + k_{+2}n_{30} - k^2D_2)\delta n_2 - k_{+2}n_{20}\delta n_3 &= 0, \\ k_{+2}n_{30}\delta n_2 - (\omega + k_{+3} - k_{+2}n_{20} - k^2D_3)\delta n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Použijeme-li vlastnosti stacionárního stavu (10) redukuje se soustava (12) na rovnice

$$\begin{aligned} -(\omega - k^2D_2)\delta n_2 - k_{+2}n_{20}\delta n_3 &= 0, \\ k_{+2}n_{30}\delta n_2 - (\omega - k^2D_3)\delta n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Tato soustava rovnic má nenulové řešení (existují nějaké fluktuace koncentrací) jen v tom případě je-li její determinant roven nule, tj.

$$\omega^2 + \omega k^2 (D_2 + D_3) + k^4 D_2 D_3 + k_{+1} k_{+3} n_1 = 0 \quad (14)$$

což je splněno v případě, že platí následující vztah mezi frekvencí ω a vlnovým číslem k

$$\omega = -\frac{k^2 (D_2 + D_3)}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4 (D_2 + D_3)^2}{4} - k^4 D_2 D_3 - k_{+1} k_{+3} n_1} = \omega_{re} + i \omega_{im}. \quad (15)$$

Vzhledem k tomu, že parametry n_1, k_{+1}, k_{+3} jsou kladná čísla a difúzní koeficienty D_2, D_3 mohou být kladná i záporná podle směru toku (6). Znaménkem koeficientů D_2, D_3 nahrazujeme vliv koncentračního gradientu, viz Obr. 1b).

Pro případ 1) ve vztahu (6) platí, že $D_2 = D_3 = 0$ a dochází pouze k netlumeným oscilacím

$$i \omega_{im} = i \sqrt{k_{+1} k_{+3} n_1} \quad (16)$$

kolem stacionárního stavu (10), viz Obr. 1a).

V případě, že jsou oba koeficienty difúze kladné a sobě rovny, tj. $D_2 = D_3 = D$ má frekvence (15) reálnou a imaginární část

$$\omega = \omega_{re} + i \omega_{im} = -k^2 D \pm i \sqrt{k_{+1} k_{+3} n_1} \quad (17)$$

a vedle oscilace koncentrací n_2, n_3 kolem stacionární hodnoty (10) dochází k jejich útlumu s rostoucí vzdáleností r .

Jiná situace nastane v případě, že koncentrační gradienty $\frac{\partial n_2}{\partial r}$ a $\frac{\partial n_3}{\partial r}$ mají opačný směr, např. tak jak je uvedeno na Obr. 1b). Tuto skutečnost vyjádříme opačnými znaménky koeficientů difúze, tj. $D_2 = D, D_3 = -D$. Frekvence (15) má jen imaginární část ω_{im} , která odpovídá opět netlumeným oscilacím jako v případě 1) ve vztahu (6) ale tentokrát s frekvencí

$$\omega_{im} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \pm \sqrt{k_{+1} k_{+3} n_1 - k^4 D^2}. \quad (18)$$

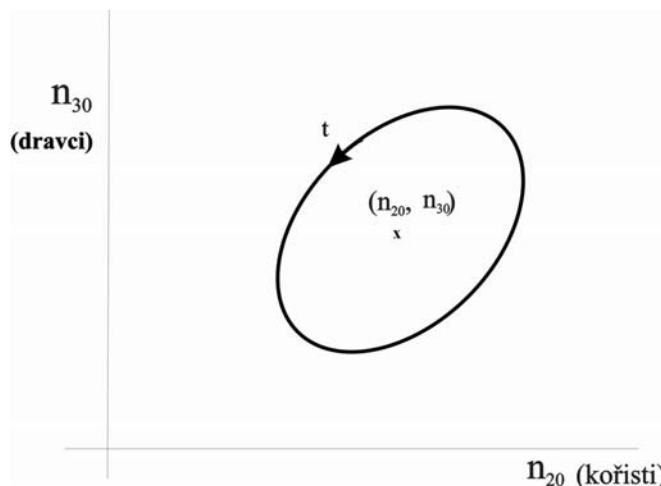
kteřá je vázána s vlnovým číslem $k = 2\pi / \lambda$ a tedy i s vlnovou délkou λ postupné vlny

$$\begin{aligned} n_2(t) &= n_{20} + \delta n_2 \exp(\omega_{im} t - kr), \\ n_3(t) &= n_{30} + \delta n_3 \exp(\omega_{im} t - kr). \end{aligned} \quad (19)$$

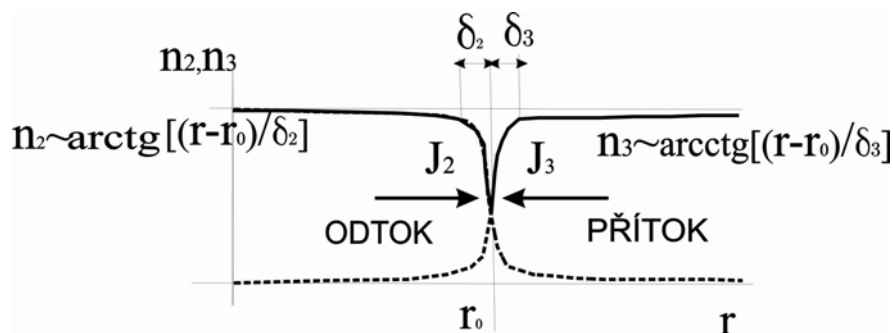
viz obr. 1a). Tyto postupné vlny reprezentují koncentrační vlny, které jsou pozorovány při tzv. Belousově-Žabotinského reakci, viz [2]. Ve speciálním případě kdy je frekvence (18) nulová je koncentrační hranice stacionární a vlnová délka λ má následující vztah k rychlostem chemických reakcí

$$\lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{k_{+1} k_{+3} n_1}}. \quad (20)$$

Tvar takové stacionární vlny je schematicky zobrazen na Obr.1b). Vzdálenost λ na které dojde k prudkému nárůstu koncentrace je určena rychlostmi 1. a 3. chemické reakce a velikostí difúzní konstanty.



Obr. 1a) Stabilní oscilující řešení kolem stacionárního stavu (10).



Ob r.1b). Schematický tvar koncentračního gradientu při vzájemné kompenzaci chemické reakce a difúze.

Doporučená literatura:

[1] F. Maršík, I. Dvořák, *Biotermodynamika*, Academia Praha, 1988

[2] P. Glansdorff, I. Prigogine, *Thermodynamic theory of Structure, Stability and Fluctuations*, John Wiley & Sons Ltd., London, 1971

Příklad 23

Formulujte rovnice jednorozměrného isotermického nestlačitelného proudění elastickou trubicí průřezu $A(x,t)$ jejíž stěna je charakterizována konstitutivním vztahem tvaru

$$p - p_o = \frac{8hE}{3D} \left[\left(\frac{A}{A_o} \right)^\alpha - 1 \right]. \quad (23.1)$$

kde h je tloušťka stěny, E je Youngův modul pružnosti.

Řešení:

Vyjdeme z bilančních rovnic odvozených v příkladu 4 a upravíme je pro zjednodušený případ nestacionárního, nestlačitelného, izotermického proudění. Definueme veličinu

$$m = A\rho v, \quad (23.2)$$

průtočné množství pomocí které budeme formulovat rovnici bilanci hmotnosti

$$\rho \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0. \quad (23.3)$$

Bilance hybnosti má tvar

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \left[\left(\tau_w + \frac{m^2}{\rho A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial p} - A \right] \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2m}{A\rho} \frac{\partial m}{\partial x} = O\tau_w, \quad (23.4)$$

kde na obvodu trubice O ($= \pi D \dots$ pro válcovou trubku) je tečné napětí

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_w = -\frac{\rho v^2}{2} c_f, \quad (23.5)$$

vyjadřující vazké tření o stěnu trubice. Toto tření vyjádříme pomocí třecího koeficientu c_f , který má pro laminární Poiseuillovo proudění tvar

$$c_f = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{D\rho v}{\mu}. \quad (23.6)$$

Analogicky příkladu 5 označíme

$$c^2 = \frac{A}{\rho} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)^{-1} = \frac{A}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial A} \right). \quad (23.7)$$

jako rychlost pohybu pulzní vlny vzniklé v důsledku elastické deformace trubky.

Z formálních důvodů lepšího zápisu výchozích bilančních rovnic (23.3),(23.4) zavedeme označení

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial A}{\partial p} &= A \left(\frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right) = \frac{A}{c^2}, \\ v &= \frac{m}{\rho A}, \\ A &= A \left[1 - \left(\tau_w + \frac{m^2}{\rho^2 A^2} \right) \frac{1}{\rho c^2} \right] = A \left[1 - (\tau_w + \rho v^2) \frac{1}{\rho c^2} \right]. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Zákony bilance (23.3), (23.4) převedeme na konzervativní tvar

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 m}{A} \right) = m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{A} \right), \quad (23.9)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Ap + 2vm) = \left(O\tau_w + p \frac{\partial A}{\partial x} + 2m \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Vektor proměnných označíme $Y = (p, m) = (Y_1, Y_2)$ a dodatečné parametry jsou A, c^2, v , které jsou rovněž funkcemi (x, t) .

Vektor toků označíme

$$F_1 = \frac{c^2}{A} Y_2, \quad , \quad (23.10)$$

$$F_2 = AY_1 + 2vY_2$$

a vektor zdrojů

$$H_1 = Y_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{A} \right), \quad (23.11)$$

$$H_2 = O\tau_x + Y_1 \frac{\partial A}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Konečný tvar výchozích rovnic (23.9) je

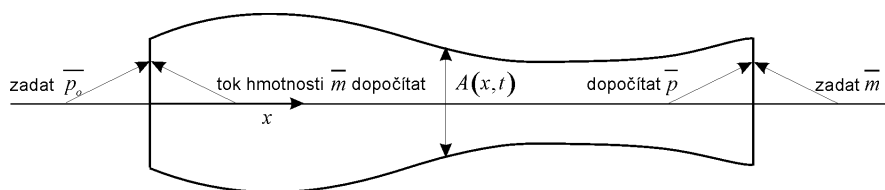
$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F(Y)}{\partial x} = H(Y). \quad (23.12)$$

Jde o soustavu dvou hyperbolických rovnic které mají dvě reálné charakteristiky

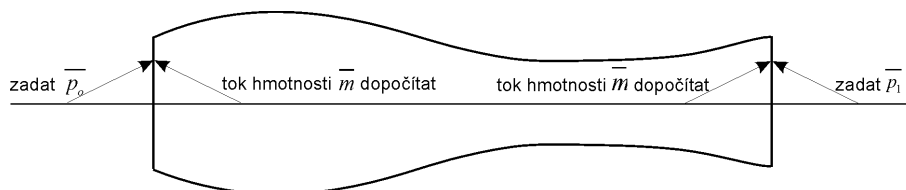
$$\frac{dx}{dt} = v \pm c \quad (23.13)$$

můžeme na okajích zadávat vždy jen jednu z okrajových podmínek, viz obr.1 a obr.2.

1. varianta



obr.23. 1 Okrajové podmínky při zadaném vstupním tlaku požadovaném výstupním množství



2. varianta

obr. 23. 2 Okrajové podmínky při zadaném vstupním a výstupním tlaku.

Způsob numerického řešení

K řešení můžeme použít MacCormackovou metodu prediktor-korektor, jejíž schema je

$$\begin{aligned}\bar{Y}_j^n &= Y_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + \Delta t H_j^n, \\ \bar{Y}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[Y_j^n + \bar{Y}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_j^n - \bar{F}_{j-1}^n) + \Delta t \bar{H}_j^n \right], \\ Y_j^{n+1} &= \bar{Y}_j^{n+1} + \varepsilon D_2 F_j^n.\end{aligned}\tag{23.14}$$

Poslední vztah vyjadřuje tzv. umělý disipační člen, který se zavádí k potlačení numerických oscilací. Jeho nejčastější tvar je

$$D_2 Y_j^n \approx \left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_j^n \doteq \frac{Y_{j+1}^n - 2Y_j^n + Y_{j-1}^n}{\Delta x^2}\tag{23.15}$$

a koeficient numerické disipace (tlumení) má velikost $\varepsilon \in (10^{-4}, 10^{-2})$, podle povahy úlohy.

$$\left| (c + v) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1,\tag{23.16}$$

kde c je rychlost malých (zvukových) poruch ve vyšetřovaném mediu.

Příklad 24:

Dokažte v termodynamice často užívané matematické identity (3), (4), (5). Předpokládejte, že veličiny x, y, z jsou vázány funkční závislostí

$$f(x, y, z) = 0, \text{ resp.} \quad (1)$$

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y).$$

Jestliže ještě navíc je funkce w funkcí libovolné dvojice těchto tří proměnných, tj.

$$w = w(x, y), \text{ popř. } w = w(y, z) \text{ či } w = w(x, z), \quad (2)$$

platí následující identity:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \quad (5)$$

Řešení:

Závislost (2) si můžeme přepsat do tvaru

$$x = x(w, y), \quad y = y(w, z), \quad z = z(w, x). \quad (6)$$

Totální diferenciály těchto funkcí jsou

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w dy + 0dz - \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y dw = 0,$$

$$0dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w dz - \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z dw = 0, \quad (7)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w dx + 0dy + dz - \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_x dw = 0.$$

Předpokládejme, že $w = \text{konst}$, pak $dw = 0$ a soustava (7) má tvar

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w dy + 0dz = 0,$$

$$0dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w dz = 0, \quad (8)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w dx + 0dy + dz = 0.$$

Její nenulové řešení dx, dy, dz může nastat jen v případě, že determinant této soustavy je nulový, tj.

$$\det \begin{bmatrix} 1, & -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w, & 0 \\ 0, & 1, & -\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \\ -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w, & 0, & 1 \end{bmatrix} = 1 - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w = 0, \quad (9)$$

$$\text{resp. } \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w.$$

Tímto je dokázána identita (3).

Identita (4) plyne přímo z definice inverzní funkce, např.

$$x = x(y, z), \text{ resp. } x = x(y(x, z), z). \quad (10)$$

Totální diferenciál této funkce vyhovuje podmínce

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}. \quad (11)$$

Využitím vlastností totálního diferenciálu funkcí (1). Odvodíme identitu (5), tj.

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz = 0, \quad (12)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy + dz = 0.$$

Diferenciály dx , dz , dy jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic (12) a podmínka nenulového řešení této soustavy je nulová hodnota determinantu matice této soustavy

$$\det \begin{bmatrix} 1, & -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z, & -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \\ -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z, & 1, & -\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \\ -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, & -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x, & 1 \end{bmatrix} =$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x -$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + 1 = 0. \quad (13)$$

Využitím identity (11) můžeme podmínku (13) přepsat do tvaru

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right]^{-1} + 2 = 0. \quad (14)$$

Označíme na okamžik výraz

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = X. \quad (15)$$

Pak podmínka existence nenulových diferenciálů (13) má tvar

$$X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2 = 0. \quad (16)$$

Řešením této rovnice je hledaný vztah (5), tj.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \quad (17)$$

Příklad 30

Z formulace zákona bilance hybnosti v integrálním tvaru

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{v}^i dv = \int_{\partial \mathcal{V}} t^i da + \int_{\mathcal{V}} \rho f^i dv \quad (30.1)$$

setrvačná síla
povrchová síla
objemová síla

naleznete bilanci mechanické energie po proudnici.

Řešení: Přejdeme k lokálnímu tvaru zákona bilance pro tenzor tlaku P^{ij} definovaný z povrchových sil t^i vztahem

$$t^i = P^{ij} n_j, \quad da_j = n_j da, \quad \text{kde } P^{ij} = p(\rho, T) \delta^{ij} - P_{dis}^{ij}, \quad (30.2)$$

kde $da = (da_1, da_2, da_3) = \mathbf{n} da$ je orientovaný element povrchu, $p(\rho, T)$ je hydrostatický tlak a P_{dis}^{ij} je tenzor vazkých (disipativních) napětí. Výchozí lokální tvar zákona bilance hybnosti je

$$\frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^l v^i + P^{li}) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha}^i. \quad (30.3)$$

Po dosazení z (30.2) dostáváme a vynásobením skalárně vektorem rychlosti \mathbf{v}

$$\frac{\partial (\rho v^i)}{\partial t} v^i + v^i \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^l v^i) + v^i \frac{\partial p}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^l} P_{dis}^{li} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} v^i f_{\alpha}^i. \quad (30.4)$$

Tímto formálním postupem jsme dostali bilanci mechanické energie, tj. [W].

Upravíme a přeskupíme jednotlivé členy

$$\begin{aligned} (v^i)^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^l)}{\partial x^l} \right) + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} = \\ \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}) - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l}, \quad \text{pro } \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha}^l = - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (30.5)$$

Využijeme rovnice bilance hybnosti a definice materiálové derivace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^l)}{\partial x^l} = 0, \quad \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} \quad (30.6)$$

rovnici bilance mechanické energie pak můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} = \\ \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + \dot{p} = \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}) - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l}. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Jestliže zanedbáme tření, tj. $P_{dis}^{il} = 0$ a procesy jsou stacionární dostáváme nejjednodušší variantu zákona bilance mechanické energie, tzv. Bernoulliovu rovnici

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + \frac{\dot{p}}{\rho} \right] dt = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{p}}{\rho} dt = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_2 - \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (30.8)$$

kde integrace probíhá po proudnici (čára tečná ke směru rychlosti) s délkovým parametrem s

$$dt = v^l dx^l = |v| ds. \quad (30.9)$$

Bilanci mechanické energie můžeme formulovat i obecněji. Využijeme bilance hmotnosti a následujících identit

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^l \frac{\partial \rho}{\partial x^l} = -\rho \frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \quad \dot{p} = \overline{\left(\rho \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + \rho \overline{\left(\frac{p}{\rho} \right)} = \rho \overline{\left(\frac{p}{\rho} \right)} - p \frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \quad (30.10)$$

$$\text{t.j. } \frac{\rho \partial p}{\rho \partial t} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho} \right) - p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right], \quad \frac{\rho v^l \partial p}{\rho \partial x^l} = \rho v^l \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{p}{\rho} \right) - p v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

a dostáváme bilanci mechanické energie v obecném tvaru

$$\rho \overline{\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right)} = \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + p \frac{\partial v^l}{\partial x^l} - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}). \quad (30.11)$$

Odtud je zřejmé, že pro nevazkou a nestlačitelnou tekutinu ($\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0$) platí, že součet kinetické, potenciální a tlakové energie jsou v každém místě tekutiny konstantní, tj.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = konst. \quad (30.12)$$

Jde o jakýsi „Zákon zachování mechanické energie“.

Příklad 31.

Zákon bilance momentu hybnosti (zákon rovnováhy momentů) tělesa o objemu \mathcal{V} v bodu \mathbf{y} má tvar [1]

$$\overline{\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \rho \mathbf{v} dv} = \overline{\int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{t} da} + \overline{\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \rho \mathbf{f} dv}, \quad (31.1)$$

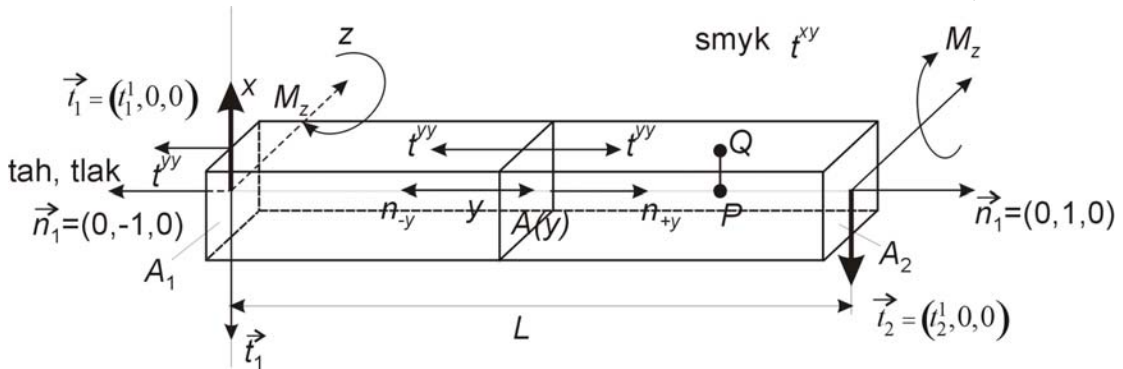
ve složkovém zápisu

$$\overline{\int_{\mathcal{V}} \rho \varepsilon_{ijk} (x^j - y^j) v^k dv} = \overline{\int_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} (x^j - y^j) t^k da} + \overline{\int_{\mathcal{V}} \rho \varepsilon_{ijk} (x^j - y^j) f^k dv}. \quad (31.2)$$

Vektor povrchových (plošných) sil působících na element plochy má komponenty $\mathbf{t} = (t^1, t^2, t^3)$. Je-li da velikost elementu plochy $\mathbf{da} = (dydz, dzdx, dxdy)$ s definovanou normálou $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ pak z rovnováhy sil $\mathbf{t} da = t^k da_k = t^{kl} da_l$ na tomto elementu odvodíme vztah $t^i = t^{ij} n_j$ kde t^{ij} je tenzor napětí. V obvyklém případě kdy neexistují vnitřní objemové momenty (látka není polární) je tenzor napětí symetrický

$$t^{ij} = t^{ji}. \quad (31.3)$$

Vyšetřete rovnováhu sil a momentů pro případ vetknuté tyče zatížené na volném konci silou $\vec{t}_2 = (t_2^1, 0, 0)$, viz obr. 31.1. Vektorový součin je definován pomocí permutačního symbolu ε^{ijk} vztahem $M_i = (\mathbf{y} \times \mathbf{t}_2)_i = \varepsilon_{ijk} y^j t_2^k$.



Obr. 31.1 Rovnováha sil a momentů sil na vetknuté tyči před deformací. P , Q jsou dva materiálové body, bod P je na ose a bod Q je mimo osu.

Vztažný bod $\mathbf{y} = (0, 0, 0)$ je počátek soustavy souřadnic. Pro z -tovou složku momentu, tj. $i=3$ platí $M_3 = \varepsilon_{321} y t_2^1$, viz obr. 31.1. Moment ve směru osy z označme M_z a jeho velikost je $M_z = (-1)L(-t_2^1) = Lt_2^1$. Orientované elementy plochy v odpovídajících průřezích A_1, A_2 jsou $da_1 = (0, -dxdz, 0)$, $da_2 = (0, dxdz, 0)$.

Řešení:

Předpokládejme, že je materiál zatěžované tyče homogenní a isotropní, takže jeho konstitutivní vťah má tvar

$$t^{ij} = \eta e_{(1)} \delta^{ij} + 2 \hat{\mu} e^{ij} = K e_{(1)} \delta^{ij} + 2 \hat{\mu} e^{(o)ij} \quad (31.4)$$

Eulerův deformační tenzor

$$2e^{kl} = \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} - \frac{\partial u^m}{\partial x^l} \frac{\partial u^m}{\partial x^k}, \quad e_{(1)} = \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{\partial u^m}{\partial x^m} - \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^m} \right) \right\}, \quad (31.5)$$

vyjadřuje relativní změny vzdáleností dvou materiálových bodů P , Q působením deformace, porovnej Obr. 31.1 a Obr. 31.2. Stopa tenzoru deformace $e_{(1)}$ vyjadřuje objemové změny a deviator tenzoru deformace

$$2 e^{(o)kl} = \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} - \frac{\partial u^m}{\partial x^l} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} - \frac{2}{3} e_{(1)} \delta^{kl} \quad (31.6)$$

popisuje změny v důsledku přetvoření (beze změny objemu), např. jednoduchý smyk.

V případě malých deformací zanedbáme v tenzoru (31.6) nelineární člen, takže tenzor malých deformací je definován vztahem

$$e^{(o)kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} - \frac{2}{3} e_{(1)} \delta^{kl} \right), \quad e_{(1)} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u^m}{\partial x^m},$$
$$e^{11} = e^{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e^{12} = e^{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \dots, \quad (31.7)$$

$$e^{(o)11} = e^{(o)xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} e_{(1)}, \quad e^{(o)12} = e^{(o)xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \dots$$

V důsledku rozdílného fyzikálního významu deformačních tenzorů (31.5) a (31.6), mají různý význam i materiálové parametry $\eta, K, \hat{\mu}$. Platí mezi nimi následující vztahy [2]

$$\eta = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \hat{\mu} = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (31.8)$$

Youngův modul pružnosti E a Poissonovo číslo

$$\sigma = -\frac{e^{22}}{e^{11}} = -\frac{\frac{\partial u_y}{\partial y}}{\frac{\partial u_x}{\partial x}} = -\frac{e^{33}}{e^{11}} = -\frac{\frac{\partial u_z}{\partial z}}{\frac{\partial u_x}{\partial x}} \quad (31.9)$$

jsou většinou získávány z tahové zkoušky ve směru osy x .

Rovnováha sil. Předpokládáme statické zatížení a uvažujeme jen rovnováhu povrchových sil

$$t_1^i + t_2^i = 0, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \quad (31.10)$$

které působí v průřezech A_1, A_2 , viz obr. 31.1. V našem případě platí

$$t_1^1 = -t_2^1, \quad (31.11)$$

síly působí ve směru souřadnice x a jsou stejně velké opačného smyslu. Označíme-li smykové napětí t^{xy} [Pa] pak z konstitutivního vztahu (31.4) plyne

$$t_1^1 = t^{xy} A(y) = \hat{\mu} e^{xy} A(y) = \frac{E}{1+\sigma} e^{xy} A(y) \quad (31.12)$$

Smykový modul $\hat{\mu}$ jsme nahradily Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým číslem σ , viz. vztah (31.8).

Rovnováha momentů. V průřezu A_1 je moment způsobený silou $t_2 = (-t_2^1, 0, 0)$. Podle vztahu (31.2) je rovnováha momentů pro případ znázorněný na obr. 31.1 popsána rovnicí

$$-\underbrace{\int_{A_1} \varepsilon_{zxy} x t^{yy} dx dz}_{-1} + \underbrace{\int_{A_2} \varepsilon_{zyx} L (-t_2^x) dx dz}_{+1} = 0. \quad (31.13)$$

Moment vnější síly, který má velikost $M_z = Lt_2^1$ směřuje v průřezu A_2 v kladném směru osy z a v průřezu A_1 v záporném směru.

Zavedeme označení

$$M_z = - \int_{A_1} x t^{yy} dx dz = Lt_2^1. \quad (31.14)$$

Rovnováhu momentů můžeme formulovat k libovolnému bodu y průřezu $A(y)$, viz obr. 31.1,

$$-M_z + \int_{A(y)} \varepsilon_{321} (0-y) t_1^1 dx dz + \int_{A(y)} \varepsilon_{321} x t^{yy} dx dz - \int_{A(y)} \varepsilon_{321} x t^{yy} dx dz + \int_{A(y)} \varepsilon_{321} (L-y) (-t_2^1) dx dz = -M_z + M_z(y) - M_z(y) + M_z = 0 \quad (31.15)$$

Integrály

$$\int_{A(y)} x t^{yy} dx dz - \int_{A(y)} x t^{yy} dx dz = 0 \quad (31.16)$$

přes tahová a tlaková napětí t^{yy} na orientované ploše průřezu $A(y)$ se vzájemně vyruší v důsledku orientace plochy, viz obr.31.1. Moment vnějších povrchových sil v bodě y je roven

$$M_z(y) = \int_{A(y)} \varepsilon_{321} (0-y) (t_1^1) dx dz \quad \text{pro } y \in (0, y), \quad (31.17)$$

a

$$M_z(y) = \int_{A(y)} \varepsilon_{321} (L-y) (-t_2^1) dx dz \quad \text{pro } y \in (y, L). \quad (31.18)$$

$$M_z = - \int_{A_1} x t^{yy} dx dz = Lt_2^1 \quad (31.19)$$

Vidíme, že ohybový moment je lineární funkcí souřadnice y a pro jeho derivaci platí

$$\frac{M_z(y + \Delta y) - M_z(y)}{\Delta y} = \frac{dM_z}{dy} \Big|_{y \in (0, y)} = t_1^1 \quad \text{a analogicky} \quad \frac{dM_z}{dy} \Big|_{y \in (y, L)} = -t_2^1. \quad (31.20)$$

Derivace ohybového momentu je rovna **smykové (posouvající) síle**. V tomto případě je velikost této smykové síly rovna síle zatěžující t_2^1 .

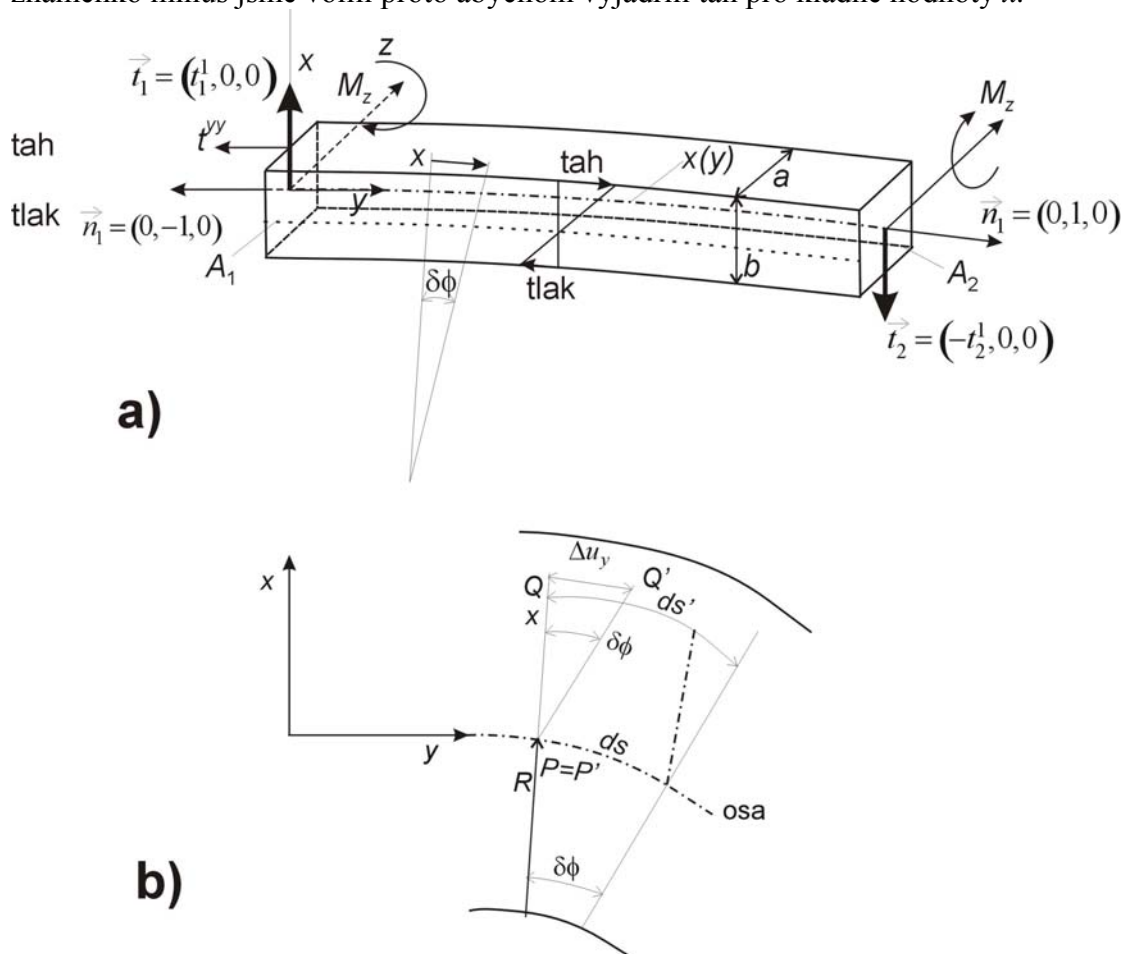
Namáhání v ohybu. Pro jednoosé zatížení můžeme určit tenzor napětí $t^{yy} = Ee^{yy}$, kde e^{yy} je relativní prodloužení ve směru osy y . Deformaci ve směru osy y stanovíme podle přibližného vzorce

$$e^{yy} = \frac{[(R+x) - R] \delta\phi}{R\delta\phi} = \frac{x}{R}, \quad (31.21)$$

viz obr.31.2. Podle konstitutivního vztahu (31.4) je tento typ namáhání napětí v průřezu $A(y)$ určen vztahem

$$t^{yy} = Ee^{yy} = -E \frac{x}{R} = -Ex \frac{d^2x}{dy^2}, \quad (31.22)$$

znaménko minus jsme volili proto abychom vyjádřili tah pro kladné hodnoty x .



Obr. 31.2 a) Ohyb tyče obdélíkového průřezu. b) Materiálový bod Q , který je mimo osu se posunul do polohy Q' a pod P svou polohu nezměnil.

Ohybový moment v průřezu A_1 je podle vztahu (31.14) roven

$$M_z = - \int_{A_1} x t^{yy} dx dz = \int_{A_1} \frac{E}{R} x^2 dx dz = \frac{EI_z}{R} = EI_z \frac{d^2x}{dy^2}. \quad (31.23)$$

Zavedli jsme veličinu I_z zvanou moment setrvačnosti průřezu vztahem

$$I_z = \int_{A(y)} x^2 dx dz = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx dy = \frac{ab^3}{12}. \quad (31.24)$$

Ze vztahu (31.23) snadno vypočteme poloměr zakřivení tyče

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (31.25)$$

pomocí známých veličin.

Literatura:

- [1] Maršík F. Termodynamika kontinua, Academia Praha, 1999
- [2] Brdička M. Mechanika kontinua, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959

Příklad 32

Formulujte zadání úlohy pro nalezení podélných, příčných a torzních kmitů tyče vetknuté na jedné straně a zatěžované na volném konci silou, popř. silovým momentem, viz. obr. 32.1.

Řešení:

Předpokládejme, že půjde o homogenní, izotropní, termo-viskoelastický materiál, jehož obecný konstitutivní vztah je

$$t^{ij} = -3K\alpha(T - T_o)\delta^{ij} + Ke_{(1)}\delta^{ij} + 2\hat{\mu}e^{(o)ij} + 2\mu d^{(o)ij} \quad (32.1)$$

Materiálové parametry mohou obecně záviset i na velikosti deformace a mají následující fyzikální význam:

$K \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$	je modul stlačitelnosti
$\hat{\mu} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$	je modul pružnosti ve smyku
$\mu \left[\text{Pa} \cdot \text{s} \right]$	je koeficient smykové viskozity
$\alpha \left[\text{K}^{-1} \right]$	je koeficient teplotní roztažnosti

Eulerův tenzor konečných deformací $e^{ij}(x^l, t)$ je vyjádřen pomocí vektoru posunutí

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u^1(x^i, t), u^2(x^i, t), u^3(x^i, t)) = (u_x, u_y, u_z) \quad (32.2)$$

Jeho obecný tvar je

$$e^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial u_l}{\partial x^j} \right) \quad (32.3)$$

Stopa tenzoru deformace $e_{(1)}$ vyjadřuje změnu velikosti objemu při deformaci a

deviátor $e^{(o)ij}$ tohoto tenzoru vyjadřuje přetvoření.

Tedy

$$e_{(1)} = \delta_{ij} e^{ij} = e^{11} + e^{22} + e^{33} = \sum_{m=1}^3 \left[\frac{\partial u^m}{\partial x^m} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u^l}{\partial x^m} \frac{\partial u_l}{\partial x^m} \right] \quad (32.4)$$

$$e^{(o)ij} = e^{ij} - \frac{1}{3} e_{(1)} \delta^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u^l}{\partial x^l} \delta^{ij} \right) + \frac{1}{3} \sum_{l,m=1}^3 \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^m} \frac{\partial u_l}{\partial x^m} \delta^{ij} - 3 \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right) \quad (32.5)$$

Zanedbáním kvadratických členů v tenzorech deformace (32.4) a (32.5) dostáváme obvyklý tenzor malých deformací. Vzhledem k tomu, že budeme nadále užívat jen tenzor malých deformací, ponecháme stejné označení jako v případě tenzoru konečných deformací, tudíž

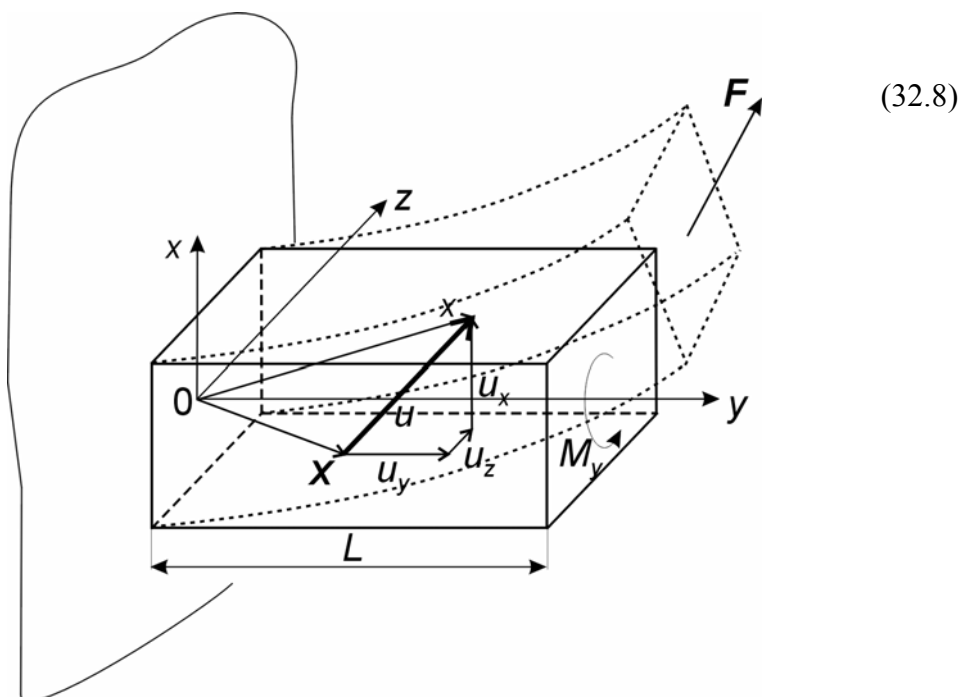
$$e^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \quad (32.6)$$

$$e^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} e_{(1)} \delta^{ij} \right), \quad e_{(1)} = \frac{\partial u^l}{\partial x^l} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Tenzor rychlosti deformace je definován vztahem

$$d^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right), \quad d^{ij} = d^{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \delta^{ij}. \quad (32.7)$$

Rychlost materiálového bodu $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ vyjádříme v prostorových (Eulerových) souřadnicích $(\mathbf{x}, t) = (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z, t)$ jako materiálovou derivaci vektoru posunutí



obr. 32.1

Znázornění deformace vetknuté tyče silou $F = (F_x, F_y, F_z)$. Touto silou můžeme vybudit podélné kmity (laterální flexe), příčné kmity (čistá flexe). Momentem M_y vybudíme torzní kmity.

Konvektivní člen $v^l \frac{\partial u^i}{\partial x^l}$ zanedbáme proti rychlosti $\frac{\partial u^i}{\partial t}$, protože v tuhých tělesech je rychlost unášení (konvekce) materiálových bodů velmi malá. Např. pro případ podélných vln, viz dále, je konvektivní člen úměrný $v_y e_{yy}$, kde $v_y \doteq \frac{\partial u}{\partial t}$ a $e_{yy} \ll 1$. V případě malých deformací navíc platí

$$d^{ij} = \dot{e}^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j \partial t} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i \partial t} \right) \quad (32.9)$$

Zákon bilance hybnosti je vyjádření rovnováhy setrvačných a povrchových sil (objemové síly zanedbáváme). Pro každý materiálový bod tyče (obecné těleso o objemu \mathcal{V}) platí

$$\rho \dot{v}^i - \frac{\partial t^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3 \text{ pro } \mathbf{x} \in V \quad (32.10)$$

Zanedbáme-li konvektivní členy, dostáváme bilanci hybnosti ve tvaru

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \frac{\partial t^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad (32.11)$$

kde $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ je hustota tělesa.

Okrajové podmínky:

Předpokládejme výchylku jen ve směru osy x , tj. $\mathbf{u} = (u_x(y, t), 0, 0)$ na vetknuté straně musí být splněny podmínky

$$u_x(y, t) = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y}(y, t) = 0 \quad \text{pro } y = 0, t \geq 0 \quad (32.12)$$

a na volném konci předpokládáme kmitnu, tj.

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}(y, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}(y, t) = 0, \quad \text{pro } y = L, t \geq 0 \quad (32.13)$$

Počáteční podmínky musí být kompatibilní s okrajovými podmínkami, tj.

$$u_x(y, 0) = u_x(y, t = 0) \quad \text{pro } y \in \langle 0, L \rangle \quad (32.14)$$

Příklad 33:

Nalezněte frekvenci ohybových kmitů vetknuté tyče s volným koncem

- bez přidané hmoty na konci tyče,
- s přidanou bodovou hmotou na konci M_G tyče.

Pro stanovení deformace v ohybu využijte vztahu (31.22) z příkladu 31.

Řešení:**Ohybové (příčné) kmity vetknuté tyče.**

K řešení využijte variačního principu mechaniky pevných elastických těles [1], [2]. Budeme předpokládat, že v tyči dochází jen k elastickým deformacím a tento proces je izentropický. Za těchto podmínek je zákon bilance hybnosti (rovnováha sil na elastickém tělese) důsledkem extrému (minima) funkcionálu

$$S(u^i(x^j, t)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)^2 - \frac{t_{el}^{ij} e_{ij}}{2} - \rho \phi \right] dv dt \quad (33.1)$$

vzhledem k posunutí $u^i(x^j, t)$ materiálového bodu P . Fyzikální význam integrandu

(tzv. Lagrangiánu) ve funkcionálu (33.1) je rozdíl kinetické energie $\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)^2$ a energie

deformační $\frac{1}{2} t_{el}^{ij} e_{ij}$ a potenciální $\rho \phi$ v jednotce objemu tuhého tělesa o hustotě ρ a

celkovém objemu \mathcal{V} . Část deformační energie se nevratně přeměňuje na teplo disipací. Tuto disipovanou energii zahrneme do potenciální energie

$$\rho \phi = f_{dis} u_x = \mu \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} u_x \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right], \quad (33.2)$$

kde $\mu \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \right]$ je viskozita materiálu tyče. Jestliže zanedbáme vliv gravitace, pak zůstává v lagrangiánu vedle kinetické energie jen deformační energie tyče ohýbající se v rovině (x, y) a disipovaná energie (33.2). S ohledem na vztahy (31.21) a (31.22) je deformační energie rovna¹⁾

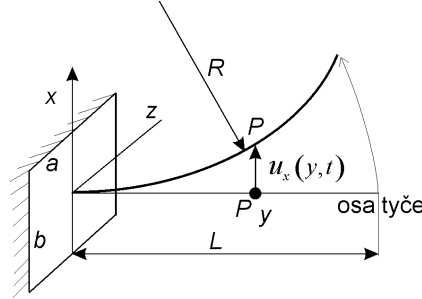
$$\frac{1}{2} t_{el}^{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} t^{yy} \cdot e^{yy} = \frac{E x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)^2. \quad (33.3)$$

Výchylku osy tyče ve směru x jsme označili $u_x(y, t)$, viz obr. 33.1 Potom je funkcionál (33.1) pro tyč příčně kmitající v rovině (x, y) dán integrálním výrazem

1) Poloměr oskulační kružnice v bodě y je $\frac{1}{R_x} = \frac{\left| \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}} \doteq \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_y$

Pro malé ohyby je $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \ll 1$. Pro rovinu (y, z) platí $\frac{1}{R_z} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$.

$$S(u_x(y), t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 - \mu \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} u_x - \frac{Ex^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy dz dx dt. \quad (33.4)$$



Obr. 33.1 Ohyb osy tyče obdélníkového průřezu. Materiálový bod osy P se posunul o $u_x(y, t)$. Posuv ve směru podélném zanedbáme $|u_x| \gg |u_y|$.

Nutná podmínku extrému tohoto funkcionálu vzhledem k výchylce $u_x(y, t)$ je určena nulovou variací tj.,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{\rho ab}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 - \mu \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} u_x - \frac{Eab^3}{24} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho ab \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} - \mu \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} \delta u_x - \frac{Eab^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial y^2} \right] dy dt = 0, \end{aligned} \quad (33.5)$$

za dodatečných podmínek na počátku a konci pohybu

$$\delta u(y, t = t_0) = \delta u(y, t = t_1) = 0. \quad (33.6)$$

Okrajové podmínky na koncích tyče určíme později.

Integrál

$$I_z = \int_A x^2 dx dz \quad \text{pro } A(x, z) = a \times b, \text{ nebo } A(x, z) = \pi R^2, \quad (33.7)$$

je obecně moment setrvačnosti I_z průřezu $A(x, z)$ při ohybu kolem osy z . Pro případ kruhového průřezu $A(x, z) \equiv R^2 - x^2 - z^2 = 0$ pak integrujeme

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{A(x,z)} x^2 dx dz = \int_{-R}^R dz \int_{-R\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}}^{R\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}} x^2 dx = \frac{2R^3}{3} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right)^{3/2} dz = \\ &= \frac{2R^4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned} \quad (33.8)$$

Integrál jsme upravili pomocí substituce $z = R \sin \varphi$. Výsledkem je moment setrvačnosti kruhového průřezu vzhledem k ohybu kolem osy z .

Poznámka 1: Všechny následující vztahy, které platí pro obdélníkový průřez na obr.

33.1 platí i pro kruhový průřez jestliže nahradíme vztah $\frac{ab^3}{12}$ vtahem $\frac{\pi R^4}{4}$. Konec poznámky.

Veličiny označené indexem „0“ budeme považovat při variaci za konstantní. Jde o tzv. rozšířený variační počet, podrobněji viz příklad 37.

Využitím časové integrace per partes dostáváme

$$\rho ab \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} dy dt = \rho ab \int_0^L \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \delta u_x \right) \Big|_{t_0}^{t_1} dy - \rho ab \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \delta u_x dy dt. \quad (33.9)$$

Stejnou úpravu použijeme i na integraci v intervalu $(0,L)$ v integrálu

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{Eab^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial y^2} dy dt &= - \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} \right) \Big|_0^L dy dt + \\ &+ \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} dy dt = - \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} \right) \Big|_0^L dy dt + \\ &+ \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \delta u_x \right) \Big|_0^L dy dt - \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4} \delta u_x dy dt. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Shrneme okrajové podmínky pro výchylku na koncích tyče:

i) pro $y=0$ je konec tyče vetknutý:

$$\delta u_x \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (33.11)$$

ii) pro $y=L$ je konec tyče volný:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{y=L} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \Big|_{y=L} = 0 \quad (33.12)$$

iii) pro $y=L$ je konec tyče podepřen:

$$\delta u_x \Big|_{y=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{y=L} = 0 \quad (33.13)$$

Dosazením do hraničních členů ve výrazu (33.10) zjistíme, že jediný nenulový člen je roven

$$- \frac{Eab^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4} \delta u_x dy dt \quad (33.14)$$

S ohledem na podmínky (33.6) a (33.11) až (33.13) přechází nutná podmínka extrému (33.5) funkcionálu (33.4) na tvar

$$\delta S = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L ab \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} \Big|_0 + \frac{Eb^2}{12\rho} \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4} \right) \delta u_x dy dt = 0 \quad (33.15)$$

kteřá je identicky splněna parciální diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial t} \Big| + \frac{Eb^2}{12\rho} \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4} = 0, \quad \text{při } u_x = u_{x0}, \text{ pro } t > 0, y \in (0, L). \quad (33.16)$$

Dostali jsme tak rovnici příčných kmitů tyče v rovině (x,y) . Pro kmity v rovině (y,z) platí analogicky

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2 \partial t} \Big| + \frac{Ea^2}{12\rho} \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = 0, \quad \text{pro } t > 0, y \in (0, L) \quad (33.17)$$

Řešení těchto lineárních rovnic budeme hledat ve tvaru harmonické vlny, např. pro rovnici (33.16) předpokládáme

$$u_x(y, t) = \bar{u}_x e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (33.18)$$

Po dosazení (33.18) do diferenciální rovnice (33.16) dostáváme pro $\omega = \omega_r + \omega_{im}$, tzv. disperzní rovnici

$$-\omega^2 = i\omega \frac{\mu}{\rho} k_y^2 + \frac{Eb^2}{12\rho} k_y^4 = 0. \quad (33.19)$$

Tato algebraická rovnice má jak reálný tak i imaginární kořen

$$\omega_r = \pm k_y^2 \sqrt{\frac{Eb^2}{12\rho} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}}, \quad \omega_{im} = -\frac{\mu}{2\rho} k_y^2, \quad (33.20)$$

takže kmity jsou tlumené. Toto se dalo očekávat, neboť jsme uvažovali disipativní člen (33.2), viz funkcionál (33.4).

Předpokládejme, že konec tyče $y=L$ je volný, tzn., že vlnová délka základního modu je $l_y = 4L$. Odpovídající vlnový vektor je $k_y = \frac{2\pi}{4L}$ a základní frekvence je podle (33.20) rovna

$$\omega_x = \left(\frac{2\pi}{4L}\right)^2 \sqrt{\frac{Eb^2}{12\rho} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}}, \quad \omega_z = \left(\frac{2\pi}{4L}\right)^2 \sqrt{\frac{Ea^2}{12\rho} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}} \quad (33.21)$$

kde ω_x je frekvence kmitů v rovině (x,y) a ω_z frekvence v rovině (z,y) . Výchylka na konci tyče je pak dána harmonickou (periodickou) funkcí

$$u_x(L, t) = \bar{u}_x \exp\left[-\frac{\mu}{8\rho} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right] \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\sqrt{\frac{Eb^2}{12\rho} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}}\right) t\right]. \quad (33.22)$$

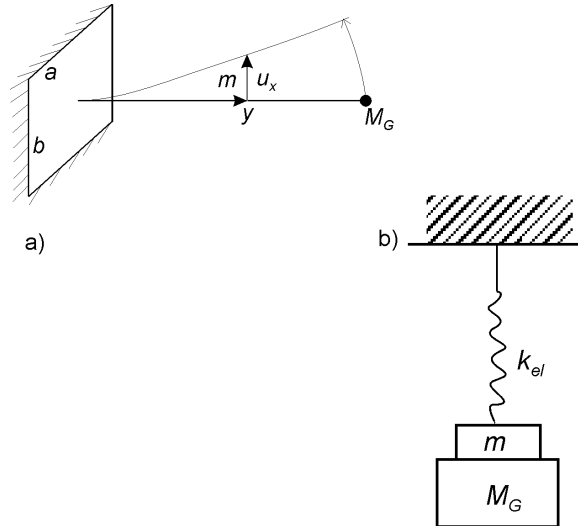
Ohybové kmity vetknuté tyče s přidanou hmotou.

Kmity tyče s přidanou hmotou budou opět harmonické, ale budou jiné frekvence. Dříve než přistoupíme k přidání dodatečné hmotnosti M_G nahradíme původní tyč, viz obr. 33.1, tlumeným harmonickým oscilátorem

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + k_{el} u = 0 \quad (33.23)$$

s hmotností

$$m = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^L \rho dy dx dz = \rho abL. \quad (33.24)$$



obr. 33.2

- a) Ohybové kmity tyče s přidanou bodovou hmotou M_G
 b) Náhradní schéma tyče o hmotnosti m s přidanou hmotou

Řešení rovnice (33.23) hledáme ve tvaru $u(t) = \bar{u} \exp(-i\omega t)$. Elasticitou konstantu k_{el} této soustavy určíme z podmínky stejných frekvencí (33.21) a stejného tlumení ω_{im} , tedy

$$\omega_{r,ef}^2 = \omega_r^2, \omega_{im,ef} = \omega_{im}. \quad (33.25)$$

Po dosazení vztahů (33.20) dostáváme

$$\omega_{r,ef}^2 = \frac{k_{el}}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2, \text{ pro } \frac{k_{el}}{m} = \left(\frac{2\pi}{4L}\right)^4 \frac{Eb^2}{12\rho} \text{ a } \omega_{im,ef} = -\frac{\gamma}{2m}, \text{ pro } \frac{\gamma}{m} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad (33.26)$$

Takto vytvořená náhradní soustava kmitá na stejné frekvenci jako konec tyče (33.22).

Soustava s přidanou hmotou má stejnou elasticitou konstantu k_{el} jako původní soustava (33.23)

$$(m + M_G) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + k_{el} u = 0. \quad (33.27)$$

Tuto rovnici normalizujeme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k_{el}}{m + M_G} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{m + M_G} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k_{el}}{m + M_G} u = 0, \quad (33.28)$$

a naměřená frekvence kmitů ω_{exp} tyče s přidanou hmotou a útlum těchto kmitů β má následující vztah k materiálovým vlastnostem původní tyče

$$\omega_{\text{exp}}^2 = \frac{k_{el}}{m + M_G} - \frac{\beta^2}{4} = \left(\frac{2\pi}{4L}\right)^4 \frac{Eb^2}{12\rho\left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} - \frac{\gamma^2}{4(m + M_G)^2},$$

$$\beta = \frac{\gamma}{m + M_G} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{\mu}{\rho\left(1 + \frac{M_G}{m}\right)}$$

Poznámka 2: Vzhledem k Poznámce 1 platí pro kruhový průřez poloměru R vztah

$$\omega_{\text{exp}}^2 = \frac{k_{el}}{m + M_G} - \frac{\beta^2}{4} = \left(\frac{2\pi}{4L}\right)^4 \frac{ER^2}{4\rho\left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} - \frac{\gamma^2}{4(m + M_G)^2},$$

$$\beta = \frac{\gamma}{m + M_G} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{\mu}{\rho\left(1 + \frac{M_G}{m}\right)}$$

Ze znalosti frekvence ω_{exp} , hmotnosti m, M_G a geometrických rozměrů tyče obdélníkového průřezu a, b , a délky L můžeme stanovit Youngův modul

$$E = 3\rho\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \left(\frac{L}{b}\right)^2 (4\omega_{\text{exp}}^2 + \beta^2) \left(1 + \frac{M_G}{m}\right)$$

a pro kruhovou tyč poloměru R platí

$$E = \rho\left(\frac{2L}{\pi}\right)^4 \left(\frac{2}{R}\right)^2 (4\omega_{\text{exp}}^2 + \beta^2) \left(1 + \frac{M_G}{m}\right).$$

Koeficient viskozity je roven

$$\frac{\mu}{\rho} = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \beta \left(1 + \frac{M_G}{m}\right).$$

Poznámka 3

Vzhledem k nezanedbatelné hmotnosti měřené tyče a konečnému geometrickému rozměru přidané hmotnosti je výsledný moment $L \times M_G$ působící na tyč, neznámý. Je proto nutné stanovit efektivní velikost bodové hmotnosti M_G na konci tyče testovacím experimentem.

Jako příklad použijeme testovací materiál „high density homopolymer“, který má známé materiálové vlastnosti; Youngův modul $E = 1070 - 1091 \approx 1080$ [MPa], hustotu $\rho = 960$ [kg m⁻³] a je prakticky nestlačitelný, tj. $\sigma = 0.5$. Modul pružnosti ve smyku je pro Hookův materiál roven $\hat{\mu} = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$ [Pa], viz např.

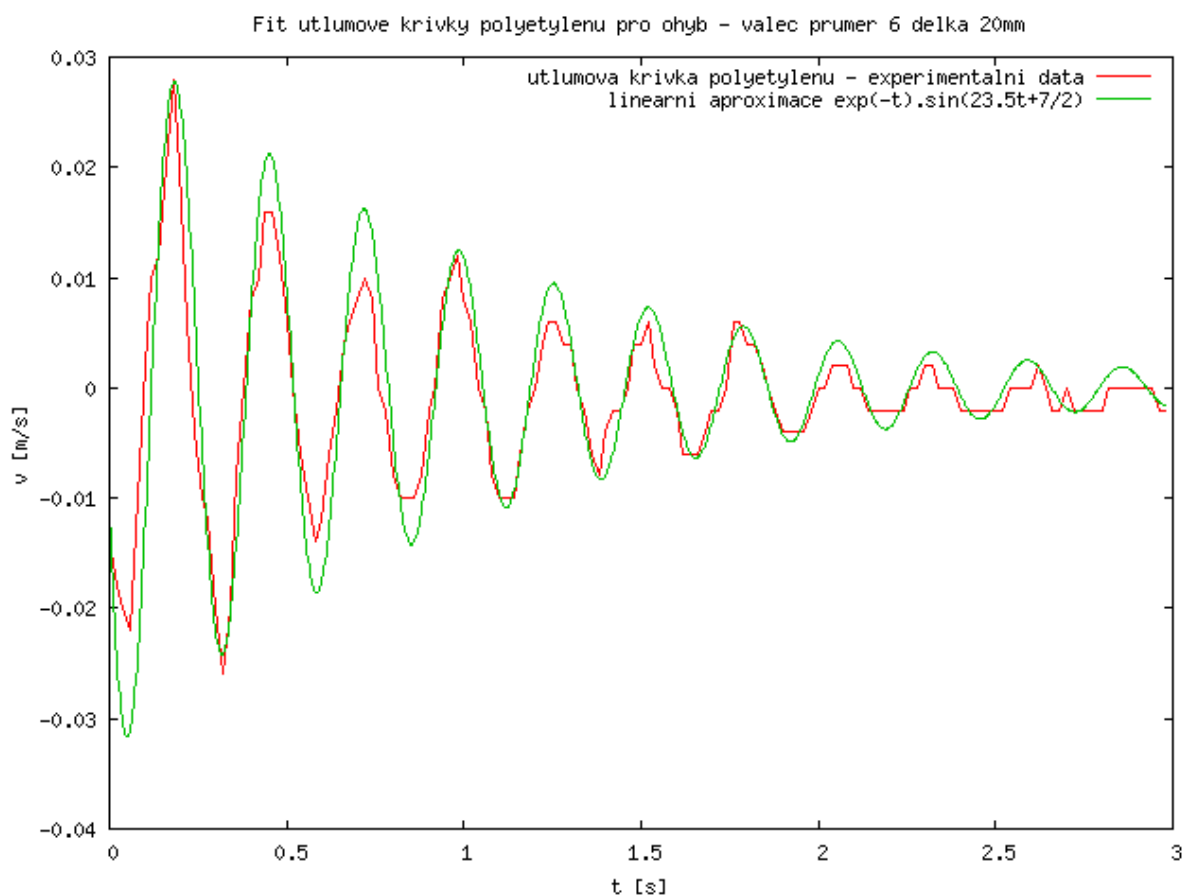
http://www.efunda.com/materials/polymers/properties/polymer_datasheet.cfm?MajorID=PE&MinorID=6. Ohýbaná délka tyče je $L = 16.8$ mm a její poloměr a hmotnost jsou postupně $R = 3$ mm a $m = \pi R^2 \rho L = \pi(3 \cdot 10^{-3})^2 960 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 0,000543$ kg.

Využijeme-li toho, že při měření je $\frac{M_G}{m} \gg 1$ a $\omega_{\text{exp}}^2 \gg \beta_{\text{exp}}^2$, lze pro tyčku kruhového průřezu psát

$$E = \left(\frac{4L}{\pi R} \right)^4 \frac{M_G \omega_{\text{exp}}^2}{\pi L} \text{ [Pa]}, \quad \mu = \left(\frac{2L}{\pi R} \right)^2 \frac{M_G \beta_{\text{exp}}}{\pi L} \text{ [Pa s]}. \quad (33.34)$$

Výhodou tohoto vztahu je, že již na hmotnosti měřené tyčky nezávisí. Materiálové konstanty závisí jen na geometrických rozměrech tyčky a přidané hmotnosti M_G .

Nalezneme přidanou hmotnost měřícího zařízení pomocí testovacího experimentu s polyetylénovou tyčkou, viz obr. 33.3



Obr. 33.3. Záznam rychlosti výchylky polyetylénové tyče kruhového průřezu poloměru $R = 3$ mm a ohýbané délky $L = 16.8$ mm.

Z naměřené frekvence $\omega_{\text{exp}} = 23.5[\text{s}^{-1}]$ a ze vztahu (33.34) stanovíme

$$M_G = \frac{\pi E L}{\omega_{\text{exp}}^2} \left(\frac{\pi R}{4L} \right)^4 = \frac{3.14 \cdot 1.08 \cdot 10^9 \cdot 1.68 \cdot 10^{-2}}{(23.5)^2} \left(\frac{3.14 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1.68 \cdot 10^{-2}} \right)^4 = 39.8 \text{ kg}$$

Tato hodnota neodpovídá skutečné přidané hmotnosti upnuté na konci testované tyče. Je to fiktivní bodová hmotnost na konci tyče vyvolávající stejný ohybový moment $L \times M_G$ jako skutečná hmotnost na konec tyče upnutá, viz obr. 33.2. Velikost přidané

fiktivní hmotnosti M_G je ovlivněna především geometrickým tvarem a způsobem uchycení upnuté hmotnosti. M_G je často až o dva řády větší než skutečně upnutá hmotnost.

Analogicky pro obdélníkový průřez $a \times b$ kde kmitání probíhá ve směru strany b platí

$$E = \frac{3bM_G}{4aL} \left(\frac{2L}{\pi b} \right)^4 \omega_{\text{exp}}^2 \text{ [Pa]}, \quad \mu = \frac{4LM_G \beta_{\text{exp}}}{\pi^2 ab} \text{ [Pa s]}. \quad (33.35)$$

Literatura:

- [1] Maršík F. Termodynamika kontinua, Academia Praha, 1999
- [2] Brdička M. Mechanika kontinua, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959

Příklad 34.

Využijte formulace z příkladu 33 a nalezněte podélné kmity tyče z viskoelastického materiálu délky L , obecného průřezu $A(y)$, hustoty ρ , která je na konci zatížena dodatečnou hmotou M_G , viz obr. 34.2.

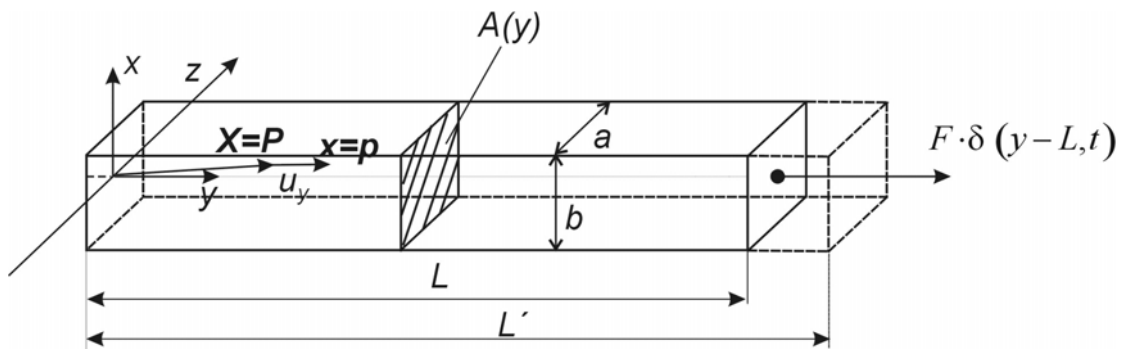
Řešení 34:

Podélné kmity homogenní tyče

Vyřešíme nejprve podélné kmitání bez dodatečné hmoty. Tento problém je formálně nejjednodušším problémem šíření vln tyčí, viz obr. 34.1. V tomto případě má tenzor napětí tvar

$$t^{ij} = -3K\alpha(T - T_o)\delta^{ij} + Ke_{(1)}\delta^{ij} + 2\hat{\mu}e^{(o)ij} + 2\mu d^{(o)ij} \quad (34.1)$$

viz. příklad 33.



Obr. 34.1

Generace podélné vlny v tyči okamžitou silou $F \cdot \delta(y-L, t)$. Materiálový bod P se z polohy X posouvá do polohy x . Kolem polohy X osciluje. Výchylka všech materiálových bodů tyče $u_y(y, t)$ je pouze ve směru osy y . Relativní prodloužení je popsáno diagonální složkou tenzoru deformace

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{L' - L}{L} \quad (34.2)$$

a stejně tak i tenzor napětí má pouze složku v tomto směru

$$\begin{aligned} t_{yy} &= Ke_{(1)}\delta^{yy} + 2\hat{\mu}\left(e_{yy} - \frac{2}{3}e_{(1)}\delta^{yy}\right) + 2\hat{\mu}\dot{e}_{yy} = \\ &= \left(K - \frac{2}{3}\hat{\mu}\right)e_{(1)}\delta^{yy} + 2\hat{\mu}e_{yy} + 2\mu\dot{e}_{yy}. \end{aligned} \quad (34.3)$$

Vzhledem k definici tenzoru malých deformací (33.6) platí

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{(1)} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \quad (34.4)$$

Zavedením Poissonova čísla

$$\sigma = -\frac{e_{xx}}{e_{yy}} = -\frac{e_{zz}}{e_{yy}} \quad (34.5)$$

můžeme tenzor napětí (34.3) a (33.7) psát ve tvaru

$$\begin{aligned}
t_{yy} &= \left(K - \frac{2}{3} \hat{\mu} \right) (1 - 2\sigma) e_{yy} + 2\hat{\mu} e_{yy} + 2\mu \frac{\partial}{\partial t} e_{yy} = \\
&= \left[K(1 - 2\sigma) + \frac{4}{3} \hat{\mu}(1 + \sigma) \right] e_{yy} = E e_{yy} + \frac{4}{3} \hat{\mu}(1 + 4\sigma) \frac{\partial e_{yy}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{34.6}$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících složek tenzoru deformace, dostáváme relaci mezi Youngovým modulem E a modulem ve smyku $\hat{\mu}$ a Poissonovým číslem σ

$$E = \frac{4}{3} \hat{\mu}(1 + \sigma) + K(1 - 2\sigma), \quad \sigma = \frac{(3K - 2\hat{\mu})E}{18\hat{\mu}K}, \quad \hat{\mu} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \tag{34.7}$$

Pohybová rovnice (33.11) určující šíření podélných vln má s ohledem na tenzor napětí (34.6) tvar

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \frac{\mu}{3\rho} (1 + 4\sigma) \frac{\partial^3 u_y}{\partial t \partial y^2} = 0. \tag{34.8}$$

Řešení této lineární rovnice budeme hledat ve tvaru harmonické vlny

$$u_y = \overline{u}_y e^{i(k_y y - \omega t)} \tag{34.9}$$

s amplitudou \overline{u}_y , vlnovým vektorem $k_y = \frac{2\pi}{l_y}$ a úhlovou frekvencí ω . Dosazením

(34.9) do rovnice (34.8), dostáváme disperzní rovnici pro podélné vlny (tzv. lateral flexi)

$$-\omega^2 + \frac{E}{\rho} k_y^2 - i \frac{\mu}{3\rho} (1 + 4\sigma) \omega k_y^2 = 0 \tag{34.10}$$

O vlnovém čísle k_y a frekvenci ω musíme předpokládat, že jsou obecně komplexní čísla. Rovnici (34.10) budeme řešit za předpokladu, že frekvence

$$\omega = \omega_r + i\omega_{im} \tag{34.11}$$

je komplexní číslo a ukážeme, že dispersní rovnice (34.10) má nenulové řešení i v případě, že vlnový vektor má pouze reálnou hodnotu. Disperzní rovnice (34.10) potom přechází na dvě algebraické rovnice

$$-\omega_r^2 + \omega_{im}^2 + \left(\frac{E}{\rho} + \tilde{\nu} \omega_{im} \right) k_y^2 = 0, \quad \text{pro } \tilde{\nu} = \frac{\mu}{3\rho} (1 + 4\sigma) \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \tag{34.12}$$

$$\omega_{im} = -\frac{\tilde{\nu} k_y^2}{2}$$

pro neznámé ω_r, ω_{im} . Po úpravě dostáváme závislost frekvence

$$\omega_r = k_y \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\tilde{\nu}^2 \rho}{4E} k_y^2 \right)^{1/2}}, \quad \omega_{im} = -\frac{\tilde{\nu} k_y^2}{2} \tag{34.13}$$

jen na vlnovém vektoru k_y . Budeme vyšetřovat kmitání tyče na volném konci, tj. ve vzdálenosti L . Tyto kmity odpovídají módům o vlnové délce

$$l_y = \frac{4L}{2n - 1}, \quad \text{kde } n = 1, 2, \dots \tag{34.14}$$

Základní mód podélné vlny má vlnovou délku $l_y = 4L$, viz obr. 34.1. Průběh kmitání v čase získáme dosazením do vztahu (34.9), tedy

$$u_y(y, t) = \overline{u}_y e^{-\frac{\tilde{\nu} k_y^2}{2} t} \exp \left\{ i k_y \left[y - \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\tilde{\nu}^2 \rho}{4E} k_y^2 \right)} t \right] \right\}. \tag{34.15}$$

Hledáme řešení s kmitnou na konci tyče, tj. pro $k_y = \frac{\pi}{2L}$. (Okrajová podmínka (33.12) z příkladu 33.) Konečný tvar základního módu podélné vlny je

$$u_y(y, t) = \bar{u}_y e^{-\left[\frac{\mu(1+4\sigma)\pi^2}{12\rho L^2} t\right]} \sin \left\{ \frac{\pi}{2L} \left\{ y - \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\pi\mu(1+4\sigma)}{6L} \right)^2 \right]^{1/2} t \right\} \right\}. \quad (34.16)$$

Odtud je patrné, že dekrement útlumu oscilací je

$$\frac{\mu(1+4\sigma)\pi^2}{12\rho L^2} \quad (34.17)$$

a fázová rychlost postupné vlny je

$$c = \frac{\omega_r}{k_y} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\pi\mu(1+4\sigma)}{6L} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (34.18)$$

Vzhledem k tomu, člen pod odmocninou je zanedbatelný vůči jedné, je rychlost podélné vlny prakticky rovna $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Podélné kmity tyče s přidanou hmotou na konci

Budeme hledat změnu frekvence podélných kmitů tyče, která má na konci přidanou bodovou hmotu M_G , viz obr. 34.2. Původní elastickou tyč nahradíme bodovou hmotou m na pružině s elasticitou k_{el} a tlumením γ , viz obr. 34.b. Předpokládejme, že náhradní soustava samotné elastické tyče je

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + k_{el} u = 0. \quad (34.19)$$

Hmotnost tyče známe a je dána vztahem

$$m = \int_0^L \rho A(y) dy, \quad (34.20)$$

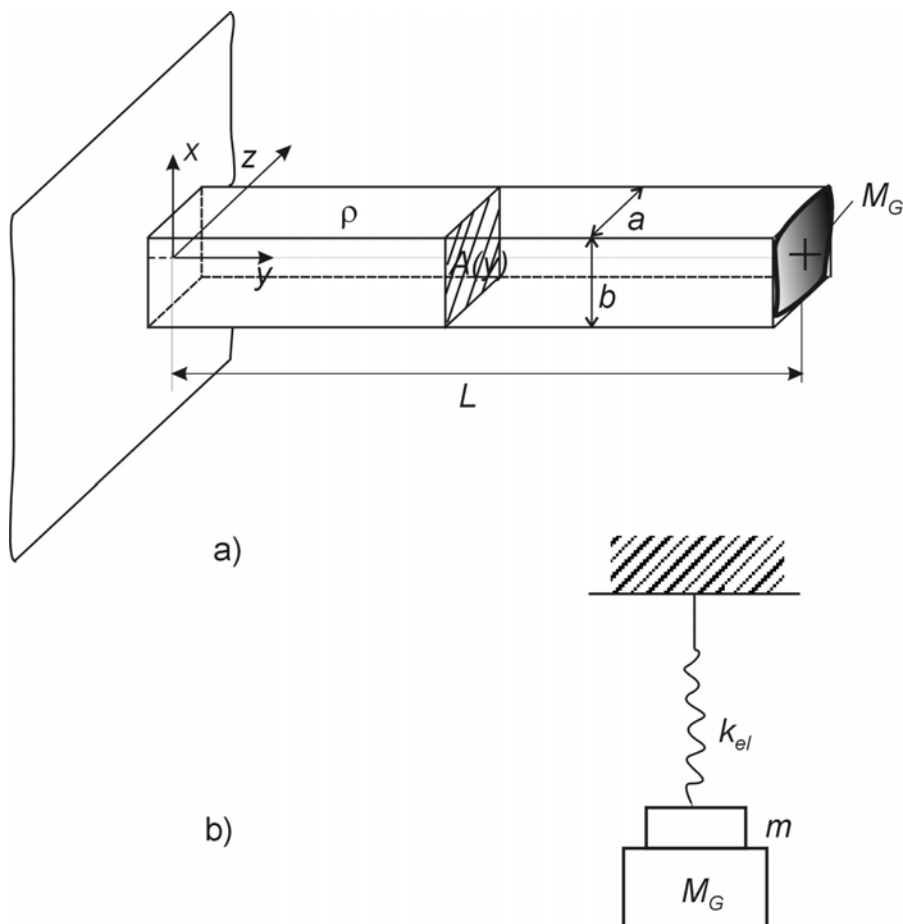
kde $A(y)$ je průřez tyče (např. kruhový s poloměrem R , tj. $A = \pi R^2$) a L je její délka. Neznámé hodnoty γ a k_{el} náhradní soustavy (34.19) stanovíme tak, aby tato soustava měla stejnou frekvenci a útlum kmitů jako konec tyče (34.16).

Soustava s přidanou hmotou je popsána stejnou pohybovou rovnicí

$$(m + M_G) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + k_{el} u = 0 \quad (34.21)$$

jako samotná elastická tyč (34.19), jen kmitající hmotnost je zvětšena o přidanou hmotnost M_G . Předpokládáme, že elasticita tyče k_{el} a útlumu γ jsou stejné jako v případě samotné elastické tyče (34.19). Její kmity budeme opět hledat ve tvaru $e^{-i\omega t}$, tj.

$$-\omega^2 (m + M_G) - i\omega\gamma + k_{el} = 0. \quad (34.22)$$



Obr. 34.2

a) Elastická tyč o průřezu $A(y) = l(y)w(y)$ zatížená dodatečnou hmotou M_G .

Celková hmotnost tyče je $m = \int_0^L \rho A(y) dy$.

b) Náhradní schéma tyče s dodatečnou hmotou M_G . Elasticita je nahrazena parametrem k_{el} .

Za předpokladu, že $\omega = \omega_r + i\omega_{im}$, dostáváme dvě algebraické rovnice

$$\begin{aligned} (-\omega_r^2 + \omega_{im}^2)(m + M_G) - \omega_{im}\gamma + k_{el} &= 0 \\ i\omega_r[\gamma + 2\omega_{im}(m + M_G)] &= 0 \end{aligned} \quad (34.23)$$

pro reálnou a imaginární část frekvence platí

$$\omega_r^2 = \frac{k_{el}}{m\left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} - \frac{\gamma^2}{4(M_G + m)^2}, \quad \omega_{im} = -\frac{\gamma}{2(m + M_G)}. \quad (34.24)$$

Zde jsou γ a k_{el} parametry náhradní soustavy(34.19), které jsme určily z podmínky, že náhradní soustava kmitá stejně jako výchylka konce elastické tyče (34.16).

Předpokládejme že frekvence je komplexní $\omega = \omega_r + \omega_{im}$ a pro konec tyče $y = L$ je výchylka dána vztahem

$$u(L, t) = \overline{u}_y \exp(-i\omega t) = \overline{u}_y e^{\omega_{im}t} e^{-i\omega_r t} = \overline{u}_y e^{-\frac{\tilde{v}}{8} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} e^{\frac{i\pi}{2} t} \exp\left[-\frac{i\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{E} \left(\frac{\pi \tilde{v}}{4L}\right)^2\right)}\right] t, \text{ pro } \tilde{v} = \frac{\mu}{3\rho} (1 + 4\sigma) \quad (34.25)$$

Fázový posuv výchylky $e^{\frac{i\pi}{2} t}$ zahrneme do amplitudy poruchy \overline{u}_y a pro útlum výchylky a pro frekvenci konce tyče dostáváme

$$\omega_{im} = -\frac{\tilde{v}}{8} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad \omega_r = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{E} \left(\frac{\pi \tilde{v}}{4L}\right)^2\right)}. \quad (34.26)$$

Vlastní kmity a tlumení náhradní soustavy (34.19) je

$$\omega_{r,ef}^2 = \frac{k_{el}}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2, \quad \text{pro } \frac{k_{el}}{m} = \omega_{r,ef}^2 + \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 \text{ a } \omega_{im,ef} = -\frac{\gamma}{2m}. \quad (34.27)$$

Z podmínky stejné frekvence a útlumu náhradní soustavy (34.19) a tyče (34.26) dostáváme hledanou relaci mezi měřenou frekvencí a útlumem a materiálovými parametry zkoumané tyče E, μ . Tudíž

$$\frac{\gamma}{2m} = \frac{\tilde{v}}{8} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad \frac{k_{el}}{m} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{E}{\rho}. \quad (34.28)$$

Tyto vztahy budou pro stanovení materiálových parametrů tyče rozhodující.

Soustava s přidanou hmotou (34.21) musí mít stejné tlumení γ a stejnou elastickou konstantu k_{el} jako náhradní soustava (34.19). Frekvence a útlum naměřených podélných vln soustavy s přidanou hmotou (34.24), označíme $\omega_{r,exp}$ a $\omega_{im,exp} = -\beta/2$, souvisí s materiálovými parametry E, μ samotné tyče (34.8) vztahem

$$\omega_{r,exp}^2 = \frac{k_{el}}{m + M_G} - \frac{\beta^2}{4} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{E}{\rho \left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} - \frac{\beta^2}{4}, \quad \omega_{im,exp} = -\frac{\gamma}{2(m + M_G)} \quad (34.29)$$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2m \left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\tilde{v}}{8 \left(1 + \frac{M_G}{m}\right)} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\mu(1 + 4\sigma)}{24\rho \left(1 + \frac{M_G}{m}\right)}$$

Nyní již snadno nalezneme explicitní závislost mezi naměřenými hodnotami $\omega_{r,exp}$ a β a parametry E, μ

$$E = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \rho \left(4\omega_{r,exp}^2 + \beta^2\right) \left(1 + \frac{M_G}{m}\right) \text{ [Pa]}, \quad \mu = \frac{12\rho L^2 \beta}{\pi^2 (1 + 4\sigma)} \left(1 + \frac{M_G}{m}\right) \text{ [Pa s]} \quad (34.30)$$

Využití vztahů (34.30) ukážeme na příkladu meziobratlové ploténky o průřezu $A = 3 \cdot 10^{-2} \times 4 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ a délky $L = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. S ohledem na její hustotu $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ je hmotnost ploténky $m = \rho AL = 0,0086 \text{ kg}$. Mezi dodatečné hmotnosti M_G zahrneme hmotnosti dvou obratlů stejného průřezu a délky 30 mm,

jejichž hmotnost odhadneme na 2×30 g. Hmotnost testovacího závaží je 0,839 kg, takže celková dodatečná hmotnost je $M_G = 0,90$ kg. Naměřená frekvence podélných kmitů (laterální flexe) byla $\omega_{r,\text{exp}} = 200 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$ a velikost koeficientů tlumení $\beta = 0,8 \text{ s}^{-1}$

Ke stanovení Youngova modulu a viskozity meziobratlové ploténky použijeme vztah (34.30). Dostáváme tak pro Youngův modul hodnotu

$$E = \left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{3,14} \right)^2 1,2 \cdot 10^3 (4\omega_{r,\text{exp}}^2 + \beta^2) \left(1 + \frac{0,9}{0,00866} \right) = \quad (34.31)$$

$$0,460 (4\omega_{r,\text{exp}}^2 + \beta^2) \Big|_{\omega_{r,\text{exp}}=200}^{\beta=0,8} = 73,6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

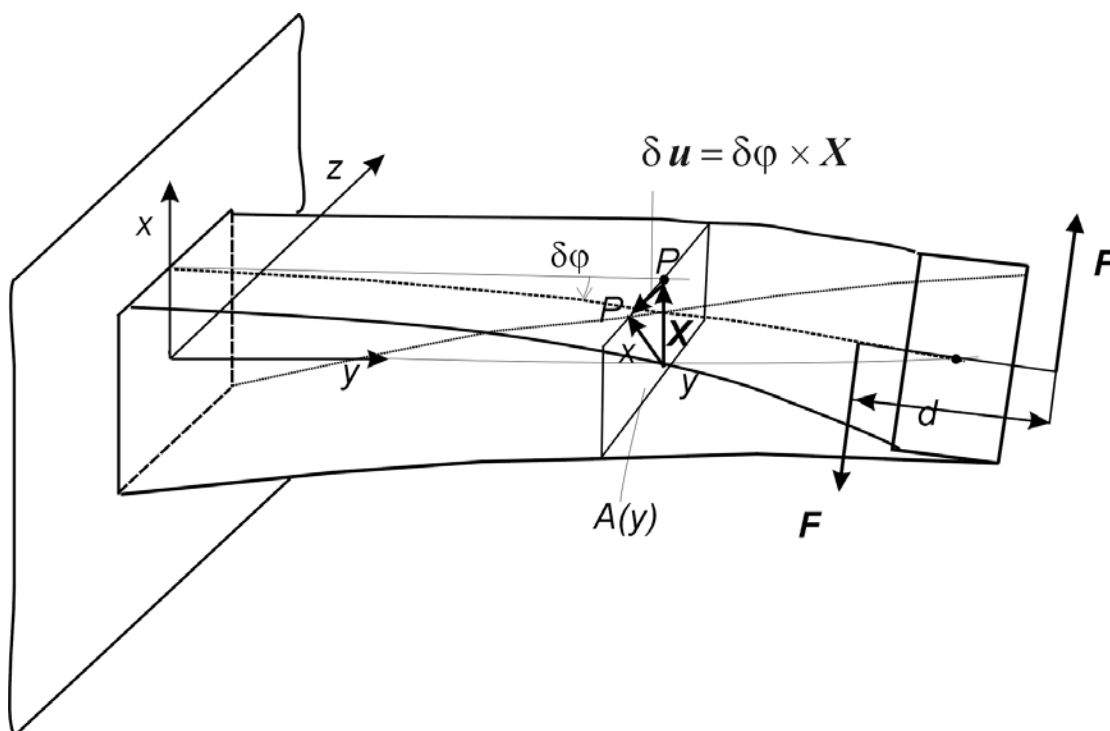
a pro viskozitu hodnotu

$$\mu = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6^2 \cdot 10^{-6} \cdot \beta}{(3,14)^2 (1 + 4 \cdot 0,5)} (1 + 104) = 1,84 \beta \Big|_{\beta=0,8} = 1,47 \text{ Pa s} \quad (34.32)$$

Předpokládali jsme, že materiál chrupavky je nestlačitelný, tj. $\sigma = 0,5$.

Příklad 35:

Tyč o průřezu $A(y)$ je na svém konci namáhána momentem dvojice sil $\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$, viz obr. 35.1. Odvoďte vztahy pro výpočet deformace tyče za předpokladu, že je namáhána momentem sil $\mathbf{M} = (0, M_y, 0)$ a zkrucovaná pouze ve směru osy y s konstantním úhlem natočení $\tau = \frac{d\varphi}{dy}$. Objem tyče $V = A \times L$ a její povrch ∂V se deformuje.



Obr. 35.1

Deformace vetknuté tyče průřezu A silovou dvojicí $\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$.

Řešení: Je-li průřez tyče A po délce konstantní, pak můžeme předpokládat, že i úhel krutu $\tau = \frac{d\varphi}{dy}$ je konstantní. Posunutí libovolného materiálového bodu P z počáteční polohy \mathbf{X} do konečné polohy \mathbf{x} bude lineární funkcí τ . S ohledem na to, že natočení kolem osy y je vektor $\delta\varphi = (0, \delta\varphi, 0)$, který směřuje v kladném směru této osy, lze posunutí materiálového bodu P vyjádřit vektorovým součinem, viz obr. 35.1

$$\delta\mathbf{u} = \delta\varphi \times \mathbf{X}; \quad \delta u^i = \varepsilon^{iyk} \tau \delta y X^k. \quad (35.1)$$

Z formálních důvodů označíme počáteční polohu materiálového bodu P $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Posunutí tohoto bodu při krutu, rozepsáno ve složkách, je rovno

$$u_x(y, z) = \tau yz, \quad u_z(x, y) = -\tau yx, \quad u_y(x, z) = \tau \psi(x, z) \quad (35.2)$$

Výchylka ve směru y je vyjádřena pomocí zatím neznámé funkce $\psi(x, z)$, která popisuje zborcení průřezu v průběhu krutu. Tuto funkci nazýváme torzní funkcí a nalezneme ji řešením rovnice rovnováhy [1,2,3], viz dále. Tenzor deformace (33.6) je s ohledem na posunutí (35.2) popsán vztahy

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\tau}{2} \left(z + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - x \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (35.3)$$

Všechny tři diagonální složky tenzoru deformace jsou nulové, takže při krutu

nedochází ke změně objemu a deviator deformace e^{ij} je roven tenzoru deformace e^{ij} . Předpokládejme, že tyč je z termoviskoelastického materiálu (viz vztah (33.1) v příkladu 33)), jehož tenzor napětí je

$$t^{ij} = -3K\alpha(T - T_0)\delta^{ij} + 2\hat{\mu}e^{ij} + 2\mu d^{ij}. \quad (35.4)$$

Jde nám o případ statické rovnováhy, takže můžeme zanedbat teplotní roztažnost ($\alpha = 0$) a viskozitu ($\mu = 0$). Jediné nenulové složky tenzoru napětí jsou

$$t_{yx} = t_{xy} = \hat{\mu}\tau \left(z + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right), \quad t_{yz} = t_{zy} = \hat{\mu}\tau \left(\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} - x \right). \quad (35.5)$$

Ostatní složky tenzoru jsou nulové

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xz} = 0. \quad (35.6)$$

Poznamenáváme, že v důsledku symetrie tenzoru deformace je i tenzor napětí symetrický. Rovnice bilance hybnosti (33.11) má pro případ statické rovnováhy jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} &= 0, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (35.7)$$

Vzhledem k tomu, že na pravé straně těchto rovnic nevystupují žádné vnější objemové síly (setrvačnost jsme zanedbali), redukuje se rovnováha povrchových sil na jedinou rovnici

$$\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (35.8)$$

Tyč je namáhána na krut silovou dvojicí, viz obr. 35.1. Dosazením z (35.5) přechází rovnice rovnováhy sil na Laplaceovu rovnici pro torzní funkci

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (35.9)$$

Pro funkci $\psi(x, z)$ je obtížné formulovat okrajové podmínky, proto na povrchu tyče zavedeme pomocnou funkci $\chi = \chi(x, z)$ tak, abychom mohli převést integraci přes plochu A na integraci po obvodu této plochy ∂A , viz obr. 35.2. Složky tenzoru napětí (35.5) vyjádříme formou gradientu funkce $\chi(x, z)$, tj.

$$\begin{aligned} t_{yx} &= -2\hat{\mu}\tau \frac{\partial \chi}{\partial z}, \text{ tj. } 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - z \\ t_{yz} &= +2\hat{\mu}\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \text{ tj. } 2 \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - x. \end{aligned} \quad (35.10)$$

Rovnice rovnováhy sil (35.8) je zavedením této funkce splněna identicky¹⁾

$$-2\hat{\mu}\tau \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} + 2\hat{\mu}\tau \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x} = 0, \quad x, z \in A \quad (35.11)$$

Derivaci první rovnice v (35.10) podle z a druhé podle x a jejich následným součtem dostáváme Poissonovu rovnici

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -1, \quad x, z \in A \quad (35.12)$$

Pro funkci $\chi(x, z)$ máme díky rovnici rovnováhy (35.8) popř. (35.11) okrajovou podmínku. Integrací přes objem tyče $V = A \times L$ a použitím Gaussovy věty dojdeme k podmínce

$$\int_{\mathcal{V}=A \times L} \left(\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial \mathcal{V}} (t_{yx} da_x + t_{yz} da_z) = 0. \quad (35.13)$$

Orientované elementy plochy $\mathbf{da} = (da_x, da_y, da_z)$ jsou definovány vnější normálou $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ a platí

$$da_x = n_x dy dz, \quad da_y = n_y dz dx, \quad da_z = n_z dx dy. \quad (35.14)$$

Dosazením (35.10) do povrchového integrálu (35.13) dostáváme

$$\begin{aligned} 2\hat{\mu}\tau \int_{\partial V} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial z} n_x dy dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} n_z dx dy \right) &= \\ = 2\hat{\mu}\tau \int_{\Delta y_x \times \partial A} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial z} n_x dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} n_z dx \right) dy &= 0 \end{aligned} \quad (35.15)$$

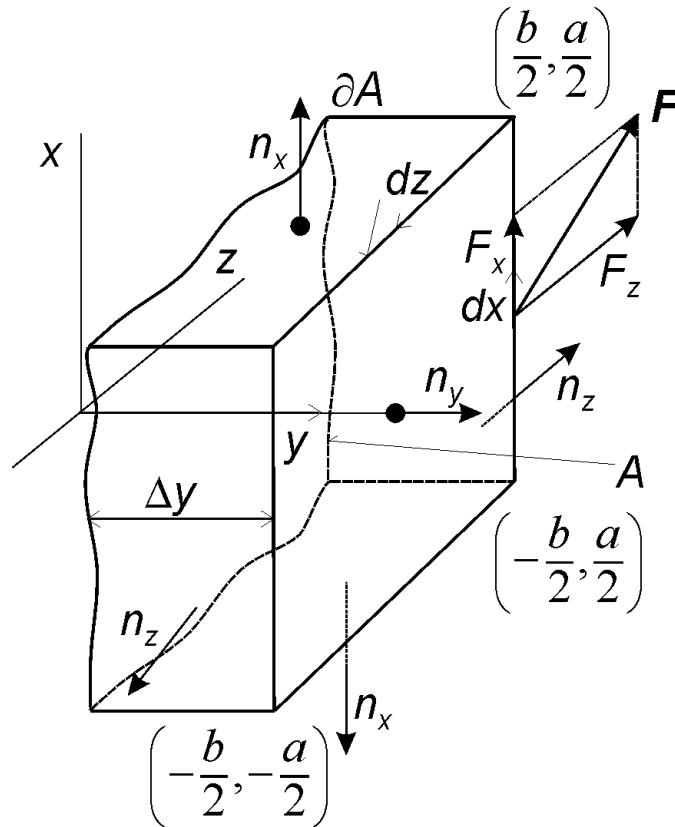
Vzhledem k tomu, že úsek tyče Δy může být libovolný, přechází původní lokální podmínka rovnováhy (35.8) na integrální podmínku

1) Tento postup je identický při zavádění proudové funkce $\chi(x, z)$ v mechanice nestlačitelných tekutin, kde je pak bilance hmotnosti splněna identicky

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ pro } v_x = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

$$\int_{\partial A} -\frac{\partial \chi}{\partial z} n_x dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} n_z dx = \int_{\partial A} \frac{\partial \chi}{\partial z} dz + \frac{\partial \chi}{\partial x} dx = \oint_{\partial A} d\chi = 0, \text{ pak } d\chi = 0, \chi = \text{konst pro } x, z \in \partial V \quad (35.16)$$

V druhém integrálu jsme orientaci plochy definovaly vnější normálou, tak jak je to obvyklé při těchto integrálních identitách. Tudiž, v našem případě $n_x = (1, 0, 0)$ odpovídá integraci v záporném (tj. opačném) směru osy z a $n_z = (1, 0, 0)$ odpovídá integraci v kladném směru osy x . Integrace podle křivky ∂A probíhá v kladném smyslu (viz obr. 35.2, plocha je na levé straně křivky).



Obr. 35.2

K přechodu od integrace po ploše A na integraci po jejím obvodu ∂A . Normála plochy A směřuje ve směru osy y a element této plochy je $da_y = dz dx$. Velikost plochy $A = ab$. Obvod plochy $\partial A = \{x = -b/2, -a/2 \leq z \leq a/2\} \cup \{z = a/2, -b/2 \leq x \leq b/2\} \cup \{x = b/2, a/2 \geq z \geq -a/2\} \cup \{z = -a/2, -b/2 \geq x \geq -b/2\}$.

Z druhé integrální podmínky (35.16) vyplynulo, že pomocná funkce $\chi = \chi(x, z)$ je podél hranice průřezu tyče konstantní. Tuto konstantu můžeme volit rovnou nule, tj.

$$\chi(x, z) = 0 \text{ pro } (x, z) \in \partial V \quad (35.17)$$

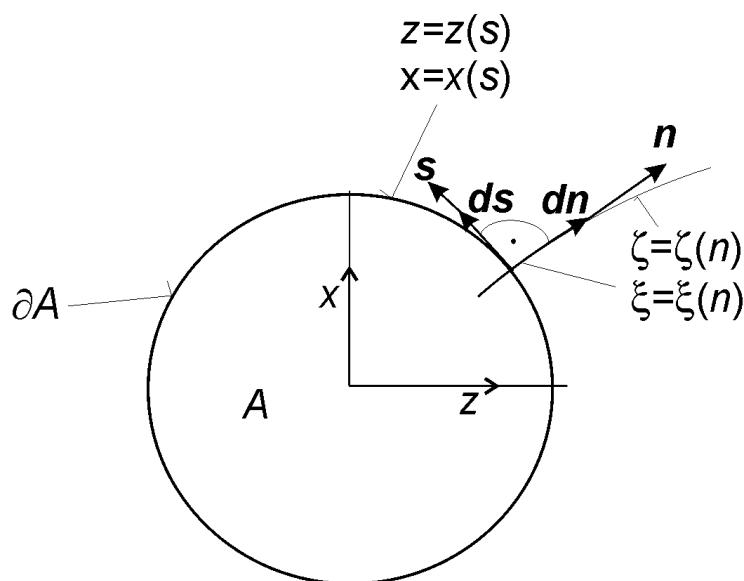
Derivace této funkce však mohou být nenulové. Podmínku kompatibility deformace (nedojde ke vzniku trhlinky) pro posunutí $u_y = \tau\psi(x, z)$, formulujeme integrálním vztahem

$$\oint_{\partial A} du_y = \tau \oint_{\partial A} d\psi = \oint_{\partial A} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = -2\tau \oint_{\partial A} \frac{\partial \chi}{\partial z} dx - \frac{\partial \chi}{\partial x} dz - \tau \oint_{\partial A} dx - x dz = 0. \quad (35.18)$$

Odtud dostáváme podmínku pro derivaci funkce $\chi = \chi(x, z)$ podél křivky ∂A ohraničující průřez tyče

$$2 \oint_{\partial A} \frac{\partial \chi}{\partial z} dx - \frac{\partial \chi}{\partial x} dz = - \oint_{\partial A} z dx - x dz. \quad (35.19)$$

Oba tyto křivkové integrály můžeme upravit, viz dále.



Obr. 35.3

K integraci po křivce ∂A ohraničující plochu A . $\mathbf{s} = \left(\frac{dz}{ds}, \frac{dx}{ds} \right)$ je tečný vektor k hranici

∂A průřezu A a $\mathbf{n} = \left(\frac{d\zeta}{dn}, \frac{d\xi}{dn} \right)$ je vektor kolmý.

Předpokládejme, že v rovině (z, x) je rovnice obvodové křivky ∂A dána funkcemi $z = z(s), x = x(s)$, kde s je délkový parametr. Tečný vektor a vektor normály jsou postupně

$$\mathbf{s} = \left(\frac{dz}{ds}, \frac{dx}{ds} \right), \quad \mathbf{n} = \left(\frac{d\zeta}{dn}, \frac{d\xi}{dn} \right). \quad (35.20)$$

Normála je popsána funkcemi $\zeta = \zeta(n), \xi = \xi(n)$, kde n je její délkový parametr.

Tečný vektor \mathbf{s} je kolmý k vektoru \mathbf{n} , čili je otočen o úhel $\frac{\pi}{2}$ ve smyslu $(z \rightarrow x)$, viz lit. [1], viz obr. 35.3. Tuto transformaci můžeme zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2}, & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2}, & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\zeta}{dn} \\ \frac{d\xi}{dn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\zeta}{dn} \\ \frac{d\xi}{dn} \end{pmatrix}, \quad (35.21)$$

což dává konečný vztah

$$dz = \frac{d\xi}{dn} ds, \quad dx = -\frac{d\zeta}{dn} ds. \quad (35.22)$$

Použitím této transformace lze první integrál (35.19) upravit následovně

$$2\oint \frac{\partial \chi}{\partial z} dx - \frac{\partial \chi}{\partial x} dz = -2\oint \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \Big|_{z=\zeta} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial n} \Big|_{x=\xi} \right) ds = -2\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} ds. \quad (35.23)$$

Druhý křivkový integrál převedeme pomocí Stokesovy věty, viz [1] vztah (A.54), na integraci po ploše²⁾ A

$$-\oint_{\partial A} z dx - x dz = -\oint_A \left(\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) dz dx = -2\oint_A dz dx = -2A. \quad (35.24)$$

Konečný tvar podmínky kompatibility krutu (35.19) je pak identita

$$\oint_{\partial A} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds = A \quad (35.25)$$

Porovnáme-li podmínku rovnováhy sil kroutícího momentu (35.17) s podmínkou kompatibility (35.25), dospějeme k hledaným okrajovým podmínkám pomocné funkce $\chi = \chi(x, z)$

$$\chi(x, z) = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} \neq 0 \text{ pro } x, z \in \partial A \quad (35.26)$$

Variační formulace statické rovnováhy krutu tyče.

Podmínku statické rovnováhy při krutu tyče, viz obr. 35.1, lze formulovat pomocí variačního principu, viz [1] kap. 9.4. Vzhledem k tomu, že při krutu tyče neuvažujeme disipativní procesy, lze jako funkcionál použít jak vnitřní energii, tak i volnou energii. Obě tyto energie jsou pro toto zjednodušení rovny deformační energii [1], viz. vztah (8.58), popř. (9.92). Volná energie celé tyče je

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \int_V t_{el}^{ij} e_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_{A \times L} (t_{xy} e_{xy} + t_{yz} e_{yz}) da_y dy = \\ &= \frac{1}{2\hat{\mu}} \int_{A \times L} \left[(t_{xy})^2 + (t_{yz})^2 \right] dz dx dy = 2\hat{\mu} \int_{A \times L} \tau^2 \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right] dz dx dy \end{aligned} \quad (35.27)$$

K úpravě posledního integrálu jsme využili pomocnou funkci $\chi(x, z)$ ze vztahu (35.10). Celková deformační energie je rovna volné energii (35.27).

2) Obecná Stokesova věta dává do relace integraci po hranici ∂A s integrací po ploše A

$$\oint_{\partial A} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_A \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Integrace po křivce ∂A probíhá v tom smyslu, při kterém je integrovaná plocha po levé straně (tzv. indukovaná orientace).

Definujeme, tzv. tuhost tyče v krutu

$$C = 4\hat{\mu} \int_A \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right] da_y, \quad da_y = dzdx. \quad (35.28)$$

Zavedením úhlu krutu $\tau = \frac{d\varphi}{dy}$ lze celkovou volnou energii (35.27) psát ve tvaru

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_L C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy \quad (35.29)$$

Plošný integrál pro výpočet tuhosti tyče (35.28) lze s ohledem na okrajové podmínky (35.26) upravit pomocí následující matematické identity. Označme na okamžik

$\nabla \chi \equiv \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}, \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)$, pak

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 = (\nabla \chi)^2 = \nabla(\chi \nabla \chi) - \chi \nabla^2(\chi) = \nabla(\chi \nabla \chi) + \chi \quad (35.30)$$

kde $\nabla^2 = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = -1$, viz (35.12). Užitím této úpravy přejde vztah pro výpočet tuhosti tyče v krutu (35.28) na tvar

$$C = 4\hat{\mu} \int_A \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right] da_y + 4\hat{\mu} \int_A \chi da_y. \quad (35.31)$$

První plošný integrál lze upravit použitím Stokesovy věty²⁾; pro

$F_z = -\chi \frac{\partial \chi}{\partial x}$, $F_x = \chi \frac{\partial \chi}{\partial z}$ pak dostaneme křivkový integrál

$$4\hat{\mu} \int_{\partial A} \chi \frac{\partial \chi}{\partial z} dx - \chi \frac{\partial \chi}{\partial x} dz = 4\hat{\mu} \int_{\partial A} \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} ds. \quad (35.32)$$

Při úpravě tohoto integrálu jsme použili stejný postup jako při úpravě (35.23). Vzhledem k okrajové podmínce (35.26) na hranici průřezu A je $\chi = 0$, je integrál (35.32) roven nule. Tuhost tyče je pak určena plošným integrálem z pomocné funkce $\chi(x, z)$, která splňuje na hranici ∂A podmínku $\chi(x, z) = 0$

$$C = 4\hat{\mu} \int_A \chi dzdx. \quad (35.33)$$

Výpočtu tuhosti tyče pro kruhový a obdélníkový průřez je věnován příklad 36.

Rovnováha momentů na vetknuté tyči.

Zbývá nalézt souvislost mezi úhlem krutu $\tau = \frac{d\varphi}{dy}$ a velikostí momentu sil

$M = d \times F$, viz obr. 35.1. Deformační energie (35.27), popř. (35.29) je vyvolána energií dodanou momentem sil. Předpokládejme, že moment sil generuje nějakou potenciální energii ϕ tak, že její změna je

$$\delta\phi = -M \delta\varphi(y = L), \quad (35.34)$$

tj. je úměrná úhlu natočení $\delta\varphi(y = L)$ na konci tyče. Rovnováha tyče pak nastane při minimu celkové energie

$$\delta(\mathcal{F} + \phi) = 0. \quad (35.35)$$

V tomto případě je energie momentu sil kompenzována energií deformace

$$\begin{aligned}
& \delta \int_L \frac{C}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy + \delta \phi = \int_L C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{d \delta \varphi}{dy} dy - M \delta \varphi (y = L) \\
& - \int_L C \frac{d \tau}{dy} \delta \varphi dy + C \tau \delta \varphi \Big|_0^L - M \delta \varphi (y = L) = \quad (35.36) \\
& - \int_L C \frac{d \tau}{dy} \delta \varphi dy + (C \tau - M) \delta \varphi (y = L) = 0
\end{aligned}$$

Minimum tohoto funkcionálu nastane za podmínek

$$\int_L C \frac{d \tau}{dy} \delta \varphi dy = 0, \text{ tj. } \frac{d \tau}{dy} = 0, \tau = \frac{d \varphi}{dy} = \text{konst}, \quad (35.37)$$

čili moment vnějších sil je dán vztahem

$$M = \tau C. \quad (35.38)$$

Úhel krutu tyče o konstantním průřezu A je konstantní a nezávisí na y . Jeho velikost je úměrná velikosti momentu vnějších sil M a nepřímo úměrná tuhosti tyče C .

Příklad 36

Nalezněte tuhost v krutu C a funkci krutu (někdy nazývaná funkce zborcení při krutu) $\psi(x, z)$ při torzi tyče kruhového, elipsoidního, obdélníkového a trojúhelníkového průřezu. Tuhost v krutu je definována integrálem (35.33) v příkladu 35 pomocí pomocné funkce $\chi(x, z)$

$$C = 4\hat{\mu} \int_A \chi dz dx, \text{ přičemž } \chi(x, z) = 0 \text{ na hranici pro } x, z \in \partial A \quad (36.1)$$

$$\text{a } \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -1 \text{ uvnitř průřezu pro } x, z \in A \quad (36.2)$$

Funkce zborcení $\psi(x, z)$ je definována vztahy (35.10) v příkladu 35

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial x} + x, \text{ pro } x, z \in A \quad (36.3)$$

a musí vyhovovat Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ pro } x, z \in A \quad (36.4)$$

Řešení:

Východiskem je pomocná funkce $\chi(x, z)$, která je nulová na hranici průřezu a uvnitř průřezu splňuje Poissonovu rovnici (35.12). Tuto funkci budeme hledat tak, aby definovala hranici průřezu a konstantu K určíme tak, aby splňovala rovnici (36.2):

a) **kruhový průřez**, viz obr. 36a

$$K\chi(x, z) = R^2 - x^2 - z^2, \quad (36.5)$$

$$K \frac{\partial \chi}{\partial x} = -2x, \quad K \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = -2, \quad K \frac{\partial \chi}{\partial z} = -2z, \quad K \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -2.$$

Pro $K=4$ splňuje funkce χ rovnici (36.2), takže

$$2\chi(x, z) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2 - z^2). \quad (36.6)$$

Stanovíme funkci zborcení podle vztahů (36.3)

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + z = -z + z = 0,$$

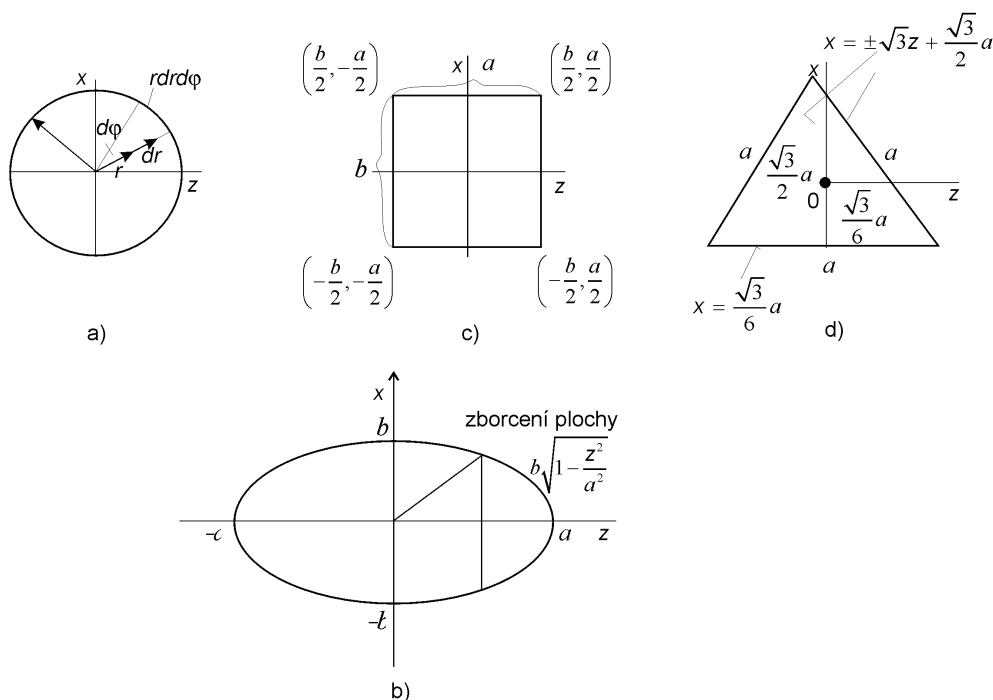
$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial x} + x = -x + x = 0.$$

Funkce zborcení je identicky rovna nule, tj. $\psi(x, z) = 0$ a tudíž při krutu kruhové tyče nedochází k výchylce ve směru u_y , viz vztah (35.2).

Tuhost kruhové tyče nalezneme dosazením (36.6) do integrálu (36.1)

$$C = \hat{\mu} \int_A (R^2 - x^2 - z^2) dx dz = \hat{\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi - \hat{\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi = \hat{\mu} \frac{\pi R^4}{2}. \quad (36.7)$$

Integrál jsme řešili přechodem k polárním souřadnicím r, φ , $x = r \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$.



obr. 36

Průřezy A tyče namáhané v krutu

a) kruhový, b) elipsoidový, c) obdélníkový, d) rovnostranný trojúhelník

b) *Pro eliptický průřez*, viz obr. 36b

$$K \chi(x, z) = a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 z^2 \quad (36.8)$$

Konstantu K nalezneme dosazením do rovnice (36.2)

$$K \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) = -2(a^2 + b^2), \quad K = 2(a^2 + b^2)$$

a hledaná pomocná funkce je

$$2\chi(x, z) = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 z^2}{a^2 + b^2}. \quad (36.9)$$

Funkce zborcení je podle (36.3) dána řešením parciálních diferenciálních rovnic

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2a^2 z}{a^2 + b^2} + z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{2b^2 x}{a^2 + b^2} + x. \quad (36.10)$$

Integrací, např. první rovnice dostáváme hledanou funkci

$$\psi(x, z) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xz, \quad (36.11)$$

kteřá splňuje podmínku (36.4). Odtud je zřejmé, že při krutu tyče eliptického průřezu dochází ke zborcení plochy krutu

$$u_y(x, z) = \frac{M}{C} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \right) xz. \quad (36.12)$$

K největšímu zborcení dochází na úhlopříčce os a je tím větší čím je rozdíl os větší.

Tuhost tyče eliptického průřezu je s ohledem na tvar pomocné funkce (36.9) rovna

$$C = 4\hat{\mu} \int_A \frac{(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2z^2)}{2(a^2 + b^2)} dx dz = \frac{2\hat{\mu}a^2b^2}{a^2 + b^2} \int_A dx dz - \frac{2\hat{\mu}b^2}{a^2 + b^2} \int_A x^2 dx dz - \frac{2\hat{\mu}a^2}{a^2 + b^2} \int_A z^2 dx dz. \quad (36.13)$$

Integrál vede na plochu elipsy

$$\int_A dx dz \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}} dx \right] dz = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}} dz = 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \varphi} d\varphi = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi ab. \quad (36.14)$$

Při úpravě jsme použili substituce $z = a \sin \varphi$.

Druhý integrál v (36.13) je moment setrvačnosti k ose z

$$I_z = \int_A x^2 dx dz = \int_{-a}^a dz \int_{-b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}} x^2 dx = \frac{2b^3}{3} \int_{-a}^a \left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2} dz = \frac{2ab^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi b^3 a}{4}. \quad (36.15)$$

Tento integrál jsme opět upravili pomocí substituce $z = a \sin \varphi$. Podobně nalezneme i moment setrvačnosti k ose x

$$I_x = \int_A z^2 dx dz = \int_{-b}^b dx \int_{-a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} z^2 dz = \frac{\pi ab^3}{4}. \quad (36.16)$$

Dosazením integrálu, (36.14), (36.15) a (36.16) do výrazu pro tuhost tyče (36.13) dostáváme konečný tvar

$$C = \frac{2\hat{\mu}}{a^2 + b^2} \left[\pi a^3 b^3 - \frac{\pi a^3 b^3}{4} - \frac{\pi a^3 b^3}{4} \right] = \frac{\hat{\mu} \pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (36.17)$$

c) **Pro obdélníkový průřez** obr. 36c budeme hledat pomocnou funkci ve tvaru

$$\chi = \left(\frac{b^2}{2} - x^2\right) \left(\frac{a^2}{2} - z^2\right) = \frac{a^2 b^2}{4} - \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{b^2 z^2}{2} + x^2 z^2 \quad (36.18)$$

Tato funkce však nesplňuje podmínku (36.2), neboť

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -(a^2 + b^2) + 2(x^2 + z^2) \neq -1 \quad (36.19)$$

Proto je třeba hledat funkci $f(x, z)$

$$\frac{\partial^2(f\chi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f\chi)}{\partial z^2} = \Delta(f\chi) = \chi\Delta f + 2(\nabla f \nabla \chi) + f\Delta\chi = -1 \quad (36.20)$$

Nalezení vhodného tvaru funkce $f(x, z)$ je dosud otevřeným problémem.

d) **Pro trojúhelníkový průřez**, obr. 36d

Pomocnou funkci $\chi(x, z)$ hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} K(\chi, x, z) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + x\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}z - x\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a + \sqrt{3}z - x\right) = \\ &= \frac{a^3}{6\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}az^2 - 3xz^2 + x^3. \end{aligned} \quad (36.21)$$

Podmínka (36.2) má tvar

$$K\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) = -K\sqrt{3}a = -1, \quad K = \frac{1}{\sqrt{3}a}. \quad (36.22)$$

a konečný tvar pomocné funkce je

$$2\chi = \frac{1}{\sqrt{3}a} \left(\frac{a^3}{6\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}az^2 - 3xz^2 + x^3 \right). \quad (36.23)$$

Funkce zborcení, která je definovaná rovnicemi (36.3) má po integraci konečný tvar

$$\psi(x, z) = \frac{z}{\sqrt{3}a} (3x^2 - z^2). \quad (36.24)$$

a vyhovuje podmínce (36.4).

Zborcení plochy při krutu je podle vztahů (35.2) a (35.38) rovno

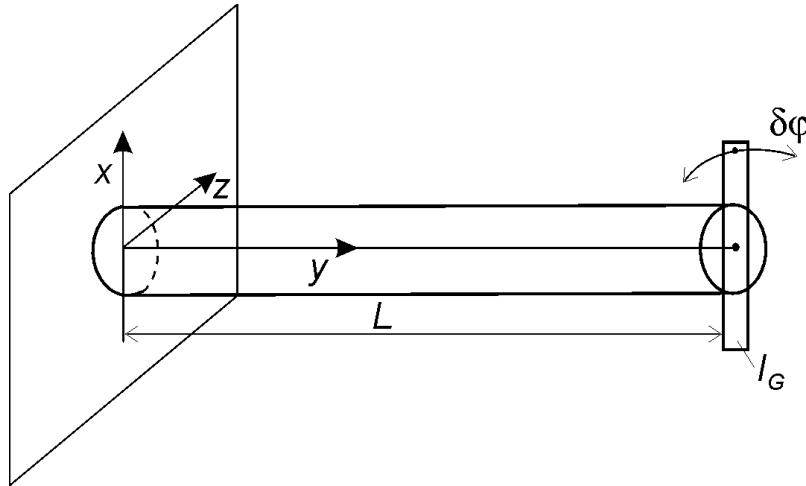
$$u_y(x, z) = \tau\psi(x, z) = \frac{Mz}{\sqrt{3}Ca} (3x^2 - z^2). \quad (36.25)$$

Je nulové v rozích trojúhelníka a maximální ve středu stran. Tuhost trojúhelníkové tyče je dána integrálem

$$C = \frac{2\hat{\mu}}{\sqrt{3}a} \int \left(\frac{a^3}{6\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}az^2 - 3xz^2 + x^3 \right) dx dz = \frac{\sqrt{3}}{80} \hat{\mu} a^4.$$

Příklad 37

Nalezněte frekvenci a útlum torzních kmitů vetknuté tyče kruhového, eliptického a trojúhelníkového průřezu z viskoelastického materiálu, např. meziobratlové polénky [3]. Určete jak se změní vlastní frekvence torzních kmitů přidáním tělesa s momentem



setrvačnosti I_G na konec tyče, viz obr. 37.1.

Obr. 37.1

Kmitání torzní tyče s dodatečnou hmotou na jejím konci.

Řešení:

Vyjdeme z obecného namáhání tyče jak na ohyb, tak na krut podél osy y , viz obr. 37.2. Ohyb tyče podél její podélné osy y vyjádříme vektorem ohybu

$$\boldsymbol{\Omega} \left(= \frac{\Delta \mathbf{u}' - \Delta \mathbf{u}}{\Delta s} \right) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \left(\frac{du_x}{ds}, \frac{du_y}{ds}, \frac{du_z}{ds} \right) \quad (37.1)$$

Zavedeme tečný vektor $\mathbf{s} = \left(\frac{d\eta_x}{ds}, \frac{d\eta_y}{ds}, \frac{d\eta_z}{ds} \right)$ k ose tyče $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x(s), \eta_y(s), \eta_z(s))$.

Při malých ohybech je složka $\eta_y(s)$ zanedbatelná vůči složkám $\eta_x(s)$ a $\eta_z(s)$.

Snadno nahlédneme, že derivace¹⁾ $\frac{ds}{ds}$ tečného vektoru \mathbf{s} je vektor k němu kolmý a navíc platí geometrický vztah

$$\frac{ds}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\eta_x}{ds^2} = \frac{1}{R_z}, \quad \frac{d^2\eta_y}{ds^2} = \frac{1}{R_x} \quad (37.2)$$

kde R_z, R_x jsou křivosti v odpovídajících rovinách (x, y) a (z, y) . Použitím vektoru normály \mathbf{n} a vektoru tečného \mathbf{s} (oba vektory jsou jednotkové) lze deformaci tyče

Předpokládejme, že tečný vektor normovaný k jedné, tj. $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) = 1$. Potom jeho derivace je kolmý vektor \mathbf{n}

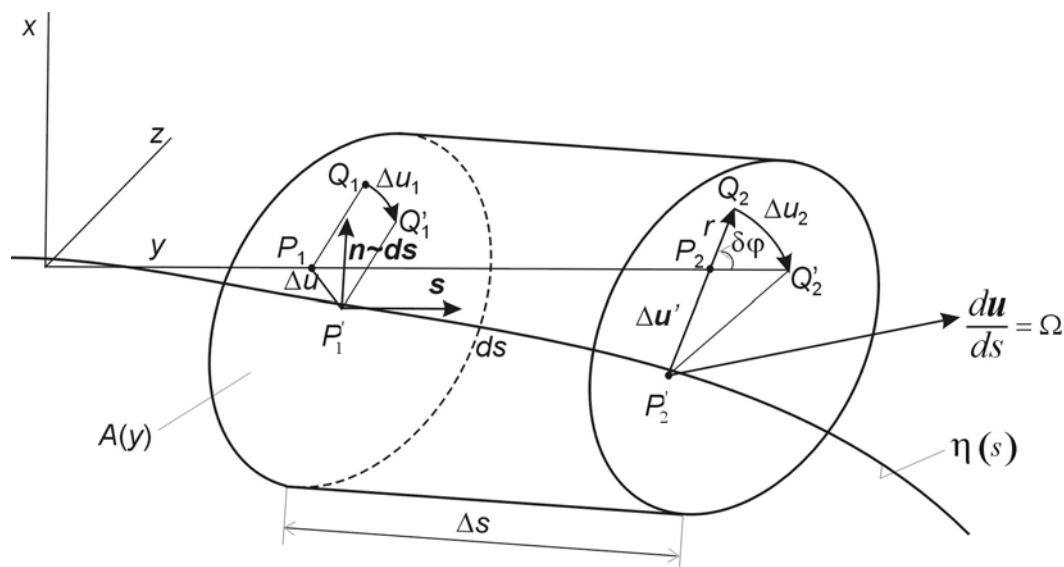
$$\frac{d(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})}{ds} = 2\mathbf{s} \frac{ds}{ds} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{ds}{ds} \sim \mathbf{n}$$

rozdělit na čistý ohyb Ω_x v rovině (y, z) , Ω_z v rovině (x, y) a čistý krut Ω_y v rovině (z, x) . Platí, viz obr. 37.2, že vektorový součin posunutí du a tečného vektoru s k ohybové křivce je vektor

$$ds = du \times s, \quad \frac{ds}{ds} = \frac{du}{ds} \times s \quad (37.3)$$

který je kolmý k ohybové křivce. Ohybová křivka splývá pro malé deformace s osou y . Vzhledem k definicím vektoru ohybu (37.1) a vektoru normály (37.2) dostáváme

$$\frac{n}{R} = \Omega \times s, \quad \text{resp. } s \times \frac{n}{R} = s \times (\Omega \times s) = (s \cdot s)\Omega - (\Omega \cdot s)s \quad (37.4)$$



obr. 37.2

Obscená deformace tyče vyjádřená vektorem vychýlení $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, Ω_x - ohyb v rovině (y, z) , Ω_y - krut podél osy y , Ω_z - ohyb v rovině (x, y) . Původní poloha materiálových bodů P_1, Q_1 a P_2, Q_2 ve dvou různých místech tyče se deformací změnila na polohu P'_1, Q'_1 a P'_2, Q'_2 .

Poslední vztah upravíme, protože $(s \cdot s) = 1$ a $(\Omega \cdot s)$ je průmět vektoru ohybu do podélné osy tyče, takže lze vektor ohybu tyče rozložit

$$\Omega = \frac{s \times n}{R} + \Omega_y s = (\Omega_x, 0, \Omega_z) + (0, \Omega_y, 0) \quad (37.5)$$

na část čistě ohybovou o složkách Ω_x, Ω_z a část čistě torzní Ω_y . Uvážíme-li, že s, n jsou kolmé jednotkové vektory, je velikost jejich součinu rovna jedné. Potom komponenty vektoru ohybu jsou

$$\Omega = \left(\frac{1}{R_z}, \tau, \frac{1}{R_x} \right) \quad (37.6)$$

kde R_z je poloměr křivosti v rovině (z,y) , viz příklad 31, vztah (31.21), a R_x v rovině (x,y) . $\tau = \frac{d\varphi}{ds}$ je úhel krutu v rovině (x,z) , viz příklad 35.

Z rovnováhy momentů sil působící na tyč, viz příklad 31 a příklad 35, jsme našli relaci mezi velikostí deformace (37.6) (poměry křivosti a úhlu krutu) a zatěžujícím momentem vnějších sil

$$M_x = \frac{EI_x}{R_z}, \quad M_z = \frac{EI_z}{R_x}, \quad M_y = C\tau \quad (37.7)$$

kde

$$I_x = \int_{A(y)} z^2 dx dz, \quad I_z = \int_{A(y)} x^2 dx dz, \quad C = 4\hat{\mu} \int_{A(y)} \chi dx dz$$

jsou I_x, I_z postupně momenty setrvačnosti plochy $A(y)$ vůči ose x, z a C je tuhost plochy $A(y)$ v krutu ve směru osy y . Statická rovnováha vetknuté tyče je řešena vztahy (37.7).

Naším cílem je nalézt vztahy pro dynamickou rovnováhu tyčí zatížených přídatnou hmotou. Stejně jako v případě příčných kmitů vetknuté tyče, viz příklad 32, vyjdeme z hustoty deformační energie tyče namáhané ohybem a tahem

$$\frac{1}{2} t_{el}^{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} t^{yy} e^{yy} + t^{xy} e^{xy} + t^{yz} e^{yz} = \frac{Ex^2}{2} \left(\frac{d^2 \eta_x}{ds^2} \right)^2 + \frac{Ez^2}{2} \left(\frac{d^2 \eta_z}{ds^2} \right)^2 + \frac{C}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad (37.8)$$

Druhá derivace osy tyče $\eta = (\eta_x(s), \eta_z(s))$ odpovídá druhým derivacím výchylky osy

$\mathbf{u} = (u_x(y), u_z(y))$ a úhel krutu ve vzdálenosti y od vetknutí je $\frac{d\varphi}{dy}$, tudíž

$$\frac{d^2 \eta_x}{ds^2} \approx \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{R_z}, \quad \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dy} = \tau, \quad \frac{d^2 \eta_z}{ds^2} \approx \frac{d^2 u_z}{dy^2} = \frac{1}{R_x} \quad (37.9)$$

Celková deformační energie tyče o průřezu A a délky L je dána integrálem

$$W = \int_{A \times L} \frac{1}{2} t_{el}^{ij} e_{ij} dy = \frac{1}{2} \int_{A \times L} \left\{ \left[Ex^2 \left(\frac{d^2 u_x}{dy^2} \right)^2 + Ez^2 \left(\frac{d^2 u_z}{dy^2} \right)^2 \right] dx dz + C\tau^2 \right\} dy \quad (37.10)$$

K popisu dynamiky kmitající tyče využijeme variační princip mechaniky elastických těles [1], viz příklad 32, vztah 32.1

$$S(u^i(x^j, t)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)^2 - \frac{t_{el}^{ij} e_{ij}}{2} - \rho\phi \right] dx dy dz dt \quad (37.11)$$

Tlumené kmity torzní tyče.

Budeme studovat torzní kmitání z viskoelastického materiálu. Tensor napětí takového materiálu je uveden v příkladu 33, viz vztah (33.1). Při deformaci takového materiálu se část mechanické energie přeměňuje na teplo, dochází k disipaci mechanické energie. Tuto ztrátu zahrneme do funkcionálu (37.11) do členu

$$\rho\dot{\phi} = f_{dis}u_{\varphi} = \mu \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial y^2} u_{\varphi} \quad \left[\frac{J}{m^3} \right]. \quad (37.12)$$

Omezíme se jen na vyšetřování torzních kmitů. Funkcionál (37.11) lze s ohledem na (37.10), (37.11) a (35.27) až (35.29) psát ve tvaru

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{A(y)}^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial r\dot{\varphi}}{\partial t} \right)^2 - \mu \frac{\partial^2 (r\dot{\varphi})}{\partial y^2} r\dot{\varphi} \right] dx dz dy - \int_0^L \frac{C}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dt \quad (37.13)$$

kde výchylka $u_{\varphi} = r\dot{\varphi}$ je výchylky v řezu $A(y)$ v rovině (x,z) , tj. pootočení o úhel φ kolem osy y a $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ je vzdálenost od osy otáčení, viz obr. 37.2. Hledáme extrém (minimum) funkcionálu (37.13) vzhledem k úhlu natočení $\varphi(y,t)$. Nutnou podmínku extrému nalezneme pomocí jeho variace

$$\begin{aligned} \delta S(\varphi(y,t)) &= \frac{\delta}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \mu \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 (r\dot{\varphi}_0)}{\partial y^2} r\dot{\varphi} r dr d\vartheta \right] dy dt = \\ &= \frac{\delta}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \mu I \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_0}{\partial y^2} \varphi - C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dy dt = 0 \end{aligned} \quad (37.14)$$

kde $I = I_x + I_z$ je celkový moment setrvačnosti plochy. Indexem „0“ jsme označili veličinu kterou ponecháme při variaci konstantní. Vzhledem k tomuto předpokladu je variace funkcionálu rovna

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta\varphi)}{\partial t} - \mu I \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_0}{\partial y^2} \delta\varphi - C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\delta\varphi)}{\partial y} \right] dy dt = \\ &\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta\varphi \right) - \left(\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu I \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_0}{\partial y^2} \right) \delta\varphi - C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta\varphi \right) + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \delta\varphi \right] dy dt = \\ &= \int_0^L \rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta\varphi \Big|_{t_0}^{t_1} dy - C \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta\varphi \Big|_{y=0}^{y=L} dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu I \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_0}{\partial y^2} - C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \delta\varphi dy dt = 0 \end{aligned} \quad (37.15)$$

Variace výchylky v čase t_0 a t_1 je nulová- vypadne 1. člen v poslední rovnosti. V místě vetknutí tyče je

$$\delta\varphi \Big|_{y=0} = 0, \quad (37.16)$$

a na volném konci můžeme předpokládat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0. \quad (37.17)$$

Podmínka dynamické rovnováhy (37.15) je zajištěna diferenciální rovnicí

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial y^2} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \text{pro } \varphi = \varphi_0 \quad y \in (0, L) \quad (37.18)$$

Tato rovnice popisuje tlumené torzní kmity tyče.

Předpoklad $\varphi = \varphi_0$ representuje tzv. rozšířený variační počet [4], [5] a matematicky znamená, že variace (fluktuaace kolem hledaného řešení) jsou velmi malé a hodnota φ_0 je již přesným řešením. V obecném případě velkých odchylek od

rovnovážné polohy (vizkózní tlumení je velké) je nutno řešit tento typ úloh iteračním postupem.

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru harmonické vlny

$$\varphi(y, t) = \bar{\varphi} e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (37.19)$$

pro komplexní $\omega = \omega_r + i\omega_{im}$. Po dosazení do podmínky dynamické rovnováhy (37.18) dostáváme disperzní rovnici torzních kmitů

$$\begin{aligned} (-\omega_r^2 + \omega_{im}^2) \rho I + i\omega_{im} \mu I k_y^2 + C k_y^2 &= 0, \\ -2i\omega_r (\omega_{im} \rho I + \mu I k_y^2) &= 0 \end{aligned} \quad (37.20)$$

Reálná část ω_r popisuje vlastní frekvenci kmitů a imaginární část frekvence ω_{im} popisuje tlumení. Řešením algebraických rovnic (37.20) dostáváme

$$\omega_r = k_y \sqrt{\frac{C}{\rho I} - \frac{\mu^2 k_y^2}{4\rho^2}} \quad (37.21)$$

a

$$\omega_{im} = -\frac{\mu}{2\rho} k_y^2. \quad (37.22)$$

Jako v příkladu 32 bude vlnový vektor kmitů s jedním volným koncem $k_y = \frac{2\pi}{4L}$ a frekvence základního torzního kmitu bude

$$\omega_r = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{C}{\rho I} - \left(\frac{\pi\mu}{4\rho L}\right)^2}, \quad \omega_{im} = -\frac{\pi^2 \mu}{8L^2 \rho} \quad (37.23)$$

Tlumená oscilace natočení na konci tyče v základní frekvenci (37.23) je popsána funkcí

$$\varphi(L, t) = \bar{\varphi} \exp(\omega_{im} t) \sin(\omega_r t). \quad (37.24)$$

Oscilaci plné tyče o průměru $2R$ a délky L můžeme nahradit oscilací hmotného kotouče (popř. bodové hmoty) na pružném vlákně o pružnosti k_t o stejné vlastní frekvenci, viz obr. 37.3.

Podmínka extrémů (37.18) platí v každém bodě tyče. Jestliže v experimentu sledujeme kmitání celé tyče délky L má podmínka extrémů tvar

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu I \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_0}{\partial y^2} - C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \delta \varphi dy dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} \exp(-i2\omega t) \left(-\rho I \omega^2 + i\mu I \omega k_y^2 - C k_y^2 \right) \int_0^L \exp(i2k_y y) \Big|_{k_y = \frac{\pi}{2L}} dy \delta \bar{\varphi} dt = 0 \end{aligned} \quad (37.25)$$

Předpokládali jsme řešení ve tvaru (37.19) takže jeho variace je

$$\delta \varphi(y, t) = e^{i(k_y y - \omega t)} \delta \bar{\varphi}. \quad (37.26)$$

Po provedení integrace

$$\int_0^L \exp(2i \frac{\pi y}{2L}) dy = -\frac{iL}{\pi} \int_0^{i\pi} e^z dz = -\frac{iL}{\pi} (e^{i\pi} - e^0) = \frac{2iL}{\pi} \quad (37.27)$$

má podmínka extrémů torzních kmitů celé tyče tvar

$$\begin{aligned} (-\omega_r^2 + \omega_{im}^2) \frac{2L\rho I}{\pi} + \omega_{im} \frac{2L\mu I}{\pi} k_y^2 + \frac{2L}{\pi} Ck_y^2 &= 0, \\ -2i\omega_r \left(\omega_{im} \frac{2L\rho I}{\pi} - \frac{2L\mu I}{\pi} k_y^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (37.28)$$

Resonanční frekvence i tlumení jsou stejné jako v případě elementu tyče, tj. (37.23), různý je však moment setrvačnosti a koeficient tlumení, které mají nyní postupně hodnoty

$$\frac{2L\rho I}{\pi}, \quad \frac{2L\mu I}{\pi} k_y^2 = \frac{\pi\mu I}{2L}. \quad (37.29)$$

Tyto hodnoty využijeme pro stanovení materiálových parametrů $\hat{\mu}$, μ kmitající tyče zatížené dodatečným momentem setrvačnosti.

Torzni kmitý s přidáním momentem setrvačnosti

Kmitání torní tyče, viz obr. 37.1, jako tělesa je obecně popsáno parciální diferenciální rovnicí (37.18). Těleso nahradíme hmotným bodem na pružině, viz obr. 37.3, který kmitá stejnou vlastní frekvencí a se stejným útlumem jako konec tyče (37.24). Abychom našli tuto náhradní soustav vyjdeme z Lagrangianu takové soustavy, viz. obr.37.3

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}_0, t) dt, \quad \text{pro } \mathcal{L} = m \frac{v^2}{2} - \phi = \frac{m(R_{ef}\dot{\varphi})^2}{2} - b_t R_{ef} \dot{\varphi}_0 \varphi - k_t \frac{\varphi^2}{2}, \quad (37.30)$$

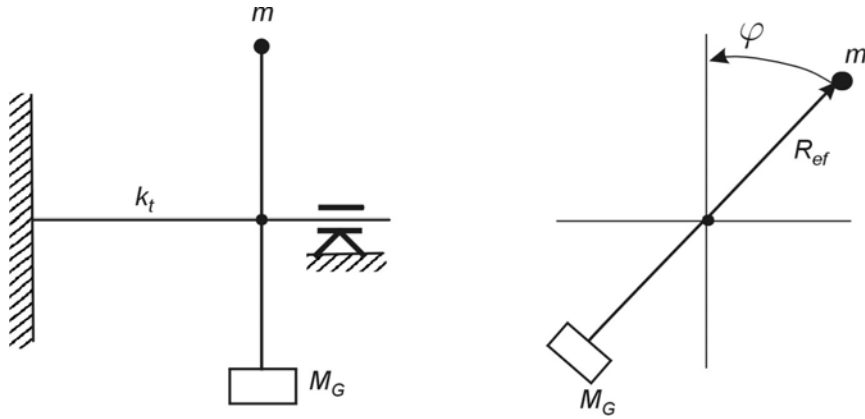
Potenciální energii ϕ jsme nahradily energií pružiny s konstantou k_t a disipativním členem $b_t R_{ef} \dot{\varphi}_0 \varphi$ vyjadřujícím tlumení. Rychlost rotačního pohybu $v = \dot{\varphi} R_{ef}$ jsme nahradily úhlovou rychlostí $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ na nějakém efektivním poloměru R_{ef} a pro tlumení jsme zavedli tlumící parametr b_t . Díky nekonzervativnosti soustavy jsme museli úhlovou rychlost $R_{ef} \dot{\varphi}_0$ v tlumícím členu považovat při variaci za konstantní, viz. (37.14).

Parametry k_t, b_t budou určeny tak aby náhradní soustava kmitala stejně jako konec tyče (37.24). Pohybový zákon (rovnováha sil) této hmoty je určen jako extrém funkcionálu (37.30), tj.,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m R_{ef}^2 \ddot{\varphi} + b_t R_{ef} \dot{\varphi}_0 \Big|_{\varphi=\varphi_0} + k_t \varphi = 0. \quad (37.31)$$

Řešení budeme opět hledat ve tvaru (37.19), tj. $\varphi(y, t) = \bar{\varphi} \exp(-i\omega t)$, takže vlastní frekvence a tlumení jsou rovny

$$\omega_{r,ef}^2 = \frac{k_t}{m R_{ef}^2} - \left(\frac{b_t}{2m R_{ef}} \right)^2, \quad \omega_{im,ef} = -\frac{b_t}{2m R_{ef}}. \quad (37.32)$$



Obr. 37.3

Schéma náhrady torzní tyče. Hmotnost m reprezentuje vlastní hmotu tyče a její odpovídající moment setrvačnosti $I = mR_{ef}^2$ a přidaná hmotnost M_G má přidaný moment setrvačnosti $I_G = M_G R_{ef}^2$.

m je známá hmotnost torzní tyče a M_G je známá přídavná hmotnost. Ve vztazích (37.32) vystupují neznámé hodnoty k_t a b_t , které musíme dát do relace s materiálovými parametry tyče $\hat{\mu}, \mu$ reprezentující postupně smykový modul a viskozitu. Položíme

$$mR_{ef}^2 = \frac{2L\rho I}{\pi}, \quad mR_{ef} = \sqrt{\frac{2Lm\rho I}{\pi}}, \quad (37.33)$$

kde ρ a L jsou postupně hustota a délka tyče a I je moment setrvačnosti jejího průřezu. Tyto veličiny jsou známy (37.7). Potom z podmínky stejných vlastních frekvencí a stejného tlumení náhradní tyče (37.32) a studované tyče (37.23)

$$\omega_r^2 = \omega_{r,ef}^2 \quad \text{a} \quad \omega_{im} = \omega_{im,ef} \quad (37.34)$$

získáme dosazením vztahů (37.33) do vzorců (37.32) hledané hodnoty náhradní (efektivní) tyče

$$k_t = mR_{ef}^2 (\omega_{r,ef}^2 + \omega_{im,ef}^2) = \frac{\pi C}{2L} = \frac{\pi \hat{\mu} I}{2L}, \quad (37.35)$$

$$b_t = -2\omega_{im,ef} mR_{ef} = \frac{\pi^2 \mu}{4L^2} \sqrt{\frac{mLI}{\pi\rho}}.$$

Smykový modul $\hat{\mu}$ vystupuje v tuhosti tyče C , viz. vztah (37.7) a μ je viskozita materiálu tyče.

Kmitání torzní tyče s přidaným momentem setrvačnosti.

Přidáním dodatečného známého momentu setrvačnosti $I_G = M_G R_{ef}^2$ se změní první člen pohybové rovnice (37.31)

$$(mR_{ef}^2 + I_G) \ddot{\varphi} + b_t R_{ef} \dot{\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} + k_t \varphi = 0. \quad (37.36)$$

Vzhledem k tomu, že se tento typ torzního kyvadla používá ke stanovení materiálových vlastností označíme změřenou vlastní frekvenci a tlumení jako $\omega_{exp}, \beta_{exp}$. Jejich relace k vlastním kmitům soustavy (37.36) je

$$\omega_r^2 = \omega_{\text{exp}}^2 = \frac{k_t}{(mR_{\text{ef}}^2 + I_G)} - \left(\frac{b_t R_{\text{ef}}}{2(mR_{\text{ef}}^2 + I_G)} \right)^2, \quad \omega_{\text{im}} = -\frac{\beta_{\text{exp}}}{2} = -\frac{b_t R_{\text{ef}}}{2(mR_{\text{ef}}^2 + I_G)} \quad (37.37)$$

Konečné vztahy pro stanovení materiálových parametrů tyče $\hat{\mu}, \mu$ nalezneme dosazením za k_t a b_t z náhrady torzní tyče (37.35). Tudíž pro elastické konstanty platí

$$C = \rho I \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (4\omega_{r,\text{exp}}^2 + \beta_{\text{exp}}^2) \left(1 + \frac{\pi I_G}{2\rho LI} \right), \quad \hat{\mu} = \frac{C}{I}, \quad (37.38)$$

a pro viskozitu

$$\frac{\mu}{\rho} = 4\sqrt{2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \beta_{\text{exp}} \left(1 + \frac{\pi I_G}{2\rho LI} \right). \quad (37.39)$$

Tento vztah budeme aplikovat na kruhovou tyč (36.7) poloměru R , pro $I = \frac{\pi R^4}{2}$ nalezneme vztah pro smykový modul $\hat{\mu}$ materiálu tyče pomocí naměřené rezonanční frekvence ω_{exp} a útlumu β_{exp}

$$\hat{\mu}_{\text{cylinder}} = \rho \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (4\omega_{r,\text{exp}}^2 + \beta_{\text{exp}}^2) \left(1 + \frac{I_G}{\rho LR^4} \right), \quad (37.40)$$

Pro eliptickou tyč, viz obr. 36b s tuhostí tyče $C = \hat{\mu}I$ a momentem setrvačnosti I

$$C = \frac{\hat{\mu}\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad I = I_z + I_x = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) \quad (37.41)$$

dostáváme

$$\hat{\mu}_{\text{ellipse}} = \rho \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (4\omega_{r,\text{exp}}^2 + \beta_{\text{exp}}^2) \left(1 + \frac{2I_G}{\rho Lab(a^2 + b^2)} \right), \quad (37.42)$$

Jak již bylo patrné ze vztahu (37.37) je rozhodující poměr přidaného momentu setrvačnosti I_G a vlastního momentu setrvačnosti tyče $2\rho LI/\pi$. Srovnej se vztahy pro stanovení Youngova modulu E z ohybových, viz. příklad 32, či podélných vln, viz. příklad 34.

Při kmitání kruhové tyče o poloměru $R = 17,5 \text{ mm}$ délce $L = 6 \text{ mm}$ (délka jen chrupavky) o hustotě $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ byly naměřeny hodnoty $\omega_{\text{exp}} = 9 \text{ s}^{-1}$ a

$\beta_{\text{exp}} = 0,8 \text{ s}^{-1}$. Moment setrvačnosti je $I = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3,14 \cdot (1,75 \cdot 10^{-2})^4}{2} = 14,72 \cdot 10^{-8}$.

Hodnota modulu pružnosti ve smyku je

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{cylinder} &= \rho \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \left(4\omega_{r,exp}^2 + \beta_{exp}^2 \right) \left(1 + \frac{I_G}{\rho LR^4} \right) = \\ &1.2 \cdot 10^3 \left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{3.14} \right)^2 \left(4\omega_{r,exp}^2 + \beta_{exp}^2 \right) \left(1 + 1.48 \cdot 10^6 I_G \right) = \\ &6.485 \cdot 10^3 \left(4\omega_{r,exp}^2 + \beta_{exp}^2 \right) \Big|_{\omega_{r,exp}=9}^{\beta=0.8} I_G \Big|_{I_G=2.65 \cdot 10^{-3}} = 5.568 \cdot 10^3 \text{ [Pa]}\end{aligned}\quad (37.43)$$

Poměr $I_G / (\rho LR^4) = 1.48 \cdot 10^6 \cdot I_G$. Pro velikost $I_G = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ [kg m}^2\text{]}$ dostáváme hodnotu $\hat{\mu} = 5.568 \cdot 10^3 \text{ [Pa]}$. Youngův modul pružnosti je pak

$$E = 2\hat{\mu}(1 + \sigma) \Big|_{\sigma=0.5} = 3\hat{\mu} = 16.70 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad (37.44)$$

Viskozita je podle vztahu (37.39) rovna

$$\mu = 4\sqrt{2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \rho \beta_{exp} \left(1 + \frac{\pi I_G}{2\rho LI} \right) = 5.657 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{3.14} \right)^2 1.2 \cdot 10^3 \beta_{exp} \left(1 + 1.48 \cdot 10^6 I_G \right) = \quad (37.45)$$

$$36.68 \cdot 10^3 \beta_{exp} \Big|_{\beta_{exp}=0.8} I_G \Big|_{I_G=2.65 \cdot 10^{-3}} = 77.76 \text{ Pa s}$$

Vzhledem k často složité geometrii měřícího zařízení je výhodné zařízení otestovat na známém materiálu. Moment setrvačnosti tohoto měřícího zařízení byl stanoven měřením polyetylénové tyčky zkrucované délky $L = 16.8 \text{ mm}$, poloměru $R = 3 \text{ mm}$. Předpokládáme, že polyetylén je nestlačitelný Hookovský materiál, tj. $\sigma = 0.5$, takže jeho modul ve smyku je $\hat{\mu} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} = \frac{1.08 \cdot 10^9}{2(1 + 0.5)} = 0.36 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}$, který souvisí s vlastními kmity torzní tyče podle zjednodušeného vztahu (37.43)

$$\hat{\mu}_{cylinder} = \frac{4LI_G}{\pi^2 R^4} \omega_{r,exp}^2 \text{ [Pa]} \quad (37.46)$$

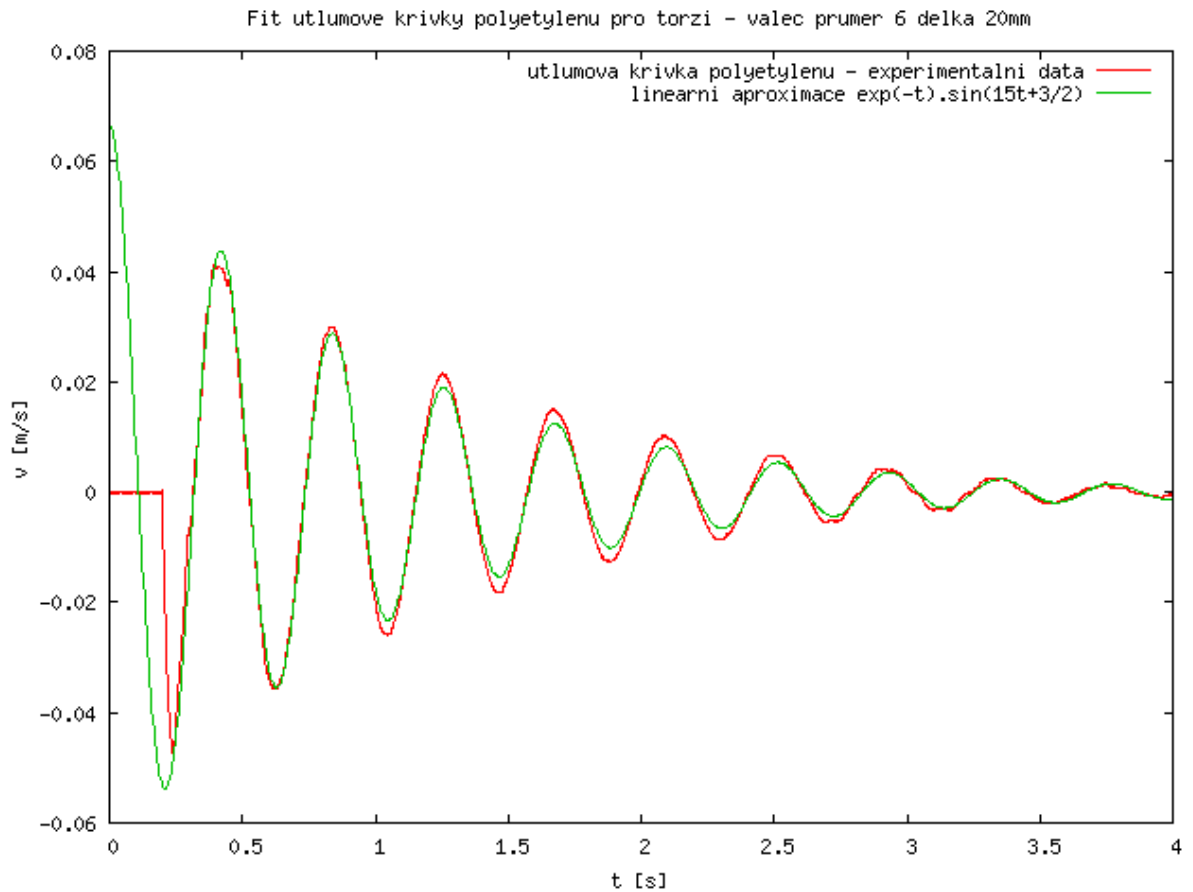
Neznámý moment setrvačnosti I_G měřícího zařízení je roven

$$I_G = \frac{\pi^2 R^4}{4L\omega_{exp}^2} \hat{\mu}_{cylinder} = \frac{(3.14)^2 (3 \cdot 10^{-3})^4}{4 \cdot (1.68 \cdot 10^{-2}) \cdot 15^2} 0.36 \cdot 10^9 = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2, \quad (37.47)$$

viz. obr. 37.4 kde je uveden záznam měření

Modul pružnosti ve smyku $\hat{\mu}$ a viskozitu μ je možno stanovit otestovaným experimentálním zařízením podle vztahů

$$\hat{\mu}_{cylinder} = \frac{4LI_G}{\pi^2 R^4} \omega_{r,exp}^2 \text{ [Pa]}, \quad \mu = \frac{4\sqrt{2}LI_G}{\pi^2 R^4} \beta_{exp} \text{ [Pa s]}. \quad (37.48)$$



Obr. 37.4. Záznam rychlosti torzních kmitů při testování torzního zařízení polyetylenovou trubkou.

Literatura:

- [1] Maršík F. Termodynamika kontinua, Academia Praha, 1999
- [2] Brdička M. Mechanika kontinua, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959
- [3] Landau L.D., Lifšic E. M. Theory of elasticity (rusky Teorija uprugosti), Izdatelstvo Nauka, Moskva 1965
- [4] Finlayson B. M. The Methods of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- [5] Glansdorff P., Prigogine I., Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, Wiley-Interscience, 1971.