

# MECHANIKA KONTINUA

Jiří Plešek

3. září 2010

# Obsah

<b>1</b>	<b>Přehled poznatků</b>	<b>3</b>
1.1	Termodynamika pevných látek . . . . .	3
1.1.1	První zákon termodynamiky . . . . .	4
1.1.2	Druhý zákon termodynamiky . . . . .	4
1.1.3	Disipační nerovnost . . . . .	5
1.1.4	Helmholtzova volná energie . . . . .	5
1.1.5	Termoelasticita . . . . .	6
1.1.6	Duhamelův-Neumannův model . . . . .	8
1.1.7	Cvičení . . . . .	9
1.2	Vektory, matice a tenzory . . . . .	10
1.2.1	Cvičení . . . . .	10
1.3	Tensorový tvar modelů elasticity . . . . .	10
1.3.1	Cvičení . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Kinematika</b>	<b>11</b>
2.1	Lagrangeův popis . . . . .	12
2.1.1	Gradient posunutí a deformační gradient . . . . .	12
2.1.2	Greenův-Lagrangeův tensor deformace . . . . .	16
2.1.3	Elementární kinematické módy . . . . .	20
2.1.4	Polární rozklad deformačního gradientu . . . . .	27
2.1.5	Klasifikace tenzorů deformace . . . . .	32
2.1.6	Cvičení . . . . .	36
2.2	Eulerův popis . . . . .	37
2.2.1	Cvičení . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Zákony zachování</b>	<b>39</b>
3.1	Zákon zachování hmotnosti . . . . .	39
3.1.1	Cvičení . . . . .	39
3.2	Zákon zachování hybnosti . . . . .	39

3.2.1	Cvičení . . . . .	39
3.3	Zákon zachování momentu hybnosti . . . . .	40
3.4	Zákon zachování energie . . . . .	40
3.4.1	Cvičení . . . . .	40
3.5	Clausiova-Duhemova nerovnost . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Formulace základních úloh</b>	<b>41</b>
4.1	Mechanika pevných látek . . . . .	41
4.1.1	Cvičení . . . . .	41
4.2	Mechanika tekutin . . . . .	41
4.2.1	Cvičení . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Geometrická struktura konstitutivních vztahů</b>	<b>43</b>
5.1	Objektivní derivace . . . . .	43
5.1.1	Cvičení . . . . .	43
5.2	Lagrangeovské tensory deformace . . . . .	43
<b>A</b>	<b>Použité operace s maticemi</b>	<b>44</b>
A.1	Spektrální rozklad . . . . .	44
A.2	Odmocnina matice . . . . .	45
A.3	Umocňování matic . . . . .	46
A.4	Isotropní funkce . . . . .	47
<b>B</b>	<b>Vzorové příklady</b>	<b>49</b>
B.1	Příklad 1: zobrazení oblasti . . . . .	49
B.2	Příklad 2: jednoosá deformace . . . . .	50
B.3	Příklad 3: prostý smyk . . . . .	51
B.4	Příklad 4: rotace . . . . .	52

# Kapitola 1

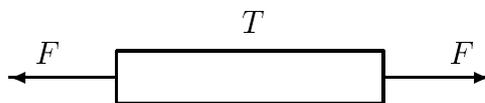
## Přehled poznatků

V této kapitole jsou shrnuty veškeré informace, které jsou potřebné pro studium dalšího textu.

V první části se zabýváme některými méně známými aspekty termodynamiky, zejména její aplikací v teorii pevných látek. Starší, avšak znamenitou učebnicí je Kvasnicova kniha [9], řada materiálových modelů je probrána Ogdenem [11], Holzapfelem [8] a Hauptem [7]. Aniž bychom v této fázi zabíhali do zbytečných podrobností, vysvětlujeme ty nejdůležitější principy na jednoduché úloze – případu jednoosé napjatosti, která nastává v osově zatížených prutech. Cílem je zde především ukázat funkci termodynamických zákonů, význam disipační nerovnosti pro návrh konstitutivních vztahů a současně upozornit na některé matematické operace, které se při tom často používají.

### 1.1 Termodynamika pevných látek

Uvažujme jednoosou úlohu podle Obr. 1.1. Zkušební homogenní tyč o délce  $l$  a průřezu  $A$  je staticky zatížena silou  $F$ . Měříme též absolutní (termodynamickou) teplotu  $T$  v kelvinech.



Obr. 1.1: Jednoosá napjatost. Průřez tyče je  $A$ , délka  $l$ .

Deformace považujeme za malé, tj. nerozlišujeme mezi výchozí a okamžitou délkou,  $l = l_0$ , stejně tak průřez zůstává přibližně konstantní,  $A = A_0$ . Z toho důvodu můžeme snadno definovat napětí

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

a poměrné prodloužení

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.2)$$

Napětí je zjevně homogenní – v každém průřezu stejné – a není tudíž funkcí souřadnic. Rozložení teploty rovněž předpokládáme homogenní. Později se na tato zjednodušení (malé deformace a homogenní pole) omezovat nebudeme, pro začátek je však výhodné problém maximálně zjednodušit.

V této chvíli ještě nebyl specifikován materiál, z něhož je tyč vyrobena, a v tomto ohledu je naše úloha zcela obecná. Obr. 1.1 může například znázorňovat válec s plynem apod.

### 1.1.1 První zákon termodynamiky

Vnitřní energie  $U$  představuje součet všech forem energií obsažených v tyči. Hustotu energie, vztaženou na jednotku objemu označme jako  $u$ , tj.

$$u = \frac{U}{V} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (1.3)$$

Tepelný výkon  $\dot{Q}$  ve wattech definujeme jako kladný, pokud teplo proudí dovnitř materiálu a jako záporný, pokud je odváděno ven. Hustota tepelného toku je

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (1.4)$$

Analogicky pro mechanický výkon

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (1.5)$$

Tento výraz můžeme ještě upravit

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} = \frac{F\dot{l}}{Al} = \sigma\dot{\epsilon} \quad (1.6)$$

Poslední vzorec je naprosto univerzální. Později ukážeme, že platí i ve třech dimenzích, pro velké deformace a pro libovolný materiál. Můžeme jej proto použít jak v mechanice pevných látek, tak v mechanice tekutin.

První zákon termodynamiky bilancuje celkovou energii, mechanickou práci a přivedené teplo

$$\boxed{\dot{q} + \dot{w} = \dot{u}} \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Druhý zákon termodynamiky

Zavedeme entropii  $S$  a její hustotu  $\eta$  pomocí

$$\eta = \frac{S}{V} \text{ [J/m}^3\text{K]} \quad (1.8)$$

Základní formulaci druhého zákona převezmeme z termodynamiky plynů

$$\boxed{\dot{\eta} \geq \frac{\dot{q}}{T}} \quad (1.9)$$

Pro obecně nehomogenní rozložení teplotního pole v kontinuu bude později nutno tuto formulaci zobecnit. Na tomto místě pouze připomeňme, že výskyt rovnítka “=” v předchozí nerovnosti je nutnou podmínkou pro to, aby byl termodynamický děj vratný. Není to však podmínka postačující.

Funkce  $u$  a  $\eta$ , vstupující do obou bilancí (1.7) a (1.9), musejí být předem dány a určují typ materiálu. V další části ukážeme, že identifikace vnitřní energie a entropie vskutku definuje všechny podstatné materiálové vlastnosti. Tak například Hookeův zákon, popisující odezvu pružného tělesa, jednoznačně vyplývá z jisté struktury  $u$  a  $\eta$ . To se může zdát na první pohled poněkud překvapující.

### 1.1.3 Disipační nerovnost

Tepelná verze druhého zákona termodynamiky (1.9) může být nahrazena tzv. *disipační nerovností*. Ačkoliv se jedná o ekvivalentní vyjádření druhého zákona (v tomto odstavci nebudeme zavádět žádně nové fyzikální předpoklady), v mechanice kontinua se s takovou nerovností mnohem snáze pracuje.

Užitím (1.7) nejprve eliminujeme  $\dot{q}$ , což vede k nerovnosti

$$\dot{\eta}T \geq \dot{q} = \dot{u} - \dot{w} \quad (1.10)$$

Časového přírůstku entropie se nyní zbavíme obratem známým jako Legendreova transformace. Člen na levé straně se doplní na derivaci součinu (podobně jako při integraci per partes)

$$\dot{\eta}T = (\eta T)' - \eta \dot{T} \quad (1.11)$$

Dosazení zpět do (1.10) dává po jednoduché úpravě

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \dot{u} - (\eta T)' = (u - \eta T)' \quad (1.12)$$

Oblá závorka má fyzikální rozměr hustoty energie, což motivuje následující definici

$$\psi := u - T\eta \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (1.13)$$

Nově zavedená energie,  $\psi$ , se nazývá Helmholtzova volná energie. Znaménko “:=” budeme používat ve smyslu “je definováno.”

Finální tvar disipační nerovnosti je

$$\boxed{-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \dot{\psi}} \quad (1.14)$$

Zhruba řečeno, část přivedené mechanické energie za jednotku času  $\dot{w}$  se v materiálu uloží ve formě využitelné energie  $\dot{\psi}$  a zbytek se disipuje. Odvozená nerovnost plně nahrazuje formulaci (1.9) a v tomto tvaru ji také budeme dále využívat.

### 1.1.4 Helmholtzova volná energie

Volná energie  $\psi$  je definována vztahem (1.13). Pro její názornou interpretaci uvažujme isotermickou změnu  $T = konst.$  mezi rovnovážnými stavy 1 a 2. Podle disipační nerovnosti musí platit

$$\Delta w \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (1.15)$$

Rozdíl energií na pravé straně nás upozorňuje na to, že  $\psi$  je stavová veličina. Má smysl mluvit o  $\psi_1$  jako o energii přiřazené stavu 1 a o  $\psi_2$  přiřazené stavu 2. Naopak práce není stavová veličina, takže  $\Delta w \neq w_2 - w_1$ . Symbol  $\Delta w$  je třeba chápat vcelku, přičemž příslušný integrál z  $\dot{w}$  je dráhově závislý.

Přejdeme nyní k cyklickému (kruhovému) ději  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . V průběhu zatížení, při přechodu  $1 \rightarrow 2$ , platí

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (1.16)$$

Po odlehčení do původního stavu,  $2 \rightarrow 1$ , zase máme

$$\Delta w_o \geq \psi_1 - \psi_2 \quad (1.17)$$

Zařazením obou nerovností za sebe

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \geq -\Delta w_o \quad (1.18)$$

Předpokládejme navíc, že při zatížení je třeba dodávat práci,  $\Delta w_z > 0$ , a při odlehčení se část energie získá zpět,  $\Delta w_o < 0$ . Takové situace například vznikne při stlačování a uvolňování pružiny. Je tedy  $\Delta w_z = |\Delta w_z|$  a  $\Delta w_o = -|\Delta w_o|$ , a proto

$$|\Delta w_z| \geq \psi_2 - \psi_1 \geq |\Delta w_o| \quad (1.19)$$

Je vidět, že z materiálu nemůžeme dostat více energie, než tam bylo vloženo, což není jistě nijak překvapující. Zajímavější je si uvědomit, že  $\psi$  hraje roli deformační energie. Je to v principu využitelná energie, která se rovná vykonané práci pouze tehdy, když celý proces proběhl ideálně. V opačném případě se sice energie neztratí – zachová se jako vnitřní energie – ale nebude již plně k dispozici. To je podstata disipace.

Pojem deformační energie se používá v mechanice, pojem Helmholtzovy volné energie v termodynamice. Přes terminologickou různost je fyzikální obsah těchto pojmů přesně stejný. Jsou to synonyma.

### 1.1.5 Termoelasticita

Podívejme se nyní na některé příklady, které ukazují, jakým způsobem se termodynamické zákony využívají v materiálovém inženýrství.

Nechť je stav materiálu zkušební tyče jednoznačně popsán dvěma stavovými veličinami: poměrným prodloužením  $\epsilon$  a teplotou  $T$ . Všechny ostatní stavové veličiny,  $\psi$ ,  $u$ ,  $\eta$  a  $\sigma$ , budou podle tohoto předpokladu vyjádřeny jako funkce dvou nezávisle proměnných  $\epsilon$  a  $T$ . Takový hypotetický materiál nazýváme *termoelastickým*.

Časovou derivaci volné energie vypočteme podle pravidla o derivaci složených funkcí

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (1.20)$$

Tento výraz dosadíme do disipační nerovnosti (1.14)

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (1.21)$$

Podle (1.6) je  $\dot{w} = \sigma\dot{\epsilon}$ , čímž lze předchozí vztah převést na

$$-\left(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right)\dot{T} + \left(\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}\right)\dot{\epsilon} \geq 0 \quad (1.22)$$

Ukážeme, že pro splnění právě odvozené podmínky je nezbytné, aby byly obě závorky nulové, tj.

$$\boxed{\sigma = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}} \quad (1.23)$$

a současně

$$\boxed{\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T}} \quad (1.24)$$

Tím jsme získali dva velmi důležité konstitutivní vztahy. Disipační nerovnost je splněna triviálně se znaménkem “=”.

Důkaz se opírá o podobné argumenty, jako odvození metody Lagrangeových multiplikátorů. Podmínka (1.22) platí obecně, musí tudíž platit i ve speciálním případě  $\dot{T} = 0$ . Potom

$$f(\epsilon, T)\dot{\epsilon} \geq 0 \quad (1.25)$$

když jsme označili

$$f(\epsilon, T) := \sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} \quad (1.26)$$

Pokud by  $f$  nebyla nulová, nastala by jedna z následujících možností

$$f > 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \quad \text{nebo} \quad f < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \leq 0 \quad (1.27)$$

Podle předpokladu však  $f$  nezávisí na časové derivaci  $\dot{\epsilon}$ , která může být volena libovolně. To vede ke sporu – kdyby například byla v jistém stavu  $f(\epsilon, T) > 0$ , mohli bychom při konstantní teplotě deformaci zmenšit,  $\dot{\epsilon} < 0$ , což by v (1.27) porušilo první požadavek. Proto  $f \equiv 0$  a platí (1.23). Analogicky se prokáže platnost (1.24).

Nakonec můžeme vypočítat sdělené teplo. Z definice (1.13) nejprve určíme vnitřní energii a tu derivujeme podle času

$$\dot{u} = (\psi + T\eta)' = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}\dot{\epsilon} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \quad (1.28)$$

Vzhledem k (1.24) se prostřední dva členy zruší a pomocí (1.23) vyjde

$$\dot{u} = \sigma\dot{\epsilon} + T\dot{\eta} = \dot{w} + T\dot{\eta} \quad (1.29)$$

Porovnání se základní formulací prvního zákona termodynamiky (1.7) vede k výsledku  $\dot{q} = T\dot{\eta}$ , a tudíž pro tento model platí

$$\boxed{\dot{\eta} = \frac{\dot{q}}{T}} \quad (1.30)$$

To je ovšem (1.9) se znaménkem “=”, takže v tomto smyslu se jedná o ideální proces.

Na závěr ještě jednou zrekapitulujeme hlavní rovnice materiálového modelu termoeleasticity. Předpokládáme, že existuje deformační energie s vlastnostmi

$$\exists \psi(\epsilon, T) \Rightarrow \sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.31)$$

Přenos tepla se určí ze vzorce

$$\dot{q} = T\dot{\eta} \quad (1.32)$$

Funkci  $\psi(\epsilon, T)$  je nutné navrhnout ve shodě s experimentem. O tom pojednává další odstavec.

### 1.1.6 Duhamelův-Neumannův model

Nejjednodušší pojetí termoeleasticity vychází z toho, že celkové přetvoření je dáno součtem deformace od napětí a teplotní dilatace

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \quad (1.33)$$

Modul pružnosti  $E$  a součinitel délkové roztažnosti  $\alpha$  budeme považovat za konstantní. Teplotní rozdíl

$$\Delta T = T - T_0 \quad (1.34)$$

je vztažen k teplotě okolí  $T_0$ , např.  $T_0 = 300$  K. Vyjádřením napětí získáme *Duhamelův-Neumannův* model materiálu

$$\boxed{\sigma = E(\epsilon - \alpha \Delta T)} \quad (1.35)$$

Jak dalece je tento model kompatibilní se vztahy (1.23), (1.24) a (1.30)?

Integrací napětí podle deformace určíme volnou energii

$$\psi(\epsilon, T) = \frac{1}{2}E\epsilon^2 - E\alpha\Delta T\epsilon + f(T) \quad (1.36)$$

kde  $f(T)$  je libovolná funkce teploty. Entropie plyne z (1.24) jako

$$\eta(\epsilon, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = E\alpha\epsilon - \frac{df}{dT} \quad (1.37)$$

Ze vztahu (1.30) dostaneme sdělené teplo

$$\dot{q} = T\dot{\eta} = TE\alpha\dot{\epsilon} - T\frac{d^2f}{dT^2}\dot{T} \quad (1.38)$$

Označme

$$c(T) := -T\frac{d^2f}{dT^2} \quad (1.39)$$

Jelikož  $f(T)$  byla libovolná funkce, zůstává i  $c(T)$  prozatím neurčená. Pro přenos tepla tak dostáváme

$$\boxed{\dot{q} = \alpha TE\dot{\epsilon} + c\dot{T}} \quad (1.40)$$

První člen představuje tzv. *termomechanickou vazbu*. Je to množství tepla generované či pohlcené deformováním kontinua při konstantní teplotě. Tak například při zatížení tlakem je  $\dot{\epsilon} < 0$  a nemá-li dojít k ohřevu ( $\dot{T} = 0$ ), teplo je zapotřebí odvádět ven. Při zatížení tahem by naopak bylo nutné teplo přivádět.

Všimněme si ještě parametru  $c$ . Evidentně se jedná o *součinitel tepelné kapacity*. Ačkoliv jsme považovali  $E$  a  $\alpha$  za konstantní, výsledek (1.39) naznačuje, že  $c$  je funkcí teploty. Vstupní předpoklady jistě nebyly zcela přesné, přesto však můžeme usoudit, že tepelná kapacita bude mnohem citlivější na změnu teploty než na změnu deformace či napětí. To se skutečně experimentálně potvrzuje, takže u pevných látek většinou nerozlišujeme mezi  $c_p$  a  $c_v$ .

### Příklad

Uvažujme isotermickou tahovou zkoušku vzorku z oceli a zatížení 100 MPa. Odhadneme sdělené teplo a přetvárnou práci.

$$\Delta q = \alpha T E \Delta \epsilon = \alpha T \Delta \sigma \simeq 10^{-5} \times 300 \times 100 \times 10^6 = 3 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Přetvárná práce je

$$\Delta w = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \simeq \frac{(10^8)^2}{2 \times 2 \times 10^{11}} = 0.25 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Pro typické hodnoty materiálových konstant je vynaložená práce přibližně desekrát menší než sdělené teplo!

### 1.1.7 Cvičení

1. Odvoďte (1.24) z podmínky (1.22).
2. Uvažujme Duhamelův-Neumannův model s konstantními parametry  $\alpha$ ,  $E$  a  $c$ .
  - (a) Dokažte
 
$$\eta(\epsilon, T) = \alpha E \epsilon + c \ln \frac{T}{T_r}$$
 kde  $T_r$  je referenční teplota, při níž  $\eta(0, T_r) = 0$ .
  - (b) Určete  $\eta_2 - \eta_1$  a ukažte, že tento rozdíl nezávisí na volbě  $T_r$ .
3. Dosaďte  $\alpha = 10^{-5} \text{ 1/K}$ ,  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $c/\rho = 500 \text{ J/kgK}$  a  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ . Vypočítejte změnu entropie a porovnejte výsledky při těchto procesech:
  - (a) Ohřev volné tyče z  $20^\circ \text{ C}$  na  $100^\circ \text{ C}$ .
  - (b) Isotermické zatížení napětím z nuly na 100 MPa.
4. Zvolme  $T_r = T_0$  a uvažujme isotermický děj  $T = T_0$ .
  - (a) Určete  $\psi(\epsilon)$ ,  $\eta(\epsilon)$  a  $u(\epsilon)$ .
  - (b) Zakreslete grafy funkcí  $\psi(\epsilon)$ ,  $T_0 \eta(\epsilon)$  a  $u(\epsilon)$ .

## 1.2 Vektory, matice a tenzory

### 1.2.1 Cvičení

1. Je dáno ...

## 1.3 Tensorový tvar modelů elasticity

Přejdeme nyní k prostorové napjatosti. I tentokrát budeme předpokládat existenci deformační energie, avšak při isothermickém zatížení  $T = konst.$  Hustota energie bude záviset na všech složkách tensoru deformace.

### 1.3.1 Cvičení

1. Je dána reálná matice

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

- (a) Určete vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  jako funkce  $U_{11}, U_{12}, U_{21}$  a  $U_{22}$ .
- (b) Dokažte, že pokud  $[U]$  je symetrická, jsou tato čísla reálná.

2. Ukažte, že modální matice typu  $3 \times 3$  je ortonormální, takže platí vztah

$$[\Phi]^T[\Phi] = [I]$$

Přesvědčte se o tom roznásobením a využitím faktu, že vlastní vektory tvoří ortonormální systém.

3. Dokažte, že pozitivně definitní matice má kladná vlastní čísla a obráceně, tj.

$$[U] \text{ sym+def} \Leftrightarrow \lambda_k > 0$$

Návod: použijte spektrální rozklad.

4. Nechť matice  $[U]$  a  $[V]$  reprezentují tenzory druhého řádu. Ukažte, že jejich součin

$$[T] = [U][V]$$

se rovněž transformuje jako tensor druhého řádu.

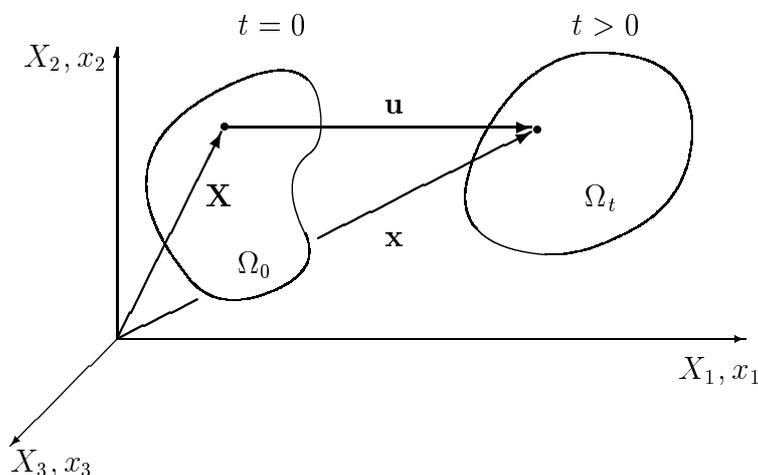
# Kapitola 2

## Kinematika

Základní kinematické veličiny, popisující deformaci kontinua, vyplývají z Obr. 2.1. Libovolná částice  $\mathbf{X}$  se v čase  $t$  přemístí do nové pozice  $\mathbf{x}$  vektorem posunutí  $\mathbf{u}$ . Je tedy

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}} \quad (2.1)$$

Průvodič  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  se nazývá *materiálový bod* (též částice), zatímco  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  je *bod prostoru*. Oba průvodiče umožňují zavést dva typy souřadnic: *materiálové souřadnice*  $X_i$  (Lagrangeovy) a *prostorové souřadnice*  $x_j$  (Eulerovy). Všechny souřadnice budeme vztahovat ke společné kartézské vektorové bázi.



Obr. 2.1: Přetvoření kontinua.

Kinematický rozbor je v rámci této kapitoly rozdělen na dvě části. V první části je vysvětlen Lagrangeův popis. Pro něj je typické zavedení dvou množin: pevně zvolené referenční oblasti  $\Omega_0$  a přetvořené oblasti  $\Omega_t$ . Přetvořená oblast je proměnná a obsahuje v čase  $t$  tytéž materiálové částice jako referenční oblast na počátku,  $t = 0$ . Eulerovský popis je naopak charakterizován tím, že se v prostoru pevně zvolí kontrolní objem  $\Omega$ , který ovšem bude v různých časech obsahovat různé částice. Úlohu nebudeme linearizovat ani jinak zjednodušovat, tj. deformaci kontinua budeme obecně považovat za velkou. Za tohoto předpokladu jsou oba kinematické přístupy zcela rovnocenné.

## 2.1 Lagrangeův popis

V Lagrangeovském (materiálovém) pojetí jsou všechna fyzikální pole definována vzhledem k  $\Omega_0$  jako funkce souřadnic  $X_i$ . Primární veličinou je pole posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , které prostřednictvím (2.1) zavádí funkci

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) =: \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

s počáteční podmínkou

$$\chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \quad (2.3)$$

Tato funkce mapuje v libovolném čase  $t$  oblast  $\Omega_0$  na  $\Omega_t$ , neboli

$$\chi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \quad (2.4)$$

Znaménko '=' v (2.2) bylo i tentokrát použito ve významu definice.

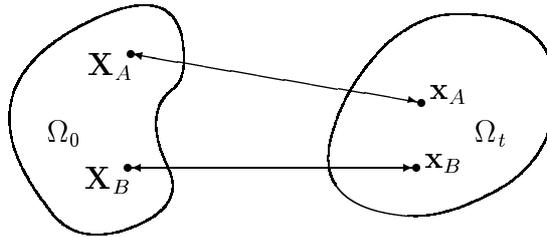
Představme si nyní, že jsou v  $\Omega_0$  dány dva různé body  $\mathbf{X}_A \neq \mathbf{X}_B$ . Podle Obr. 2.2 se tyto body zobrazí na jiné dva body  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in \Omega_t$ . Předpokládáme-li, že dvě různé materiálové částice nemohou v tomtéž čase zaujmout stejné místo v prostoru, bude  $\mathbf{x}_A \neq \mathbf{x}_B$ . Jak je vidět z Obr. 2.2, každému  $\mathbf{X}$  lze pak jednoznačně přiřadit  $\mathbf{x}$  a obráceně. Zobrazení  $\chi$  je tudíž regulární a existuje inverze

$$\chi^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega_0 \quad (2.5)$$

Zřejmě můžeme psát

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

Odtud mimo jiné vyplývá, že každé fyzikální pole může být vyjádřeno buďto jako funkce argumentů  $X_i, t$ , nebo  $x_j, t$ . Zobrazení (2.4) a (2.5) budeme pokládat za dostatečně hladká.



Obr. 2.2: Regulárnost deformace.

### 2.1.1 Gradient posunutí a deformační gradient

Vektor posunutí  $\mathbf{u}$  závisí na souřadnicích  $X_i$ , takže lze zavést dvouindexovou veličinu

$$z_{ij} := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.7)$$

Celkem snadno se ukáže, že koeficienty  $z_{ij}$  splňují pravidla pro transformaci tenzoru druhého řádu. Proto má smysl přímý zápis

$$\boxed{\mathbf{z} := \text{Grad } \mathbf{u}} \quad (2.8)$$

v němž  $\mathbf{z}$  nazýváme *gradient posunutí*.

Operaci ‘gradient’ je možno uplatnit na libovolný skalár, vektor nebo tensor, čímž se řád veličiny zvyšuje o jedničku. Například gradient skaláru je vektor a gradient vektoru je tensor druhého řádu. Velké počáteční písmeno operátoru ‘Grad’ nás upozorňuje na to, že se derivuje podle materiálových souřadnic v  $\Omega_0$ . Více o tensorové analýze nalezneme ve skvělé Gurtinově knize [6]. V konkrétním případě je význam pojmu gradient jasný ze složkového výrazu (2.7).

Podobně jako vektor posunutí, je též průvodič  $\mathbf{x}$  funkcí  $X_i$ . Dospějeme tak k definici

$$F_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.9)$$

neboli

$$\boxed{\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x}} \quad (2.10)$$

Tensor druhého řádu  $\mathbf{F}$  je v mechanice kontinua znám pod názvem *deformační gradient*. V matematickém kontextu se vzhledem k (2.4) jedná o Jacobiho matici zobrazení  $\chi$ . Tím se budeme ještě zabývat podrobněji.

Souvislost mezi oběma gradientními veličinami vyjde najevo, pokud dosadíme za  $x_i$  do (2.9). Dostaneme

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i) = \delta_{ij} + z_{ij} \quad (2.11)$$

Kroneckerův symbol,  $\delta_{ij}$ , představuje prvky jednotkové matice, takže

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{z} + \mathbf{I}} \quad (2.12)$$

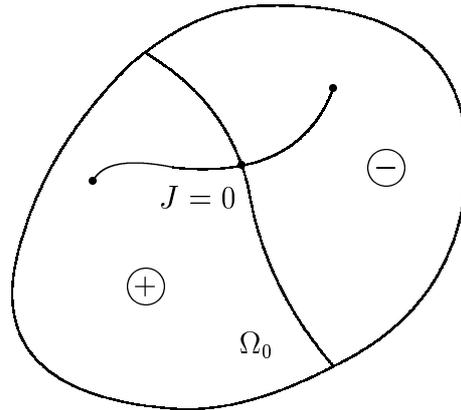
Přepočtení mezi  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{z}$  je velice snadný.

### Jacobián zobrazení

Jak již bylo řečeno, deformační gradient  $\mathbf{F}$  odpovídá z matematického hlediska Jacobiho matici zobrazení  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ . Důsledkem předpokládané regulárnosti je požadavek

$$J := \det |\mathbf{F}| \neq 0 \quad (2.13)$$

Z Obr. 2.3 je navíc okamžitě zřejmé, že determinant  $J$  musí být buďto kladný, anebo záporný, a to všude v  $\Omega_0$ . Ve skutečnosti totiž nemůže nastat situace znázorněná na obrázku, kdy by byl v některém bodě  $J > 0$  a v jiném bodě  $J < 0$ . To by znamenalo, že by se oblast  $\Omega_0$  dala rozdělit na dvě nebo více částí, mezi nimiž by probíhala hranice, kde by se hodnota jacobiánu měnila z kladné na zápornou. Podle předpokladu je však  $J$  spojitá funkce souřadnic  $X_i$ , takže podél hranice by pak muselo být  $J = 0$ , což jsme předem vyloučili.



Obr. 2.3: Pozitivnost jacobianu.

Zbývá rozhodnout o znaménku. K tomu je třeba využít větu o substituci v integrálech. Objem tělesa v čase  $t$  je dán kterýmkoliv z integrálů

$$\int_{\Omega_t} dV_t = \int_{\Omega_0} J dV_0 > 0 \quad (2.14)$$

Protože objem regulárně zdeformovaného tělesa musí zůstat kladný, je nutné aby

$$\boxed{J = \det |\mathbf{F}| > 0} \quad \text{všude v } \Omega_0 \quad (2.15)$$

Rovnost (2.14) platí nejen pro celé těleso, ale též pro každou jeho část. Zvolíme-li velmi malý kontrolní objem  $V_0 \rightarrow 0$ , na němž bude funkce  $J$  prakticky konstantní, vyjde

$$V_t \simeq J V_0 \quad (2.16)$$

Jacobián tudíž interpretujeme jako poměr lokálních objemů.

Zjistili jsme, že deformační gradient může být reprezentován v podstatě libovolnou reálnou (obecně nesymetrickou) maticí typu  $3 \times 3$ . Tato matice však musí být regulární a musí mít kladný determinant. Stav  $J = 0$  by představoval nekonečně velkou kompresi, při níž by se konečný objem stlačil do bodu s nulovým rozměrem. Tím by vznikla singularita. Záporný objem,  $J < 0$ , dokonce odpovídá bizarní představě materiálu obráceného naruby.

### Inverze deformačního gradientu

Stejným způsobem, jakým jsme pracovali se zobrazením  $\chi$ , můžeme naložit i s jeho inverzí  $\chi^{-1}$ . Derivací funkce (2.6) definujeme

$$F_{ij}^{-1} := \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

Přesvědčíme se, že pro příslušné matice v důsledku této definice platí

$$[F]^{-1}[F] = [I] \quad (2.18)$$

V indexovém zápise

$$F_{ik}^{-1}F_{kj} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} \quad (2.19)$$

když jsem využili větu o derivování složené funkce.

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  má svou přirozenou inverzi  $\mathbf{F}^{-1}$ , která vznikne buďto jako gradient inverzní relace, nebo přímým invertováním matice  $[F]$ . Ukazuje se, že pro kartézské tenzory jsou i v tomto případě symboly  $\mathbf{F}^{-1}$  a  $[F]^{-1}$  zaměnitelné.

### Příklad 1: zobrazení oblasti

Uvažujme transformaci souřadnic

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + at^2 \\ x_2 &= X_2 + bX_2t + ct^2 \end{aligned} \right\} a, b, c \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

Uvedená transformace je zcela smyšlená a nemá bezprostřední předlohu v žádném fyzikálním problému. Účelem tohoto příkladu je pouze ilustrovat vlastnosti právě definovaných kinematických veličin.

V první řadě je nutné se přesvědčit, zda navržená transformace vůbec v principu odpovídá nějaké uskutečnitelné deformaci kontinua. Na počátku procesu musejí průvodiče všech bodů splývat. Dosazením  $t = 0$  zjistíme

$$\begin{aligned} x_1(X_1, X_2, t = 0) &= X_1 \\ x_2(X_1, X_2, t = 0) &= X_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tím je ověřena počáteční podmínka (2.3). Dále musíme vyšetřit regulárnost. Inverzní zobrazení získáme řešením soustavy rovnic (2.20) vzhledem k  $X_1, X_2$  jako

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - at^2 \\ X_2 &= \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Evidentní podmínkou řešitelnosti je  $1 + bt \neq 0$ . Je-li  $b$  kladné číslo, nevzniká žádný problém, neboť  $t \geq 0$ . Pokud je  $b$  záporné, řešení existuje jen pro čas menší než  $1/|b|$ . V obou případech je

$$1 + bt > 0 \quad (2.23)$$

Transformace (2.20) je tedy v zásadě korektní a představuje jistou deformaci kontinua.

Nyní stanovíme deformační gradient v maticovém tvaru.

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + bt \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Jacobián je determinant

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 + bt \quad (2.25)$$

Vidíme, že požadavek pozitivnosti jacobíanu je ekvivalentní podmínce řešitelnosti (2.23). Invertování matice (2.24) dává

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+bt} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

což je přesně stejný výsledek, jako kdybychom derivovali (2.22) podle  $x_1$  a  $x_2$ .

Představíme-li si oblast  $\Omega_0$  jako jednotkový čtverec, bude se oblast  $\Omega_t$  posouvat a současně přetvářet v obdélník. Šířka obdélníku zůstane zachována, zatímco výška bude mít okamžitý rozměr  $1 + bt$ . Nyní je jasné, že pro  $b < 0$  bude docházet ke kontrakci, až v čase  $t = 1/|b|$  obdélník zkolabuje do úsečky. Další popis děje by ztrácel smysl. Naopak při kladném  $b$  existuje řešení v celém intervalu  $t \in [0, \infty)$ . Jacobián zde vyjadřuje poměr plochy obdélníka k původní jednotkové ploše čtverce.

### 2.1.2 Greenův-Lagrangeův tensor deformace

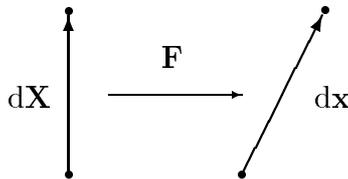
Dobrym východiskem pro posouzení deformace kontinua je geometrická interpretace deformačního gradientu. Výpočtem totálního diferenciálu zobrazení (2.2) obdržíme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (2.27)$$

což je násobení matice  $[F]$  vektorem  $d\{X\}$ , tedy

$$\boxed{d\{x\} = [F] d\{X\}} \quad (2.28)$$

V této souvislosti chápeme deformační gradient jako linearizované zobrazení, které mapuje orientovanou úsečku  $d\mathbf{X}$  z referenční oblasti  $\Omega_0$  na deformovanou úsečku  $d\mathbf{x}$  v aktuální konfiguraci  $\Omega_t$ . Situace je znázorněna na Obr 2.4.



Obr. 2.4: Přetvoření infinitesimální úsečky.

Potřeba měřit vzdálenost soumžných bodů motivuje zavedení metriky. Označme jako  $ds_0$  délku úsečky v  $\Omega_0$ . Pomocí Pythagorovy věty určíme

$$ds_0 = \|d\mathbf{X}\| = \sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}} \quad (2.29)$$

Zde je výhodnější přejít k algebraické notaci

$$(ds_0)^2 = d\{X\}^T d\{X\} \quad (2.30)$$

Stejným způsobem změříme délku přetvořené úsečky

$$(ds)^2 = d\{x\}^T d\{x\} = d\{X\}^T [F]^T [F] d\{X\} = d\{X\}^T [C] d\{X\} \quad (2.31)$$

Označili jsme

$$[C] := [F]^T [F] \quad (2.32)$$

Tato matice je symetrická a pozitivně definitní (důkaz není obtížný a je ponechán jako cvičení). Z (2.31) je vidět, že řídicí matice kvadratické formy,  $[C]$ , zobecňuje Pythagorovu větu pro výpočet vzdálenosti. Kromě toho víme, že vynásobením dvou matic příslušejících tensorům druhého řádu vznikne ve vztahu (2.32) opět matice tensoru druhého řádu. Ten je znám jako *metrický tensor*,

$$\boxed{\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \text{sym+def} \quad (2.33)$$

V mechanice kontinua se metrika  $\mathbf{C}$  nazývá *Cauchyho-Greenův deformační tensor*.

Vraťme se k diskusi problému, jenž je znázorněn na Obr. 2.4. Rozdíl kvadrátů délek úseček je

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = d\{X\}^T ([C] - [I]) d\{X\} = 2 d\{X\}^T [e] d\{X\} \quad (2.34)$$

kde

$$[e] := \frac{1}{2}([C] - [I]) \quad (2.35)$$

Symetrická matice  $[e]$  tudíž předurčuje změnu délky libovolného úseku, a to nezávisle na jeho orientaci. Pokud v nějakém bodě kontinua vymizí složky  $e_{ij}$ , je v libovolném směru  $ds = ds_0$ . Tím jsme získali objektivní míru přetvoření. *Greenův-Lagrangeův tensor deformace* je definován jako

$$\boxed{\mathbf{e} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})} \quad \text{sym} \quad (2.36)$$

Dosazením gradientu posunutí  $\mathbf{z}$  (2.12) a roznásobením dostaneme jiný výraz

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^T + \mathbf{z}^T \mathbf{z}) \quad (2.37)$$

nebo ve složkách

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.38)$$

Greenův-Lagrangeův tensor nemá přímý geometrický význam – vznikl na základě odečtení čtverců vzdáleností. Přestože GL je abstraktní veličina, již v následující sekci, sekci 2.1.3, bude mnohé objasněno na jednoduchých příkladech.

### Tensor malé deformace

V reálných problémech bývají derivace posunutí podle souřadnic malá čísla. Například při deformaci metrového objektu o jeden milimetr budou složky gradientu posunutí

řádově  $10^{-3}$ . Za takových okolností můžeme zanedbat kvadratický člen v (2.37), což nás přivádí k definici *tensoru malé deformace*

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^T)} \quad \text{sym} \quad (2.39)$$

Ve složkovém zápise

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.40)$$

Nebylo by dobré se domnívat, že  $\boldsymbol{\epsilon}$  je nějaká přibližná veličina. Právě naopak, definice (2.39) je exaktní a zachovává si svůj přesný význam i pro velké hodnoty  $z_{ij}$ .

Otázka, kterou je nutno si spíše položit, je tato: za jakých podmínek se dá tensor malé deformace bez potíží použít a za jakých nikoli? V této chvíli můžeme pouze tvrdit, že  $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \mathbf{e}$ , když  $\mathbf{z} \rightarrow 0$ , ale to je prozatím velmi neúplná informace. Více bude zřejmé z příkladů, uvedených v sekci 2.1.3.

### Matematické vlastnosti GL tensoru

Ze vztahu (2.34) je zřejmé, že pro  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  je  $ds = ds_0$ . Kdyby se nám podařilo dokázat také obrácené tvrzení, platilo by

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall d\mathbf{X} : ds = ds_0} \quad (2.41)$$

Implikace zleva doprava je jasná, zbývá dokázat druhou.

Problém formulujeme v algebraickém tvaru následujícím způsobem. Máme dokázat

$$\forall \{X\} : \{X\}^T [e] \{X\} = 0 \quad \Rightarrow \quad [e] = [0] \quad (2.42)$$

Obecně to tak zcela jistě být nemůže; stačí si představit antisymetrickou matici, která každému vektoru přiřazuje vektor k němu kolmý. Kvadratická forma na levé straně (2.42) je v takovém případě nulová, ačkoliv sama matice nulová není. My však víme, že  $\mathbf{e}$  je symetrický tensor, což zásadně mění situaci. Ze spektrálního rozkladu plyne

$$[e] = [\Phi][e'][\Phi]^T, \quad \text{kde } [e'] = \text{diag}[e_1, e_2, e_3] \quad (2.43)$$

Dosazením do (2.42)

$$\{X\}^T [e] \{X\} = \{Y\}^T [e'] \{Y\} = e_1 Y_1^2 + e_2 Y_2^2 + e_3 Y_3^2 \quad (2.44)$$

Označili jsme

$$\{Y\} := [\Phi]^T \{X\} \quad (2.45)$$

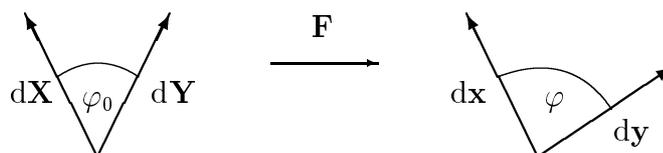
Protože  $[\Phi]$  je regulární matice (je dokonce ortonormální), jsou v této substituci oba vektory ekvivalentní: každému netriviálnímu  $\{X\}$  odpovídá netriviální  $\{Y\}$  a obráceně. Podle předpokladu se má výraz v (2.44) rovnat nule pro libovolný vektor  $\{X\}$ , a tudíž i pro libovolný vektor  $\{Y\}$ . To je možné pouze tehdy, když

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0 \quad (2.46)$$

Hlavní deformace jsou nulové, proto  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  a platí (2.41).

Podařilo se nám tak dokázat velmi důležité tvrzení. Ukázalo se, že Greenův-Lagrangeův tensor je jednoznačně přiřazen deformaci kontinua v tom smyslu, že jeho složky vymizí právě tehdy, když se v žádném směru nemění délka elementární úsečky. Zbývá vyřešit otázku, zda se při  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  také zachovávají úhly. Věc není zdaleka tak jednoduchá, jak by se snad na první pohled mohlo zdát.

Uvažujme podle Obr. 2.5 dvě infinitesimální úsečky,  $d\mathbf{X}$  a  $d\mathbf{Y}$ , svírající v referenční konfiguraci úhel  $\varphi_0$ . Po deformaci budou tyto úsečky zobrazeny na  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{y}$  a budou svírat úhel  $\varphi$ .



Obr. 2.5: Změna úhlu.

Pro posouzení změny úhlu můžeme využít vlastností skalárního součinu, podobně jako jsme to učinili v předchozím případě. V referenční konfiguraci bude

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = \|d\mathbf{X}\| \cdot \|d\mathbf{Y}\| \cos \varphi_0 = d\{X\}^T d\{Y\} \quad (2.47)$$

a v aktuální konfiguraci

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = \|d\mathbf{x}\| \cdot \|d\mathbf{y}\| \cos \varphi = d\{x\}^T d\{y\} = d\{X\}^T [C] d\{Y\} \quad (2.48)$$

Rozdíl skalárních součinů tak bude opět záviset na GL tensoru

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 2 d\{X\}^T [e] d\{Y\} \quad (2.49)$$

Pokud  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , platí rovnost

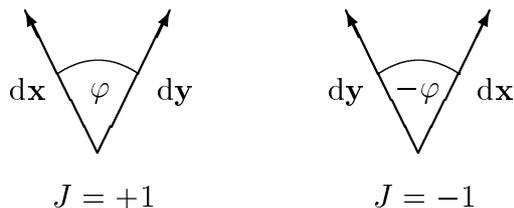
$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \quad (2.50)$$

a jak již víme z dřívějších, zachová se přitom délka libovolné úsečky  $Z$  porovnáním (2.47) s (2.48) vyplývá

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad |\varphi_0| = |\varphi| \quad (2.51)$$

Dospěli jsme tak k závěru, že vymizení složek GL tensoru indikuje zachování libovolného úhlu *v absolutní hodnotě*, ne však jeho orientace. Tento výsledek je znázorněn na Obr. 2.6. Z něj je patrné, že naše úloha připouští dvě zrcadlově obrácená řešení.

Skutečně, Greenův-Lagrangeův tensor byl odvozen z metriky, která si všímá pouze čtverců vzdáleností dvou bodů, nikoliv orientace prostoru. Pomocí metriky například není možné rozlišit mezi objektem a jeho obrazem v zrcadle, neboť vzdálenost mezi každými dvěma body zůstává v obou případech stejná. Pokud při deformaci kontinua zaznamenáme  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , budou, až na případnou translaci a rotaci, vždy existovat dvě řešení: buďto bude mít těleso stejnou podobu jako v referenčním stavu, nebo dojde k jeho zrcadlení. Ve druhém případě je ovšem  $J = -1 < 0$ , stav jenž nemohl vzniknout regulárním přetvořením. Ze striktně formálního hlediska nakonec nevzniká žádný



Obr. 2.6: Zrcadlení.

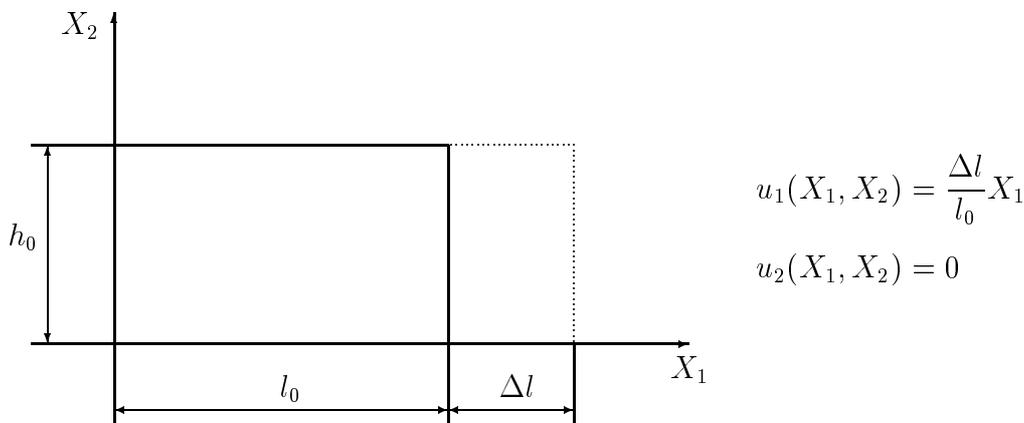
problém, neboť zobrazení se záporným jacobianem jsou automaticky vyloučena a tím je současně obnovena jednoznačnost řešení. V numerické analýze je nicméně existence druhého (nefyzikálního) řešení se záporným jacobianem určitou nepříjemností, vyžadující neustálou pozornost. Více o tom později.

### 2.1.3 Elementární kinematické módy

Typické vlastnosti Greenova-Lagrangeova tensoru a tensoru malé deformace nyní demonstrujeme na jednoduchých příkladech. Následující úlohy představují tři základní módy přetvoření kontinua – jednoosou deformaci, prostý smyk a rotaci. K těmto důležitým příkladům se budeme průběžně vracet, proto jsou očíslovány. Číslování 2–4 navazuje na již diskutovaný Příklad 1, který byl zadán na str. 15. Všechny vzorové úlohy jsou souhrnně zaznamenány v Příloze B.

#### Příklad 2: jednoosá deformace

Deska o počátečních rozměrech  $l_0 \times h_0$  je zatížena tak, že se jedna její hrana prodlouží o  $\Delta l$ . Prodloužení  $\Delta l$  nepředpokládáme malé, může být dokonce  $\Delta l > l_0$ . Zadání úlohy spolu s odpovídajícím polem posunutí je zakresleno na Obr. 2.7.



Obr. 2.7: Jednoosá deformace desky.

Nejdříve určíme základní kinematické veličiny. Gradient posunutí získáme deriva-

váním zadaného pole

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

a po přičtení jednotkové matice máme deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Jacobián musí být kladný

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} > 0 \quad (2.54)$$

Velikost prodloužení je z tohoto důvodu omezena na interval

$$\Delta l \in (-l_0, \infty) \quad (2.55)$$

To je ostatně zřejmé i z Obr 2.7. Kdyby  $\Delta l < -l_0$ , deska by se nejprve zkrátila na nulový rozměr a pak by se její objem změnil na záporný. Ověříme, že jacobián je poměr objemů. Při jednotkové tloušťce

$$\frac{V_t}{V_0} = \frac{h_0(l_0 + \Delta l)}{h_0 l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} = J \quad (2.56)$$

Nakonec určíme tensor malé deformace a GL tensor. Ze vztahu (2.39) je

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

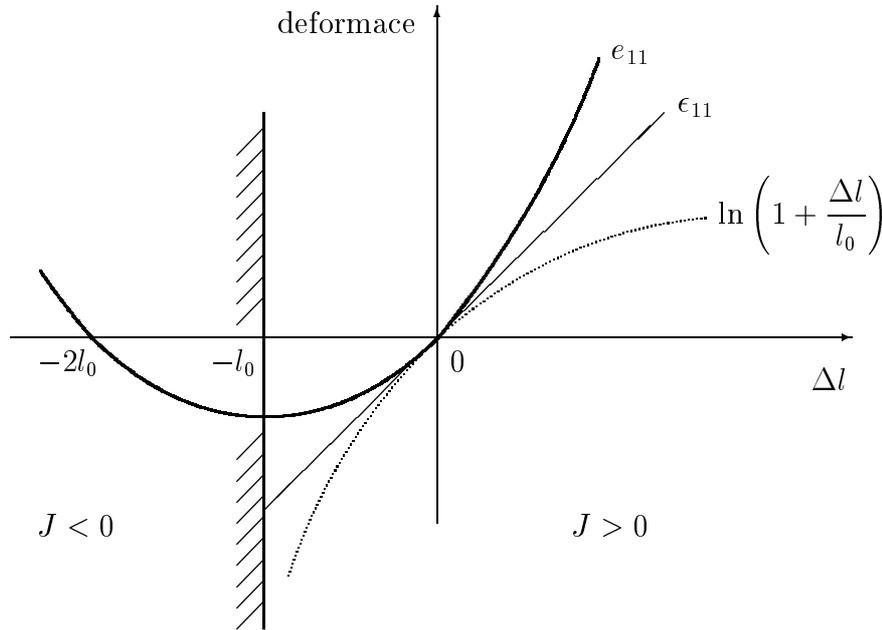
a přičtením kvadratického členu podle (2.37) dostaneme

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Tyto tensory nyní porovnáme. Na Obr. 2.8 jsou zakresleny průběhy složek deformace v závislosti na prodloužení.

Složka  $\epsilon_{11}$  tensoru malé deformace je reprezentována tečnou k parabole  $e_{11}$ . To znamená, že v okolí bodu  $\Delta l = 0$ , tj. pro malé deformace, lze úlohu linearizovat nahrazením tensoru GL tensorem  $\epsilon$ . Vyšrafovaný poloprostor v levé části je zakázaná oblast, v níž by došlo k porušení podmínky (2.54), a tím k vytvoření záporného objemu.

Nabízí se také tato zajímavá otázka: v čem je vlastně průběh složky  $e_{11}$  lepší než průběh  $\epsilon_{11}$  a proč je použití tensoru malé deformace omezeno jen na malá prodloužení? Intuitivně totiž očekáváme, že složitější a výpočtově náročnější definice GL tensoru by měla přinést, jako kompenzaci za větší pracnost, nějakou výhodu. Po pečlivém prozkoumání Obr. 2.8 však s překvapením zjistíme, že tomu tak není. Naopak, průběh



Obr. 2.8: Průběhy různých měř deformace.

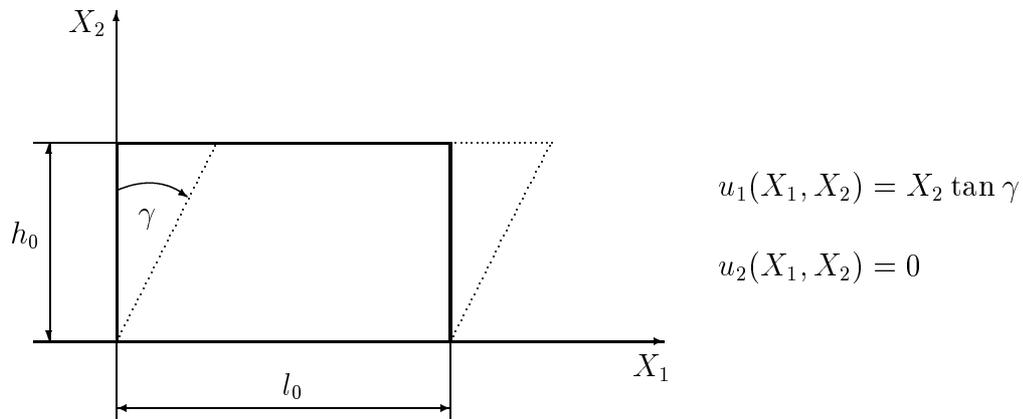
$\epsilon_{11}$  dává konstantní přírůstek deformace pro pevně zvolené  $\Delta l$ , bez ohledu na okamžitý rozměr desky, kdežto konvexní parabola progresivně zvyšuje vliv inkrementu s narůstajícím  $l$ . A pokud si již přejeme pracovat s nelineárním vztahem, bylo by mnohem logičtější definovat složku deformace například takovým způsobem, jakým to činí logaritmická křivka (na obrázku vpravo).

Podrobnějším studiem různých měř deformace se na tomto místě nebudeme zabývat; diskusi odložíme do Kapitoly 5. Zde však musíme zdůraznit tři velmi důležité poznatky: (a) Použití tensoru malé deformace (přinejmenším v tomto kontextu) není omezeno jen na malá prodloužení. Velikost veličiny  $\Delta l/l_0$  není nijak fyzikálně ani geometricky limitována. (b) Obě křivky,  $e_{11}$  a  $\epsilon_{11}$ , jsou v povolené zóně monotonní, a tudíž matematicky ekvivalentní. Vyloučíme-li případ  $J < 0$ , lze ze vztahu (2.58) nebo (2.57) jednoznačně vypočítat  $\Delta l$ . Jinými slovy, známe-li kterýkoliv ze dvou tensorů deformace, je tím plně určen tvar desky, a tak můžeme podle potřeby přepočítat  $e_{11}$  na  $\epsilon_{11}$  a obráceně. (c) Kdybychom se zabývali pouze jednoosým přetvořením, nebylo by nutné, kromě poměrného prodloužení, zavádět žádnou další geometrickou veličinu.

### Příklad 3: prostý smyk

Deska o počátečních rozměrech  $l_0 \times h_0$  je zdeformována prostým smykem<sup>1</sup> podle Obr. 2.9. Úhel zkosu  $\gamma$  může být libovolně velký, samozřejmě, v absolutní hodnotě nesmí přesáhnout  $\pi/2$ .

<sup>1</sup>Pod pojmem *prostý smyk* rozumíme rovinný kinematický mód. Jiný podobný, často používaný termín je *čistý smyk*, který označuje silové zatížení kontinua smykovým napětím. Pro isotropní prostředí oba pojmy víceméně splývají, obecně však mezi nimi musíme rozlišovat. V naší úloze jsou okrajové podmínky předepsány kinematicky, proto se jedná o prostý smyk.



Obr. 2.9: Zkosení desky prostým smykem.

Stejně jako v předchozím příkladě určíme gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

a jacobíán

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 \quad (2.61)$$

Deformace je isochorická, což ihned vyplývá z výpočtu plochy rovnoběžníka

$$V_t = V_0 = l_0 h_0 \times \text{tloušťka} \quad (2.62)$$

Ze vztahů (2.39) a (2.37) postupně určíme tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

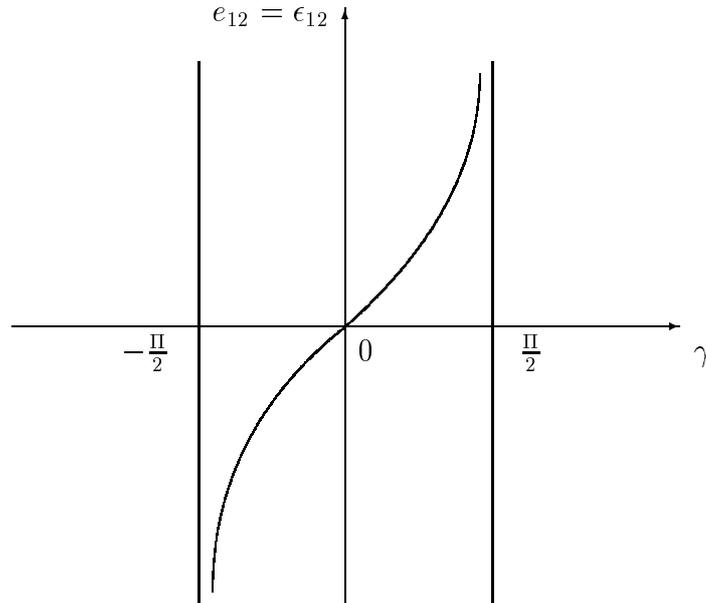
a Greenův-Lagrangeův tensor

$$[e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & \tan^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Průběh smykové deformace je zakreslen na Obr. 2.10.

Pro malý úhel zkosu,  $\gamma \rightarrow 0$ , je možno linearizovat funkci tangens,  $\tan \gamma \simeq \gamma$ . Tím se potvrzuje známé tvrzení, že mimodiagonální složky tensoru malé deformace představují poloviční zkosity. Jak jsme však měli možnost se právě přesvědčit, v exaktním řešení se nevyskytují zkosity, nýbrž tangenty těchto úhlů a složka tensoru malé deformace  $\epsilon_{12}$  má obecně nelineární průběh.

K aproximaci  $\tan \gamma \simeq \gamma$  nás přitom nevedou žádné racionální důvody. Funkce  $\tan \gamma$  je dokonce lepším vyjádřením přetvoření než úhel sám. Jak plyne z pozice asymptot



Obr. 2.10: Průběhy složek  $e_{12}$  a  $\epsilon_{12}$  při deformaci smykem.

na Obr. 2.10, když  $\gamma \rightarrow \pm\pi/2$ , deformace měřená funkcí tangens vzrůstá nade všechny meze, což odpovídá přirozené představě.

Určitě je také zajímavé konstatovat, že složky 12 jsou totožné pro GL tensor, stejně jako pro tensor malé deformace a že tedy, v tomto ohledu, není mezi oběma tensory žádný rozdíl. Ten se projevuje pouze v členu  $e_{22} = \frac{1}{2} \tan^2 \gamma$ , jenž správně reflektuje prodloužení původně svislé úsečky  $h_0$ . Konečně, také při zkoumání této úlohy musíme nakonec připustit, že definice tensoru malé deformace není omezena jen na malý zkos.

#### Příklad 4: rotace

Uvažujme pevný disk o poloměru  $R_0$ , který se může volně otáčet kolem své osy. Natočení disku o úhel  $\varphi$  jako dokonale tuhého tělesa znázorňuje Obr. 2.11. Uvedené pole posunutí platí exaktně pro libovolně velký úhel, například pro několikanásobné otočení disku apod.

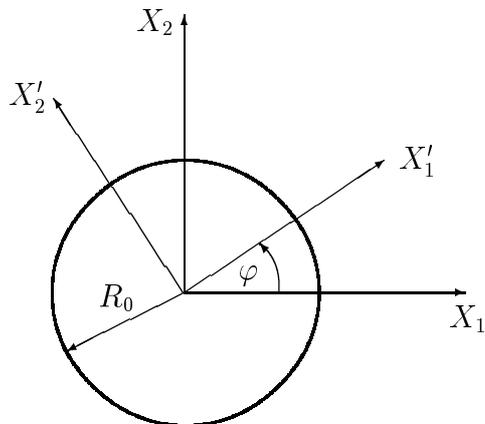
V tomto případě je instruktivní ukázat též odvození zadaného pole posunutí. K tomu účelu nám poslouží pomocný systém kartézských os  $\{X'\}$ , který je pevně spojen s diskem a spolu s ním se natáčí. Matice přechodu  $[A] : \{X\} \mapsto \{X'\}$  obsahuje směrové kosiny čárkovaných os

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

a pro polohové vektory máme

$$\{X'\} = [A]\{X\}, \quad \{x'\} = [A]\{x\} \quad (2.66)$$

Nyní zvolíme libovolný bod disku  $\mathbf{X}$  a zahájíme rotaci. Vzhledem k systému  $\{X'\}$  se



$$u_1(X_1, X_2) = X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi$$

$$u_2(X_1, X_2) = X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1)$$

Obr. 2.11: Rotace disku.

disk nepohybuje, proto budou složky  $\{x'\}$  v čase konstantní a číselně bude platit

$$\{x'\} \equiv \{X\} \quad (2.67)$$

Pomocí (2.66) pak již snadno získáme hledané pole posunutí

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} = [A]^T \{x'\} - \{X\} = ([A]^T - [I])\{X\} \quad (2.68)$$

nebo ve složkách

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi \\ u_2 &= X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1) \end{aligned} \quad (2.69)$$

což je totéž co v Obr. 2.11.

Obvyklým způsobem určíme kinematické veličiny. Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

a deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Všimněme si, že deformační gradient vznikl transpozicí matice přechodu. Tak je tomu při pohybu dokonale tuhého tělesa vždy a z odvození dokonce plyne, že stejný výsledek musíme zaznamenat i ve 3D.

$$J = \det |\mathbf{F}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (2.72)$$

Pohyb je samozřejmě isochorický. Tensor malé deformace je

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Greenův-Lagrangeův tensor určíme nejsnáze z (2.36)

$$2[e] = [F]^T[F] - [I] = [A][A]^T - [I] = [0] \quad (2.74)$$

a podle očekávání vyjde nulový.

Zjistili jsem, že tensor malé deformace *není invariantní* vůči rotaci tělesa jako tuhého celku. Pro malé úhly natočení je sice  $\cos \varphi \simeq 1$ , avšak v praktických úlohách může i malá odchylka hrát podstatnou roli. Uvažujme například  $\varphi = 1^\circ$ . Potom  $\epsilon_{11} = -1.5 \times 10^{-4}$ , takže řádová chyba v napětí bude více než 30 MPa. To je nečekaný výsledek!

Čím si lze tedy vysvětlit, že se v inženýrství tensor malé deformace přesto s úspěchem používá, a to navzdory faktu, že se s jednostupňovou rotací můžeme setkat poměrně často? Je to proto, že v drtivé většině případů je zatížení realizováno silami a ne předepsanými posuvy (jako tomu bylo v tomto příkladě), takže chyba výpočtu se obvykle projevuje v nesprávně určené deformaci. Ta nás však zpravidla zajímá méně než napětí. Více bude zřejmé z výsledků Cvičení 9.

V každém případě je jasné, že nesprávný popis rotačního módu v principu diskvalifikuje  $\epsilon$  jako exaktní míru deformace. Ta musí být v obecném případě definována pomocí Greenova-Lagrangeova tensoru, anebo prostřednictvím některého z tensorů zavedených v částech 2.1.5 nebo podrobněji v 5.2.

## Diskuse výsledků

Jakkoliv se naše úlohy mohou zdát triviální, ve skutečnosti popisují libovolnou kinematically přípustnou deformaci kontinua. Každý gradient posunutí totiž můžeme rozložit na tři základní kinematische módy podle vzorových Příkladů 2, 3 a 4 a pokud by pole posunutí nebylo lineární, stačí si představit parametry  $l_0$ ,  $h_0$  a  $R_0$  infinitesimálních rozměrů. Ve skutečnosti jsme tedy analyzovali zcela obecný problém!

Z Příkladů 2 a 3, které představují základní tvary přetvoření tahem, tlakem a smykem, vyplývá velmi dobrá použitelnost lineární míry  $\epsilon$ . Lze dokonce konstatovat, že poměrné prodloužení má výstižnější a přirozenější průběh než kvadratická forma, příslušející GL tensoru. Skutečný deficit tensoru malé deformace tak paradoxně nespočívá v neschopnosti popsat velká přetvoření, jak by snad napovídala jeho název, nýbrž v generování fiktivních deformací (stlačení) způsobených lokální rotací.

Jakým způsobem se tedy má přistupovat ke geometricky nelineárním úlohám? Řada problémů technické praxe, jako je stabilita prutů a tenkostěnných skořepin, kmitání či šíření vln v předepjatých strukturách – příkladem mohou být kmitající struny, vibrace oběžných kol kompresorů a turbin, jejichž lopatky jsou předepjaté velkou odstředivou silou, atp. – je sice nelineární, ale vlastní deformace zůstává malá. Je to dáno tím, že typická hodnota napětí je srovnatelná s mezí kluzu, takže elastická deformace se pohybuje v řádu  $10^{-3}$ , a dokonce i v těch případech, kdy vzniká plastický tok, permanentní deformace zpravidla nepřesahuje  $10^{-2}$ . V takových situacích se výborně osvědčuje Greenův-Lagrangeův tensor, který je invariantní vůči rotaci, ale jinak se, pro takto nevýznamná přetvoření, příliš neliší od tensoru malé deformace.

Dalo by se také říci, že kvadratický člen v GL tensoru odstraňuje potíže s natáčením kontinua, ale na popis samotné deformace nemá ve většině případů téměř žádný vliv. Teprve když je třeba řešit úlohy se skutečně velkou deformací, vznikající např. při namáhání pryžových komponent nebo tváření kovů, kdy deformace mohou dosáhnout

až několika set procent, stojí za úvahu použití jiného tensoru. Tím se zabývá odstavec 2.1.5 a především samostatná kapitola 5.2, která rozebírá právě tyto méně časté, ale přesto důležité případy.

### 2.1.4 Polární rozklad deformačního gradientu

Předchozí rozbor nás upozornil na to, jak důležitou roli hraje správné rozlišení módu rotace a vlastního přetvoření kontinua. Pro hlubší porozumění problému a zavedení vhodné definice míry deformace je výhodné aplikovat větu o polárním rozkladu deformačního gradientu:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}} \quad (2.75)$$

Vystupuje zde *tensor rotace*  $\mathbf{R}$ , který je společný oběma variantám, *pravostranný tensor protažení*  $\mathbf{U}$  a *levostranný tensor protažení*  $\mathbf{V}$ . Deformační gradient má podle předpokladu kladný determinant, tensor rotace je ortonormální a jeho determinant je rovný +1; tensor protažení jsou symetrické a pozitivně definitní, takže

$$J = \det |\mathbf{F}| = \det |\mathbf{U}| = \det |\mathbf{V}| \quad (2.76)$$

Využili jsme toho, že determinant součinu matic lze rozepsat jako součin determinantů. Celkem snadno se zjistí (je ponecháno jako cvičení), že vlastní čísla  $\lambda_k$  jsou pro oba tensor  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  stejná a nazývají se *hlavní protažení*. Polární rozklad je jednoznačný.

Poté, co bude věta formálně dokázána, se zaměříme na vlastnosti jednotlivých členů. Ukážeme, že tensor rotace popisuje natáčení kontinua, zatímco tensor protažení souvisí výhradně s jeho deformací. To už ostatně naznačuje vztah pro jacobíán (2.76), který vyjadřuje změnu objemu a nezávisí na  $\mathbf{R}$ . Nakonec se budeme věnovat významu pořadí matic v (2.75) při jejich násobení a multiplikativnímu rozkladu tensorů obecně.

#### Důkaz a postup výpočtu

Uvažujme nějakou symetrickou, pozitivně definitní matici  $[U]$  a označme

$$[R] := [F][U]^{-1} \quad (2.77)$$

Má-li být  $[R]$  ortonormální, je nutné aby

$$[R]^T[R] = [U]^{-1}[C][U]^{-1} = [I] \quad (2.78)$$

Při úpravě jsme přihlédlí k tomu, že  $[U]$  je symetrická a použili jsme definici Cauchyho-Greenova tensoru

$$[C] = [F]^T[F] \quad (2.79)$$

Z podmínky (2.78) plyne  $[C] = [U]^2$ , takže je třeba zvolit  $[U]$  jako odmocninu

$$[U] = \sqrt{[C]} \quad (2.80)$$

Přesná definice, výpočet a důkaz jednoznačnosti odmocniny matice je uveden v Příloze A.2.

Dále se přesvědčíme o tom, že každý ortonormální tensor (matice) má jednotkový determinant.

$$\det |\mathbf{R}| \det |\mathbf{R}| = \det |\mathbf{R}^T| \det |\mathbf{R}| = \det |\mathbf{R}^T \mathbf{R}| = \det |\mathbf{I}| \quad (2.81)$$

Determinant jednotkové matice je roven jedné, tudíž

$$\det^2 |\mathbf{R}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \det |\mathbf{R}| = \pm 1 \quad (2.82)$$

O znaménku rozhoduje orientace.<sup>1</sup> Jak již bylo řečeno, v daném případě je  $J > 0$  a rovněž  $\det |\mathbf{U}| > 0$ , proto platí (2.76). Také je nyní zřejmé, že větu o polárním rozkladu lze použít pro libovolnou regulární matici, přičemž hodnota jejího determinatu určuje znaménko v (2.82).

Jednoznačnost: uvažujme konkurenční matice  $[\tilde{R}]$  a  $[\tilde{U}]$  se stejnými vlastnostmi jako měly  $[R]$  a  $[U]$ , takže existují dvě verze rozkladu

$$[F] = [R][U] = [\tilde{R}][\tilde{U}] \quad (2.83)$$

Z předpokládaných vlastností matic (bez ohledu na to, jak jsme je určili) plyne

$$[C] = [F]^T [F] = [U]^T [R]^T [R] [U] = [U]^T [U] = [U]^2 \quad (2.84)$$

Ze stejného důvodu musí být  $[\tilde{U}]^2 = [C]$ , a proto

$$[\tilde{U}] = \sqrt{[C]} = [U] \quad (2.85)$$

Podle Přílohy A.2 je však odmocňování jednoznačná operace.

Na závěr zopakujeme algoritmus výpočtu, do nějž jsme pro přehlednost vložili též výpočet odmocniny matice.

1. Je dán deformační gradient  $\mathbf{F}$ , jehož determinant je kladný. Určíme Cauchyho-Greenův tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

o němž víme, že je symetrický a pozitivně definitní.

2. Pro přidruženou matici řešíme problém vlastních čísel. Ta jsou vesměs kladná. Jejich odmocněním získáme hlavní protažení.

$$[C] \{ \varphi_k \} = \mu_k \{ \varphi_k \}, \quad \lambda_k := \sqrt{\mu_k} > 0$$

Z vlastních vektorů složíme po sloupcích modální matici  $[\Phi]$  a z hlavních protažení diagonální matici  $[\Lambda] := \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]$ . Pořadí čísel  $\lambda_k$  musí odpovídat vektorům ve  $[\Phi]$ , jinak není striktně předepsáno (existuje šest rovnocenných možností).

---

<sup>1</sup>Ortonormální zobrazení s kladným determinantom nazýváme rotace. Kdyby  $\det |\mathbf{R}| = -1$ , mluvili bychom o zrcadlení. Např. matice přechodu mezi stejně orientovanými kartézskými systémy (pravotočivými, nebo levotočivými), má determinant rovný  $+1$ . Pokud by byly systémy orientované vzájemně různě (jeden pravotočivý a druhý levotočivý), byl by její determinant roven  $-1$ .

3. Prostřednictvím spektrálního rozkladu definujeme tensor protažení a dopočteme tensor rotace

$$[U] := [\Phi][\Lambda][\Phi]^T, \quad [R] := [F][U]^{-1}$$

Pro výpočet inverze je výhodnější použít Cramerovo pravidlo (22 FLOPS), než spektrální rozklad (30 FLOPS), přestože jej máme k dispozici!

### Tensor rotace

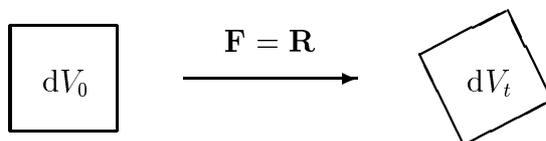
Uvažujme nejprve speciální případ, kdy je deformační gradient representován ortonormální maticí. Vzhledem k jednoznačnosti polárního rozkladu musí platit

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (2.86)$$

Podle definice (2.36) vyjde

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

Ze Sekce 2.1.2, kde jsme se podrobně zabývali vlastnostmi Greenova-Lagrangeova tenzoru, víme, že při  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  nedochází k deformaci kontinua. Blízké okolí bodu, v němž  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , se pak může jen posunout a natočit, viz Obr. 2.12.



Obr. 2.12: Pohyb infinitesimální oblasti jako tuhého celku.

Odvození pole posunutí při rotačním pohybu na str. 24 vysvětluje obrácený postup, tj. způsob, kterým je možno zkonstruovat deformační gradient ze známých úhlů natočení. Vyšlo  $[F] = [A]^T$ . Můžeme tudíž konstatovat, že  $\mathbf{F}$  je ortonormální *právě tehdy*, když dochází k lokální rotaci a odpovídající úhly natočení jsou jednoznačně určeny přidruženou maticí  $[F]$ .

### Tensor protažení

Nechť je deformační gradient symetrický a pozitivně definitní, tedy

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.88)$$

Situace je nyní složitější, neboť není na první pohled vidět, jak by se měly vlastnosti tenzoru  $\mathbf{U}$  geometricky interpretovat. Více odhalí vyjádření v hlavních osách, založené na spektrálním rozkladu

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (2.89)$$

Přejdeme-li pomocí  $[\Phi]^T$  ke kartézskému systému  $\{X'\}$ , dostaneme

$$[U'] = [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \quad (2.90)$$

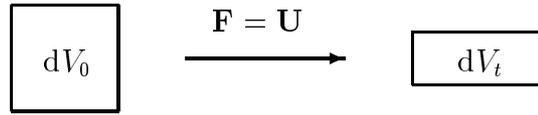
kde  $\lambda_k > 0$  jsou hlavní protažení. Deformační gradient zprostředkovává lineární vztah mezi elementárními úsečkami. Ten musí platit v každém systému, proto

$$d\{x'\} = [U'] d\{X'\} \quad (2.91)$$

anebo v rozepsaném tvaru

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \lambda_1 dX'_1 \\ dx'_2 &= \lambda_2 dX'_2 \\ dx'_3 &= \lambda_3 dX'_3 \end{aligned} \quad (2.92)$$

Poslední rovnice ovšem ukazují, že dochází k prosté deformaci podle Obr. 2.13.



Obr. 2.13: Deformace infinitesimálního objemu v systému hlavních os.

Vyšlo tedy najevo, že tensor protažení popisuje elementární deformaci v tom smyslu, že vždy existuje souřadnicový systém takový, že se v něm přetvoření jeví jako superpozice tří navzájem kolmých jednoosých deformací. To je důležitý výsledek. Kartézský systém si totiž pro výpočet můžeme zvolit podle potřeby, třeba jako hlavní osy. Pak je ale zřejmé, že pozitivní definitnost deformačního gradientu automaticky znamená deformaci podle Obr. 2.13 a obráceně pomocí jednoduchých rovnic (2.92) lze vytvořit libovolný tensor protažení. Zbývá vyřešit otázku, jak zkombinovat rotaci a protažení do jednotného popisu.

### Multiplikativní rozklad

Vyjádření tensoru jako součinu několika součinitelů matematicky odpovídá kompozici zobrazení. V konkrétním případě se budeme zabývat rozložením deformačního gradientu na součin dvou členů (jako je tomu v  $\mathbf{RU}$  rozkladu), nicméně z kontextu bude zřejmé, že podobně bychom mohli postupovat i při více činitelích. S následující teorií přišli v roce 1967 Lee a Liu [10], kteří se v souvislosti s konstruováním protiatomových kryptů zabývali problematikou šíření šokových vln v horninách.

Uvažujme pohyb tělesa rozfázovaný do tří časových okamžiků  $t_0 = 0$ ,  $t_m > t_0$  a  $t > t_m$ . Tomu odpovídají oblasti, zvané konfigurace,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_m$  a  $\Omega_t$ . První se nazývá počáteční nebo též referenční konfigurace, druhá intermediální konfigurace a třetí je aktuální konfigurace. Označme jako  $\mathbf{F}_0$  deformační gradient s komponentami

$$F_{ij}^0 := \frac{\partial x_i^m}{\partial X_j} \quad (2.93)$$

kde  $x_i^m$  a  $X_j$  jsou kartézské složky průvodičů bodů  $\mathbf{x}_m \in \Omega_m$  a  $\mathbf{X} \in \Omega_0$ . Jako referenční konfiguraci můžeme také zvolit  $\Omega_m$  a definovat

$$F_{ij}^m := \frac{\partial x_i}{\partial x_j^m} \quad (2.94)$$

Podle věty o derivování složené funkce je celkový deformační gradient

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^m} \frac{\partial x_k^m}{\partial X_j} = F_{ik}^m F_{kj}^0 \quad (2.95)$$

Dospěli jsme tak k fundamentálnímu poznatku

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_m \mathbf{F}_0} \quad (2.96)$$

Přírůstky vyjádřené pomocí deformačního gradientu se nesčítají, nýbrž násobí.

Jako ilustraci multiplikativního rozkladu připomeňme kinematickou úvahu, která se široce využívá v teorii plasticity a která byla poprvé představena v originální práci [10]. Pro malé deformace obvykle přijímáme předpoklad aditivity

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (2.97)$$

Elastická část deformace  $\boldsymbol{\epsilon}_e$  se mění s napětím a pokud vzorek úplně odlehčíme, v materiálu zůstane jen permanentní plastická část  $\boldsymbol{\epsilon}_p$ . Podle předchozího bychom však správně měli psát

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (2.98)$$

se stejnou fyzikální ideou. Jak dalece jsou oba přístupy konzistentní? Dosaďme za  $\mathbf{F}$  ze vztahu (2.12), tj.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_e + \mathbf{I})(\mathbf{z}_p + \mathbf{I}) \quad (2.99)$$

Odtud

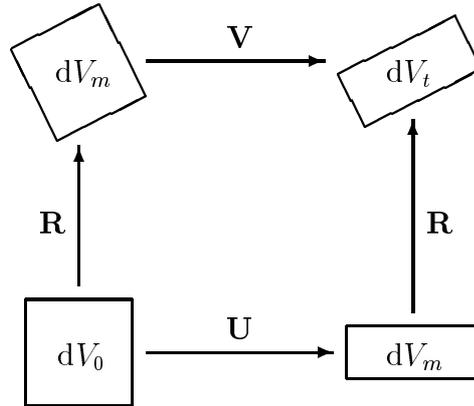
$$\mathbf{z} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{z}_e + \mathbf{z}_p + \mathbf{z}_e \mathbf{z}_p \quad (2.100)$$

Pro malé deformace můžeme zanedbat kvadratický člen a pomocí definice (2.39) dostaneme

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_e + \mathbf{z}_e^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{z}_p + \mathbf{z}_p^T) \quad (2.101)$$

což je aditivní rozklad (2.97). Nejenže je tedy starší teorie obsažena jako speciální případ, ale navíc jsme získali dobrý odhad mezí její použitelnosti. Pro úspěšnost teorie plasticity s malými deformacemi je nezbytné, aby jak elastická, tak i plastická deformace byly nezávisle na sobě malé. První předpoklad bývá splněn skoro vždy, druhý nikoliv (např. při tváření kovů). V řadě technických aplikací proto musíme dát přednost multiplikativnímu rozkladu (2.98).

Vraťme se nyní zpět k polární dekompozici  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Přetvoření kontinua je zde rozděleno do dvou fází, viz Obr. 2.14. V první fázi se uplatní tensor vyskytující se v rovnici zcela vpravo, tedy  $\mathbf{U}$ , a ve druhé fázi tensor vedle rovnítka,  $\mathbf{R}$ . Tato úvaha a Obr. 2.14 nám poskytují názornou geometrickou interpretaci. V  $\mathbf{R}\mathbf{U}$  rozkladu se kontinuum nejprve zdeformuje protažením  $\mathbf{U}$ ; celý proces je přitom ekvivalentní jednoduchému lineárnímu prodloužení či zkrácení tří vzájemně kolmých úseček a dá se



Obr. 2.14: Geometrický význam polárního rozkladu.

tedy chápat jako superpozice tří jednoosých deformací. Teprve poté následuje rotace  $\mathbf{R}$ , při níž se již materiál nedeformuje, ale pouze natáčí. Ve verzi  $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$  je tomu obráceně. Polární rozklad nám tak poskytuje mimořádně jasný obrázek o lokálním přetvoření kontinua a stává se neocenitelným pomocníkem při analýze různých definic tensorů deformace. O tom pojednává následující sekce.

### 2.1.5 Klasifikace tensorů deformace

Tensor deformace je totální veličina, která se váže ke dvěma konfiguracím: referenční a aktuální. Při jeho určení nehraje roli způsob, kterým se systém dostal z jednoho stavu do druhého, rozhodující jsou pouze výchozí a finální hodnoty deformačního gradientu. Protože výpočet tensoru deformace nezávisí na parametrizaci (historii, trajektorii) přetvoření, jsou obě varianty polárního rozkladu, znázorněné na diagramu v Obr. 2.14, rovnocenné. Nabízejí se tak dva koncepčně různé přístupy.

V prvním přístupu zaznamenáme protažení  $\mathbf{U}$ , ignorujeme  $\mathbf{R}$  a definujeme

$$\boxed{\mathbf{E} := f(\mathbf{U})} \quad (2.102)$$

Veličinu  $\mathbf{E}$  nazýváme obecným tensorem deformace *Lagrangeovského typu*. Analogicky definujeme třídu tensorů *Eulerovského typu* jako

$$\boxed{\mathbf{A} := f(\mathbf{V})} \quad (2.103)$$

Funkce  $f$  je tzv. *isotropní* tensorová funkce, splňující

$$f([Q][U][Q]^T) = [Q]f([U])[Q]^T \quad (2.104)$$

pro každou ortonormální matici  $[Q]$ . Je to z toho důvodu, že výše uvedené definiční vztahy musí platit v libovolném souřadnicovém systému, neboli

$$[E] = f([U]) \quad \text{a současně} \quad [E'] = f([U']) \quad (2.105)$$

při stejném operátoru  $f$ . Dosazením transformačních pravidel a porovnáním obou výrazů dostaneme (2.104). Vlastnosti isotropních funkcí jsou podrobněji popsány v Příloze A.4.

Na tensorovou funkci  $f$  jsou kladeny ještě dva další požadavky. Jednak je zřejmé, že jednotkovému protažení musí odpovídat nulová deformace, takže

$$f(\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (2.106)$$

a jednak předpokládáme invertovatelnost v celém oboru. Z posledního požadavku plyne ekvivalence tensorů stejné třídy. Je-li dán jistý tensor  $\mathbf{E}$ , můžeme z něj zpětně vypočítat

$$\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{E}) \quad (2.107)$$

a ze známého  $\mathbf{U}$  pak jakýkoliv jiný Lagrangeovský tensor deformace. Pokud bychom si přáli přejít ke druhé skupině, museli bychom mít k dispozici ještě tensor rotace. Z (2.75) plyne

$$\mathbf{V} = \mathbf{RUR}^T \quad (2.108)$$

a protože  $f$  je isotropní

$$\mathbf{A} = f(\mathbf{V}) = \mathbf{R}f(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = \mathbf{RER}^T \quad (2.109)$$

Každému Lagrangeovskému tensoru deformace tak odpovídá Eulerovský tensor, daný stejným funkčním předpisem, a obráceně.

Jestliže nyní víme, že všechny tensorové konečné deformace jsou *de facto* ekvivalentní, diskuse o výhodnosti toho či onoho přístupu se mohou zdát poněkud akademické. Z vyššího hlediska tomu tak snad je, z praktického nikoliv. Představme si například, že deformace  $\mathbf{F}$ , pro kterou jsme určili všechny pořebné kinematické veličiny, byla později následována rotací  $\mathbf{Q}$ . Výsledný deformační gradient bude

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{QF} = \mathbf{QRU} = \mathbf{QVR} \quad (2.110)$$

Tensorové protažení a rotace se změjí na

$$\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^+ = \mathbf{QVQ}^T, \quad \mathbf{R}^+ = \mathbf{QR} \quad (2.111)$$

Dodatečná rotace proto neovlivní Lagrangeovské tensorové deformace,  $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}$ , avšak všechny Eulerovské se změjí na

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{QAQ}^T \quad (2.112)$$

Kdybychom naopak rotaci předřadili, dostali bychom

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}^+ = \mathbf{Q}^T\mathbf{E}\mathbf{Q} \quad (2.113)$$

V situacích, kdy pracujeme pouze s invarianty (tj. u isotropních materiálů) je jedno, zda se použije  $\mathbf{E}$  nebo  $\mathbf{A}$ , neboť invarianty nejsou natočením nijak ovlivněny a navíc jsou při stejné funkci  $f$  pro oba typy tensorů shodné –  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  mají stejná vlastní čísla. Pro anisotropní prostředí je však podstatná orientace tensoru deformace vůči

materiálovým osám. Ty jsou zadány ve výchozím a ne koncovém stavu (ten neznáme, je teprve předmětem řešení) a v tom případě je snazší využít tensory Lagrangeovského typu. Tomuto a dalším podobným námětům se věnuje samostatná Kapitola 5.

Tuto část uzavřeme některými příklady často užívaných měř přetvoření: Greenova-Lagrangeova tensoru, tensoru malé deformace, Biotova tensoru a Henckyho logaritmického tensoru. Jako reprezentanta Eulerovské skupiny zmíníme Almansiho tensor deformace.

### GL tensor

Dosazením  $\mathbf{RU}$  rozkladu do definice (2.36) obdržíme

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (2.114)$$

Greenův-Lagrangeův tensor deformace je tedy kvadratickou funkcí  $\mathbf{U}$ , a proto spadá do kategorie  $\mathbf{E}$ -tensorů. Zdůrazněme, že pro jeho výpočet nebudeme pochopitelně používat polární rozklad, nýbrž původní definiční vztah (první v rovnici). Tím se vyhneme zbytečnému řešení vlastních čísel a dobereme se cíle podstatně rychleji. Pro jiné tensory je nicméně určení  $\mathbf{U}$ , a tudíž i výpočet vlastních čísel nepříjemnou nutností.

### Tensor malé deformace

Polární rozklad tentokrát dosadíme do definice (2.39), takže s využitím symetrie tensoru protažení vyjde

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{RU} + \mathbf{UR}^T) - \mathbf{I} \quad (2.115)$$

Tento výraz již nelze dále redukovat tak, aby nezávisel na  $\mathbf{R}$ . Veličina  $\boldsymbol{\epsilon}$  proto *není* tensorem Lagrangeovského typu a stejným způsobem bychom mohli ukázat, že nepatří ani mezi Eulerovské tensory. Neodstranitelná závislost na  $\mathbf{R}$  indikuje, že tensor malé deformace není invariantní vůči rotaci, a nemůže být proto použit pro řešení obecných problémů mechaniky kontinua. To jsme ostatně již dříve zjistili při řešení Příkladu 4.

Na druhé straně je zajímavé si všimnout limity  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{I}$ . Pokud je rotace malá, bude přibližně platit

$$\boldsymbol{\epsilon} \simeq \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (2.116)$$

Ze struktury tensoru protažení víme, že  $\mathbf{U} - \mathbf{I}$  představuje poměrné prodloužení, např. v systému hlavních os je  $\epsilon_1 = \lambda_1 - 1$  atd. Při zanedbatelné rotaci se tak  $\boldsymbol{\epsilon}$  stává funkcí pouze  $\mathbf{U}$ , a tudíž *aproximuje* tensor Lagrangeovského typu. Také to již víme z řešení vzorových příkladů – pokud nedochází k výraznému natažení, lze tento tensor úspěšně použít pro popis nejen malých ale i velkých přetvoření.

### Biotův tensor

Předchozí úvahy nás vedou k následující myšlence. Co kdybychom vztah (2.116) použili jako novou definici?

$$\mathbf{b} := \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (2.117)$$

Takto definovaný tensor, známý jako Biotův tensor, a priori nezávisí na  $\mathbf{R}$ , může být použit pro úlohy s libovolně velkou rotací a přitom si zachovává příznivé vlastnosti a geometrický význam tensoru malé deformace. Jeho jedinou nevýhodou je nutnost stanovit vlastní čísla, čímž se zvyšuje pracnost výpočtu.

### Henckyho tensor

Jako poslední příklad Lagrangeovské veličiny uvedeme Henckyho logaritmický tensor deformace [4]. Jeho dobré vlastnosti se osvědčily v řadě prací [1, 2, 12]. Definujeme

$$\mathbf{h} := \ln \mathbf{U} \quad (2.118)$$

kde tzv. *tensor logaritmus* získáme pomocí spektrálního rozkladu tensoru protažení

$$\ln[U] := [\Phi] \ln[\Lambda] [\Phi]^T \quad (2.119)$$

a logaritmus diagonální matice je definován jednoduše jako

$$\ln[\Lambda] := \text{diag}[\ln \lambda_1 \ \ln \lambda_2 \ \ln \lambda_3] \quad (2.120)$$

V Příkladu 4 vyjde Henckyho tensor jako nulový, stejně jako v Příkladu 2 s výjimkou diagonálního členu  $h_{11} = \ln(l/l_0)$ . Namísto logaritmu může být podobným způsobem využita i jiná reálná funkce – viz Kapitola 5.

### Almansiho tensor

V Sekci 2.1.2 byl odvozen Greenův-Lagrangeův tensor deformace. Jako východisko jsme uvážili rozdíl čtverců vzdáleností

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = d\{x\}^T d\{x\} - d\{X\}^T d\{X\} \quad (2.121)$$

a v něm jsme pomocí vztahu (2.28) eliminovali vektor  $d\{x\}$ . Stejně tak dobře jsme ovšem mohli dosadit inverzi tohoto vztahu a vyloučit tím vektor  $d\{X\}$ . V tom případě by vyšlo

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2 d\{x\}^T [a] d\{x\} \quad (2.122)$$

kde

$$[a] := \frac{1}{2}([I] - [F]^{-T}[F]^{-1}) \quad (2.123)$$

Matice  $[a]$  definuje složky *Almansiho tensoru deformace*. Dosazením  $\mathbf{VR}$  rozkladu

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (2.124)$$

Zjistili jsme, že  $\mathbf{a}$  je tensor Eulerovského typu.

### 2.1.6 Cvičení

1. Zadány jsou tyto vztahy pro posunutí

$$\begin{aligned} u_1(X_1, X_2, t) &= kX_2t \\ u_2(X_1, X_2, t) &= 0 \end{aligned}$$

kde  $k$  je reálné číslo.

(a) Zakreslete deformaci jednotkové oblasti  $\Omega_0 \equiv (0, 1) \times (0, 1)$ .

(b) Určete  $\chi^{-1}$  a dokažte regulárnost.

2. Dokažte, že gradient posunutí je tensor druhého řádu.

Návod: Dokažte  $[z'] = [A][z][A]^T$ .

3. Dokažte, že deformační gradient je tensor druhého řádu.

4. Dokažte, že Cauchyho-Greenův deformační tensor je symetrický a pozitivně definitní.

5. Uvažujme úhlopříčku desky v Příkladu 2,

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} l_0 \\ h_0 \end{array} \right\} \quad \text{o délce} \quad s_0 = \sqrt{l_0^2 + h_0^2}$$

Jaká bude její délka,  $s$ , po deformaci? Použijte vzorec (2.31) s metrickým tenso-rem a výsledek ověřte přímým výpočtem.

6. Jak se změní délky úhlopříček desky v Příkladu 3? Postupujte stejně jako v předchozím Cvičení 5.

7. Uvažujme Příklad 3 a dvě elementární úsečky, orientované podél hran desky

$$d\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} dl \\ 0 \end{array} \right\}, \quad d\{Y\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ dh \end{array} \right\}$$

Z Obr. 2.9 je zřejmé, že po deformaci budou tyto úsečky svírat úhel  $\pi/2 - \gamma$ .

(a) Pomocí (2.49) určete hodnotu skalárního součinu  $\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy}$ .

(b) Z (2.28) zjistěte  $d\{x\}$ ,  $d\{y\}$  a vypočtěte normy  $\|\mathbf{dx}\|$ ,  $\|\mathbf{dy}\|$ .

(c) Porovnejte součin těchto norem se skalárním součinem  $\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy}$  a odtud určete velikost úhlu mezi úsečkami  $\mathbf{dx}$  a  $\mathbf{dy}$ . Co musí vyjít?

8. V Příkladu 4 vypočítejte produkt  $[z]^T[z]$  a pomocí vztahů (2.37), (2.39) ukažte

$$[e] = [\epsilon] + \frac{1}{2}[z]^T[z] = [0]$$

Tím je potvrzen výsledek (2.74).

9. Uvažujme 2D úlohu rovinné deformace. Nechť tensor malé deformace  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$  v  $\Omega_0$ . (K takové situaci by např. došlo, kdybychom v lineární mechanice vyšetřovali pohyb volného, silami nezatíženého tělesa.)
- Určete  $u_1(X_1, X_2, t)$  a  $u_2(X_1, X_2, t)$ .
  - V jakém smyslu nalezené řešení odpovídá pohybu tělesa jako tuhého celku?
  - Pro vypočtené pole posunutí určete Greenův-Lagrangeův tensor deformace a ukažte, že  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ .
10. Víme, že existuje pravostranný rozklad deformačního gradientu  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Tento rozklad je jednoznačný. Dokažte

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$$

rovněž jednoznačně.

- Dokažte, že tensory protažení  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  mají stejná vlastní čísla.
- Nechť  $[\phi]$  je modální matice  $[U]$ . Dokažte, že  $[R][\phi]$  je modální matice  $[V]$ .
- Počítejte  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  pro Příklad 2 a Příklad 4.
- Počítejte  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  pro Cvičení 9.
- Dokažte, že  $[U]^{-1}$  a  $[U]^m$ , kde  $m$  je přirozené číslo, jsou isotropní funkce  $[U]$ . Tím je dokázána isotropnost operací, které definují Greenův-Lagrangeův, Biotův a Almansiho tensor deformace.

## 2.2 Eulerův popis

### 2.2.1 Cvičení

- V Příkladu 4 dosadte  $\varphi = \omega t$ .
  - Určete Lagrangeovské a Eulerovské vyjádření složek vektoru rychlosti tak, aby

$$\mathbf{V}(X_i, t) = \mathbf{v}(x_j, t)$$

- Vypočítejte dostředivé zrychlení jako materiálovou derivaci

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{x}$$

- Dokažte, že rychlostní gradient je tensor druhého řádu.
- Dokažte jednoznačnost rozkladu tensoru na symetrickou a antisymetrickou část

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

4. Počítejte  $\dot{\mathbf{e}}$ ,  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{D}$  pro Příklad 1 a zakreslete průběhy funkcí  $\epsilon_{22}(t)$  a  $D_{22}(t)$  do jednoho grafu. Porovnejte výsledky.
5. V Příkladu 3 dosadte  $\tan \gamma = kt$ , počítejte  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}$  a pro tento příklad ukažte

$$\mathbf{W} \neq 0, \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$$

# Kapitola 3

## Zákony zachování

### 3.1 Zákon zachování hmotnosti

#### 3.1.1 Cvičení

1. V Příkladu 1 je jacobíán  $J = 1 + bt$  a rychlostní pole

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ bX_2 + 2ct \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2at \\ b\frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} + 2ct \end{array} \right\}$$

kde  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou reálná čísla.

- (a) Vypočítejte  $\text{div } \mathbf{v}$  a  $\text{Div } \mathbf{v}$ . Proč se výsledky liší?
- (b) Dosadte vypočtenou divergenci do rovnice kontinuity

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0$$

a integrujte s počáteční podmínkou

$$t = 0 : \rho = \rho_0$$

- (c) Získané řešení porovnejte se vzorcem  $J\rho = \rho_0$ .

### 3.2 Zákon zachování hybnosti

#### 3.2.1 Cvičení

1. Dokažte, že Cauchyho napětí je tensor druhého řádu.  
Návod: Dokažte  $[\sigma'] = [A][\sigma][A]^T$ .
2. Zatížení od vlastní tíhy je dáno integrálem:

$$\text{gravitační síla} = \int_V \rho \mathbf{g} \, dV$$

Identifikujte objemové síly  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{B}$ . Jaký to má důsledek pro výpočet odpovídající pravé strany v MKP?

3. Je dán Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

a deformace podle Příkladu 2. Určete 1. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí.

### 3.3 Zákon zachování momentu hybnosti

### 3.4 Zákon zachování energie

#### 3.4.1 Cvičení

1. Uvažujme stacionární děj  $\kappa = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  a  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Předpokládejme platnost Fourierova vztahu

$$\mathbf{h} = -\lambda \text{grad} T, \quad \lambda = \textit{konst.}$$

Ukažte, že rovnice vedení tepla přechází v Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 T = 0$$

2. Je dán Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

a deformace podle Příkladu 2. Určete 2. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí. Porovnejte  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{P}$ .

3. Dokažte, že  $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$  jsou energeticky konjugované tensory, tj.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dV = \int_{V_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV_0$$

### 3.5 Clausiova-Duhemova nerovnost

# Kapitola 4

## Formulace základních úloh

### 4.1 Mechanika pevných látek

#### 4.1.1 Cvičení

1. Prizmatická tyč o průřezu  $A$  a délce  $l$  je osově zatížena silou  $F$ . Materiálové vlastnosti jsou popsány Hookeovým zákonem s Greenovým-Lagrangeovým tensorem deformace.
  - (a) Určete poměr průřezů  $A/A_0$  jako funkci protažení  $\lambda = l/l_0$ .
  - (b) V jakém intervalu se může měnit  $\lambda$ , aby  $J > 0$ ?  
Návod: Položte  $A = 0$ , odkud  $\lambda_{max} = 2.08$  pro  $\nu = 0.3$ .
2. Pro stejný materiál (Cvičení 1) řešte případ prostého smyku (Příklad 3).
  - (a) Určete Cauchyho tensor napětí jako funkci zkosu  $\gamma$ .
  - (b) Najděte aproximaci  $\gamma \rightarrow 0$  a porovnejte s řešením známým z lineární pružnosti.
3. Fourierův zákon vedení tepla má tvar

$$\mathbf{h} = -\lambda \text{grad } T$$

Vyjádřete tento zákon v Lagrangeově popisu, tj. určete  $\mathbf{H}$  jako funkci  $\text{Grad } T$ .

### 4.2 Mechanika tekutin

#### 4.2.1 Cvičení

1. Automobil jedoucí rychlostí 36 km/s narazí do zdi. Odhadněte velikost kontaktního tlaku.

2. Laminární dvourozměrný proud tekutiny v přímém kanále o výšce  $L$  je charakterizován parabolickým rychlostním profilem

$$\begin{aligned}v_1 &= v_0 \left[ 1 - 4 \left( \frac{x_2}{L} \right)^2 \right] \\v_2 &= 0\end{aligned}$$

- (a) Určete charakteristickou rychlost proudu jako

$$V = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} v_1 \, dx_2$$

- (b) Vypočtěte Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

- (c) Určete velikost viskozního členu  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ .

- (d) Určete velikost konvektivního členu  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$ .

# Kapitola 5

## Geometrická struktura konstitutivních vztahů

### 5.1 Objektivní derivace

#### 5.1.1 Cvičení

1. Je dán pravostranný tensor protažení  $\mathbf{U}$  a symetrická část rychlostního gradientu  $\mathbf{D}$ . Dokažte

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

2. Dokažte, že Greenova-Naghdiho derivace je objektivní.

### 5.2 Lagrangeovské tensory deformace

# Příloha A

## Použité operace s maticemi

### A.1 Spektrální rozklad

**Věta:** Necht'  $[U]$  je reálná, symetrická matice řádu  $n$ . Této matici přísluší reálná vlastní čísla  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  a reálné vlastní vektory  $\{\varphi_k\}$ . O nich budeme předpokládat, že jsou ortonormální, tj.  $\{\varphi_i\}^T \{\varphi_j\} = \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol. Vyjádření

$$[U] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \{\varphi_k\} \{\varphi_k\}^T \quad (\text{A.1})$$

nazýváme *spektrálním rozkladem* matice  $[U]$ . Alternativně můžeme psát

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.2})$$

kde jsme zavedli ortonormální modální matici  $[\Phi]$  složenou po sloupcích z vlastních vektorů

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\} \cdots \{\varphi_n\}], \quad [\Phi]^{-1} = [\Phi]^T \quad (\text{A.3})$$

a diagonální matici vlastních čísel

$$[\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n] \quad (\text{A.4})$$

**Důkaz:** Problém vlastních čísel přepíšeme do maticového tvaru. Po sloupcích

$$[U][\Phi] = \left[ \underbrace{[U]\{\varphi_1\}}_{\lambda_1 \{\varphi_1\}} \quad \underbrace{[U]\{\varphi_2\}}_{\lambda_2 \{\varphi_2\}} \quad \underbrace{[U]\{\varphi_3\}}_{\lambda_3 \{\varphi_3\}} \right] = [\Phi][\Lambda] \quad (\text{A.5})$$

Jelikož  $\{\varphi_k\}$  tvoří ortonormální systém, je  $[\Phi]^T[\Phi] = [I]$ , neboli  $[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T$  a z (A.5) ihned plyne  $[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T$ . Zápisy (A.1) a (A.2) jsou ekvivalentní, jak se lze snadno přesvědčit roznásobením maticového výrazu (A.2).

**Poznámka:** Věta o spektrálním rozkladu má především teoretický význam, neboť usnadňuje řadu důkazů a odvození. Z praktického hlediska se snažíme výpočtu vlastních čísel, jako numericky dosti nákladné operaci, spíše vyhnout. Pokud je to přesto nezbytné, dáváme přednost numerickým metodám, zejména *Jacobiho metodě*, viz např. [3]. Pro matice řádu 3 a vyššího je tento postup rychlejší než analytické řešení a pro matice typu  $2 \times 2$  je pracnost srovnatelná.

## A.2 Odmocnina matice

**Věta:** Mějme symetrickou, pozitivně definitní matici  $[C]$ . Potom existuje rovněž symetrická a pozitivně definitní matice  $[U]$  taková, že  $[U][U] = [C]$ . Stručně píšeme

$$[C] = [U]^2, \quad [U] = \sqrt{[C]} \quad (\text{A.6})$$

Výpočet odmocniny je jednoznačný.

**Příklad:** Popsaná operace se snadno aplikuje na diagonální matice.

$$[C] = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [U] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ avšak } [U] \neq \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tento příklad naznačuje, že požadované vlastnosti  $[C]$  jsou nezbytné proto, aby se dala odmocnina vůbec provést, zatímco předpoklady kladené na  $[U]$  zajišťují jednoznačnost výsledku.

**Existence:** Důkaz existence je možno spojit s popisem algoritmu výpočtu.

1. Vypočteme vlastní čísla  $\mu_k$  a vlastní vektory  $\{\varphi_k\}$  matice  $[C]$ .
2. Jelikož  $[C]$  je pozitivně definitní, jsou všechna vlastní čísla kladná a můžeme je odmocnit:  $\lambda_k = \sqrt{\mu_k} > 0$ . Sestrojíme modální matici z vlastních vektorů  $[C]$  a diagonální matici odmocnin vlastních čísel

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\} \cdots \{\varphi_n\}], \quad [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n] \quad (\text{A.7})$$

3. Definujeme

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.8})$$

Takto získaná matice je určena svým spektrálním rozkladem. Z něj vyplývá, že  $[U]$  je symetrická a pozitivně definitní (její vlastní čísla  $\lambda_k > 0$ ). Jelikož

$$[\Lambda]^2 = [\Lambda\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2] = \text{diag}[\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.9})$$

máme pro  $[C]$  spektrální vyjádření

$$[C] = [\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T \quad (\text{A.10})$$

Současně

$$[U]^2 = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T[\Phi][\Lambda][\Phi]^T = [\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T \quad (\text{A.11})$$

Je tedy  $[U]^2 = [C]$ .

**Jednoznačnost:** Označme jako  $[\tilde{U}]$  libovolnou matici splňující podmínky věty o odmocnině. Pro každé vlastní číslo  $\mu$  a odpovídající vlastní vektor  $\{\varphi\}$  matice  $[C]$  je splněno

$$([\tilde{U}] + \sqrt{\mu}[I])([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\} = ([\tilde{U}]^2 - \mu[I])\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{A.12})$$

Označíme-li  $\{x\} = ([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\}$ , musí platit

$$([\tilde{U}] + \sqrt{\mu}[I])\{x\} = \{0\} \quad (\text{A.13})$$

To je možné jedině tehdy, když buďto  $\{x\} = \{0\}$ , anebo  $-\sqrt{\mu}$  je vlastní číslo  $[\tilde{U}]$ . Druhá možnost nepřichází v úvahu, protože pozitivně definitní matice nemůže mít záporné vlastní číslo. Zbývá

$$\{x\} = ([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{A.14})$$

Odtud plyne, že  $\sqrt{\mu}$ ,  $\{\varphi\}$  jsou vlastní číslo a vlastní vektor  $[\tilde{U}]$ . V tom případě však lze matici  $[\tilde{U}]$  vyjádřit pomocí spektrálního rozkladu ve tvaru (A.8), takže  $[\tilde{U}] = [U]$ . Tento elegantní důkaz byl předložen Stephensonem [13].

### A.3 Umocňování matic

**Definice:** Nechť  $[U]$  je reálná symetrická matice, se spektrálním rozkladem

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.15})$$

Nechť  $m$  je reálné číslo. Symbolem  $[U]^m$  rozumíme matici definovanou jako

$$[U]^m := [\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T \quad (\text{A.16})$$

kde

$$[\Lambda]^m := \text{diag}[\lambda_1^m \ \lambda_2^m \ \lambda_3^m] \quad (\text{A.17})$$

Matici  $[U]^m$  nazýváme  $m$ -tou mocninou  $[U]$  nebo také mocninou  $[U]$  na exponent  $m$ .

**Poznámka:** Nově zavedená definice musí být kompatibilní s obvyklými pojmy. Prověříme proto některé speciální případy. Nechť  $m$  je číslo přirozené. Potom

$$[U]^m = \underbrace{[U][U] \cdots [U]}_{m \times} \quad (\text{A.18})$$

Dosažením spektrálního rozkladu a využitím toho, že modální matice je ortonormální, takže se všechny vnitřní matice  $[\Phi]$  vykrátí, dostaneme

$$[U]^m = [\Phi][\Lambda][\Lambda] \cdots [\Lambda][\Phi]^T = [\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T \quad (\text{A.19})$$

což je kompatibilní s definicí (A.16). Pro inverzi matice platí

$$[U]^{-1} = ([\Phi][\Lambda][\Phi]^T)^{-1} = [\Phi][\Lambda]^{-1}[\Phi]^T \quad (\text{A.20})$$

ale inverze diagonální matice dává

$$[\Lambda]^{-1} = \text{diag}[\lambda_1^{-1} \ \lambda_2^{-1} \ \lambda_3^{-1}] \quad (\text{A.21})$$

a to je opět v souladu s (A.16) při  $m = -1$ . Podobným způsobem se přesvědčíme, že  $[U]^0 = [I]$  a  $[C]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[C]}$  jsou další speciální případy. Poznamenejme, že pro vysoká celá čísla  $m$  může být spektrální metoda umocňování podstatně rychlejší než přímý výpočet podle (A.18).

## A.4 Isotropní funkce

**Definice:** Necht  $[U]$  a  $[E]$  jsou reálné matice. Necht  $f$  je funkce přiřazující  $[U] \mapsto [E]$ . O funkci  $f$  řekneme, že je isotropní právě tehdy, když platí

$$f([Q][U][Q]^T) = [Q]f([U])[Q]^T = [Q][E][Q]^T \quad (\text{A.22})$$

pro každou ortonormální matici  $[Q]$ .

Isotropní funkce jsou např.  $[U]^{-1}$  a  $\sqrt{[U]}$ . V předchozí sekci A.3 jsme definovali obecnou mocninu symetrické matice na reálný exponent. Dokážeme, že tato operace je isotropní a výše zmíněné funkce (inverze a odmocnina) se dají chápat jako její speciální případy. Pro symetrickou matici  $[U]$  máme k dispozici spektrální rozklad

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.23})$$

takže  $[Q][\Phi]$  bude modální matice produktu  $[Q][U][Q]^T = [Q][\Phi][\Lambda][\Phi]^T[Q]^T$ . Z definice (A.16) potom ihned plyne

$$([Q][U][Q]^T)^m = [Q][\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T[Q]^T = [Q][U]^m[Q]^T \quad (\text{A.24})$$

Přímé důkazy isotropnosti některých jednoduchých funkcí, bez omezení na symetrické operátory, jsou ponechány jako cvičení na konci Sekce 2.1.

Vraťme se ještě ke spektrálnímu rozkladu (A.23). Vzhledem k tomu, že modální matice je vždy ortonormální, musí platit

$$f([U]) = [\Phi]f([\Lambda])[\Phi]^T \quad (\text{A.25})$$

Pro symetrické matice nám to umožňuje zavést celou třídu isotropních funkcí generovanou obyčejnými funkcemi jedné proměnné (např. sinus) jako

$$f([\Lambda]) := \text{diag}[f(\lambda_1) \ f(\lambda_2) \ f(\lambda_3)] \quad (\text{A.26})$$

Do této kategorie spadá například Henkyho tensor deformace, definovaný v části 2.1.5 s  $f(\cdot) := \ln(\cdot)$ . Dále je zajímavé poznamenat, že isotropní funkce aplikovaná na diagonální matici dává zase diagonální matici – o tom pojednává následující věta. V důsledku toho představuje výraz (A.25) spektrální rozklad a matice  $[U]$  a  $f([U])$  mají shodné vlastní vektory  $[\Phi]$ . V kontextu tensorového počtu to znamená, že isotropní funkce zachovává hlavní osy tensoru, přičemž příslušné složkové matice se diagonalizují ve stejné bázi.

**Věta:** Necht  $[\Lambda]$  je diagonální matice a  $f$  isotropní funkce. Matice  $f([\Lambda])$  je rovněž diagonální.

**Důkaz:** Myšlenka je převzata z Gurtinovy knihy [6]. Diagonální matice  $[\Lambda]$  má jednotkové vlastní vektory. Označme jako  $\{\psi\}$  první z nich, tedy

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Zvolme ortonormální matici  $[Q]$  tímto způsobem

$$[Q] = \text{diag}[-1 \ 1 \ 1] \quad \Rightarrow \quad [Q]\{\psi\} = -\{\psi\} \quad (\text{A.28})$$

Protože  $f$  je isotropní funkce, bude

$$[Q]f([\Lambda])[Q]^T = f([Q][\Lambda][Q]^T) = f([\Lambda]) \quad (\text{A.29})$$

Tuto rovnici vynásobíme zprava vektorem  $[Q]\{\psi\}$  a s využitím (A.28) dostaneme

$$[Q]f([\Lambda])\{\psi\} = f([\Lambda])[Q]\{\psi\} = -f([\Lambda])\{\psi\} \quad (\text{A.30})$$

Vektor  $f([\Lambda])\{\psi\}$  označme jako  $\{v\}$ . Poslední rovnice přejde do tvaru  $[Q]\{v\} = -\{v\}$  anebo ve složkách

$$[Q]\{v\} = \begin{Bmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{Bmatrix} = -\{v\} \quad (\text{A.31})$$

Řešením je  $v_2 = v_3 = 0$ , a tudíž

$$f([\Lambda])\{\psi\} = \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = v_1\{\psi\} \quad (\text{A.32})$$

Vidíme, že  $\{\psi\}$  je vlastní vektor nejen  $[\Lambda]$ , ale také  $f([\Lambda])$ . Stejným způsobem zpracujeme i zbývající dva vlastní vektory,  $\{0 \ 1 \ 0\}^T$  a  $\{0 \ 0 \ 1\}^T$ , takže  $f([\Lambda])$  je diagonální matice.

# Příloha B

## Vzorové příklady

V této příloze jsou přehledně uvedeny čtyři vzorové příklady, které byly podrobně rozebírány v předchozím textu a které jsou mnohdy potřebné pro vypracování cvičení. Komentáře k příkladům jsou na tomto místě omezeny na minimum.

### B.1 Příklad 1: zobrazení oblasti

Je dáno zobrazení  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$  pomocí transformace souřadnic

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + at^2 \\ x_2 &= X_2 + bX_2t + ct^2 \end{aligned} \right\} a, b, c \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

V čase  $t = 0$  je  $x_1 = X_1$  a  $x_2 = X_2$ . Inverzní zobrazení

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - at^2 \\ X_2 &= \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Podmínka řešitelnosti

$$1 + bt > 0 \quad (\text{B.3})$$

omezuje, v případě  $b < 0$ , časový interval na  $t \in [0, 1/|b|)$ . Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + bt \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

jeho inverze

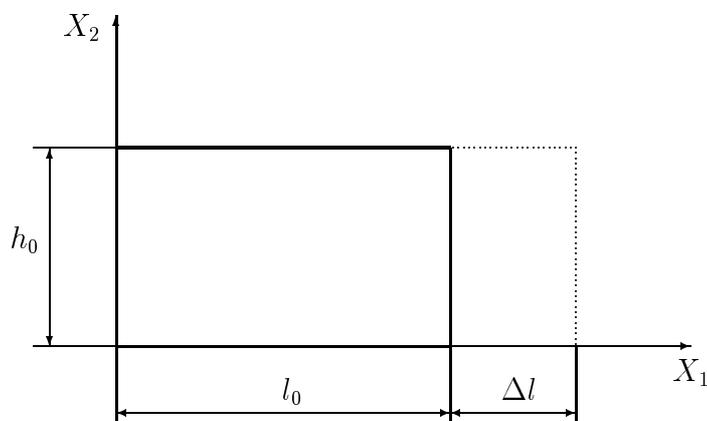
$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + bt} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

a jacobíán

$$J = 1 + bt \quad (\text{B.6})$$

Matici  $[F]^{-1}$  lze počítat jak inverzí (B.4), tak derivováním (B.2).

## B.2 Příklad 2: jednoosá deformace



$$u_1(X_1, X_2) = \frac{\Delta l}{l_0} X_1$$

$$u_2(X_1, X_2) = 0$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Jacobián

$$J = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} > 0 \quad (\text{B.9})$$

odpovídá poměru objemů. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

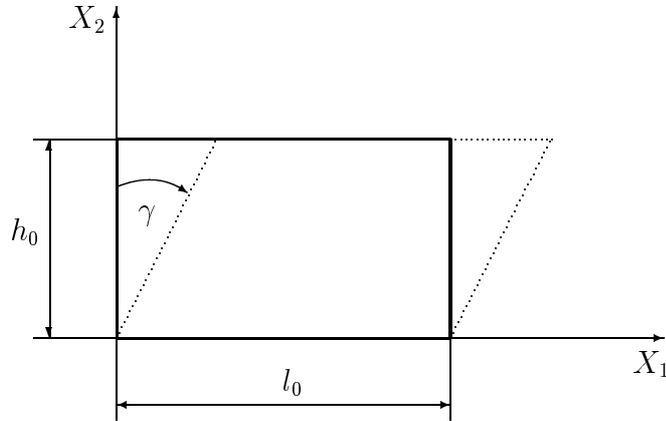
Greenův-Lagrangeův tensor

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Polární rozklad  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

### B.3 Příklad 3: prostý smyk



$$u_1(X_1, X_2) = X_2 \tan \gamma$$

$$u_2(X_1, X_2) = 0$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Jacobián

$$J = 1 \quad (\text{B.15})$$

Deformace je isochorická. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Greenův-Lagrangeův tensor

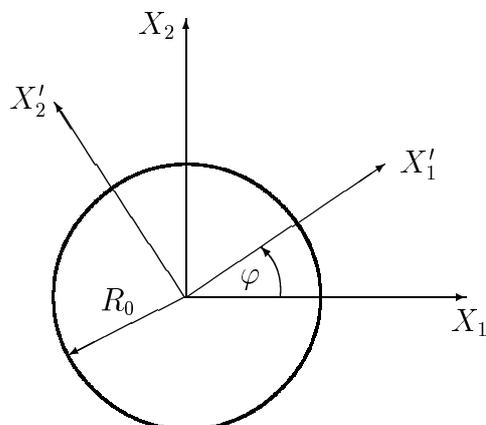
$$[e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & \tan^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Polární rozklad  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} [F] &= \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ -\beta & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 + \beta^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 + \beta^2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ -\beta & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

kde  $\beta = \tan \gamma$ .

## B.4 Příklad 4: rotace



$$u_1(X_1, X_2) = X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi$$

$$u_2(X_1, X_2) = X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1)$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Jacobián

$$J = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (\text{B.21})$$

Pohyb je isochorický. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Greenův-Lagrangeův tensor

$$2[e] = [F]^T[F] - [I] = [0] \quad (\text{B.23})$$

Polární rozklad  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

# Literatura

- [1] Anand, L.: On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations. *ASME J. Appl. Mech.*, **46**, pp. 78–82, 1979.
- [2] Anand, L.: Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **34**, pp. 293–304, 1986.
- [3] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey 1996.
- [4] Hencky, H.: The elastic behavior of vulcanized rubber. *J. Appl. Mech.*, **1**, No. 2, pp. 45–53, 1933.
- [5] Chandrasekharaiah, D.S., Lokenath Debnath: *Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego 1994.
- [6] Gurtin, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego 1981.
- [7] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, Berlin 2000.
- [8] Holzapfel, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineers*. Wiley, Chichester 2000.
- [9] Kvasnica, J.: *Termodynamika*. SNTL, Praha 1965.
- [10] Lee, E.H., Liu, D.T.: Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *J. Appl. Phys.*, **38**, No. 1, pp. 19–27, 1967.
- [11] Ogden, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, Inc., New York 1997.
- [12] Plešek, J., Kruisová, A.: Formulation, validation and numerical procedures for Hencky's elasticity model. *Comput. Struct.*, **84**, pp. 1141–1150, 2006.
- [13] Stephenson, R.: On the uniqueness of the square root of a symmetric positive-definite tensor. *J. Elasticity*, **20**, pp. 213–214, 1980.