Preprint, Institute of Mathematics, AS CR, Prague. 2007-12-27

О нелинейной задаче периодического типа для систем функционально дифференциальных уравнений

С. Мухигулашвили

7.11.2007

Аннотация

В работе доказаны в некотором смысле оптимальные достаточные условия существования решения для задачи

$$u'(t) = F(u)(t), \quad |u(0) - u(\omega)| \le \zeta(||u||_C)$$

где $F : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ непрерывный оператор, $\zeta : R_+ \to R_+^n$ непрерывная функция, $I = [0, \omega]$ и $\omega > 0$.

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K13
Key words and phrases: Нелинейные функционально дифференциальные системы, задача периодического типа, разрешимость.

1 Формулировка основных результатов

1.1 Постановка задачи.

Пусть $n \in N$, $I-$ некоторый отрезок вещественной оси, $F : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$ непрерывный оператор, $\zeta : R_+ \to R_+^n$ непрерывная функция и рассмотрим систему функционально дифференциальных уравнение

$$u'(t) = F(u)(t) \tag{1.1}$$

1.1

при следующем нелинейном краевом условии

$$|u(0) - u(\omega)| \le \zeta(||u||_C). \tag{1.2}$$

1.2

Так же будем предполагать, что $F = (f_i)_{i=1}^n$ где $f_i : C(I; R^n) \to L(I; R)$ непрерывные операторы.

Под решением уравнения (1.1) мы понимаем абсолютно непрерывную вектор функцию $v : I \to R^n$, которая почти всюду на I удовлетворяет (1.1), а под решением задачи (1.1), (1.2)- решение уравнения (1.1) удовлетворяющее условию (1.2).

В предлагаемой статье доказаны теоремы существования решения задачи (1.1), (1.2) на основе теорем типа Конти-Опяля полученных в работе [3] и метода изучения периодических задач для систем линейных функционально дифференциальных уравнений предложенного в работах [6], [7].

1.2 Основние обозначения и определения

На протяжении всей статьи используются обозначения: N-множество натуральных чисел; $R =]-\infty, +\infty[$, $R_+ = [0, +\infty[$, R^n- пространство $n-$ мерных векторов столбцов $x = (x_i)_{i=1}^n$ с компонентами $x_i \in R$ $(i = \overline{1, n})$ и нормой $||x|| = \sum_{i=1}^n |x_i|$; $R_+^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in R^n : x_i \in R_+,\ i = \overline{1, n}\}$; если $x, y \in R^n$ то $x \le y \Leftrightarrow y - x \in R_+^n$; если $x = (x_i)_{i=1}^n \in R^n$ то $|x| = (|x_i|)_{i=1}^n$; $C(I; R^n)-$ пространство непрерывных векторных $x : I \to R^n$ функций с нормой $||x||_C = \max_{t \in I}\{||x(t)||\}$, если $x = (x_i)_{i=1}^n \in C(I; R^n)$ то $|x|_C = (||x_i||_C)_{i=1}^n$; $L(I; R^n)-$ пространство суммируемых векторных функций $x : I \to R^n$ с нормой $||x||_L = \int_0^\omega ||x(s)||ds$;

def1.1 **Определение 1.1.** Скажем что линейны оператор $\ell : C(I;R^m) \to L(I;R^n)$ $m,n \in N$ является неотрицательным (неположительным) если для любого $x \in C(I;R^m_+)$ соблюдается неравенство $\ell(x)(t) \geq 0$ $(\ell(x)(t) \leq 0)$ при $t \in I$. Скажем что линейны оператор монотонный если он неотрицательный или неположительный.

def1.3 **Определение 1.2.** Скажем что функция $\delta : I \times R_+ \to R^n_+$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_I$ если почти всюду на I функция $\delta(t,\cdot) : R_+ \to R^n_+$ не убывает по второму аргументу и $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho}\int_0^\omega ||\delta(s,\rho)||_C ds = 0$.

def1.3 **Определение 1.3.** Скажем что функция $\zeta : R_+ \to R^n_+$ принадлежит множеству $\mathcal{N}_I$ если она не убывает $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho}||\zeta(\rho)||_C = 0$.

Рассмотрим на I систему линейных дифференциальных неравенств

$$|v'(t) - g_0(v)(t)| \leq h(|v|)(t), \tag{1.3}$$ 1.4

с периодическим краевым условием

$$v(0) = v(\omega). \tag{1.4}$$ 1.5

def1.3 **Определение 1.4.** Скажем что $(p,q,h) \in Q_\omega$, если :

(i) $p,q,h : C(I;R^n) \to L(I;R^n)$ неотрицательные линейные операторы;

(ii) Для любого линейного оператора $g_0 = (g_{0,i})^n_{i=1}$ где $g_{0,i} : C(I;R^n) \to L(I;R)$ $(i = \overline{1,n})$ линейные монотонные операторы, который удовлетворяет неравенствам

$$p(|y|)(t) \leq |g_0(|y|)(t)| \leq q(|y|)(t) \quad \text{при} \quad t \in I, \ \ y \in C(I;R^n) \tag{1.5}$$ 1.6

задача (1.3), (1.4) имеет только тривиальное решение.

1.3 Теоремы существования

theo2.1 **Теорема 1.1.** *Пусть для любых $x,y \in C(I;R^n)$ почти всюду на I соблюдаются неравенства*

$$|F(x)(t) - g(x,x)(t)| \leq h(|x|)(t) + \delta(t, ||x||_C), \tag{1.6}$$ 1.10

$$p(|y|)(t) \leq |g(x,|y|)(t)| \leq q(|y|)(t), \tag{1.7}$$ 1.11

где

$$(p,q,h) \in Q_\omega, \tag{1.8}$$ 1.12

$\delta \in \mathcal{M}_I$, $\zeta \in \mathcal{N}_I$, $g \equiv (g_i)^n_{i=1} : C(I;R^n) \times C(I;R^n) \to L(I;R^n)$ *непрерывный оператор и* $g_i(x,\cdot) : C(I;R^n) \to L(I;R)$ $(i = \overline{1,n})$ *линейные монотонные операторы для любой фиксированной* $x \in C(I;R^n)$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *разрешима.*

Теперь рассмотрим случай когда условия (1.6), (1.7) принимают вид

$$|f_i(x)(t) - g_i(x, x_{i+1})(t)| \leq \sum_{j=2}^{i+1} h_{i,j}(|x_j|)(t) + \delta_i(t, ||x||_C) \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1.9}$$ 1.14

$$h_{i,i+1}(|y|)(t) \leq |g_i(x,|y|)(t)| \leq q_i(|y|)(t), \tag{1.10}$$ 1.15

где $x = (x_i)^n_{i=1} \in C(I;R^n)$, $y \in C(I;R)$, $\delta = (\delta_i)^n_{i=1} \in \mathcal{M}_I$, $h_{n,n+1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} h_{n,1}$ $x_{n+1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} x_1$ и $h_{i,j}, q_i : C(I;R) \to L(I;R)$ $(i,j = \overline{1,n})$ неотрицательные линейные операторы. С этой целью определим матрицу $A_1 = (a^{(1)}_{i,j})^n_{i,j=1}$ равенствами

$$a^{(1)}_{1,1} = -1, \ \ a^{(1)}_{n,1} = ||h_{n,1}|| + ||q_n||/4, \ \ a^{(1)}_{i,1} = 0 \ \text{ при } \ 2 \leq i \leq n-1,$$

$$a^{(1)}_{i+1,i+1} = ||h_{i+1,i+1}|| - 1, \ \ a^{(1)}_{i,i+1} = ||h_{i,i+1}|| + ||q_i||/4 \ \text{ при } \ 1 \leq i \leq n-1, \tag{1.11}$$ 1.7

$$a^{(1)}_{i,j} = 0 \ \text{ при } \ i+2 \leq j \leq n, \ \ a^{(1)}_{i,j} = ||h_{i,j}|| \ \text{ при } \ 3 \leq j+1 \leq i \leq n,$$

а матрицы $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{i,j=1}^n$, $(k=\overline{2,n})$ следующим способом: $A_2 = A_1$,

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} \quad \text{при} \quad i \le k \quad \text{или} \quad j \notin \{k, k+1\}, \tag{1.12}$$ 1.8

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} + a_{k,j}^{(k)} a_{i,k}^{(k)} / |a_{k,k}^{(k)}| \quad \text{при} \quad k+1 \le i \le n, \quad k \le j \le k+1. \tag{1.13}$$ 1.9

Тогда справедливо следующее предложение

cor1.1 **Следствие 1.1.** *Пусть соблюдаются условия* (1.9), (1.10) *и*

$$mes\{t \in I : h_{i,i+1}(1)(t) < |g_i(x,1)(t)|\} > 0, \tag{1.14}$$ 1.16

где $\delta = (\delta_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_I$. *Пусть так же матрицы* A_k *определены равенствами* (1.11)-(1.13) *и справедливы неравенства*

$$a_{k,k}^{(k)} < 0 \ \ (k = \overline{2,n}), \tag{1.15}$$ 1.17

$$\prod_{j=1}^n \int_0^\omega (4h_{j,j+1}(1)(s) + q_j(1)(s))ds < 4^n \prod_{j=2}^n |a_{j,j}^{(j)}| \tag{1.16}$$ 1.18

и $\zeta \in \mathcal{N}_I$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *разрешима.*

В качестве примера рассмотрим систему

$$u_i'(t) = p_{i,i}(u_1,...,u_n)(t)u_i(\tau_{i,i}(t)) + p_{i,i+1}(u_1,...,u_n)(t)u_{i+1}(\tau_{i,i+1}(t)) + p_{i,0}(t), \quad (i=\overline{1,n}) \tag{1.17}$$ 1.19

где $u_{n+1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} u_1$, $\tau_{n,n+1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \tau_{n,1}$, $p_{n,n+1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} p_{n,1}$, $p_{i,0}, p_{i,i}, p_{i,i+1} : (C(I;R))^n \to L(I,R)$ непрерывные операторы, $p_{i,0} \in L(I;R)$ и $\tau_{i,i}, \tau_{i,i+1} : [0,\omega] \to [0,\omega]$ измеримые функцыи при $i = \overline{1,n}$. Тогда справедливо

cor1.2 **Следствие 1.2.** *Пусть существуют функции* $h_{i,i}, q_{i,0} \in L(I;R)$ $(i=\overline{1,n})$ *такие что для любой* $x = (x_i)_{i=1}^n \in C(I;R^n)$, *почти всюду на отрезке* I *соблюдаются условия*

$$h_{1,1} \equiv 0, \ \ |p_{i,i}(x_1,...,x_n)(t)| \le h_{i,i}(t), \ \ 0 < |p_{i,i+1}(x_1,...,x_n)(t)| \le q_{i,0}(t) \ \ (i=\overline{1,n}). \tag{1.18}$$ 1.20

Пусть так же справедливы неравенства

$$\int_0^\omega h_{i,i}(s)ds < 1 \ \ (i=\overline{2,n}), \tag{1.19}$$ 1.21

$$\prod_{i=1}^n \int_0^\omega q_{i,0}(s)ds < 4^n \prod_{i=2}^n \Big(1 - \int_0^\omega h_{i,i}(s)ds\Big). \tag{1.20}$$ 1.22

Тогда задача (1.17), (1.2) *разрешима.*

В качестве другого примера рассмотрим задачу

$$u''(t) = p(u,u')(t)u(\tau(t)) + p_0(t), \quad u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega) \ \ (i=1,2). \tag{1.21}$$ 1.23

где $p : C(I;R) \times C(I;R) \to L(I,R)$ непрерый оператор, $p_0 \in L(I,R)$ и $\tau : [0,\omega] \to [0,\omega]$ измеримая функция. Тогда справедливо

cor1.3 **Следствие 1.3.** *Пусть существует функция* $q \in L(I;R)$ *такая, что для любой* $x = (x_1,x_2) \in C(I;R^2)$, *почти всюду на отрезке* I *соблюдается условие* $0 < |p_1(x_1,x_2)(t)| \le q(t)$ *и*

$$\int_0^\omega q(s)ds < \frac{16}{\omega}. \tag{1.22}$$ 1.24

Тогда задача (1.21) *разрешима.*

rem1.1 **Замечание 1.1.** Как видно из работы [7], если $p(x_1,x_2)(t) \equiv q(t)$ то условие (1.22) гарантирует разрешимость задачи (1.21) и является оптимальным в том смысле что его невозможно заменить условием $\int_0^\omega q(s)ds < 16/\omega + \varepsilon$ не для какого $\varepsilon > 0$. Следовательно условие (1.16) также оптимально в упомянутом смысле.

2 Вспомогательные предложения

lemm 2.1 **Лемма 2.1.** *Пусть матрицы* A_k $(k=\overline{1,n})$ *определены отношениями* (1.11)-(1.13). *Тогда справедливы неравенства*

$$a_{i,j}^{(m)} \geq 0 \qquad \textit{при} \quad i \neq j, \;\; m=\overline{1,n}, \tag{2.1_m}$$ 2.1-m

$$a_{n,1}^{(n)} = a_{n,1}^{(1)}, \tag{2.2_0}$$ 2.2-0

$$a_{i,j}^{(\lambda)} \leq a_{i,j}^{(m)} \qquad \textit{при} \quad i \geq m \geq 2, \;\; j \geq m, \;\; \lambda \leq m. \tag{2.2_m}$$ 2.2-m

Доказательство. Из определения матриц $A_1,\ A_2$ сразу следуют (2.1_1) и (2.2_2). Допустим (2.1_m) соблюдается при $m=3,..,m_0$ $(m_0<n)$ и докажем справедливость (2.1_{m_0+1}). Если $i \leq m_0$ или $j \notin \{m_0,\ m_0+1\}$, из (1.12) сразу следует (2.1_{m_0+1}), а в случае $i \geq m_0+1,\ \ j \in \{m_0,\ m_0+1\}$, неравенство (2.1_{m_0+1}) вытекает из (1.13). Теперь докажем справедливость (2.2_m). Допустим $j \geq m+1$. Тогда из (1.12) ясно

$$a_{i,j}^{(\lambda)} = a_{i,j}^{(\lambda+1)} = ... = a_{i,j}^{(m)} \qquad \text{при} \quad j \geq m+1,\ i \geq m,\ \lambda \leq m. \tag{2.3}$$ 2.3

Пусть теперь $j=m$. Тогда из (1.12) получим $a_{i,m}^{(\lambda)} = a_{i,m}^{(\lambda+1)} = ... = a_{i,m}^{(m-1)}$ при $\lambda \leq m \leq i$. отсюда и из (2.1_m), (1.13) следует $a_{i,m}^{(m)} = a_{i,m}^{(m-1)} + \frac{a_{m-1,m}^{(m-1)} a_{i,m-1}^{(m-1)}}{|a_{m-1,m-1}^{(m-1)}|} \geq a_{i,m}^{(m-1)} = a_{i,m}^{(\lambda)}$ при $i \geq m,\ \lambda \leq m$, что вместе с (2.3) доказывает (2.1_m) при $j \geq m,\ i \geq m$. □

Далее нам понадобится следующее тривиальное предложение, доказательство которого можно найти в работе [6].

lemm 2.2 **Лемма 2.2.** *Пусть* $\sigma \in \{-1,1\}$ *и* $\sigma\ell : C(I;R) \to L(I;R)$ *неотрицательный линеиный оператор и* $m=-\min_{t\in I}\{x(t)\},\ M=\max_{t\in I}\{x(t)\}$. *Тогда*

$$-m|\ell(1)(t)| \leq \sigma\ell(x)(t) \leq M|\ell(1)(t)| \quad \textit{при} \quad t \in I, \;\; x \in C(I;R).$$

lemm 2.3 **Лемма 2.3.** *Пусть неотрицательный* $\ell_1 : C(I;R) \to L(I;R)$ *и монотонный* $\ell_2 : C(I;R) \to L(I;R)$ *линейные операторы таковы, что*

$$\ell_1(|x|)(t) \leq |\ell_2(|x|)(t)| \quad \textit{при} \quad t \in I, \;\; x \in C(I;R), \tag{2.4}$$ 2.4

и $mes\{t \in I : \ell_1(1)(t) < |\ell_2(1)(t)|\} > 0$. *Тогда для любой* $x \in C(I;R)$, *такой что* $|x(t)| > 0$ *имеем* $mes\{t \in I : \ell_1(|x|)(t) < |\ell_2(x)(t)|\} > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \min_{t\in I}\{|x(t)|\},\ \ y(t) = x(t) - \alpha$ и число $\sigma \in \{-1,1\}$ определено равенством $\sigma\ell_2(1)(t) \geq 0$. Тогда в силу монотонности операторов $\ell_1,\ \ell_2$ и условия (2.4) имеем $0 \leq |\ell_2(|y|)(t)| - \ell_1(|y|)(t) = \sigma\ell_2(|x|)(t) - \ell_1(|x|)(t) - \alpha(\sigma\ell_2(1)(t) - \ell_1(1)(t))$. Откуда в силу того что $mes\{t \in I : \ell_1(1)(t) < |\ell_2(1)(t)|\} > 0$. следует справедливость леммы. □

Рассмотрим систему линейных дифференциальных неравенств

$$|v_i'(t) - g_{0,i}(v_{i+1})(t)| \leq \sum_{j=2}^{i+1} h_{i,j}(|v_j|)(t) \;\; (i=\overline{1,n}), \tag{2.5_i}$$ 2.5-i

$$v_i(0) = v_i(\omega) \;\; (i=\overline{1,n}), \tag{2.6}$$ 2.6

при условии, что $h_{n,n+1} \overset{\text{def}}{\equiv} h_{n,1}$ и $v_{n+1} \overset{\text{def}}{\equiv} v_1$. Определим линейные операторы $I_i : C(I;R^n) \to C(I;R)$ равенствами $I_i(x)(t) = x_i(t)$, функционалы $\Delta_i : C(I;R^n) \to R_+$ равенствами $\Delta_i(x) = \max_{t\in I}\{x_i(t)\} - \min_{t\in I}\{x_i(t)\}$ $(i=\overline{1,n})$ если $x=(x_i)_{i=1}^n$ и введём обозначения,

$$p = (h_{i,i+1} \circ I_i)_{i=1}^n, \;\; q = (q_i \circ I_i)_{i=1}^n, \;\; g_0 = (g_{0,i} \circ I_i)_{i=1}^n, \;\; h = (\sum_{j=2}^{i+1} h_{i,j} \circ I_j)_{i=1}^n. \tag{2.7}$$ 2.7

lemm 2.4 **Лемма 2.4.** *Пусть линейные монотонные* $g_{0,i} : C(I;R) \to L(I;R)$ *и неотрицательные* $p_i, q_i, h_{i,j} : C(I;R) \to L(I;R)$ $(i,j = \overline{1,n})$ *операторы удовлетворяют условиям*

$$h_{i,i+1}(|x|)(t)| \le |g_{0,i}(|x|)(t)| \le q_i(|x|)(t) \quad \textit{при} \quad t \in I, \ \ x \in C(I;R), \tag{2.8}$$ 2.8

$$mes\{t \in I : h_{i,i+1}(1)(t) < |g_{0,i}(1)(t)|\} > 0 \tag{2.9}$$ 2.9

при $i = \overline{1,n}$. *Пусть также матрицы* A_k *определены равенствами* (1.11)-(1.13) *и соблюдаются неравенства* (1.15) *и* (1.16). *Тогда справедливо включение* (1.8).

Доказательство. Ясно, что включение (1.8) будет соблюдаться если задача $((2.5_i))_{i=1}^n$, (2.6) имеет только нулевое решение. Допустим противное, что $v = (v_i)_{i=1}^n$ ненулевое решение задачи $((2.5_i))_{i=1}^n$, (2.6). Пусть теперь

$$k_0 = \min\{k \in \{2,...,n\} : v_k \not\equiv 0\}, \tag{2.10}$$ 2.10

и докажем неравенства

$$0 < ||v_k||_C \le \Delta_k(v) \qquad \text{при} \quad k = 1, \ \ k_0 \le k \le n, \tag{2.11_k}$$ 2.11-k

$$0 \le a^{(k)}_{k,k}\Delta_k(v) + a^{(k)}_{k,k+1}\Delta_{k+1}(v) \qquad \text{при} \quad k_0 \le k \le n, \tag{2.12_k}$$ 2.12-k

где $a^{(1)}_{n,n+1} \overset{\text{def}}{\equiv} a^{(1)}_{n,1}$ и $\Delta_{n+1} \overset{\text{def}}{\equiv} \Delta_1$.

Определим числа $M_k, m_k \in R, \ t'_k, t''_k \in I$ равенствами

$$M_k = v_k(t'_k) = \max_{t\in I}\{v_k(t)\}, \quad -m_k = v_k(t''_k) = \min_{t\in I}\{v_k(t)\}. \tag{2.13_k}$$ 2.13-k

Если $t'_k < t''_k$, пусть $I^{(1)}_k \overset{\text{def}}{\equiv} [t'_k, \ t''_k]$, $I^{(2)}_k \overset{\text{def}}{\equiv} I \setminus I^{(1)}_k$. Из (2.10) ясно что

$$v_{k_0} \not\equiv 0. \tag{2.14}$$ 2.14

Из (2.5_{k_0-1}) с помощью (2.10) получим $|g_{0,k_0-1}(v_{k_0})(t)| \le h_{k_0-1,k_0}(|v_{k_0}|)(t)$. Допустив что $|v_{k_0}(t)| > 0$ в виду (2.8) и (2.9) из Леммы 2.3 при $\ell_1 = h_{k_0-1,k_0}, \ \ell_2 = g_{0,k_0-1}$ следует $mes\{t \in I : h_{k_0-1,k_0}(|v_{k_0}|)(t) < |g_{0,k_0-1}(v_{k_0})(t)|\} > 0$. Что и противоречит с предыдущим неравенством, т.е., существует $t_0 \in I$ такое что $v_{k_0}(t_0) = 0$. Отсюда в силу (2.14) вытекает справедливость (2.11_{k_0}).

В виду обозначений (2.13_{k_0}), при $t'_{k_0} < t''_{k_0}$ (при $t''_{k_0} < t'_{k_0}$ рассуждения аналогичны), интегрируя (2.5_{k_0}) на $I^{(r)}_{k_0}$ с учётом (1.11), (1.15), (2.6), (2.10), (2.11_{k_0}) и (2.2_{k_0}) при $\lambda = 1, \ i = j = k_0$ получим

$$0 < -a^{(k_0)}_{k_0,k_0}\Delta_{k_0}(v) \le B_{r,k_0} \tag{2.15_r}$$ 2.15-r

при $r = 1, 2$, если $B_{r,k} = \int_{I^{(r)}_k}(h_{k,k+1}(|v_{k+1}|)(s)ds + (-1)^{r+1}g_{0,k}(v_{k+1})(s))ds$. Пусть g_{0,k_0} неотрицательный оператор и допустим что $v_{k_0+1}(t)$ знакопостоянна. Тогда если $(-1)^r v_{k_0+1}(t) \ge 0$, то неравенство (2.15_r) противоречит с (2.8). Значит наше допущение неверно и v_{k_0+1} знакопеременна, т.е соблюдается неравенство (2.11_{k_0+1}) ((2.11_1) при $k_0 = n$) а также в виду обозначении (2.13_{k_0+1}), $M_{k_0+1} > 0$, $m_{k_0+1} > 0$. В таком случае из (2.15_r) в силу Леммы 2.2 и условия (2.8) получим $-a^{(k_0)}_{k_0,k_0}\Delta_{k_0}(v) - ||h_{k_0,k_0+1}||\Delta_{k_0+1}(v) \le M_{k_0+1}\int_{I^{(1)}_{k_0}} q_{k_0}(1)(s)ds$ и $-a^{(k_0)}_{k_0,k_0}\Delta_{k_0}(v) - ||h_{k_0,k_0+1}||\Delta_{k_0+1}(v) \le m_{k_0+1} \times$ $\times \int_{I^{(2)}_{k_0}} q_{k_0}(1)(s)ds$. Если левая сторона этих неравенств неотрицательна, перемножив их с учётом известного числового неравенства $4AB \le (A+B)^2$, в виду (1.11) получим $0 \le a^{(k_0)}_{k_0,k_0}\Delta_{k_0}(v) + a^{(1)}_{k_0,k_0+1}\Delta_{k_0+1}(v)$ (если левая сторона этих неравенств отрицательна, то это неравенство тем более справедливо), откуда с учётом (2.2_0) при $k_0 = n$ и (2.2_{k_0}) при $\lambda = 1, \ i = k_0, \ j = k_0+1, \ k_0 < n$, следует (2.12_{k_0}). Аналогично из (2.15_r) получим (2.11_{k_0+1}) ((2.11_1) при $k_0 = n$) и (2.12_{k_0}) и в случае неположительности оператора g_{0,k_0}. Итак мы доказали предложение:

i. При $2 \le k_0 \le n$ справедливы неравенства $(2.11_{k_0}), (2.11_{k_0+1})$ ((2.11_1) при $k_0 = n$) и (2.12_{k_0}).

Докажем теперь следующее предложение: ii. Пусть $k_1 \in \{k_0, ..., n-1\}$ такое, что соблюдаются (2.11_k),(2.12_k) при $k = \overline{k_0, k_1}$, и (2.11_{k_1+1}). Тогда также будут соблюдены неравенства (2.11_{k_1+2}) при $k_1 \le n-2$, (2.11_1) при $k_1 = n-1$ и (2.12_{k_1+1}).

В виду обозначений (2.13_{k_1+1}), при $t'_{k_1+1} < t''_{k_1+1}$ (при $t''_{k_1+1} < t'_{k_1+1}$ рассуждения аналогичны), интегрируя (2.5_{k_1+1}) на $I^{(r)}_{k_1+1}$ с учётом (2.6) и (2.10) получим $\Delta_{k_1+1}(v) \le \sum_{j=k_0}^{k_1+1} \int_{I^{(r)}_{k_1+1}} h_{k_1+1,j}(v_j)(s)ds + B_{r,k_1+1}$ при $r = 1, 2$, откуда с учётом (1.11), (2.11_k) при $k = k_0, ..., k_1 + 1$, и (2.2_{k_0}) при $\lambda = 1,\ i = k_1 + 1,\ j = k_0, ..., k_1 + 1$ получим $0 \le \sum_{j=k_0}^{k_1+1} a^{(k_0)}_{k_1+1,j}\Delta_j(v) + B_{r,k_1+1}$. Умножая (2.12_k) на $a^{(k)}_{k_1+1,k}/|a^{(k)}_{k,k}|$ при $k \in \{k_0, ..., k_1\}$ в силу (1.15) получим

$$0 \le -a^{(k)}_{k_1+1,k}\Delta_k(v) + \frac{a^{(k)}_{k,k+1}}{|a^{(k)}_{k,k}|} a^{(k)}_{k_1+1,k}\Delta_{k+1}(v). \qquad (2.16_k)$$ 2.16-k

Складывая предыдущее неравенство и (2.16_{k_0}) с учётом (1.13) при $k = k_0,\ i = k_1 + 1,\ j = k_0 + 1$, (2.11_k) при $k = \overline{k_0 + 1, k_1 + 1}$ и (2.2_{k_0+1}) при $i = k_1+1,\ j \ge k_0+2$ получим $0 \le \sum_{j=k_0+1}^{k_1+1} a^{(k_0+1)}_{k_1+1,j}\Delta_j(v) + B_{r,k_1+1}$. Прибавляя к этому неравенству (2.16_k) поочерёдно при всех $k = k_0 + 1, ..., k_1$ придём к неравенству

$$0 < -a^{(k_1+1)}_{k_1+1,k_1+1}\Delta_{k_1+1}(v) \le B_{r,k_1+1}. \qquad (2.17)$$ 2.17

Аналогично тому, как из (2.15_r) получили неравенства (2.11_{k_0+1}) и (2.12_{k_0}), из (2.17) получим (2.11_{k_1+2}) ((2.11_1) при $k_0 = n - 1$) и (2.12_{k_1+1}).

Из предложений i. и ii. методом математической индукции следует справедливость (2.11_1), (2.11_k) и (2.12_k) $(k = \overline{k_0, n})$.

Пусть решение v задачи $((2.5_i))_{i=1}^n$, (2.6) удовлетворяет условиям

$$v_1 \not\equiv 0, \quad v_i \equiv 0 \quad \text{при} \quad 2 \le i \le n. \qquad (2.18)$$ 2.18

Тогда из (2.5_1) и (2.5_n) следует $v'_1(t) \equiv 0$ и $|g_{0,n}(v_1)(t)| \le h_{n,1}(|v_1|)(t)$. Допустив что $|v_1(t)| > 0$ в виду (2.8) и (2.9) из Леммы 2.3 при $\ell_1 = h_{0,1},\ \ell_2 = g_{0,n}$ следует $mes\{t \in I : |g_{0,n}(v_1)(t)| \ge h_{n,1}(|v_1|)(t)\} > 0$. Что и является противоречием, т.е существует $t_0 \in I$ такое что $v_1(t_0) = 0$, что вместе с условием $v'_1(t) \equiv 0$ противоречит с (2.18). Значит существует $k_0 \in \{2, ..., n\}$ такое что $v_{k_0} \not\equiv 0$. Тем самым соблюдаются неравенства (2.11_k) при $k = 1,\ k_0 \le k \le n$ и (2.12_k) при $k_0 \le k \le n$, т.е. $v_1 \not\equiv Const.$ в виду обозначений (2.13_1), при $t'_1 < t''_1$ (при $t''_1 < t'_1$ рассуждения аналогичны), интегрируя (2.5_1) на $I^{(r)}_1$ с учётом (1.11), (2.6), (2.11_1) получим $0 < -a^{(1)}_{1,1}\Delta_1(v) \le \int_{I^{(r)}_1}(h_{1,2}(|v_2|)(s)ds + (-1)^{r+1}g_{0,1}(v_2)(s))ds$. Пусть $g_{0,1}$ неотрицательный оператор и допустим что v_2 знакопостоянна. Тогда если $(-1)^r v_2(t) \ge 0$, то последнее неравенство противоречит с (2.8). Значит наше допущение неверно и v_2 знакопеременна, т.е соблюдаются неравенства (2.11_2) а также в виду обозначении (2.13_2), $M_2 > 0$, $m_2 > 0$. В таком случае из последнего неравенства в силу леммы 2.2 и условия (2.8) получим $-a^{(1)}_{1,1}\Delta_1(v) - ||h_{1,2}||\Delta_2(v) \le M_2 \int_{I^{(1)}_2} q_1(1)(s)ds$ и $-a^{(1)}_{1,1}\Delta_1(v) - ||h_{1,2}||\Delta_2(v) \le m_2 \int_{I^{(2)}_2} q_1(1)(s)ds$. Перемножив эти неравенства с учётом известного числового неравенства $4AB \le (A + B)^2$ и (1.3) получим $0 \le a^{(1)}_{1,1}\Delta_1(v) + a^{(1)}_{1,2}\Delta_2(v)$. Значит соблюдаются все неравенства (2.12_k) $(k = \overline{1, n})$. С другой стороны из (1.11)–(1.13) и леммы 2.1 ясно, что $a^{(1)}_{1,1} = -1,\ a^{(n)}_{n,1} = a^{(1)}_{n,1},\quad a^{(k)}_{k,k+1} = a^{(1)}_{k,k+1} = ||h_{k,k+1}|| + \frac{1}{4}||q_k||$ при $1 \le k \le n-1$. Перемножив все неравенства (2.12_k) $(k = \overline{1, n})$ с учётом последних равенств получим противоречие с (1.16). Значит наше допущение неверно и $v \equiv 0$. $\square$

lemm 2.5 **Лемма 2.5.** *Пусть соблюдается включение* (1.8)*. Тогда найдётся $\rho_0 \in R_+$ такая что для любых $\delta \in \mathcal{M}_I,\ \zeta \in \mathcal{N}_I$ и любого оператора $g_0 = (g_{0,i})_{i=1}^n$ который удовлетворяет неравенству* (1.5)*, где $g_{0,i} : C(I; R^n) \to L(I; R)$ $(i = \overline{1, n})$ линейные монотонные операторы, каждое решение задачи*

$$|x'(t) - g_0(x)(t)| \le h(|x|)(t) + \delta(t, ||x||_C),\ \ |x(0) - x(\omega)| \le \zeta(||x||_C), \qquad (2.19)$$ 2.19

допускает оценку

$$||x||_C \le \rho_0\Big(\int_0^\omega ||\delta(s, ||x||_C)||ds + ||\zeta(||x||_C)||\Big). \qquad (2.20)$$ 2.20

Доказательство. Пусть лемма неверна. Тогда для любого $k \in N$ и некоторого фиксированного $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^n$ где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, n})$ найдутся линейный оператор $g_k : C(I; R^n) \to L(I, R^n)$, функции $\delta_k \in \mathcal{M}_I$, $\zeta_k \in \mathcal{N}_I$ такие что почти всюду на I

$$p(|x|)(t) \le \sigma g_k(|x|)(t) \le q(|x|)(t), \qquad (2.21)$$ 2.21

при $x \in C(I; R^n)$ и решение x_k задачи

$$
\begin{gathered}
|x_k'(t) - g_k(x_k)(t)| \le h(|x_k|)(t) + \delta_k(t, ||x_k||_C), \\
|x_k(0) - x_k(\omega)| \le \zeta_k(||x_k||_C),
\end{gathered} \tag{2.22}
$$ 2.23

такое что

$$
||x_k||_C > k\Big(\int_0^\omega ||\delta_k(s, ||x_k||_C)||ds + ||\zeta_k(||x_k||_C)||\Big). \tag{2.23}
$$ 2.24

С начало докажем, что из $(g_k)_{k=1}^{+\infty}$ можно выделит подпоследовательность $(g_{k,k})_{k=1}^{+\infty}$ которая сходится к некоторому оператору $g_0 : C(I; R^n) \to L(I; R^n)$, т.е., что

$$
\lim_{k \to +\infty} \int_0^t g_{k,k}(x)(s)ds = \int_0^t g_0(x)(s)ds \qquad \text{равномерно на} \quad I, \tag{2.24}
$$ 2.25

где g_0 такой линейный оператор, что почти всюду на I

$$
p(|x|)(t) \le \sigma g_0(|x|)(t) \le q(|x|)(t), \tag{2.25}
$$ 2.26

при $x \in C(I; R^n)$. Пусть $\{y_1, y_2, ...\} \subset C(I; R^n)$ некоторое всюду плотное множество в $C(I; R^n)$. В виду (2.21) и монотонности оператора q, последовательность $w_k(y_1)(t) = \int_0^t g_k(y_1)(\tau)d\tau$ $(k \in N)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на I. Тогда в силу леммы Арцела-Асколи из $(g_k)_{k=1}^{+\infty}$ можно выделит подпоследовательность $(g_{1,k})_{k=1}^{+\infty}$ такую что $w_{1,k}(y_1)(t) = \int_0^t g_{1,k}(y_1)(\tau)d\tau$ $(k \in N)$ будет равномерно сходиться на I. Аналогично из $(g_{1,k})_{k=1}^{+\infty}$ можно выделит подпоследовательность $(g_{2,k})_{k=1}^{+\infty}$ такую, что последовательность $w_{2,k}(y_2)(t) = \int_0^t g_{2,k}(y_2)(\tau)d\tau$ $(k \in N)$ будет равномерно сходиться на I. Продолжив этот процесс бесконечно, получим систему последовательностей $(g_{i,k})_{k=1}^{+\infty}$ $(i \in N)$ такую, что при любых $i, j \in N$ и $j \ge i$, $(g_{j,k})_{k=1}^{+\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $(g_{i,k})_{k=1}^{+\infty}$, причём $w_{j,k}(y_i)(t) = \int_0^t g_{j,k}(y_i)(\tau)d\tau$ $(k \in N)$ равномерно сходиться на I. Рассмотрим последовательность $(g_{k,k})_{k=1}^{+\infty}$. Очевидно, что при каждом $i \in N$ соответствующая последовательность $(w_{k,k}(y_i))_{k=1}^{+\infty}$ является равномерно сходящей. С другой стороны, в силу (2.21) имеем $||w_{k,k}(y)(t) - w_{k,k}(y)(s)|| \le ||y||_C \int_s^t ||q(e)(\tau)||d\tau$ при $0 \le s \le t \le \omega$, если $e = (e_i)_{i=1}^n$ где $e_i = 1$, $(i = \overline{1,n})$. По этому в силу теоремы Банаха- Штейнхауса ([5], гл. VII, §1, теорема 3), существует такой оператор $w_0 : C(I; R^n) \to C(I; R^n)$, что

$$
\lim_{k \to +\infty} w_{k,k}(y)(t) = w_0(y)(t) \qquad \text{равномерно на} \quad I. \tag{2.26}
$$ 2.28

Из последних двух выражений ясно, что $||w_0(y)(t) - w_0(y)(s)|| \le ||y||_C \times \times \int_s^t ||q(e)(\tau)||d\tau$, при $0 \le s \le t \le \omega$, т.е. для любого $y \in C(I; R^n)$ векторная функция $w_0(y) : I \to R^n$ абсолютно непрерывна и $w_0(y)(t) = \int_0^t g_0(y)(s)ds$ где $g_0(y)(t) = \frac{d}{dt}[w_0(y)(t)]$. Отсюда следует линейность оператора g_0. Также в силу (2.26) соблюдается (2.24) и поэтому не ограничивая общность можем допустит, что

$$
\lim_{k \to +\infty} \int_0^t g_k(x)(s)ds = \int_0^t g_0(x)(s)ds \qquad \text{равномерно на} \quad I. \tag{2.27}
$$ 2.29

Интегрируя (2.21) от s до t при $t > s$, разделив на $t - s$ и переходя к пределу при $k \to +\infty$ а потом уже при $s \to t$ в силу (2.27) удостоверимся в справедливости (2.25). Также из условия (2.25) следует, что $g_{0,i}$ $(i = \overline{1,n})$ линейные монотонные операторы и значит g_0 удовлетворяет неравенствам (1.5).

Положим теперь $z_k(t) = x_k(t)||x_k||_C^{-1}$, $\tilde{\delta}_k(t, ||x_k||_C) = \delta_k(t, ||x_k||_C)||x_k||_C^{-1}$, $\tilde{\zeta}_k(||x_k||_C) = \zeta_k(||x_k||_C)||x_k||_C^{-1}$. Тогда

$$
||z_k||_C = 1. \tag{2.28}
$$ 2.30

С другой стороны из (2.22) и (2.23) имеем

$$
|z_k'(t) - g_k(z_k)(t)| \le h(|z_k|)(t) + \tilde{\delta}_k(t, ||x_k||_C), |z_k(0) - z_k(\omega)| \le \tilde{\zeta}_k(||x_k||_C), \tag{2.29}
$$ 2.31

$$
\int_0^\omega ||\tilde{\delta}_k(s, ||x_k||_C)||ds \le 1/k, \quad ||\tilde{\zeta}_k(||x_k||_C)|| \le 1/k. \tag{2.30}
$$ 2.32

С учётом (2.21), (2.28) и (2.30) из (2.29) получим

$$|z_k(t) - z_k(s) - \int\limits_s^t g_k(z_k)(\tau)d\tau| < \int\limits_s^t h(|z_k|)(\tau)d\tau + \int\limits_s^t \tilde{\delta}_k(\tau, ||x_k||_C)d\tau. \qquad (2.31) \quad \boxed{2.33}$$

и $||z_k(t) - z_k(s)|| \leq 1/k + \int_s^t \alpha(\tau)d\tau$ где $\alpha(t) = ||q(e)(t)|| + ||h(e)(t)||$. Тогда последовательность $(z_k)_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и по лемме Арцела-Асколи без ограничения общности, её можем считать равномерно сходящей. Пусть $v(t) = \lim_{k\to+\infty} z_k(t)$. Тогда в силу (2.21) и (2.28) получим что

$$||v||_C = 1, \qquad (2.32) \quad \boxed{2.34}$$

и $|| \int_s^t (g_k(z_k)(\tau) - g_0(z_k)(\tau))d\tau|| \leq \int_s^t ||g_k(z_k - v)(\tau)||d\tau + || \int_s^t (g_k(v)(\tau) - g_0(v)(\tau))d\tau|| \leq ||q(e)||_L ||z_k - v||_L + || \int_s^t g_k(v)(\tau) - g_0(v)(\tau))d\tau||$ при $0 \leq s \leq t \leq \omega$. Отсюудо на основе (2.27) получим $\lim_{k\to+\infty} \int_s^t g_k(z_k)(\tau)d\tau = \int_s^t g_0(v)(\tau)d\tau$ при $0 \leq s \leq t \leq \omega$. С учётом последнего неравенства, (2.29) и (2.30) из (2.31) следует что v удовлетворяет неравенству $|v(t) - v(s) - \int_s^t g_0(v)(\tau)d\tau| < \int_s^t h(|v|)(\tau)d\tau$ при $0 \leq s \leq t \leq \omega$ и условиям (1.4). Из последнего неравенства ясно, что $v : I \to R^n$ абсолютно непрерывная векторная функция. А также разделив оба её части на $t - s$ и перейдя к пределу при $s \to t$, получим, что почти всюду на I соблюдается неравенство (1.3), т.е v является решением задачи (1.3),(1.4). Тогда в виду включения (1.8) имеем $v \equiv 0$, что противоречит с (2.32). Полученное противоречие доказывает лемму. □

3 Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим задачу

$$|x'(t) - g(x,x)(t)| \leq h(|x|)(t) + \delta(t, ||x||_C), \;\; |x(0) - x(\omega)| \leq \zeta(||x||_C) \qquad (3.1) \quad \boxed{3.1}$$

и заметим, что в силу определении множеств $\mathcal{M}_I, \mathcal{N}_I$ и условий $\delta \in \mathcal{M}_I$, $\zeta \in \mathcal{N}_I$ существует $\rho^* > 0$ такая, что

$$\rho_0\Big(||\zeta(\rho)||_C + \int_0^\omega ||\delta(s,\rho)||ds\Big) < \rho \qquad \text{при} \quad \rho \geq \rho^*, \qquad (3.2) \quad \boxed{3.2}$$

где ρ_0 константа упомянутая в лемме 2.5. Допустим, что x является решением задачи (3.1). Тогда если введём обозначение $g_0(z)(t) = g(x,z)(t)$ в виду условии (1.7) и (1.8) соблюдаются все требования леммы 2.5, откуда с учётом (3.2) следует оценка

$$||x||_C \leq \rho^*. \qquad (3.3) \quad \boxed{3.3}$$

Пусть

$$\sigma(\rho)(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; 0 \leq \rho \leq \rho^* \\ 2 - \rho/\rho^* & \text{при} \;\; \rho^* < \rho < 2\rho^* \\ 0 & \text{при} \;\; \rho \geq 2\rho^* \end{cases}. \qquad (3.4) \quad \boxed{3.4}$$

Для любого $x \in C(I;R^n)$ положим $\tilde{F}(x)(t) = \sigma(||x||_C)(F(x)(t) - g(x,x)(t))$ и рассмотрим задачу

$$y'(t) = g(x,y)(t) + \tilde{F}(x)(t), \;\; y(0) - y(\omega) = \zeta(||x||_C). \qquad (3.5) \quad \boxed{3.5}$$

Согласно условиям (1.7) и (1.8) однородная задача $y'(t) = g(x,y)(t), \;\; y(0) - y(\omega) = 0$ имеет только тривиальное решение и $||g(x,y)(t)|| \leq ||y||_C ||q(e)(t)||$, что по теореме 1.1 работы [4] гарантирует однозначную разрешимость задачи (3.5). Пусть $\Omega : C(I;R^n) \to C(I;R^n)$ оператор который каждому $x \in C(I;R^n)$ ставит в соответствие y, решение задачи (3.5). в силу следствия 1.6 работы [4], Ω является непрерывным оператором. С другой стороны в силу (1.6) и (3.4) получим оценки

$$|\tilde{F}(x)(t)| \leq h(|x|)(t) + \delta(t, ||x||_c) \;\; \text{и} \;\; |\tilde{F}(x)(t)| \leq \eta(t) \qquad (3.6) \quad \boxed{3.6}$$

где $\eta(t) = 2\rho^* h(e)(t) + \delta(t, 2\rho^*)$. Отсюда Ясно, что при любом $x \in C(I;R^n)$ векторная функция $y(t) = \Omega(x)(t)$ удовлетворяет неравенствам $|y'(t) - g(x,y)(t)| \leq h(|x|)(t) + \delta(t, ||x||_C), \;\; |y(0) - y(\omega)| \leq$

$\zeta(||x||_C)$. Тогда в силу леммы 2.5 при $g_0(z)(t) = g(x,z)(t)$ следует справедливость оценки (2.20) и в виду условий $\delta \in \mathcal{M}_I$, $\zeta \in \mathcal{N}_I$ найдётся постоянная $\rho_1 > 0$ такая, что $||x||_C \le \rho_1$. С другой стороны в виду (1.7), (3.4) и (3.6) из (3.5) получим оценку $||\Omega(y)(t) - \Omega(y)(s)|| \le \int_s^t \alpha(\tau)d\tau$ где $\alpha(t) = 2\rho^*||q(e)(t)|| + \eta(t)$. Следовательно, оператор Ω преобразует шар $C_{\rho_1} = \{x \in C(I;R^n) : ||x||_C \le \rho_1\}$в свое же компактное подмножество. Поэтому, по теореме Шаудера, найдётся $x \in C_{\rho_1}$ такая, что $x(t) = \Omega(x)(t)$ при $t \in I$. Значит x является решением задачи

$$x'(t) = g(x,x)(t) + \tilde{F}(x)(t), \quad x(0) - x(\omega) = \zeta(||x||_C). \tag{3.7}$$ 3.7

Но в таком случае в виду (3.6), x будет также решением задачи (3.1). Поэтому справедлива оценка (3.3). Тогда в силу (3.4) и определения оператора $\tilde{F}$, из (3.7) следует что $u = x$ является решением задачи (1.1),(1.2). □

Доказательство следствия 1.1. Пусть $g(x,y) = (g_i(x,y))_{i=1}^n$. Тогда в виду обозначении (2.7) из (1.9) и (1.10) следует справедливость уславий (1.6), (1.7). А также в силу леммы 2.4 из (1.10)-(1.16) следует справедливость включения (1.8). Значит соблюдены все требования Теоремы 1.1. Откуда и вытекает справедливость нашего следствия. □

Доказательство следствия 1.2. Пусть

$$\begin{gathered} h_{1,j} \equiv 0 \ \text{ при } \ j \ne 2, \ \ h_{i,j} \equiv 0 \ \text{ при } \ j \notin \{i, i+1\}, \ i = \overline{2, n-1}, \ \ h_{n,j} = 0 \ \text{ при } \ j = \overline{2, n-1}, \\ h_{i,i}(x)(t) \equiv h_{i,i}(t)x(\tau_{i,i}(t)) \ \text{ при } \ i = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{3.8}$$ 3.9a

и $g_i(x,y)(t) = p_{i,i+1}(x,y)(t)y(\tau_{i,i+1}(t))$, $q_i(y)(t) = q_{i,0}(t)y(\tau_{i,i}(t))$ при $x \in (C(I,R))^n$, $y \in C(I,R)$. С учётом введённых обозначений ясно, что из условия (1.18) следует справедливость (1.9), (1.10) и (1.14). С другой стороны ясно, что из (1.11), (1.12) и (3.8) получим

$$a_{k,k}^{(k-1)} = a_{k,k}^{(k-2)} = ... = a_{k,k}^{(1)} = ||h_{k,k}|| - 1 \quad \text{for} \quad 2 \le k \le n, \tag{3.9}$$ 3.8

и

$$a_{k,k-i}^{(k-i-1)} = a_{k,k-i}^{(k-i-2)} = ... = a_{k,k-i}^{(1)} = 0 \quad \text{for} \quad 3 \le k-i \le n, \ \ a_{2,1}^{(1)} = 0. \tag{3.10}$$ 3.9

Так же из (1.13), (3.8) и (3.10) следует

$$a_{k,k-1}^{(k-1)} = \frac{a_{k-2,k-1}^{(k-2)}}{|a_{k-2,k-2}^{(k-2)}|} a_{k,k-2}^{(k-2)} = \frac{a_{k-2,k-1}^{(k-2)}}{|a_{k-2,k-2}^{(k-2)}|} \frac{a_{k-3,k-2}^{(k-3)}}{|a_{k-3,k-3}^{(k-3)}|} a_{k,k-3}^{(k-3)} = ... = a_{k,2}^{(2)} \prod_{j=2}^{k-2} \frac{a_{j,j+1}^{(j)}}{|a_{j,j}^{(j)}|} = 0 \tag{3.11}$$ 3.10

при $k \ge 3$. Из равенств (3.10) и (3.11) ясно

$$a_{k,k-1}^{(k-1)} = 0 \qquad \text{при} \qquad 2 \le k \le n \tag{3.12}$$ 3.11

В таком случае из (1.13) с учетом (3.8) и (3.12) следует $a_{k,k}^{(k)} = a_{k,k}^{(k-1)} + a_{k-1,k}^{(k-1)} a_{k,k-1}^{(k-1)} / |a_{k-1,k-1}^{(k-1)}| = ||h_{k,k}|| - 1$. С учётом этого, ясно, что из (1.19) и (1.20) следует справедливость условий (1.15) и (1.16). Тем самым, для системы (1.17) соблюдаются все условия Следствия 1.1. □

Доказательство следствия 1.3. Переписав уравнение (1.21) в виде двумерной системы и вводя обозначения $q_{1,0} \equiv p_{1,2} \equiv 1$, $\tau_{1,2}(t) \equiv t$, $\tau_{2,1}(t) \equiv \tau(t)$, $q \equiv q_{2,0}$, $p_{2,1}(x,y)(t) \equiv p(x,y)(t)$, $q \equiv q_{2,0}$, $p_{i,i} \equiv 0$ $(i = 1,2)$, удостоверимся, что из требований Следствия 1.3, следует справедливость условий Следствия 1.2 при $n = 2$. □

Список литературы

1 [1] Conti R.// *Math. Nachr. 1961. Vol.23, No 3. P. 161-178.*

2 [2] Opial Z.// *J. Differential Equations. 1967. Vol. 3, No 4. P. 580-594.*

3 [3] Кигурадзе И.Т., Пужа Б.// *Дифференциальные уравнения.1997. Т.33, No 2, 185-194.*

4 [4] Kiguradze I., Puza B.//*Czechoslovak Math. J. 1997. Vol. 47, No 2. P. 341-373.*

5 [5] Канторовоч Л. В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ. Москва. Наука. 1977.*

6 [6] Mukhigulashvili S.// *Arch. Math. 2006, Vol. 87, P. 255-260.*

7 [7] Mukhigulashvili S.// *Italian J. of Pure and Appl. Math. 2006. No 20. P. 29-50.*

С. Мухигулашвили
Математический институт АН Чешской республики, Ул. Жижкова 22, 616 62 Брно, Чешская республика.

E-mail: mukhig@ipm.cz

Работа поддержана грантом:
Грант грантового агентства Чешской республики No.201/06/0254.